Realni brojevi

Kokanović, Karlo

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Karlo Kokanović

Realni brojevi

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Karlo Kokanović

Realni brojevi

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2022.

Sadržaj

1. Uvod **1**

2. Racionalni i iracionalni brojevi **4**

2.1 Zapis racionalnog broja 4

2.2 Zapis iracionalnog broja 6

3. Metode ispitivanja iracionalnosti brojeva **9**

3.1 Dokazi iracionalnosti kvadratnih korijena 9

3.2 Logaritmi i iracionalnost 13

3.3 Iracionalnost nultočki polinoma 15

4. Školske aktivnosti **20**

4.1 Aktivnost decimalni broj- razlomak 20

4.2 Aktivnost decimalni zapis racionalnog broja 25

4.3 Aktivnost beskonačni decimalni zapis 30

4.4 Aktivnost iracionalni brojevi 32

5. Zaključak **34**

Sažetak **35**

Summary **36**

Literatura **37**

1. Uvod

U ovom poglavlju ukratko ćemo reći o skupu realnih brojevima. Navesti njihovu podjelu i svojstva. [2]

Prvi skup koji ćemo definirati je skup prirodnih brojeva. U djelu *Uvod u aritmetiku* grčkog matematičara Nikomaha prvi puta se spominje naziv prirodni brojevi. Stari Egipćani i Babilonci su također poznavali prirodne brojeve. Egipćani su prirodne brojeve podjelili na parne ili *take*, te neparne ili *lihe*. Prirodnim brojevima zovemo pozitivne cijele brojeve. Skup prirodnih brojeva označavamo s $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$={1,2,3,...,n,n+1,...}. Skup $\mathbb{N}_0$ je skup kojemu su članovi svi prirodni brojevi i broj 0, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Svaki prirodan broj ima svoj sljedbenik. Naprimjer sljedbenik broja 2 je broj 3, a sljedbenik broja 23 je broj 24. Općenito sljedbenik prirodnog broja n je broj $n+1$. Također, svaki prirodni broj osim 1, ima svog prethodnika. Prethodnik broja 4 je broj 3, a broja 25 broj 24. Prethodnik prirodnog broja n je broj $n-1$. Prirodne brojeve često dijelimo na parne i neparne. Neparni brojevi su 1, 3, 5..., a parni 2, 4, 6, 8, 10... . Općenito neparni su brojevi oblika $2n-1$, a parni oblika $2n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Skup prirodnih brojeva zatvoren je obzirom na operacije zbrajanja i množenja. To znači da je moguće zbrajati i množiti dva pirodna broja i kao rezultat se opet dobije prirodan broj.

Sada ćemo navesti neke od svojstava prirodnih brojeva za zbrajanje i množenje. Prvo svojstvo je svojstvo komutativnosti zbrajanja. Zbrajanje je komutativno, tj. za svaka dva prirodna broja vrijedi:

$$a+b=b+a \quad a,b \in \mathbb{N}.$$

Drugo svojstvo je svojstvo asocijatvnosti. Za svaka tri prirodna broja vrijedi:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad a,b,c \in \mathbb{N}.$$

Za množenje su karakteristična ista dva svojstva kao i za zbrajanje, te distributivnost množenja prema zbrajanju i neutralni element za množenje. Svojstvo komutativnosti kaže da je množenje komutativno, tj. za svaka dva prirodna broja vrijedi:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad a,b \in \mathbb{N}.$$

Zatim svojstvo asocijativnosti množenja:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad a,b,c \in \mathbb{N}.$$

Neutralni element za množenje je broj 1, te vrijedi:

$$a \cdot 1 = a \quad a \in \mathbb{N}.$$

Posljednje svojstvo je svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju. Za svaka tri prirodna broja vrijedi:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad a,b,c \in \mathbb{N}.$$

Bitno je još dodati da je talijanski matematičar Giuseppe Peano opisao prirodne brojeve pomoću aksioma.

(P1) $1 \in \mathbb{N}$

(P2) ako je $n \in \mathbb{N}$, onda je $s(n) \in \mathbb{N}$

(P3) ako je $n \in \mathbb{N}$, onda je $s(n) \neq 0$

(P4) ako je $s(m) = s(n)$, onda je $m = n$ za brojeve $m, n \in \mathbb{N}$

(P5) ako je $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{N}$ i ako vrijedi: $1 \in \mathbf{M}$ i ako za $n \in \mathbf{M}$ slijedi $s(n) \in \mathbf{M}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ onda je $\mathbf{M} = \mathbb{N}$

Cijeli brojevi su nastali iz razloga što je oduzimanje bilo neizvedivo u skupu prirodnih brojeva. Negativni brojevi se prvi puta pojavljuju u Kini u djelu *Matematika u devet knjiga.* O negativnim brojevima u Europi se počinje govoriti tek u 13. stoljeću kada je, talijanski trgovac i matematičar Fibonacci, u svojoj knjizi *Knjiga o abaku* rješavajući sustav jednadžbi zaključio da je on nerješiv, jer je jedno rješenje dug(negativan broj). U 17. stoljeću Decartes smješta negativne brojeve lijevo od 0 na brojevnom pravcu, te je to omogućilo lakše usvajanje pojma negativnih brojeva. [4]

Skup cijelih brojeva smo definriali kao proširenje skupa prirodnih brojeva s elementima koji su njima suprotni i s neutralnim elementom za zbrajanje, tj. 0.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Svaki cijeli broj možemo prikazati kao razliku $a - b$ gdje su $a, b \in \mathbb{N}$. Iz ovoga se vidi da cijele brojeve treba promatrati kao uređene parove (a,b). Drugi uređen par (c,d) može opisati isti broj $a - b = c - d$ ako i samo ako vrijedi $a + d = b + c$. Za cijele brojeve vrijedi:

1. $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$
2. $(a - b)(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$

Definirajmo sada skup cijelih brojeva pomoću relacije ekvivalencije $\sim$ na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Definicija 1.1. *Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirana s*

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ ako i samo ako je } a + d = b + c.$$

Skupom cijelih brojeva nazivamo skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ [2].

Zbrajanje i množenje možemo također definirati i na skupu cijelih brojeva. Na sljedeći način:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac + bd, ad + bc)$$

Svojstva koja vrijede u skupu prirodnih brojeva vrijede i u skupu cijelih brojeva. Dakle vrijedi asocijativnost,komutativnost i distributivnost. Dodatno, skup cijelih brojeva sadrži 0 koja je neutralni element za zbrajanje i vrijedi:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

0 je jedini element s ovim svojstvom za svaki $a \in \mathbb{Z}$. Kao i kod prirodnih brojeva 1 je neutralni element za množenje. U skupu cijelih brojeva imamo inverzni element za zbrajanje. Cijeli broj b je inverz broja a, ako vrijedi:

$$a + b = b + a = 0$$

Element b nazivamo suprotnim ili inverznim elementom elementa a, on je jedinstveno određen i označavamo ga s $-b$. Kod množenja ne postoji suprotni element jer djeljenje nije definirano u skupu $\mathbb{Z}$.

Prije razvoja cijelih brojeva, razvili su se pozitivni racionalni brojevi još u doba staroperzijske matematike. Stari Egipćani su razradili poseban sustav računanja s razlomcima koji su recipročne vrijednosti prirodnih brojeva. Racionalan broj je broj oblika $\frac{m}{n}$, gdje je m cijeli, a n prirodan broj. Skup svih racionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{Q}$. Sva svojstva koja vrijede za skup cijelih brojeva vrijede i za skup racionalnih brojeva. Dakle, vrijede svojstva komutativnosti, asocijativnosti, distributivnosti za zbrajanje i množenje, neutralni element za zbrajanje i množenje, te suprotni element za zbrajanje. Ono što je novo to je inverzni element za množenje vrijedi:

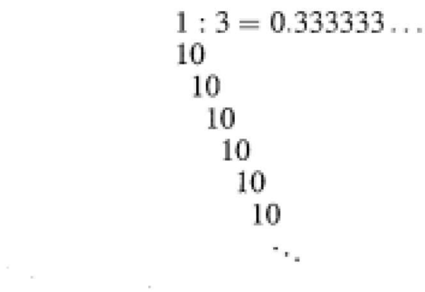
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x \quad x, x^{-1} \in \mathbb{Q}$$

Osim racionalnih skup realnih brojeva sadrži i iracionalne brojeve $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Osim toga $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Skup iracionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{I}$. Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomka, gdje je brojnik cijeli, a nazivnik prirodan broj. To su decimalni brojevi koji imaju beskonačan neperiodičan zapis, npr.: $0.1234567891011121\ldots$. Svaki iracionalan broj možemo aproksimirati racionalnim brojem s unaprijed zadanom točnošću. Kako ćemo u nastavku rada dosta govoriti o iracionalnim brojevima reći ćemo nešto opširije o povijesti iracionalnih brojeva. Prvi dokazi iracionalnosti pripisuju se pitagorejcima koji su ih najvjerojatnije otkrili prilikom proučavanja svojstava pentagrama. Hippasus je promatrao pravokutni trokut kateta duljine 1 i hipotenuze $\sqrt{2}$ i pokušavao dokazati da je duljina hipotenuze racionaln broj, no dokazao je suprotno. Jedna od legendi kaže da je on do svog otkrića došao na moru prilikom plovidbe i da su ga njegovi kolege zbog toga bacili preko palube u more. Grčki matematičari su taj rezultat smatrali izvan razuma, iracionalnim, otuda dolazi i naziv tih brojeva. Kasnije su još neki Grčki matematičari dolazili do sličnih otkrića, ali i drugih koji su izgradili iracionalne brojeve. Tako je primjerice Theodorus iz Cirene računao korijene prirodnih brojeva do 17.

