Neke primjene eksponencijalnog rasta i pada

Jelošek, Ana

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:205682

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Jelošek

Neke primjene eksponencijalnog rasta i pada

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Jelošek

Neke primjene eksponencijalnog rasta i pada

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Burazin
Komentor: dr. sc. Jelena Jankov

Osijek, 2022.

Sažetak

U ovom radu promatrat ćemo matematičke modele koji opisuju eksponencijalni rast i pad, a temelje se na primjeni običnih diferencijalnih jednadžbi sa separiranim varijablama. Za početak, upoznat ćemo se s eksponencijalnom funkcijom i njenim svojstvima, definirati pojam derivacije, diferencijalne jednadžbe, te rješenja diferencijalne jednadžbe. Zatim ćemo proučavati primjenu eksponencijalnog rasta i pada kroz različite modele, a to su: Malthusov i Verhulstov model rasta populacije, Newtonov model hlađenja, model radioaktivnog raspada tvari, model cijeljenja rana, te model koji opisuje promjenu atmosferskog tlaka s visinom.

Ključne riječi

eksponencijalna funkcija, obična diferencijalna jednadžba, derivacija, brzina promjene

Some applications of exponential growth and decay

Abstract

In this paper we will observe mathematical models that explain exponential growth and decay based on ordinary differential equations with separable variables. Firstly, we will introduce exponential function and its properties, define the notion of derivative, differential equation and its solutions. Then we will study the application of exponential growth and decay through various models such as Malthus and Verhulst's models of population growth, Newton's law of cooling, the model of radioactive decay, the model of wound healing as well as the model of change in the atmosphere with altitude.

Keywords

exponential function, ordinary differential equation, derivative, speed of change

Sadržaj

1 Uvod

Od davnina se čovjek svakodnevno susretao s problemima. Pogleda li se prošlost, problemi su bili izrazito maleni u usporedbi s današnjicom, a kako su prolazile godine, stoljeća, tisućljeća, isti su se komplicirali. Rješenje problema čovjek je pronašao u raznim znanostima među kojima se našla i matematika. Kako je čovjek znatiželjno biće, želja za proučavanjem, razvojem i primjenom matematike u svakodnevnom životu rasla je iz dana u dan. Naime, bez poznavanja osnova matematike bilo je gotovo nemoguće trgovati hranom koja je bila neophodna za preživljavanje. Također, razvoju pomorstva, arhitekture, astronomije te brojnim drugim znanostima prednjačio je razvoj matematike. Zbog želje za proučavanjem gibanja i promjena došlo je do razvoja diferencijalnog računa koji je bio temelj za razvoj diferencijalnih jednadžbi. Za njegov razvoj zaslužni su Newton[1] i Leibniz[2], a njihova saznanja omogućila su razvoj primjene diferencijalnog računa u svakodnevnom životu. U ovom radu govorit ćemo o primjeni diferencijalnog računa koja je vezana uz eksponencijalni rast i pad. Budući da je eksponencijalna funkcija temelj ovog rada upoznajmo se s legendom o njenom nastanku [19].

Legenda o nastanku eksponencijalne funkcije vezana je uz jednu od najstarijih igara svijeta, a to je šah. O podrijetlu ove veličanstvene igre postoje razna vjerovanja i legende. Jedna od njih je da je šah nastao u Indiji prije mnogo stoljeća. Jednoga dana indijski car Šeram odlučio je naučiti igrati šah jer je upoznavši se s navedenom igrom ostao očaran njezinom ljepotom i elegancijom. Raspitao se tko je osmislio tako veličanstvenu igru te saznao da ta čast pripada jednom od njegovih podanika. Car Šeram poželio je upoznati tog podanika stoga je naredio svojim slugama da ga što prije pronađu. Podanik se zvao Seta, bio je to skroman učitelj. Vrlo brzo careve sluge pronašli su Setu, te je došavši na dvor cara Šerama Setu dočekala velika dobrodošlica. Car ga je odlučio nagraditi, no nagradu nije sam osmislio nego je dopustio da Seta od njega zatraži što god želi. Kada ga je Car upitao što bi najviše želio dobiti za nagradu Seta je mudro odgovorio da mu je potrebno malo vremena dok razmisli te da će ga naknadno obavijestiti o svojoj želji. Već sljedećeg dana Seta je caru priopćio svoju želju. Poželio je da mu car za prvo polje šahovske ploče da jedno zrno pšenice, za drugo šahovsko polje dva zrna pšenice, za treće četiri, za četvrto osam, za peto šesnaest itd. Cara je uvrijedila Setina skromna molba te mu je rekao da će za svako šahovsko polje dobiti duplo više zrna pšenice nego za prethodno. Također, car Šeram objasnio je učitelju Seti kako s navedenom željom omalovažava njegovu želju da učini dobro djelo te ga je opomenuo da bi on kao jedan ugledan učitelj trebao više cijeniti dobrotu svog gospodara. Seta je otišao u carev vrt pričekati obećanu nagradu. U međuvremenu se car Šeram raspitao je li Seta dobio traženu nagradu te je saznao da njegovi matematičari i dalje izračunavaju broj zrna. Kako je izračun dugo trajao car se počeo ljutiti. Tek sljedećeg jutra carevi matematičari završili su s izračunom te obavijestili cara da je broj zrna pšenice koje je zatražio Seta toliko velik da nije moguće uručiti mu nagradu. Caru je rečeno da toliko zrna pšenice nema ni u žitnicama cijelog svijeta. Car je ostao zaprepašten, te je upitao koliki je to ogroman broj, a odgovor je bio 18 446 744 073 709 551 615. Čuvši broj car je utihnuo i začuđeno gledao u svoje matematičare. Broj svih zrna pšenice bio je jednak

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63}.$$

[1]Isaac Newton (1642. - 1727.) je engleski matematičar, fizičar i astronom

[2]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. - 1716.) je njemački filozof, matematičar i fizičar

Navedeni niz brojeva kod kojeg je svaki član višekratnik predhodnog naziva se geometrijski te on opisuje eksponencijalni rast. Učitelj Seta uspio je nadmudriti cara Šerama jer je poznavao matematičku funkciju koja se naziva eksponencijalna funkcija. Tako se ispostavilo da je Setina naizgled vrlo skromna molba zapravo neostvariva.

Slika 1: Šahovska ploča

Cilj ovog rada je pojasniti primjenu eksponencijalnog rasta i pada kroz razne modele, počevši od modela koji opisuju promjenu populacije: Malthusov i Verhulstov model, zatim Newtonov model hlađenja, model radioaktivnog raspada tvari, model cijeljenja rana, te model kojim je opisana promjena atmosferskog tlaka s visinom.

1.1 Osnovne definicije

Za razumijevanje ovog rada potrebno je poznavanje određenih pojmova koji su pojašnjeni u nastavku.

Definicija 1.1. [5] Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definiranu formulom

$$f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},$$

nazivamo eksponencijalna funkcija s bazom a.

Napomena 1.1. [5] Svojstva eksponencijalne funkcije:

1. Domena je cijeli skup $\mathbb{R}$.
2. Kodomena je $\mathbb{R}^+$.
3. Graf funkcije $f(x) = a^x$ siječe os y u točki $T(0, 1)$.
4. Graf funkcije $f(x) = a^x$ asimptotski se približava osi x.
5. Funkcija $f(x) = a^x$ je injekcija.
6. Ako je $a > 1$ eksponencijalna funkcija je rastuća, te ako je $0 < a < 1$ eksponencijalna funkcija je padajuća.

(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$

Slika 2: Graf eksponencijalne funkcije

Definicija 1.2. [9] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ dana funkcija, $P_0 \in \Omega$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki P_0 ukoliko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow \|f(P) - f(P_0)\| < \varepsilon.$$

Teorem 1.1. *[9] Neka su $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ neprekidne u $P_0 \in \Omega$. Tada vrijedi:*

1. *$f + g$ je neprekidna u P_0.*
2. *$(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ αf je neprekidna u P_0.*
3. *fg je neprekidna u P_0.*
4. *Ako je $g(P_0) \neq 0$ i m=1, onda je $\frac{f}{g}$ neprekidna u P_0.*
5. *Funkcija $\|f\|$ je neprekidna u P_0.*

Definicija 1.3. [8] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *i* $P_0 \in \Omega'$.[3] Za $L \in \mathbb{R}^m$ kažemo da je limes funkcije f u točki P_0 ako vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow \|f(P) - L\| < \varepsilon.$$

Definicija 1.4. [5] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f derivabilna u točki $x_0 \in \Omega$ ako postoji

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Ako je funkcija f derivabilna u točki $x_0 \in \Omega$ onda se izraz (1) zove derivacija funkcije f u točki x_0 i označava s $f'(x_0)$ ili $\frac{d}{dx} f(x_0)$, tj.

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Napomena 1.2. [5] Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \Omega$ onda kažemo da je funkcija f derivabilna na Ω.

Napomena 1.3. [5] Supstitucijom $x = x_0 + \Delta x$ izraz (1) ekvivalentan je izrazu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dakle, možemo pisati

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definirali smo pojam derivacije za funkciju jedne varijable, no pojam derivacije može se lako generalizirati za funkciju n varijabli. Stoga promotrimo funkciju $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, te kako se mijenja vrijednost funkcije f kada se mijenja jedna od varijabli x_i, a ostale varijable pri tome ostaju fiksne. U slučaju kada promatramo promjenu samo po jednoj varijabli funkcije f kažemo da se radi o parcijalnoj derivaciji po toj varijabli.

Definicija 1.5. [9] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_1^0, x_2^0, .., x_n^0) \in \Omega$, $k \in \{1, 2, .., n\}$ fiksan. Kažemo da funkcija f ima parcijalnu derivaciju po k-toj varijabli u točki P_0 ukoliko postoji

$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1, x_2, .., x_k, .., x_n) - f(x_1, x_2, .., x_k^0, .., x_n)}{x_k - x_k^0}.$$

Primjer 1.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ te $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Pogledajmo kako izgleda derivacija funkcije f po varijabli x_1:*

$$f'_{x_1}(x_1, .., x_n) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, .., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta x_1}.$$

Definicija 1.6. [9] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ te $P_0 \in \Omega$. Kažemo da je funkcija f diferencijabilna u P_0 ukoliko postoji linearan operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tako da za proizvoljan $H = (h_1, h_2, .., h_n) \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\lim_{H \to \mathbf{0}} \frac{f(P_0 + H) - f(P_0) - A(H)}{\|H\|} = 0.$$

U tom slučaju linearan operator $H \to A(H)$ nazivamo diferencijal funkcije f u točki P_0 i označavamo ga s $Df(P_0)$.

[3] Ω' je skup svih gomilišta skupa Ω.

Napomena 1.4. [9] Diferencijal funkcije $Df(P_0)$ identificira se s vektorom

$$(f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), .., f'_{x_n}(P_0))$$

koji se naziva gradijent funkcije f u točki P_0 i označava s $\nabla f(P_0)$.