2. Racionalni i iracionalni brojevi

2.1 Zapis racionalnog broja

Proširivanjem pozicijskog dekadskog zapisa broja na racionalne brojeve nastaje prikaz kojeg nazivamo decimalni prikaz racionalnog broja. Tako primjerice broj $\frac{1}{4}$ ima decimalni prikaz 0.25, broj $\frac{1}{8}$ ima decimalni prikaz 0.125, broj $\frac{1}{1000}$ ima decimalni prikaz 0.001 itd. Jasno nam je iz osnovno školske matematike da ove prikaze dobivamo dijeljenjem brojnika s nazivnikom. No, što kada imamo primjerice broj $\frac{1}{3}$? Njegov decimalni prikaz nije konačan. Dijeleći brojnik s nazivnikom dobivamo za međurezultate dijeljenja brojeve 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333 itd.



Slika 1: Rezultat dijeljenja

Ovaj rezultat nam opravdava zapis $\frac{1}{3} = 0.3333...$, u kojem se trojke ponavaljaju beskonačno puta. U ovakvom zapisu koristimo još i oblik $0.\dot{3}$, točka iznad broja nam govori o ponavljanju znamenke 3. Prikaz beskonačnog decimalnog broja sa znamenkama koje se ponavljaju često zna biti puno složeniji nego što je to bio slučaj u prethodnom primjeru.

Pogledajmo primjerice broj $\frac{1}{7}$ njegov prikaz je:

$$\tfrac{1}{7} = 0.142857142857142857... = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

ovdje se ponavlja skupina od šest znamenaka, te stoga kažemo da ovaj decimalni prikaz ima period duljine 6, a period počinje neposredno iza decimalne točke. Točku uvijek stavljamo na početnu i završnu znamenku perioda. Tada takav broj nazivamo čisto periodički decimalni broj.

Period ne mora uvijek počinjati neposredno nakon decimalne točke, pogledajmo sljedeći primjer:

$$\tfrac{37}{14} = 2.64285714285714 28... = 2.6\dot{4}2857\dot{1}$$

za ovakav broj kažemo da ima mješovito periodični decimalni prikaz.
Opći oblik takva prikaza je:

$$x = a_k \cdots a_0 . b_1 \cdots b_r \dot{c}_1 \cdots \dot{c}_p \tag{1}$$

dio od a_k do a_0 nazivamo cjelobrojni dio, dio od b_1 do b_r predperiod, a dio od c_1 do c_p nazivamo period.

Sada ćemo nešto reći o kriteriju konačnosti decimalnog prikaza.

Teorem 2.1. *Decimalni prikaz racionalnog broja konačan je onda i samo onda, ako su 2 ili 5 (ili oba) jedini prosti faktori nazivnika. Decimalni prikaz svih ostalih racionalnih brojeva s nazivnikom većim od 1 je periodičan.*

Dokaz. Neka su m i n relativno prosti brojevi. Ako $\frac{m}{n}$ ima konačan decimalni prikaz, recimo:

$$\tfrac{m}{n} = a_k \cdots a_0.b_1 b_2 \cdots b_r$$

tada množenjem s 10^r desna strana postaje cjelobrojna:

$$\tfrac{10^r \cdot m}{n} = a_k \cdots a_1 b_1 b_2 \cdots b_r$$

stoga, to znači da je broj 10^r djeljiv s n(jer su m i n relativno prosti). To je moguće onda i samo onda, ako su 2 i 5 jedini mogući prosti djelitelji broja n. Dakle, nazivnik mora biti oblika:

$$n=2^k \cdot 5^l$$

pri čemu su k i l prirodni brojevi ili je neki od njih jednak 0. [3] □

Stoga su primjerice brojevi: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{5^n}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{80}$ i njima slični, brojevi koji imaju konačan decimalni prikaz pri čemu brojnik može biti bilo koji drugi cijeli broj.
Zaključujemo da svaki racionalan broj ima konačan ili beskonačan periodičan decimalni prikaz. Možemo se pitati vrijedi li i obrnuto? Da li svakom periodičnom decimalnom broju odgovara racionalan broj? Odgovor je potvrdan. Evo i primjera koji to dokazuje.
Pogledajmo slučaj kada je prikaz čisto periodičan:

$$x = 0.\dot{c}_1 \cdots \dot{c}_p$$
$$10^p x = c_1 \cdots c_p.\dot{c}_1 \cdots \dot{c}_p$$

Razlika je ovih dvaju brojeva cjelobrojna jer se dio iza decimalne točke podudara:

$$10^p x - x = c_1 \cdots c_p \tag{2}$$

odatle slijedi:

$$x = \frac{c_1 \cdots c_p}{10^p - 1} = \frac{c_1 \cdots c_p}{99 \cdots 9} \tag{3}$$

Pogledajmo nekoliko primjera koji ilustriraju formulu (3). Uvrštavanjem u formulu (3) dobivamo:

Primjer 2.1. $0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Primjer 2.2. $0.\dot{1}\dot{2} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

Primjer 2.3. $0.\dot{2}0\dot{5} = \frac{205}{999}$

Promotrimo sada opći slučaj:

$$x = a_k \cdots a_1.b_1 \cdots b_r \dot{c}_1 \cdots \dot{c}_p$$

iz ovoga broja izdvojit ćemo cjelobrojni dio i pretperiod, koji predstavljaju konačan decimalan broj i nakon toga iskoristiti gore opisani specijalni slučaj:

$$x = \frac{a_k \cdots a_0 b_1 \cdots b_r}{10^r} + \frac{0.\dot{c}_1 \cdots \dot{c}_r}{10^r} = \frac{a_k \cdots a_0 b_1 \cdots b_r}{10^r} + \frac{c_1 \cdots c_p}{10^r(10^p - 1)}$$

$$= \frac{a_k \cdots a_0 b_1 \cdots b_p \cdot 99 \cdots 9 + c_1 \cdots c_p}{99 \cdots 900 \cdots 0} \tag{4}$$

Gledajući dani opći slučaj jasno se dolazi do zaključka da svaki periodičan decimalni zapis odgovara racionalnom broju. Promotrimo nekoliko primjera dobivenih korištenjem obrata:

Primjer 2.4. $2.\dot{0}7\dot{4} = \frac{2 \cdot 999 + 74}{999} = \frac{2072}{999} = \frac{56}{27}$

Primjer 2.5. $2.91\dot{6} = \frac{291 \cdot 9 + 6}{900} = \frac{2625}{900} = \frac{35}{12}$

Primjer 2.6. $12.15\dot{7}4\dot{0} = \frac{1215 \cdot 999 + 740}{99900} = \frac{1214525}{99900} = \frac{48581}{3996} = \frac{1313}{108}$

2.2 Zapis iracionalnog broja

Često se pitamo kako dobivamo iracionalne brojeve. To ćemo najbolje pokazati na primjeru duljine dijagonale jediničnog kvadrata. Duljina dijagonale jediničnog kvadrata jednaka je $\sqrt{2}$. Znamo da ona nije sumjerljiva s njegovom stranicom. Stoga postupkom mjerenja ne možemo odrediti točnu vrijednost njezine duljine (uzimajući za jedinicu mjere stranicu kvadrata), međutim možemo ju izmjeriti s točnošću koju unaprijed propišemo. Drugim riječima iako je duljina dijagonale iracionalan broj, mi možemo odrediti racionalan broj koji je po volji blizak tom broju. Opišimo takav postupak mjerenja.

Neka je x duljina dijagonale kvadrata. Radi jednostavnosti opisa pretpostavimo da je stranica kvadrata duga jedan metar. Nanosimo jedinične dužine dok ne premašimo duljinu dijagonale. Jasno je da možemo uzeti jediničnu dužinu samo jednom.

Zato je:

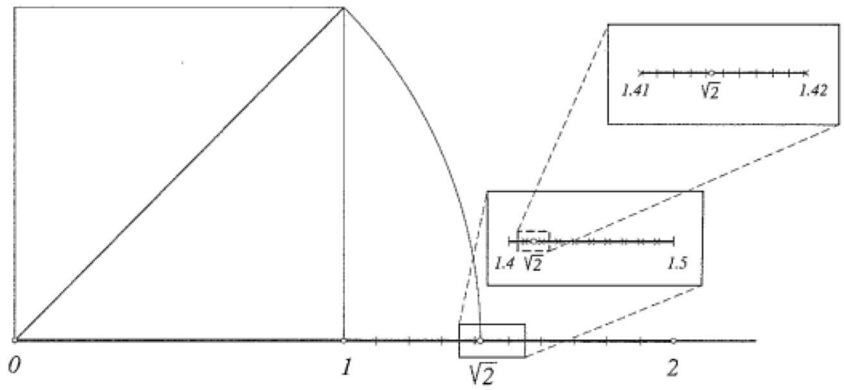
$$1 < x < 2, \qquad x = 1, \ldots, m.$$

U sljedećem koraku smanjimo jedinicu mjere 10 puta, tako da mjerimo u decimetrima. Iza već izmjerenog dijela nastavljamo mjeriti s manjim dužinama, ponovo dok ne premašimo duljinu dijagonale. Upotrijebit ćemo četiri dužine duljine jednog decimetra:

$$1.4 < x < 1.5, \qquad x = 1.4, \ldots, m.$$

U sljedećem koraku ponovo smanjimo jedinicu mjere 10 puta, tako da u nastavku mjerimo u centimetrima:

$$1.41 < x < 1.42, \qquad x = 1.41, \ldots, m.$$



Slika 2: Postupak mjerenja nesumjerljivih dužina [3]

Očito ovaj postupak možemo napraviti po volji dugo on se nikada neće završiti, jer bi to značilo da je duljina dijagonale konačan decimalan broj, dakle racionalan broj.
Sada se postavlja pitanje kako izračunati decimale broja $\sqrt{2}$, odredit ćemo ih probom. Tražimo niz decimalnih brojeva kojima će kvadrat biti manji od 2. Brojeve pritom biramo tako da svaki sljedeći ima jednu decimalu više i da budu najveći s traženim svojstvom.