Definicija 1.7. [1] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ otvoren skup i $F : \Omega \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Obična diferencijalna jednadžba n-tog reda je jednadžba oblika:

$$F(x, y, y', y", ..., y^{(n)}) = 0,$$

koja povezuje nezavisnu varijablu x, nepoznatu funkciju y i njezine derivacije $y', y'', .., y^{(n)}$.

Upoznajmo se s klasifikacijom diferencijalnih jednadžbi. S obzirom na broj varijabli o kojima ovisi nepoznata funkcija razlikujemo obične diferencijalne jednadžbe i parcijalne diferencijalne jednadžbe. Ovisno o broju nepoznatih funkcija razlikujemo diferencijalne jednadžbe i sustave diferencijalnih jednadžbi. Red diferencijalne jednadžbe je red najveće derivacije koju sadrži jednadžba, stoga diferencijalne jednadžbe razlikujemo i s obzirom na red. Diferencijalne jednadžbe dijele se na linearne i nelinearne [1].

Definicija 1.8. [1] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvoren skup. Za $u : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je rješenje obične diferencijalne jednadžbe $F(x, y, y', y", ..., y^{(n)}) = 0$ ukoliko zadovoljava sljedeće uvjete:

1. $I \subseteq \mathbb{R}$ je otvoren interval.
2. $u \in C^n(I)$ [4].
3. $(\forall x \in I) \ \ (x, u(x), .., u^{(n)}(x)) \in \Omega$.
4. $(\forall x \in I) \ \ F(x, u(x), .., u^{(n)}(x)) = 0$.

Primjer 1.2. *Provjerimo je li $y_1 = x^2$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{2y}{x}$ na bilo kojem otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, tj. zadovoljava li $y_1 = x^2$ uvjete iz Definicije 1.8.*

1. *Je li $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval? Prvo svojstvo je zadovoljeno jer je već u samom primjeru navedeno da je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval.*
2. *Je li $y_1 \in C^1(I)$? Uočimo da je $y_1 = x^2$ polinom drugog stupnja stoga zaključujemo da je $y_1 \in C^\infty(I)$.*
3. *Očito je za svaki $x \in I$, $(x, x^2) \in \Omega = \mathbb{R}^2$.*
4. *Uvrštavanjem dobijemo da je $y_1' = \frac{2y_1}{x}$, te zaključimo da je zadovoljeno i četvrto svojstvo.*

Budući da su zadovoljena sva svojstva iz Definicije 1.8 slijedi da je $y_1 = x^2$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{2y}{x}$.

Razlikujemo određene vrste diferencijalnih jednadžbi. Neke od njih su: diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama, homogene, egzaktne,..[1] Tijekom primjene eksponencijalnog rasta i pada najčešće se koriste diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama, koje su oblika

$$y'(t) = g(t)h(y). \tag{2}$$

[4] $C^n(I)$ je skup svih funkcija čije su derivacije do uključivo reda n neprekidne na I.

Napomena 1.5. [1] Pogledajmo kako izgleda postupak za rješavanje diferencijalnih jednadžbi sa separiranim varijablama.
Jednadžbu (2) možemo zapisati i u sljedećem obliku:

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y),$$

te ju pomnožiti s dt:

$$dy = g(t)h(y)dt.$$

Zatim jednadžbu podijelimo s $h(y)$ pazeći pritom na uvjet $h(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)dt. \tag{3}$$

Nadalje, integriramo jednadžbu (3):

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt,$$

iz čega lako zaključimo da je

$$\ln|h(y)| = G(t) + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

gdje je G primitivna funkcija funkcije g. Kako je c konstanta pri integriranju, supstitucijom $c = \ln C$ dobivamo sljedeće:

$$\ln|h(y)| = \ln e^{G(t)} + \ln C, \qquad C > 0.$$

Prisjetimo se sljedećeg pravila: $\ln a + \ln b = \ln(ab), \quad a, b \in \mathbb{R}^+$. Primijenimo li navedeno pravilo dobivamo sljedeće:

$$\ln|h(y)| = \ln(Ce^{G(t)}), \qquad C > 0.$$

Budući je $e^{\ln a} = a$ slijedi:

$$h(y) = Ce^{G(t)}, \qquad C \neq 0.$$

2 Eksponencijalni rast i pad

Neka je brzina promjene veličine y proporcionalna samoj veličini y. Navedeno možemo zapisati na sljedeći način:

$$y'(t) = ky(t), \tag{4}$$

gdje k predstavlja konstantu proporcionalnosti i vrijedi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Izraz (4) možemo zapisati i u sljedećem obliku:

$$k = \frac{y'(t)}{y(t)},$$

iz kojeg zaključujemo da je relativna brzina promjene veličine y konstantna.
S obzirom na konstantu k razlikujemo dva slučaja:

1. Za $k < 0$ slijedi da je $y' < 0$, odnosno funkcija y pada.
   Kažemo da se radi o prirodnom padu.

2. Za $k > 0$ slijedi da je $y' > 0$, odnosno funkcija y raste.
   Kažemo da se radi o prirodnom rastu.

Uočimo da je jednadžba (4) diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama. Pronađimo rješenje jednadžbe koristeći postupak opisan u *Napomeni 1.4*:
jednadžbu

$$y'(t) = ky(t),$$

možemo zapisati i u sljedećem obliku:

$$\frac{dy}{dt} = ky(t),$$

te ju pomnožiti s dt:

$$dy = ky(t)dt.$$

Zatim jednadžbu podijelimo s $y(t)$ pazeći pritom na uvjet $y(t) \neq 0$:

$$\frac{dy}{y(t)} = kdt. \tag{5}$$

Nadalje, integriramo jednadžbu (5):

$$\int \frac{dy}{y(t)} = \int kdt,$$

iz čega lako zaključujemo da je

$$\ln |y(t)| = kt + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Iskoristimo supstituciju $c = \ln C$ te dobivamo sljedeće:

$$\ln |y(t)| = \ln e^{kt} + \ln C, \qquad C > 0,$$

iz čega lako dolazimo do rješenja diferencijalne jednadžbe koje glasi:

$$y(t) = Ce^{kt}, \qquad C \neq 0.$$

Zbog uvjeta $y(t) \neq 0$ preostaje provjeriti može li $y = 0$ biti rješenje diferencijalne jednadžbe (4), a to lako provjerimo uvrštavanjem nule u početnu jednadžbu:

$$0 = k0,$$

te zaključujemo da je $y = 0$ također rješenje.
Dakle, rješenje diferencijalne jednadžbe (4) je svaka eksponencijalna funkcija oblika $y(t) = Ce^{kt}$ za proizvoljnu konstantu $C \in \mathbb{R}$. Ukoliko u rješenje uvrstimo $t = 0$ dobivamo konstantu C:

$$y(0) = Ce^{0t} = C,$$

odnosno zaključujemo da je konstanta C vrijednost funkcije y u početnom trenutku. Iz navedenog slijedi da je rješenje (4) dano s

$$y(t) = y(0)e^{kt}.$$

Navedeni zakon rasta/pada primjenjuje se u mnogim modelima, koje ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju.

3 Primjene eksponencijalnog rasta i pada

3.1 Primjene u biologiji

Kada govorimo o biologiji često spominjemo pojam populacija. Populacija je udružena grupa jedinki iste vrste koja raspolaže zajedničkim skupom nasljednih čimbenika, naseljava određeni prostor, pripada određenom ekosustavu, a jedinke su međusobno povezane odnosima razmnožavanja. To može biti skupina ljudi, životinja, biljaka ili nekih drugih organizama. Biolozi se bave proučavanjem karakteristika staništa, karakterista u građi, načinu hranjenja, načinu razmnožavanja, brzini razmnožavanja i brojnim drugim stvarima. Matematika je koristan alat za proučavanje brzine razmnožavanja određene populacije.

3.1.1 Malthusov model

Thomas Robert Malthus bio je engleski demograf i politički ekonomist. U svome radu "An Essay of the Principle of Population" 1798. prikazao je model rasta populacije.

Slika 3: Thomas Robert Malthus

Pogledajmo kako izgleda navedeni model. S $N(t)$ označit ćemo broj jedinki populacije u trenutku t, te neka je $N'(t)$ izraz kojim opisujemo brzinu rasta jedinki populacije u trenutku t. Malthusov model glasi: "*Brzina rasta populacije u nekom trenutku proporcionalna je broju jedinki u tom trenutku.*" Dani model matematički možemo zapisati na sljedeći način:

$$N'(t) = kN(t),$$

odnosno:

$$\frac{dN}{dt} = kN(t), \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

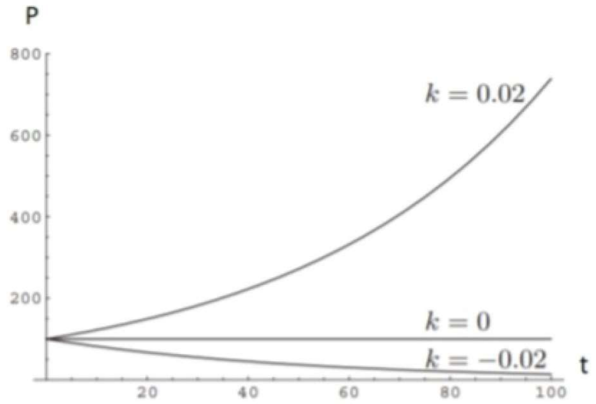
Jednadžba (6) je jednadžba sa separiranim varijablama, stoga vrijedi:

$$N(t) = N(0)e^{kt},$$

gdje je k biološki potencijal.

Promjena populacije ovisi o konstanti k:

1. Ako je $k > 0$ radi se o rastu populacije.
2. Ako je $k < 0$ radi se o padu populacije.
3. Ako je $k = 0$ populacija je u ravnoteži.



Slika 4: Graf eksponencijalne funkcije $N(t) = 100e^{kt}$.

Primjer 3.1. ***(O razmnožavanju bakterija)***
U laboratoriju sat vremena nakon početka promatranja postoji 2000 bakterija, a nakon tri sata 5000 bakterija. Odredite kako se mijenja broj bakterija u ovisnosti o vremenu t te odredite broj bakterija u trenutku $t = 0$.
Rješenje:
S $N(t)$ označit ćemo količinu bakterija u trenutku t, te neka je $k \in \mathbb{R}$ konstanta. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$\frac{dN}{dt} = kN(t).$$

Rješenje navedene diferencijalne jednadžbe glasi:

$$N(t) = Ce^{kt}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Uočimo zadane uvjete: $N(1) = 2000$ i $N(3) = 5000$ te ih uvrstimo u (7) i dobivamo:

$$Ce^{k} = 1000 \quad i \quad Ce^{3k} = 5000.$$

Zatim rješavamo sustav 2 jednadžbe s 2 nepoznanice i zaključimo:

$$k = \frac{1}{2}\ln(2.5) \quad i \quad C = \frac{2000}{e^{0.458}}.$$

Dobivene konstante k i C uvrstimo u početnu jednadžbu:

$$N(t) = \frac{2000}{e^{0.458}}e^{\frac{1}{2}\ln(2.5)t}.$$

Budući da nas zanima broj bakterija u trenutku $t = 0$, uvrstimo $t = 0$ u prethodnu jednadžbu te imamo:

$$N(0) = \frac{2000}{e^{0.458}}e^{\frac{1}{2}\ln(2.5)0} \approx 1265.$$

Možemo zaključiti da je početni broj bakterija bio 1265.