$$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4 \qquad x_1 = 1$$

$$1.4^2 = 1.96 < 2 < 1.5^2 = 2.25 \qquad x_2 = 1.4$$

$$1.41^2 = 1.9881 < 2 < 1.42^2 = 2.0164 \qquad x_3 = 1.41$$

$$1.414^2 \approx 1.9993 < 2 < 1.415^2 = 2.0022 \qquad x_4 = 1.414$$

Dobili smo prve tri decimale broja $\sqrt{2}$.
U svakom koraku možemo procijeniti udaljenost broja $\sqrt{2}$ i njegove aproksimacije konačnim decimalnim brojem. Kako svaka sljedeća aproksimacija ima jednu točnu znamenku više, vrijedi primjerice:

$$|\sqrt{2} - 1.41| < 0.01, \quad |\sqrt{2} - 1.414| < 0.001 \quad |\sqrt{2} - 1.4142| < 0.0001, ...$$

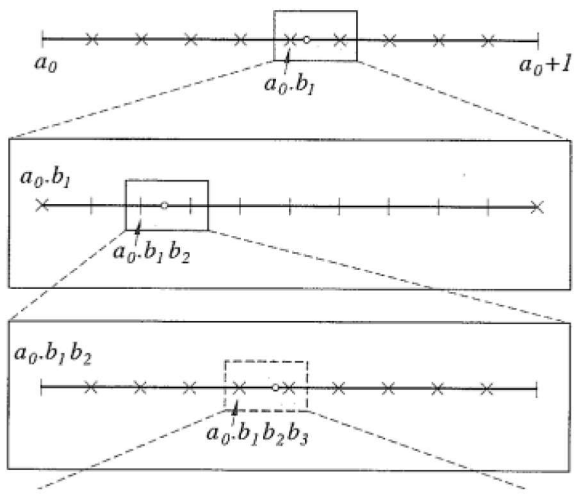
Svakim novim korakom dobivamo jednu novu znamenku broja $\sqrt{2}$, zato očekujemo na kraju prikaz oblika:

$$\sqrt{2} = a_0.b_1b_2b_3...$$

to je decimalni prikaz iracionalnog broja $\sqrt{2}$.
Potpuno isti algoritam možemo zamisliti za bilo koji drugi realan broj x. Pronađemo interval s cjelobrojnim krajevima koji ga sadrži:

$$a_0 \leq x < a_0' = a_0 + 1, \quad tj. \quad x \in [a_0, a_0 + 1\rangle$$

Broj a_0 je najveći cijeli dio broja x. Ukoliko se x ne podudara s a_0, nastavljamo postupak. Mjerimo s desetinom jediničnog intervala (Slika 3.).



Slika 3: Postupak mjerenja [3]

Neka je a_1 najveći takav broj manji od x:

$$a_1 \leq x < a_1' = a_1 + 0.1, \quad \text{tj.} \quad x \in [a_1, a_1 + 0.1\rangle$$

Broj a_1 je decimalni broj oblika $a_1 = a_0.b_1$ i vrijedi $x \approx a_0.b_1$. Time je određena jedna decimala broja x.

Za sljedeću aproksimaciju smanjimo jediničnu dužinu deset puta:

$$a_2 \leq x < a_2' = a_2 + 0.01, \quad \text{tj.} \quad x \in [a_2, a_2 + 0.01\rangle$$

i vrijedi $x \approx a_2 = a_0.b_1b_2$. Time smo broj x odredili s točnošću od dvije decimale.

Čitav postupak možemo opisati ovako: broj x uklopljen je unutar padajućih intervala:

$$[a_0, a_0 + 1], \quad [a_1, a_1 + 0.1], \quad [a_2, a_2 + 0.01], \quad [a_3, a_3 + 0.001], ...$$

koji opisuju sve bolje njegove aproksimacije:

$$a_0, \quad a_0.b_1, \quad a_0.b_1b_2, \quad a_0.b_1b_2b_3, ...$$

Na koncu postupka realni broj x se prikazuje u obliku decimalnog broja:

$$x = a_0.b_1b_2b_3 \cdots b_n \cdots$$

ako je prikaz konačan ili periodičan tada je riječ o decimalnom prikazu racionalnog broja. Inače je dobiveni broj iracionalan. [3]

Definicija 2.1. *Decimalni prikaz iracionalanog broja beskonačan je i neperiodičan.*

3. Metode ispitivanja iracionalnosti brojeva

U ovom poglavlju navesti ćemo neke dokaze iracionalnosti brojeva. Najprije ćemo navesti dokaze iracionalnosti kvadratnih korijena. Zatim iracionalnost logaritama, te na kraju iracionalnost nultočki polinoma.

3.1 Dokazi iracionalnosti kvadratnih korijena

Primjer 3.1. *Dokažimo da je $\sqrt{5}$ iracionaln broj! [6]*

Dokaz. Najprije pretpostavimo suprotno, tj. da je broj $\sqrt{5}$ racionalan. Dakle, prikaziv u obliku $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$, gdje su $m, n \in \mathbb{N}$, tada je $5n^2 = m^2$.

Prema osnovnom teoremu aritmetike svaki se prirodni broj veći od 1 može prikazati kao produkt prostih brojeva na jedinstven način do na poredak faktora. Tako se m i n mogu prikazati kao produkti prostih brojeva. Neka su $p_1, p_2, ...p_k$ svi različiti prosti brojevi koji se kao faktori pojavljuju u brojevima m ili n.

Tada je:

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k}$$

gdje su $\alpha_1 ... \alpha_k, \beta_1 ... \beta_k \in \mathbf{N_0}$.

Vrijedi:

$$m^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{2\alpha_k}$$

tj. u kvadratu se svaki prosti broj pojavljuje paran broj puta. Vratimo se jednakosti $5n^2 = m^2$ i napišimo je s pomoću rastava na faktore:

$$5p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \cdot ... \cdot p_k^{2\beta_k} = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{2\alpha_k}$$

Faktor 5 se na desnoj strani jednakosti pojavljuje paran broj puta, a na lijevoj se strani pojavljuje neparan broj puta. Time smo došli do kontradikcije. [6]

□

Dokaz teorema $\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$ svođenjem na kontradikciju zasniva se na ekvivalentnosti dviju logičkih formula: $\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$ i $(\mathbf{P} \bigwedge \rceil \mathbf{Q}) \Longrightarrow (\mathbf{A} \bigwedge \rceil \mathbf{A})$ ili na ekvivalenciji formula: $\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$ i $(\mathbf{P} \bigwedge \rceil \mathbf{Q}) \Longrightarrow$ Laž, pri čemu je $\mathbf{P}$ pretpostavka teorema, $\mathbf{Q}$ njegova tvrdnja, a $\mathbf{A}$ neki logički sud. U ovom primjeru $\mathbf{A} = 5$ je faktor koji se pojavljuje paran broj puta.

U ovom dokazu ključnu ulogu je odigrao osnovni teorem aritmetike, koji se u nastavi ne izriče eksplicitno, ali se njime koristimo već u 5. razredu. Sada ćemo pokazati još jedan način dokazivanja tvrdnje. U ovom dokazu ćemo se također koristiti svođenjem na kontradikciju, ali će se u dokazu pojaviti pomoćna tvrdnja koju ćemo dokazati obratom po kontrapoziciji. Dakle, u jednom dokazu imamo pojavu dviju najčešćih vrsta indirektnog dokaza.

Dokaz. Pretpostavimo kao i ranije suprotno, da je $\sqrt{5}$ racionalan broj. Dakle, možemo ga prikazati u obliku $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti prirodni brojevi, tj. $\mathbf{M}(m,n)$=1. Tada je:

$$5n^2 = m^2$$

Dakle, broj 5 dijeli lijevu stranu jednakosti pa dijeli i desnu stranu, tj. $5|m^2$. Sada iskoristimo pomoćnu tvrdnju: ako 5 dijeli kvadrat prirodnog broja, tada dijeli i taj broj. Dakle 5 dijeli i broj m, tj. $m = 5k$ gdje je $k \in \mathbb{N}$.

Vratimo se u jednakost $5n^2 = m^2$:

$$\begin{aligned} 5n^2 &= m^2 \\ 5n^2 &= 25k^2 \\ n^2 &= 5k^2 \end{aligned}$$

Dakle, 5 dijeli i n^2 pa prema pomoćnoj tvrdnji dijeli i n. Tada smo dobili da je 5 djelitelj broja m, ali i broja n, tj. m i n nisu relativno prosti čime smo dobili kontradikciju. Iz razloga što je naša pretpostavka da je $\sqrt{5}$ racionalan broj dovela do kontradikcije zaključujemo da vrijedi suprotno, tj. da je $\sqrt{5}$ iracionalan broj.

Sada dokažimo još i pomoćnu tvrdnju:

$$5|m^2 \Longrightarrow 5|m$$

Ovdje provodimo drugi tip indirektnog dokaza, tzv. dokaz obrata po kontrapoziciji. Taj se dokaz svodi na ekvivalentnost tvdrnji $\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$ i $\rceil\mathbf{Q} \Longrightarrow \rceil\mathbf{P}$.

Pretpostavimo suprotno, $\sqrt{5}$ ne dijeli m. Tada je m oblika 5k+1,5k+2,5k+3 ili 5k+4, $k \in \mathbf{N_0}$. Ako je m=5k+1, tada je:

$$m^2 = (5k+1)^2 = 5(5k^2 + 2k) + 1$$

tada 5 ne dijeli m^2. Analogno se pokaže za ostale slučajeve. Pokazana je istinitost tvrdnje da ako 5 ne dijeli m, tada ne dijeli niti m^2 što je ekvivalentno izreci pomoćne tvrdnje. [6] □

Koristeći ove dvije dane metode ispitivanja iracionalnosti brojeva navesti ćemo nekoliko dokaza iracionalnih brojeva.

Primjer 3.2. *Dokažimo da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj!*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da se $\sqrt{2}$ ne može prikazati u obliku razlomka s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom.
Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Budući da je $\sqrt{2} > 0$ po definiciji, tada postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ potpuno skraćen, tj. $\mathbf{M}$(m,n)=1.