Primjer 3.2. ***(O razmnožavanju pčela na livadi)***
U početnom trenutku na livadi se nalazi 100 pčela. Populacija pčela raste proporcionalno broju jedinki. Nakon 2 mjeseca na livadi se nalazi 150 pčela. Odredite broj pčela nakon 4 mjeseca.
Rješenje:
S $P(t)$ označit ćemo broj pčela na livadi. Uočimo da možemo zapisati:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe dano je s:

$$P(t) = Ce^{kt}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Uočimo zadane uvjete: $P(0) = 100$ i $P(2) = 150$, uvrstimo ih u (8), te dobivamo:

$$C = 100 \quad i \quad k = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

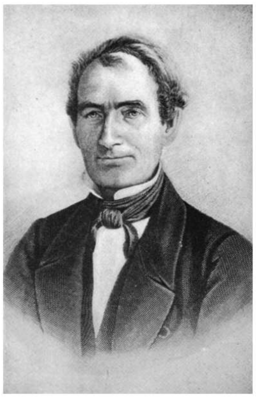
Zanima nas broj pčela na livadi nakon 4 mjeseca, stoga $t = 4$ uvrstimo u početnu jedadžbu:

$$P(4) = 100e^{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}4} = 225.$$

Broj pčela na livadi nakon 4 mjeseca bit će 225.

3.1.2 Verhulstov model

S vremenom su se uočili problemi Malthusovog modela te je Pierre Francois Verhulst počeo raditi na novom modelu. Naime, Malthusov model predviđa eksponencijalni rast populacije, no nemoguće je da populacija neograničeno raste. Postoji niz čimbenika koji utječe na rast populacije, a to su primjerice hrana, prirodni neprijatelji, prirodne katastrofe, smrtnost itd. Malthusov model opisuje rast populacije u idealnim uvjetima, te je kako je i opisano u *Primjeru 3.1* idealan za proučavanje razmnožavanja bakterija u laboratoriju. Pierre Francois Verthulst bio je belgijski matematičar i doktor teorije brojeva sa sveučilišta u Gentu. U svom radu *"Note on the Law of Population Growth"* 1838. objavio je logistički model populacije rasta tzv. Vertulsov model.



Slika 5: Pierre Francois Verhulst

Pogledajmo kako izgleda navedeni model. S $P(t)$ označit ćemo broj jedinki populacije u trenutku t, te neka je $P'(t)$ brzina rasta jedinki populacije u trenutku t. S M ćemo označit maksimalnu količinu koju populacija može doseći. Dani model matematički možemo zapisati na sljedeći način:

$$P'(t) = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right), \tag{9}$$

odnosno:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right).$$

Jednadžba (9) je jednadžba sa separiranim varijablama, stoga vrijedi:

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ce^{kt}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3.3. ***(Populacija riba u ribnjaku)***
U ribnjaku može obitavati najviše 1000 jedinki ribe. Odredite količinu ribe u ribnjaku nakon jedne godine ako je početan broj riba 300 i $k = 0.08$.
Rješenje:
S M ćemo označiti maksimalnu količinu jedinki ribe, te uočimo da vrijedi:

$$\frac{dP}{dt} = 0,08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right).$$

Rješenje navedene diferencijalne jednadžbe glasi:

$$P(t) = \frac{1000Ce^{0,08t}}{1 + Ce^{0,08t}}. \tag{10}$$

Uočimo zadani uvjet $P(0) = 300$ te ga uvrstimo u (10), iz čega dobivamo:

$$C = \frac{3}{7}.$$

Zanima nas broj jedinki ribe nakon godinu dana stoga $t = 1$ uvrstimo u jednadžbu (10):

$$P(1) \approx 317.$$

Broj jedinki ribe u promatranom ribnjaku nakon godinu dana je 317.

Također, Verhulstov model pogodan je za proučavanje širenja zaraze.

Primjer 3.4. ***(Širenje zaraze)***
Promotrimo populaciju od 80 vrtićke djece. Na početku promatranja ustanovljeno je da 5 djece ima vodene kozice. Pretpostavimo da dio djece zajedno provodi vrijeme u istoj vrtićkoj grupi te da sve grupe jednom dnevno idu zajedno na dječje igralište. Nakon 7 dana još 10 djece dobilo je vodene kozice. Brzina promjene broja zaražene djece proporcionalna je umnošku broja zaražene i nezaražene djece. Koliko je vremena potrebno da pola vrtićke djece dobije vodene kozice?
Rješenje:
S $P(t)$ označit ćemo broj zaražene djece u trenutku t te neka je $k \in \mathbb{R}$ konstanta. Uočimo da vrijedi:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right).$$