Kvadriranjem izraza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ slijedi $2 = \frac{m^2}{n^2}$ odnosno $2n^2 = m^2$. Dakle, m^2 je paran broj. Dokažimo da je tada i m paran broj. Zaista, kada bi m bio neparan, onda bi i m^2, kao umnožak dvaju neparnih brojeva, bio neparan.

Prema tome, $m = 2k$, za neki $k \in \mathbb{N}$ odakle je:

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2, \text{ tj. } n^2 = 2k^2.$$

Istim zaključivanjem slijedi da je i n paran broj, što znači da 2|m i 2|n, te je $\mathbf{M}$(m,n)=2. Došli smo do kontradikcije s pretpostavkom $\mathbf{M}$(m,n)=1. [6]

□

Zaključak $\sqrt{2}$ nije racionalan, već iracionalan broj.

Primjer 3.3. *Dokažimo da je $\sqrt{3}$ iracionalan!*

Dokaz. Isto kao u prethodnom primjeru dovoljno je dokazati da se $\sqrt{3}$ ne može prikazati u obliku razlomka s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Budući da je $\sqrt{3} > 0$ po definiciji, tada postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$.

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ potpuno skraćen, tj.

$\mathbf{M}$(m,n)=1.Kvadriranjem izraza $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ slijedi $3 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $3n^2 = m^2$. Dakle $3|m^2$. Dokažimo da tada 3|m.

Pretpostavimo da 3 ne dijeli m, tada je m oblika:

$$m = 3k + l, \text{ za neki } k \in \mathbf{N_0} \text{ i } l = \{1, 2\}$$

Tada je m^2 oblika:

$$m^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$
$$m^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

Zaključujemo da u oba slučaja 3 ne dijeli m^2.

Obratom po kontrapoziciji dolazimo do tvrdnje:

$$3|m^2 \Longrightarrow 3|m$$

Prema tome $m = 3k$, za neki $k \in \mathbb{N}$, odakle je $3n^2 = (3k)^2 = 9k^2, tj. n^2 = 3k^2$. Istim zaključivanjem slijedi da i $3|n$, što znači da $3|m$ i $3|n$, te je $\mathbf{M}(m,n)$=3 Došli smo do kontradikcije s pretpostavkom $\mathbf{M}(m,n)$=1 Zaključujemo da $\sqrt{3}$ nije racionalan, već iracionalan broj. [6]

□

Primjer 3.4. *Dokažimo da je $\sqrt{6}$ iracionalan broj!*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da se $\sqrt{6}$ ne može prikazati u obliku razlomka s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Budući da je $\sqrt{6} > 0$ po definiciji tada postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ potpuno skraćen, tj. $\mathbf{M}(m,n)$=1.

Kvadriranjem izraza $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, slijedi $6 = \frac{m^2}{n^2}$ odnosno $6n^2 = m^2$. Dakle $6|m^2$. Dokažimo da $6|m$

Pretpostavimo da 6 ne dijeli m, tada je m oblika:

$$m = 6k + l \text{ za neko } k \in \mathbf{N_0}$$

Tada je m^2 oblika:

$$\begin{aligned}
m^2 &= (6k+1)^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 6(6k^2 + 2k) + 1\\
m^2 &= (6k+2)^2 = 36k^2 + 24k + 4 = 6(6k^2 + 4k) + 4\\
m^2 &= (6k+3)^2 = 36k^2 + 36k + 9 = 6(6k^2 + 6k + 1) + 3\\
m^2 &= (6k+4)^2 = 36k^2 + 48k + 16 = 6(6k^2 + 8k + 2) + 4\\
m^2 &= (6k+5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 6(6k^2 + 10k + 4) + 1
\end{aligned}$$

Zaključak je da u svih 5 slučajeva 6 ne dijeli m^2

Obratom po kontrapoziciji dolazimo do tvrdnje:

$$6|m^2 \Longrightarrow 6|m$$

Prema tome m=6k za neki $k \in \mathbb{N}$ odakle je:

$$6n^2 = (6k)^2 = 36k^2, \text{ tj. } n^2 = 6k^2$$

Istim zaključivanjem slijedi da i $6|n$, što znači da 6|n i 6| m, te je $\mathbf{M}(m,n) \geq 6$. Došli smo do kontradikcije s pretpostavkom $\mathbf{M}(m,n)$=1. Zaključak $\sqrt{6}$ nije racionalan nego iracionalan broj. [6] □

Primjer 3.5. *Provjerimo vrijedi li sličan dokaz za* $\sqrt{4}$*!*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da se $\sqrt{4}$ ne može prikazati u obliku razlomka s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{4} \in \mathbb{Q}$. Budući da je $\sqrt{4} > 0$ po definiciji, tada postoje $m,n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sqrt{4} = \frac{m}{n}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ potpuno skraćen, tj. $\mathbf{M}(m,n) = 1$.

Kvadriranjem izraza $\sqrt{4} = \frac{m}{n}$ slijedi $4 = \frac{m^2}{n^2}$ odnosno $4n^2 = m^2$.

Dakle, $4|m^2$. Dokažimo da tada $4|m$. Pretpostavimo da 4 ne dijeli m tada je m oblika:

$$m = 4k + l, \text{ za neki } k \in \mathbf{N_0} \text{ i } l = 1,2,3$$

Tada je m^2 oblika:

$$m^2 = (4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1$$

$$m^2 = (4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1)$$

$$m^2 = (4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1$$

Uočimo da u drugom slučaju $4|m^2$, tj. može se dogoditi da $4|m^2$, ali 4 ne dijeli m.

Primjer: $4|6^2$, ali 4 ne dijeli 6. Uočimo da ovaj način dokazivanja ne možemo primjeniti na $\sqrt{4}$ jer je $\sqrt{4} = 2$, a 2 pripada skupu racionalnih brojeva. [6]

□

Primjer 3.6. *Ako je p prost broj, onda je $\sqrt{p}$ iracionalan broj.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da se $\sqrt{p}$ ne može prikazati u obliku razlomka s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$. Budući da je $\sqrt{p} > 0$ po definiciji, tada postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ potpuno skraćen, tj. $\mathbf{M}(m, n) = 1$.

Kvadriranjem izraza $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ slijedi $p = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $pn^2 = m^2$. Dakle, $p|m^2$. Dokažimo da tada $p|m$. Zaista kako je p prost broj i $p|m^2$, to je moguće samo onda kad $p|m$.

Prema tome, $m = pk$ za neko $k \in \mathbb{N}$, odakle je $pn^2 = m^2 = (pk)^2 = p^2k^2$, tj. $n^2 = pk^2$

Istim zaključivanjem slijedi da i $p|n$, što znači da $p|m$ i $p|n$, te je $\mathbf{M}(m, n) \geq p$

Dolazimo do kontradikcije s pretpostavkom $\mathbf{M}(m, n) = 1$ [6]

$\square$

Zaključak $\sqrt{p}$ nije racionalan, već iracionalan.

3.2 Logaritmi i iracionalnost

Postoji mnoštvo primjera kojima bismo mogli dokazati iracionalnost logaritama, no u ovom poglavlju ćemo navesti tek nekoliko.

Primjer 3.7. *Dokažimo da je $\log_2 3$ iracionalan broj!*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $\log_2 3$ racionalan, tj. da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\log_2 3 = \frac{m}{n}$
Po definiciji logaritma slijedi:

$$3 = 2^{\frac{m}{n}} /^n$$
$$3^n = 2^m$$

$2|2^m$, ali 2 ne dijeli 3^n. Došli smo do kontradikcije, pa slijedi da je pretpostavka od koje smo krenuli pogrešna. [6] $\square$

Stoga $\log_2 3$ nije racionalan već iracionalan broj.

Primjer 3.8. *Dokažimo da je $\log_{18} 36$ iracionalan broj!*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno odnosno da je $\log_{18} 36$ racionalan, tj. da postoje $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ takvi da je $\log_{18} 36 = \frac{m}{n}$

Po definiciji logaritma slijedi:

$$36 = 18^{\frac{m}{n}} /^n$$
$$36^n = 18^m$$

Uočimo:

$$\begin{aligned} \log_{18} 36 &= \log_{18}(2 \cdot 18) \\ &= \log_{18} 2 + 1 \end{aligned}$$

Slijedi:

$$1 < \tfrac{m}{n} < 2 \Longrightarrow n < m < 2n$$

Imamo:

$$36^n = 18^m$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} (2^2 \cdot 3^2)^n &= (2 \cdot 3^2)^m \\ 2^{2n} \cdot 3^{2n} &= 2^m \cdot 3^{2m} \\ 2^{2n-m} &= 3^{2m-2n} \end{aligned}$$

Pokazali smo da vrijedi:

$$\begin{gathered} n < m < 2n \\ m < 2n \Longrightarrow 2n - m \in \mathbb{N} \\ m > n \Longrightarrow 2m - 2n = 2(m-n) \in \mathbb{N} \end{gathered}$$

$2|2^{2n-m}$, ali 2 ne dijeli 3^{2m-2n}. Došli smo do kontradikcije, pa slijedi da je pretpostavka od koje smo krenuli pogrešna. [6] □

Stoga $\log_{18} 36$ nije racionalan već iracionalan broj.

Primjer 3.9. *Dokažimo da je $\log_{10} 2$ iracionalan broj!*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $\log_{10} 2$ racionalan, tj. da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\log_{10} 2 = \frac{m}{n}$
Po definiciji logaritma:

$$\begin{aligned} 2 &= 10^{\frac{m}{n}} /^n \\ 2^n &= 10^m \end{aligned}$$

Uočimo:

$$\begin{gathered} 0 < \log_{10} 2 < 1 \text{ (jer je } \log_{10} 10 = 1) \\ 0 < \tfrac{m}{n} < 1 \Longrightarrow 0 < m < n \end{gathered}$$

Imamo:

$$\begin{aligned} 2^n &= 10^m \\ 2^n &= 2^m \cdot 5^m \\ 2^{n-m} &= 5^m \end{aligned}$$

Pokazali smo da vrijedi:

$$\begin{gathered} 0 < m < n \\ m < n \Longrightarrow n - m \in \mathbb{N} \end{gathered}$$

$2|2^{n-m}$, ali 2 ne dijeli 5^m Došli smo do kontradikcije, pa slijedi da je pretpostavka od koje smo krenuli pogrešna. [6] □

Stoga $\log_{10} 2$ nije racionalan već iracionalan broj.

3.3 Iracionalnost nultočki polinoma

Da bismo provjerili iracionalnost nultočki polinoma potrebno će nam biti poznavanje sljedećeg teorema:

Teorem 3.1. *Ako je racionalan broj $\alpha = \frac{p}{q}$ (p i q cijeli brojevi, $q \neq 0$) korijen jednadžbe:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je p djelitelj slobodnog člana a_0 i q je djelitelj vodećeg koeficijenta a_n.

Dokaz. Ako je $\alpha = \frac{p}{q}$ rješenje zadane jednadžbe onda mora vrijediti:

$$a_n(\tfrac{p}{q})^n + a_{n-1}(\tfrac{p}{q})^{n-1} + \ldots a_1(\tfrac{p}{q}) + a_0 = 0/\cdot q^n$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Odatle je:

$$\begin{aligned} a_0 q^n &= -a_n p^n - a_{n-1}p^{n-1}q - \ldots - a_1 p q^{n-1} \\ a_0 q^n &= -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}) \end{aligned}$$

Bez smanjenja općenitosti razmatranja, možemo pretpostaviti da su p i q relativno prosti. U tom slučaju, p nije djelitelj od q pa ni od q^n. Stoga iz prethodne jednakosti zaključujemo da je p djelitelj od a_0. Još trebamo dokazati da je q djelitelj od a_n.

Ako je $\alpha = \frac{p}{q}$ rješenje zadane jednadžbe, onda mora vrijediti:

$$a_n(\tfrac{p}{q})^n + a_{n-1}(\tfrac{p}{q})^{n-1} + \ldots + a_1(\tfrac{p}{q}) + a_0 = 0/\cdot q^n$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned} a_n p^n &= -a_{n-1}p^{n-1}q - \ldots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n \\ a_n p^n &= -q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) \end{aligned}$$

Bez smanjenja općenitosti razmatranja, možemo pretpostaviti da su p i q relativno prosti. U tom slučaju q nije djelitelj od p, pa ni od p^n.

Stoga iz prethodne jednakosti zaključujemo da je q djelitelj od a_n. [5] □

Obrat teorema po kontrapoziciji glasi: Ako α nije u skupu $\{\pm\frac{djelitelji\ od\ a_0}{djelitelji\ od\ a_n}\}$, onda on nije racionalan korijen jednadžbe:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

ovaj obrat ćemo zapravo i koristi u sljedećim primjerima kako bismo dokazali iracionalnost nultočki polinoma.

Primjer 3.10. *Dokažimo da je $\sqrt{7}$ iracionalan broj koristeći dani teorem.*

Dokaz. Želimo dobiti jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima:

$$x = \sqrt{7} / ^2$$
$$x^2 = 7$$
$$x^2 - 7 = 0$$

Nakon što smo je dobili, cilj je pokazati da ona nema racionalnih korijena (rješenja).

Trebamo najprije naći djelitelje slobodnog i vodećeg člana:

$$p = \pm 1, \pm 7$$
$$q = \pm 1$$

Kandidati za rješenja su racionalni brojevi $\frac{p}{q}$.

$$\frac{p}{q} = 1, -1, 7, -7$$

Uvrštavanjem bilo kojeg od tih mogućih rješenja nećemo dobiti 0 pa zaključujemo da jednadžba nema racionalnih korijena, odnosno da je broj $\sqrt{7}$ iracionalan broj. [5] □

Primjer 3.11. *Dokažimo da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ iracionalan broj koristeći teorem.*

Dokaz. Postupak je opet analogan, odnosno želimo dobiti jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima:

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$
$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} / ^2$$
$$x^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$$
$$x^2 - 5 = 2\sqrt{6} / ^2$$
$$x^4 - 10x^2 + 25 = 24$$
$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

Trebamo najprije naći djelitelje slobodnog i vodećeg člana:

$$p = \pm 1$$
$$q = \pm 1$$

Kandidati za rješenja su racionalni brojevi $\frac{p}{q}$.

$$\frac{p}{q} = 1, -1$$

Uvrštavanjem bilo kojeg od tih rješenja nećemo dobiti 0 pa zaključujemo da jednadžba nema racionalnih korijena, odnosno da je broj $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalan. [5] □

Primjer 3.12. *Dokažimo da je $\sqrt{2 - \sqrt[3]{3}}$ iracionalan broj koristeći teorem.*

Dokaz. $x = \sqrt{2 - \sqrt[3]{3}}$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt[3]{3}} / ^2$$

$$x^2 = 2 - \sqrt[3]{3}$$

$$x^2 - 2 = -\sqrt[3]{3} /^3$$
$$x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 = -3$$
$$x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 5 = 0$$

Trebamo najprije naći djelitelje slobodnog i vodećeg člana:

$$p = \pm 1, \pm 5$$
$$q = \pm 1$$

Kvadrati za rješenje su racionalni brojevi $\frac{p}{q}$.

$$\frac{p}{q} = 1, -1, 5, -5$$

Uvrštavanjem bilo kojeg od tih rješenja u jednadžbu, nećemo dobiti 0 pa zaključujemo da jednadžba nema racionalnih korijena, odnosno da je broj $\sqrt{2 - \sqrt[3]{3}}$ iracionalan. [5] □

Primjer 3.13. *Dokažimo da je* $\sin 15°$ *iracionalan broj koristeći teorem*

Dokaz. Prisjetimo se:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

Imamo $\alpha = 15°$ pa uvrštavamo u jednakost:

$$\sin 3 \cdot 15° = 3 \sin 15° - 4 \sin^3 15°$$
$$\sin 45° = 3 \sin 15° - 4 \sin^3 15°$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \sin 15° - 4 \sin^3 15°$$

Označimo: $x = \sin 15°$

Dobili smo polinom koji sređujemo kako bismo mogli upotrijebiti teorem:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 3x - 4x^3 / \cdot 2$$

$$\sqrt{2} = 6x - 8x^3$$
$$\sqrt{2} = 2x(3 - 4x^2) /^2$$
$$2 = 4x^2(3 - 4x^2)^2$$
$$2 = 4x^2(9 - 24x^2 + 16x^4)$$
$$2 = 36x^2 - 96x^4 + 64x^6 / : 2$$
$$1 = 18x^2 - 48x^4 + 32x^6$$
$$18x^2 - 48x^4 + 32x^6 - 1 = 0$$
$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = 0$$

Trebamo najprije naći djelitelje slobodnog i vodećeg člana:

$$p = \pm 1$$
$$q = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$$

Kandidati za rješenje su racionalni brojevi $\frac{p}{q}$.

$$\frac{p}{q} = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{32}$$

Uvrštavanjem bilo kojeg od tih rješenja u jednadžbu nećemo dobiti 0, pa zaključujemo da jednadžba nema racionalnih korijena, odnosno da je broj $\sin 15°$ iracionalan. [5] □

Primjer 3.14. *Dokažimo da je* $\cos 10°$ *iracionalan broj koristeći teorem.*

Dokaz. Prisjetimo se:

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$$

Imamo $\alpha = 10°$ pa uvrštavamo u jednakost:

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$
$$\cos 3\cdot 10° = \cos^3 10° - 3(1-\cos^2 10°)\cos 10°$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^3 10° - 3(1-\cos^2 10°)\cos 10°$$

Označimo: $x = \cos 10°$

Dobili smo polinom koji "sređujemo" tako da možemo upotrijebiti teorem:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = x^3 - 3(1-x^2)x / \cdot 2$$

$$\sqrt{3} = 2x^3 - 6(1-x^2)x$$
$$\sqrt{3} = 2x^3 - 6x + 6x^3$$
$$\sqrt{3} = 8x^3 - 6x$$
$$\sqrt{3} = 2x(4x^2-3)/^2$$
$$3 = 4x^2(16x^4 - 24x^2 + 9)$$
$$64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$$

Trebamo najprije naći djelitelje slobodnog i vodećeg člana:

$$p = \pm 1, \pm 3$$
$$q = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64$$

Kandidati za rješenje su racionalni brojevi $\frac{p}{q}$.

$$1, -1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, -\tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{32}, -\tfrac{1}{32}, \tfrac{1}{64}, -\tfrac{1}{64}, 3, -3$$

$$\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{8}, -\tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{16}, -\tfrac{3}{16}, \tfrac{3}{32}, -\tfrac{3}{32}, \tfrac{3}{64}, -\tfrac{3}{64}$$

Uvrštavanjem bilo kojeg od tih rješenja u jednadžbu, nećemo dobiti 0 pa zaključujemo da jednadžba nema racionalnih korijena, odnosno da je broj $\cos 10°$ iracionalan. [5] □

Primjer 3.15. *Dokažimo da je* $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ *iracionalan broj koristeći teorem.*

Dokaz. Želimo dobiti jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima:

$$x = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} \;/^2$$

$$x^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3}$$

$$x^2 = 4 + 2\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$
$$x^2 - 6 = 0$$

Nakon što smo dobili jednadžbu cilj nam je pokazati da ona nema racionalnih korijena (rješenja).

Trebamo najprije naći djelitelje slobodnog i vodećeg člana:

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$
$$q = \pm 1$$

Kandidati za rješenja su racionalni brojevi $\frac{p}{q}$.

$$\frac{p}{q} = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$$

Uvrštavanjem bilo kojeg od tih mogućih rješenja nećemo dobiti 0 pa zaključujemo da jednadžba nema racionalnih korijena, odnosno da je broj $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ iracionalan. [5]
$\square$

4. Školske aktivnosti

U ovome poglavlju navesti ćemo niz školskih aktivnosti koje mogu poboljšati razumijevanje racionalnih i iracionalnih brojeva. Prvotno ćemo navesti aktivnosti koje mogu poboljšati shvaćanje odnosa decimalni broj- razlomak. Nakon toga ćemo navesti aktivnosti kojima će učenici savladati decimalni zapis racionalnih brojeva. Zatim ćemo navesti aktivnosti za bolje razumijevanje beskonačnog decimalnog zapisa, te na kraju aktivnost za uvođenje iracionalnih brojeva u nastavu.