Rješenje navedene diferencijalne jednadžbe glasi:

$$P(t) = \frac{80}{1 + Ce^{kt}}. \tag{11}$$

Uočimo zadane uvjete $P(0) = 5$ i $P(7) = 15$ te ih uvrstimo u (11), iz čega dobivamo:

$$\frac{80}{1 + C} = 5 \quad i \quad 15(1 + 15e^{7k}) = 80.$$

Zatim, rješavanjem prethodnih jednadžbi imamo da je:

$$C = 15 \quad i \quad k = \frac{1}{7}\ln\frac{16}{45}.$$

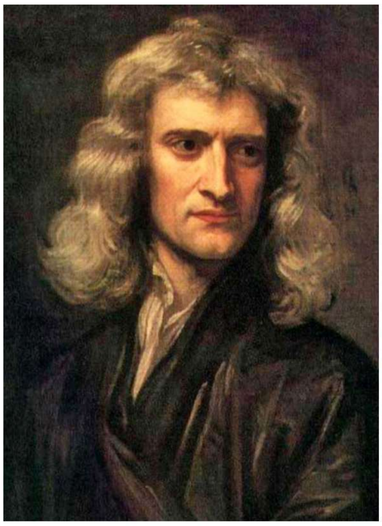
Zanima nas koliko je vremena potrebno da se zarazi pola vrtićke djece, tj. zanima nas za koji će t vrijediti: $P(t) = 40$. Iz

$$\frac{80}{1 + 15e^{\frac{1}{7}\ln\frac{16}{45}t}} = 40$$

slijedi da je $t \approx 18$.
Nakon 18 dana polovica vrtićke djece imat će vodene kozice.

3.2 Newtonov model hlađenja

Isaac Newton bio je engleski fizičar, matematičar i astronom. Jedno od brojnih Newtonovih otkrića bio je model hlađenja koji je objavljen 1701. godine u djelu *"Philosophical Transactions of the Royal Society"*. U navedenom radu nije dan matematički zapis modela. Newton je napisao slijedeće: *"Višak topline je u geometrijskom nizu kada su vremena u aritmetičkom nizu."*, te je njegovo zapažanje omogućilo detaljan razvoj modela hlađenja. Newtonov model hlađenja danas ima široku primjenu kako u svijetu znanosti tako i u svakodnevnom životu, primjerice u forenzici prilikom određivanja vremena smrti, u gastronomiji, slastičarstvu itd.



Slika 6: Isaac Newton

Pogledajmo kako izgleda navedeni model. S $T(t)$ označit ćemo temperaturu objekta kojeg promatramo u trenutku t, a s T_0 temperaturu okoline. Neka je $T'(t)$ brzina promjene temperature objekta kojeg promatramo. Newtonov model glasi: *"Brzina hlađnja tijela proporcionalna je razlici temperature između tijela i okoline."* Dani model matematički možemo zapisati na sljedeći način:

$$T'(t) = k(T(t) - T_0),$$

odnosno:

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_0), \tag{12}$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti.
Jednadžba (12) je jednadžba sa separiranim varijablama stoga vrijedi:

$$T(t) = T_0 + (T(0) - T_0)e^{kt}.$$

Primjer 3.5. ***(Određivanje vremena smrti)***
U hotelskoj sobi konstantne temperature 20°C policija je u ponoć otkrila tijelo žrtve. U trenutku pronalaska temperatura tijela bila je 26°C, a 2h kasnije 24°C. Kada se otprilike dogodio zločin?
Rješenje:
Ako s $T(t)$ označimo temperaturu tijela u trenutku t uočimo da vrijedi sljedeće:

$$T'(t) = k(T(t) - T_0), \qquad k \in \mathbb{R},$$

odnosno

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_0). \tag{13}$$

Budući da imamo zadanu temperaturu sobe, T_0 =20°C, uvrstimo ju u jednadžbu (13) *te imamo:*

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - 20).$$

Rješenje navedene diferencijalne jednadžbe dano je s:

$$T(t) = 20 + Ce^{kt}. \tag{14}$$

Uočimo zadane uvjete: T(0)=26°C i T(2)=24°C te ih uvrstimo u (14) *i dobivamo:*

$$20 + Ce^{k0} = 26 \quad i \quad 20 + Ce^{k2} = 24.$$

Rješavanjem jednadžbi imamo da je:

$$C = 6 \quad i \quad k = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} \approx -0,2.$$

Dobivene konstante k i C uvrstimo u jednadžbu (14)*:*

$$T(t) = 20 + 6e^{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}t}.$$

Ukoliko iskoristimo da je prosječna temperatura tijela živog čovjeka 36,5°C imamo:

$$36,5 = 20 + 6e^{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}t},$$

iz čega slijedi da je

$$t \approx -5.$$

Kako je tijelo pronađeno u ponoć, zaključujemo da se zločin dogodio oko 19h.

Primjer 3.6. ***(Primjena u slastičarstvu)***
U slastičarnici Slatka tajna priprema se kolač. Slastičarka Marija ispekla je biskvit čija je temperatura 98°C. Biskvit se mora hladiti 20 minuta na sobnoj temperaturi od 20°C kako bi se na njega mogla staviti krema. Ako znamo da je temperatura biskvita nakon sat vremena 25°C, kolika je temperatura biskvita u trenutku kada Marija počinje stavljati kremu?
Rješenje:
S $T(t)$ označit ćemo temperaturu biskvita u trenutku t, te neka je $k \in \mathbb{R}$ konstanta. Uočimo da vrijedi:

$$T'(t) = k(T(t) - T_0).$$

Imamo zadanu sobnu temperaturu koja iznosi 20°C, te je rješenje navedene diferencijalne jednadžbe dano s

$$T(t) = 20 + (T(0) - 20)e^{kt}.$$

Budući da znamo koliko iznosi temperatura biskvita u početnom trenutku (T(0)=98°C), uvrstimo to u prethodnu jednadžbu te imamo:

$$T(t) = 20 + 78e^{kt}. \tag{15}$$

Uočimo zadani uvjet $T(60) = 25$ te ga uvrstimo u (15) i dobivamo:

$$k = \frac{\ln \frac{5}{78}}{60} \approx -0,05.$$

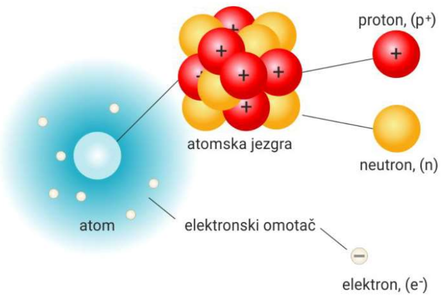
Zanima nas kolika je temperatura biskvita u trenutku $t = 20$:

$$T(20) = 20 + 78e^{\frac{\ln \frac{5}{78}}{60}20} \approx 51.$$

Temperatura biskvita u trenutku kada Marija počinje stavljati kremu je 51°C.

3.3 Primjene u kemiji

Kada govorimo o kemiji najčešće opisujemo nastanak i ponašanje određenih spojeva, ti se spojevi sastoje od molekula, a molekule od atoma, te je za početak važno razumijeti građu atoma. Atom je neutralna čestica koja se sastoji od pozitivno nabijene jezgre u kojoj se nalaze subatomske čestice neutroni i protoni, te od negativno nabijenog elektronskog omotača u kojem se nalaze elektroni.



Slika 7: Shematski prikaz građe atoma.

Broj protona u jezgri atoma naziva se protonskim (atomskim) brojem, a ukupan broj protona i neutrona u jezgri naziva se nukleonski (maseni) broj.

Budući da ćemo u nastavku govoriti o radioaktivnom raspadu upoznajmo vrste raspada atomske jezgre. Alfa-raspad je promjena atomske jezgre pri kojoj jezgra emitira alfa-česticu (jezgru helija), maseni broj se smanjuje za 4, a atomski broj za 2.
Beta-raspad je promjena jezgre pri kojoj dolazi do emisije, odnosno apsorpcije elektrona ili pozitrona i antineutrina ili neutrina. Pritom se maseni broj ne mijenja, a redni broj atoma promijeni se za jedan.
Gama-radioaktivnost prijelaz je između stanja više pobuđenosti atomske jezgre u stanje niže pobuđenosti ili u osnovno stanje, a elektromagnetsko zračenje visoke frekvencije koje se pritom emitira naziva se gama-zračenje. Tada se ne mijenjaju atomski ni maseni broj atoma.

3.3.1 Model radioaktivnog raspada tvari

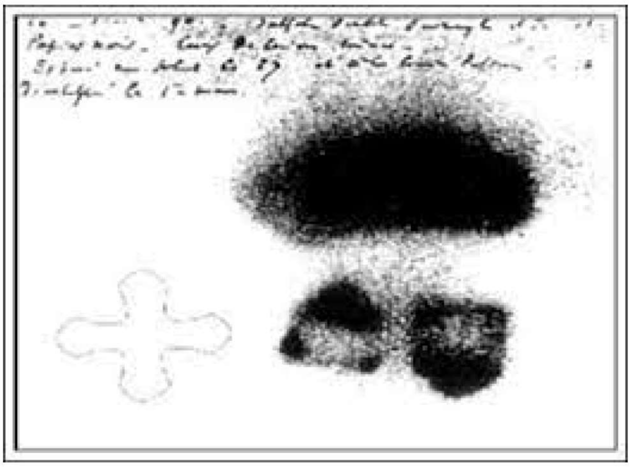
U proljeće 2010. godine u torinskoj katedrali *Duomo di San Giovanni* izloženo je restaurirano platno za koje se vjeruje da je pripadalo Isusu. To je komad platna na kojem su uočljivi obrisi ljudskog lika, te ti obrisi mnoge podsjećaju na Isusa. Je li u navedeni komad platna zaista bilo umotano Isusovo tijelo? Rasprava traje već stoljećima pa je 1988. torinski nadbiskup odlučio zatražiti pomoć znanstvenika te su u laboratorijima sveučilišta u Oxfordu, Zurichu te sveučilišta u američkoj Arizoni provedene tri nezavisne provjere. Provjera je provedena pomoću metode bazirane na radioaktivnom raspadu ugljika ^{14}C, te je utvrđeno da je platno nastalo između 1260.-1390. godine i da se iz navedenog može zaključiti da je platno krivotvorina. Bez obzira na provedenu provjeru neki i dalje opovrgavaju njezin rezultat. Kako je provedena provjera starosti platna? To ćemo opisati kroz sljedeći model.

Slika 8: Torinsko platno

W. C. Rontgen je 1895. godine otkrio rendgenske zrake. Otkriće rendgenskih zraka prethodilo je otkriću radioaktivnosti te modelu radioaktivnog raspada. Pokus koji slijedi napravio je prekretnicu u proučavanju radioaktivnosti.
Kako bi ga bolje razumjeli trebamo poznavati određene pojmove iz kemije stoga ćemo se najprije upoznati s luminescencijom. Luminiscencija je zajednički naziv za pojave emisije elektromagnetskog zračenja atoma ili molekula kao posljedica prijelaza elektrona iz pobuđenog u niže energetsko stanje, obično u osnovno stanje. Može biti izazvana kemijskim procesom (kemoluminiscencija), biološkim procesom (bioluminiscencija), djelovanjem α i β-zraka (radioluminiscencija), svjetlosti (fotoluminiscencija), električne struje (elektroluminiscencija), topline (termoluminiscencija), itd.