4.1 Aktivnost decimalni broj- razlomak

Cilj ove aktivnosti je da učenici radeći u paru zapisuju razlomke u obliku decimalnih brojeva i obrnuto.

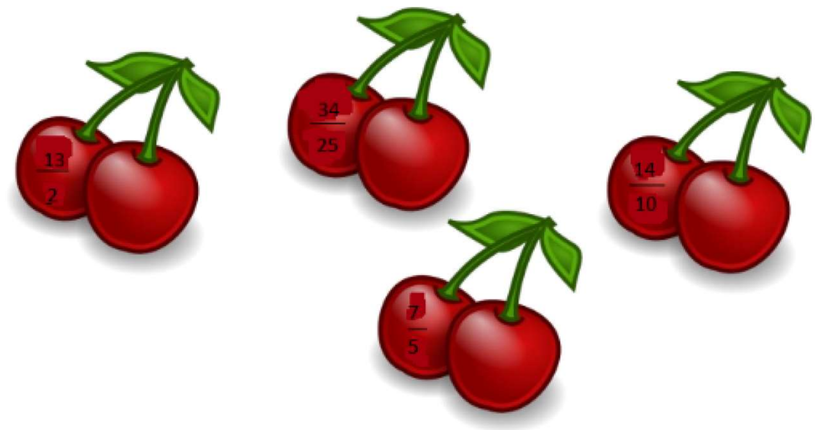
Oblik rada ove aktivnosti je suradnički rad u paru.

Potrebni materijal za danu aktivnost je nastavni listić.

Aktivnost se odvija na način da nastavnik podijeli učenicima nastavne listiće, te da učenici u paru rješavaju zadatke s nastavnog listića.

Navesti ćemo sada tri zadatka koja koriste danu aktivnost.

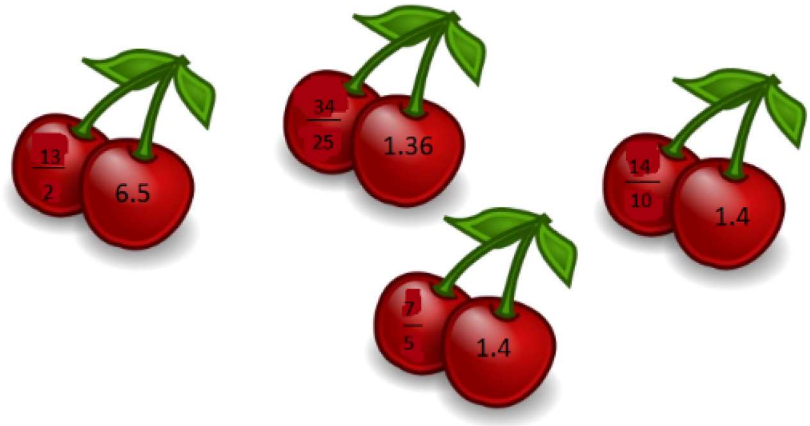
Zadatak 4.1. *Razlomak zapisan na lijevoj trešnji zapiši u decimalnom zapisu na desnu trešnju.*



Slika 4: Zadatak trešnje

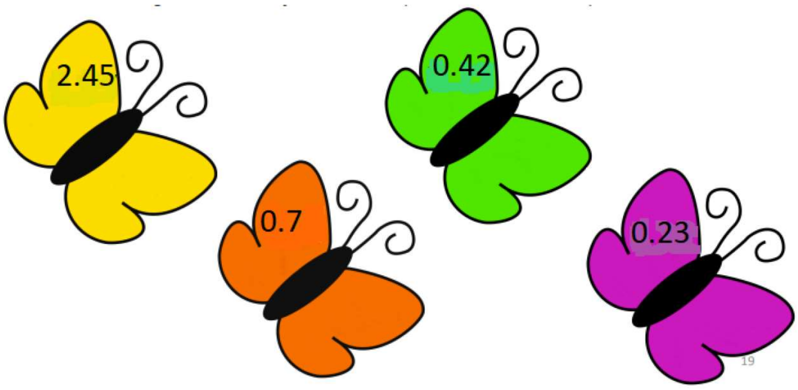
Rješenje:

$\frac{13}{2} = \frac{13 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{65}{10} = 6.5$
$\frac{34}{25} = \frac{34 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{136}{100} = 1.36$
$\frac{14}{10} = 1.4$
$\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{14}{10} = 1.4$



Slika 5: Rješenje trešnje

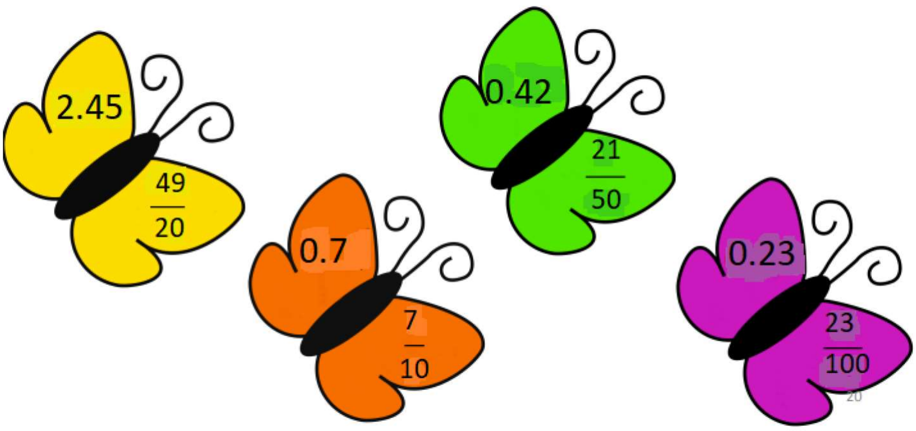
Zadatak 4.2. *Decimalni broj koji se nalazi na lijevom krilu leptira, zapiši u obliku potpuno skraćenog razlomka i taj razlomak zapiši na desno krilo leptira.*



Slika 6: Zadatak leptiri

Rješenje:

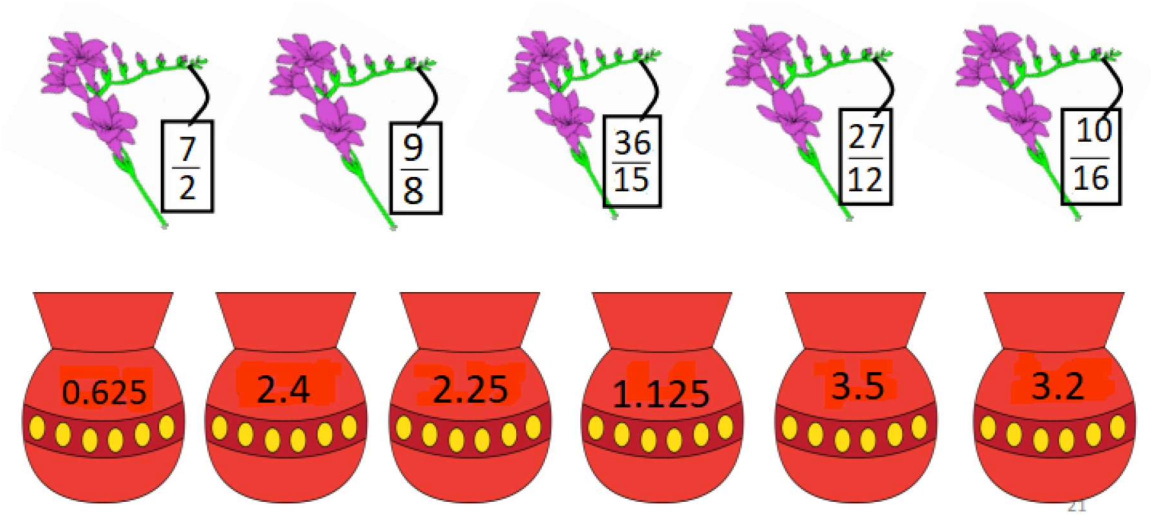
$2.45 = \frac{245}{100} = \frac{49}{20}$
$0.42 = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$
$0.7 = \frac{7}{10}$
$0.23 = \frac{23}{100}$



Slika 7: Rješenje leptiri

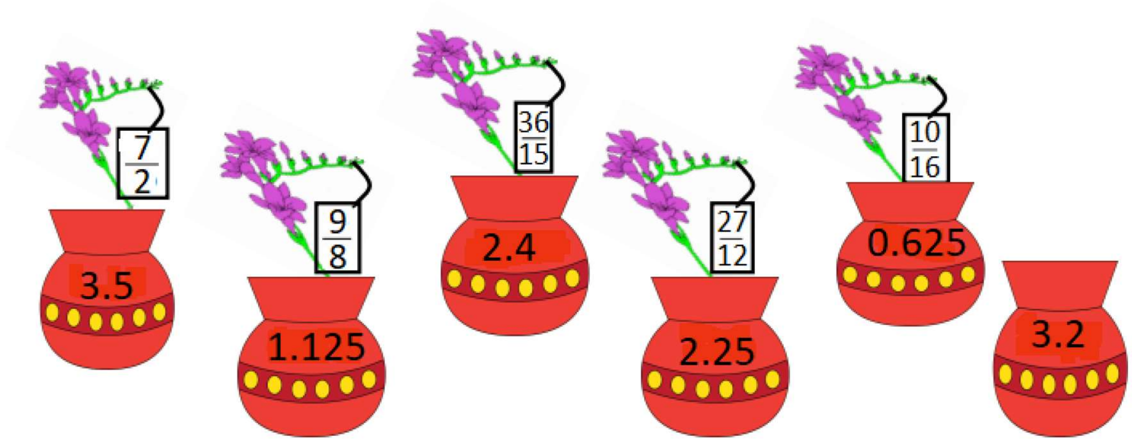
Zadatak 4.3. *Razlomak zapisan na cvijetu pridruži odgovarajućem decimalnom broju zapisanom na vazi. Prvo procijeni!*

Rješenje:



Slika 8: Zadatak vaze

$\frac{7}{2} = 7 : 2 = 3.5$
$\frac{9}{8} = 9 : 8 = 1.125$
$\frac{36}{15} = 36 : 15 = 2.4$
$\frac{27}{12} = 27 : 12 = 2.25$
$\frac{10}{16} = 10 : 16 : 0.625$



Slika 9: Rješenje vaze

Nakon ovih aktivnosti sljedila bi diskusija koja bi za prvi zadatak trebala izgledati ovako:

Kako ste razlomku pridružili decimalni broj?

Očekivani odgovor učenika glasio bi:

Decimalni zapis nekog razlomka određujemo dijeljenjem brojnika nazivnikom.

Ili:

Razlomak možemo proširiti odgovarajućim brojem tako da dobijemo dekadski razlomak, a dijeljenje dekadskom jedinicom je jednostavnije.

Za drugi zadatak diskusija bi izgledala ovako:

Možete li za svaki decimalni broj pronaći odgovarajući razlomak? Na koji način? Što zaključujete?

Očekivani odgovor učenika glasio bi:

Možemo. Svođenjem decimalnog broja na dekadski razlomak i potpunim skraćivanjem tog razlomka. Decimalnom broju pripada više razlomačkih zapisa, ali samo jedan potpuno skraćen.

Za treći zadatak diskusija bi izgledala ovako:

Koje ste brojeve povezali u zadatku 3.? Na koji način?

Očekivani odgovor učenika glasio bi:

Racionalne brojeve, tj. razlomke, povezivali smo s njihovim odgovarajućim decimalnim zapisom. Decimalni zapis nekog razlomka određujemo dijeljenjem brojnika nazivnikom ili proširivanjem razlomka do dekadskog razlomka.

Ako prvo procjenjujemo, uočavamo da samo jedan razlomak ima veći nazivnik od brojnika, a to je $\frac{10}{16}$, što znači da njemu od ponuđenih decimalnih brojeva možemo odmah pridružiti broj 0.625. Kako imamo samo jedan broj između 1 i 2 učenici procjenjuju da je to broj $\frac{9}{8}$.

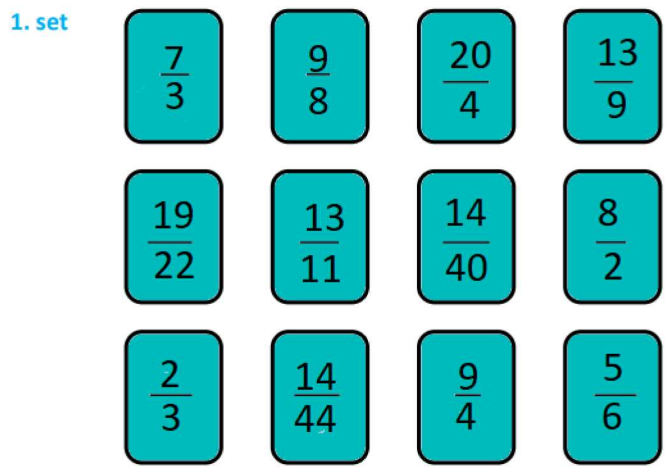
4.2 Aktivnost decimalni zapis racionalnog broja

Cilj ove aktivnosti je da će učenici radeći u skupinama otkriti da racionalni brojevi mogu imati beskonačan decimalan zapis.

Oblik rada će biti suradničko-timski rad u četveročlanim timovima, frontalni rad.

Potrebi materijali za aktivnost su 12 kartica na kojima se nalaze racionalni brojevi za svaki tim (po dva tima dobivaju jednake kartice) i selotejp.

Tijek aktivnosti je sljedeći najprije će nastavnik podijeliti učenike u šest četveročlanih timova, te svakom timu podijeliti 12 kartica na kojima se nalaze racionalni brojevi u razlomačkom zapisu. Nastavnik daje uputu učenicima da svaki učenik iz tima odabere tri kartice, te da brojeve koji se nalaze na karticama zapišu u decimalnom zapisu. Učenici dijele brojnik zadanog razlomka nazivnikom i diskutiraju o dobivenim decimalnim zapisima zadanih racionalnih brojeva.



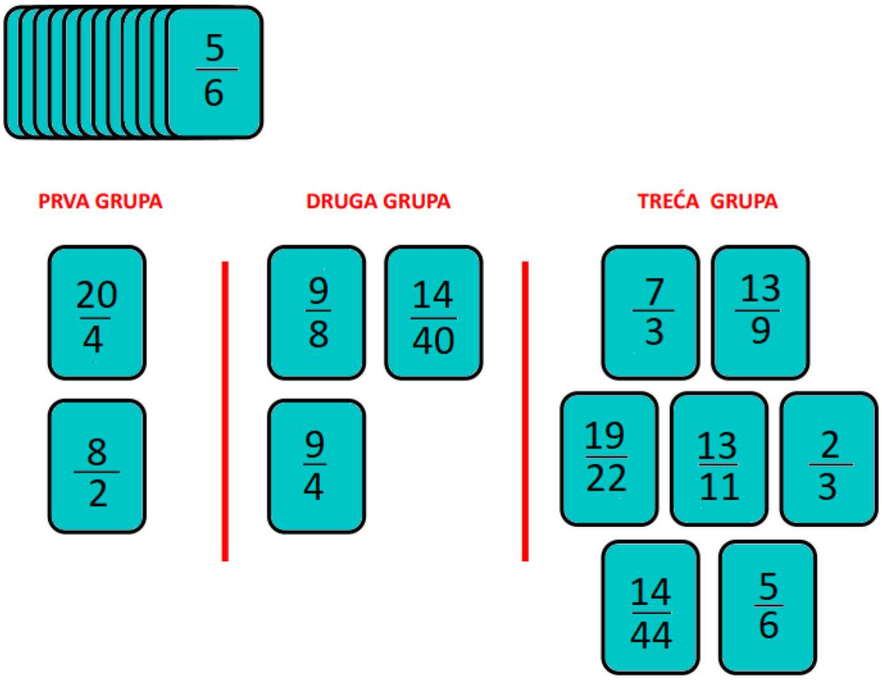
Slika 10: 1. set kartica

Rješenje:

$9 : 8 = 1.125$
$20 : 4 = 5$
$13 : 9 = 1.444\ldots$
$19 : 22 = 0.86363636\ldots$
$13 : 11 = 1.1818\ldots$

$14 : 40 = 0.35$
$8 : 2 = 4$
$2 : 3 = 0.666\ldots$
$14 : 44 = 0.31818\ldots$
$9 : 4 = 2.25$
$5 : 6 = 0.833\ldots$

Nakon što su učenici zapisali zadane brojeve u decimalnom zapisu i prodiskutirali o dobivenim rješenjima, nastavnik im daje zadatak da uoče svojstvo po kojem će zadane brojeve razvrstati u tri grupe uzimajući u obzir njihove decimalne zapise. Nakon toga učenici izlaze pred ploču i selotejpom lijepe svoje tri kartice na ploču ovisno o tome u koju grupu žele svrstati svoje brojeve. Jedan tim razvrstava kartice, a drugi tim koji ima iste kartice ga kontrolira.



Slika 11: 1. set kartica grupe

Nakon toga slijedi diskusija. Nastavnik postavlja pitanje: Na koji ste način razvrstali zadane brojeve u tri grupe? Po kojem kriteriju?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Zadane brojeve razvrstali smo u tri grupe s obzirom na postupak dijeljenja brojnika s nazivnikom, te s obzirom na decimalne zapise koje smo u tom postupku dobili.

Nakon toga nastavnik upita: Kakve brojeve ste svrstali u prvu grupu?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: U prvu grupu smo svrstali brojeve kod kojih smo pri dijeljenju brojnika s nazivnikom dobili cijeli broj.

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{20}{4}$	20:4=5 0	5
$\frac{8}{2}$	8:2=4 0	4

Slika 12: prva grupa tablica

Zatim nastavnik upita: Kakve brojeve ste svrstali u drugu grupu?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: U drugu grupu smo svrstali brojeve kod kojih smo pri dijeljenju brojnika s nazivnikom kao rezultat dobili decimalni broj.

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{14}{40}$	14:40=3.5 140 200 0	3.5
$\frac{9}{8}$	9:8=1.125 10 20 40 0	1.125
$\frac{9}{4}$	9:4=2.25 10 20 0	2.25

Slika 13: druga grupa tablica

Na kraju bi nastavnik upitao: Koje brojeve ste svrstali u treću grupu?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: U treću grupu svrstali smo brojeve kod kojih dijeljenje brojnika nazivnikom nikad nije prestalo, odnosno brojeve kod kojih se pri dijeljenju brojnika nazivnikom određeni ostaci ponavljaju, te nikad ne dolazimo do ostatka 0.

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{7}{3}$	7:3=2.333... 10 10 10 10...	2.333...
$\frac{13}{9}$	13:9=1.444... 40 40 40 40...	1.444...
$\frac{19}{22}$	19:22=0.863636... 190 140 80 140...	0.863636...

Slika 14: treća grupa tablica

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{2}{3}$	2:3=0.66... 20 20 20..	0.6666...
$\frac{13}{11}$	13:11=1.1818... 20 90 20 90..	1.1818...
$\frac{14}{44}$	14:44=0.31818... 140 80 360 80..	0.31818...
$\frac{5}{6}$	5:6=0.833... 50 20 20..	0.833...

Slika 15: treća grupa tablica

Nakon toga opet slijedi diskusija. Nastavnik postavlja pitanje: Uočili smo da se kod brojeva iz treće skupine ostaci pri dijeljenju brojnika s nazivnikom stalno ponavljaju te nikad ne dolazimo do ostatka 0. Kako izgledaju decimalni zapisi koje dobijemo pri takvom postupku dijeljenja?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: U takvim decimalnim zapisima određena se znamenka ili skupina znamenki decimalnog dijela ponavljaju u beskonačnosti.

Nastavnik upita: Hoće li kod tih brojeva decimalni dio decimalnog zapisa daljnjim dijeljenjem postati konačan? Zašto?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Neće, jer dijeljenje nikad neće završiti zbog ponavljanja jednakih ostataka.

Nastavnik upita: Kako biste nazvali decimalne zapise racionalnih brojeva koji imaju decimalni dio koji nije konačan?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Beskonačni decimalni zapis.

Na kraju diskusije nastavnik zaključuje raspravu pitanjem: Kako biste s obzirom na decimalne zapise koje ste dobili dijeljenjem brojnika nazivnikom nazvali racionalne brojeve koje ste razvrstali u tri grupe?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: U prvu grupu stavili smo racionalne brojeve kod kojih smo kao rezultat dijeljenja brojnika nazivnikom dobili cijele brojeve. Takvi racionalni brojevi su cijeli brojevi. U drugu grupu stavili smo racionalne brojeve kod kojih smo kao rezultat dijeljenja brojnika nazivnikom dobili decimalne brojeve. Takvi racionalni brojevi su konačni decimalni brojevi. U treću grupu stavili smo racionalne brojeve kod kojih smo kao rezultat dijeljenja brojnika nazivnikom dobili beskonačne decimalne zapise. Takvi racionalni brojevi su brojevi s beskonačnim decimalnim zapisom.

4.3 Aktivnost beskonačni decimalni zapis

Cilj aktivnosti je da će učenici radeći u skupinama, otkriti periodičnost beskonačnog decimalnog zapisa racionalnog broja.

Oblik rada ove aktivnosti je suradničko- timski rad u četveročlanim timovima.

Potrebni materijal za aktivnost je nastavni listić.

Aktivnost se odvija na način da učenici ostaju u skupinama u kojima su bili u prethodnoj aktivnosti, te im nastavnik podijeli nastavne listiće na kojima se nalazi zadatak i pitanja koja potiču refleksivno mišljenje. Učenici u skupinama rješavaju zadatak i diskutiraju o dobivenim rješenjima.

Zadatak 4.4. *Ispišite decimalne zapise brojeva koje ste u prethodnoj aktivnosti svrstali u treću grupu, odnosno nazvali ih beskonačnim decimalnim zapisima. Promatrajte znamenke decimalnog dijela tih brojeva i uočite pravilnosti. Pored svakog decimalnog zapisa ispišite sve znamenke koje se nalaze u njegovom decimalnom dijelu i zapišite koliko puta se koja znamenka pojavljuje u decimalnom dijelu tog zapisa.*

Rješenje:

$2.333\ldots \longrightarrow$ znamenka 3 je jedina znamenka u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, a pojavit će se beskonačno mnogo puta

$1.444\ldots \longrightarrow$ znamenka 4 je jedina znamenka u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, a pojavit će se beskonačno mnogo puta

$0.863636\ldots \longrightarrow$ znamenke 8, 3, 6 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, 8 će se pojaviti jednom, a 3 i 6 beskonačno mnogo puta

$0.6666\ldots \longrightarrow$ znamenka 6 je jedina znamenka u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, a pojavit će se beskonačno mnogo puta

$1.1818\ldots \longrightarrow$ znamenke 1 i 8 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, a pojavljivat će se beskonačno mnogo puta

$0.31818\ldots \longrightarrow$ znamenke 3, 1, 8 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, 3 će se pojaviti jednom, a 1 i 8 beskonačno mnogo puta

$0.833\ldots \longrightarrow$ znamenke 8 i 3 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, 8 će se pojaviti jednom, a 3 beskonačno mnogo puta

Nakon toga slijedi diskusija. Nastavnik postavi pitanje: Jeste li uočili neke pravilnosti promatrajući decimalni dio ovih decimalnih zapisa? Koje?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Jesmo, u svakom od ovih zapisa postoje znamenke koje se ponavljaju beskonačno mnogo puta.

Nastavnik upita: Kako se te znamenke u decimalnom dijelu ponavljaju?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Znamenke se ponavljaju u nedogled u nekom smislenom ravnomjernom redoslijedu, tj. ciklički se ponavljaju.

Nastavnik upita: Ponavlja li se samo jedna znamenka u decimalnom zapisu tih brojeva?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Ne, negdje se ponavlja jedna znamenka, a negdje skupina znamenki uvijek istim redoslijedom znamenaka u skupini.

Nastavnik upita: Kako biste nazvali decimalne zapise koji imaju takav decimalni dio?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Nazvali bismo ih periodičnim beskonačnim decimalnim zapisima.

Na koncu bi nastavnik upitao: Kako biste nazvali dio (skup znamenki) decimalnog dijela koji se periodički ponavlja?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Nazvali bismo ga period.

4.4 Aktivnost iracionalni brojevi

Cilj aktivnosti je da će učenici, zapisujući vlastite primjere neperiodičnih beskonačnih decimalnih zapisa, otkriti pojam iracionalnih brojeva.

Oblik rada ove aktivnosti je individualni rad i frontalni rad.

Potrebni materijali za aktivnost su olovka i bilježnica.

Aktivnost se odvija na način da nastavnik zadaje učenicima zadatak da svaki od njih napiše jedan beskonačan nepreriodičan decimalni zapis. Učenici smišljaju i zapisuju takve decimalne zapise te diskutiraju o njima međusobno i s nastavnikom.

Zadatak 4.5. *Napišite barem tri decimalna zapisa koji imaju beskonačno mnogo decimala koje se ne ponavljaju periodično. Objasnite na koji način ste dobili takav zapis i zašto on zadovoljava zadane uvjete.*

Rješenje 1.:

$$0.98765432190999293949596 97...$$

Znamenke decimalnog dijela ovog decimalnog zapisa su redom zapisani uzastopni prirodni brojevi. Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo i svi su međusobno različiti pa je ovaj decimalni zapis beskonačno nepreiodičan.

Rješenje 2.:

$$1.90807060504030201000102030 40...$$

Znamenke decimalnog dijela ovog decimalnog zapisa su redom zapisani uzastopni prirodni brojevi, ali na način da smo između svaka dva uzastopna prirodna broja zapisali 0. Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo i svi su međusobno različiti pa je ovaj decimalni zapis beskonačan neperiodičan.

Rješenje 3.:

$$6.1000200003000004000000...$$

Znamenke decimalnog dijela ovog decimalnog zapisa su redom zapisani uzastopni prirodni brojevi, ali na način da smo između prva dva uzastopna prirodna broja stavili tri 0, a zatim smo broj zapisanih nula između svaka sljedeća dva uzastopna prirodna broja povećavali za jedan. Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo i svi su međusobno različiti pa je ovaj decimalni zapis beskonačan neperiodičan.

Nakon toga slijedi diskusija. Nastavnik postavlja pitanje: Nalaze li se ti brojevi u skupu racionalnih brojeva? Zašto?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Ne, to nisu racionalni brojevi. Znamo da je racionalan broj ili cijeli broj ili decimalni broj ili ima beskonačan periodičan decimalni zapis, a navedeni brojevi ne zadovoljavaju ništa od toga.

Nastavnik upita: Kako biste nazvali takve brojeve?

Očekivani odgovor učenika glasio bi: Brojevi koji imaju neperiodičan decimalni zapis su neracionalni brojevi, tj. iracionalni brojevi.

5. Zaključak

Ovim diplomskim radom pokazali smo da razumijevanje iracionalnog i racionalnog zapisa broja puno lakše ide uz korištenje raznih školskih aktivnosti. Tim aktivnostima nastavnik uz pomoć raznih pomagala kao što je primjerice izrada kartica ili izrada listića na kojima koristi neživa i živa bića približuje učenicima dane pojmove. Osim toga on tim aktivnostima potiče učeničku zainteresiranost na satu, te potiče razvijanju njihovih kognitivnih sposobnosti. Rezultat toga je puno bolje korištenje danih brojeva u životnim situacijam, te zbog motiviranosti učenika dolazi do veće zainteresiranosti općenito za učenje i proučavanje matematike.

Sažetak

U ovome radu najprije se nešto govori o skupu brojeva. Nakon toga govori se o zapisu racionalnog i iracionalnog broja. Zatim se navodi nekoliko dokaza iracionalnosti. Najprije iracionalnost kvadratnih korijena, zatim logaritama, te na koncu iracionalnost nultočki polinoma. U završnom dijelu rada se navode neke aktivosti koje se mogu koristiti u nastavi radi približavanja i uvođenja pojma decimalnog zapisa racionalnog broja, te opisivanja iracionalnog broja.

Ključne riječi

Racionalni brojevi, iracionalni brojevi, metode ispitivanja, školske aktivnosti

Title: Real numbers

Abstract

In this work first, something is said about the set of numbers. After that, we talk about notation of a rational and irational number. Then several proofs of irrationality are cited. First, irrationality of square roots, then logarithms and at the end irrationality of the zero-point polynominal. Some activities are listed in the final part of work which can be used in order to approach and introduce the concept of decimal notationof a rational number, and describing an irrational number.

Keywords

Rational numners, irational numbers, test methods, school activities

Literatura

[1] B. Antunović Piton, A. Bgoner Boroš, P. Brkić, M. Karlo, M. Kuliš, T. Rodiger, K. Vučić, *Matematika 8*, Školska knjiga, 2021.

[2] I. Balatinac, *Prirodni, cijeli, racionalni i realni brojevi*, diplomski rad, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2012.

[3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4*, Element, 2003.

[4] Ana Klisurić, *Povijesni početci nastajanja i razvoja brojeva*, diplomski rad, Sveučilište u Osijeku, Osijek 2014.

[5] B.Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, 2004.

[6] S. Varošanec, *Metode ispitivanja iracionalnosti brojeva*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2018.