S obzirom na trajanje zračenja luminescencija se dijeli na: fluorescenciju (traje samo dok djeluje pobuda) i fosforescenciju (sekundarno zračenje traje i nakon prestanka pobude).

Primjer 3.7. *(Pokus: Becquerelove zrake)*
Becquerel je uzeo mineral dvosoli [5] *kalijeva i uranijeva sulfata* $K_2UO_2(SO_4)_2$*, stavio mineral navedene soli na fotografsku ploču, omotao ju u crni papir te ostavio na sunčevoj svjetlosti. Nakon razmotavanja uočio je jasnu sliku minerala na ploči. Navedenim pokusom Becquerel je došao do zaključka da fluorescencija izaziva pojavu rendgenskih zraka. Ponovio je navedeni postupak bez izlaganja fotografske ploče sunčevoj svjetlosti te uočio da soli uranija ispuštaju nevidljive zrake koje prolaze kroz papir.*



Slika 9: Becquerelov pokus

Svojim pokusom Becquerel je pokazao postojanje redgenskih zraka te da uranij može ispuštati rendgenske zrake. Marie Skolodowska-Curie objavila je prvi rad o radioaktivnosti te je u njemu napisala: *"Uranij, torij i njihovi spojevi ispuštaju Becquerelove zrake".* Tvari koje posjeduju navedeno svojstvo nazvala je radioaktivnim tvarima.
Ernest Rutherford bio je britanski i novozelandski fizičar i kemičar, a Fredrick Soddy bio je engleski kemičar. Zajedno su 1903. godine objavili dva rada *"Usporedno izučavanje radija, torija"* i *"Radiaktivne pretvorbe"* te formirali model radioaktivnog raspada. Naime, Rutherford je dodatno opisao i vrijeme poluraspada.
Pogledajmo kako izgleda navedeni model. S N_0 označit ćemo broj atoma promatrane radioaktivne tvari u početnom trenutku $t = 0$. Neka je $N(t)$ broj atoma promatrane radioaktivne tvari koji nakon vremena t ostanu neraspadnuti, a $N'(t)$ predstavlja brzinu radioaktivnog raspada. Model radioaktivnog raspada glasi: *"Brzina radioaktivnog raspada proporcionalna je broju neraspadnute tvari."* Dani model matematički možemo zapisati na sljedeći način:

$$N'(t) = kN(t), \tag{16}$$

odnosno:

$$\frac{dN}{dt} = kN(t),$$

gdje je $k \in \mathbb{R}$ konstanta proporcionalnosti koja ovisi o radioaktivnoj tvari koju promatramo. Jednadžba (16) je jednadžba sa separiranim varijablama stoga vrijedi:

$$N(t) = N(0)e^{kt}. \tag{17}$$

[5] Dvosoli čine zasebnu skupinu kemijskih spojeva, nastaju iz dviju zasebnih soli s jednim zajedničkim ionom.

Označimo s $T_{1/2}$ vrijeme poluraspada tvari, odnosno vrijeme u kojem se broj atoma radioaktivne tvari smanji za polovicu početne vrijednosti. Uočimo da je za $T = T_{1/2}$ broj atoma jednak $N = \frac{N_0}{2}$, uvrstimo u (17) i dobivamo:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{kT_{1/2}}. \tag{18}$$

Izraz (18) podijelimo s N_0:

$$\frac{1}{2} = e^{kT_{1/2}},$$

zatim logaritmiramo:

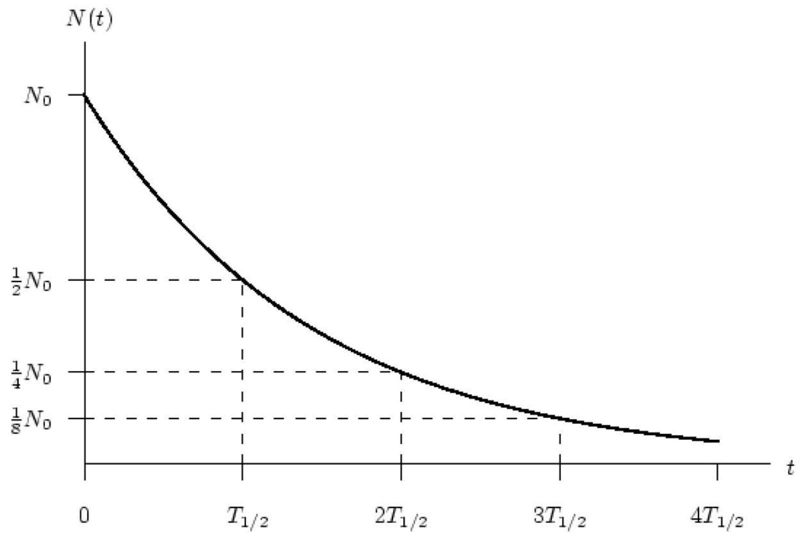
$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{kT_{1/2}},$$

te imamo:

$$\ln 1 - \ln 2 = kT_{1/2}.$$

Budući da znamo da je $\ln 1 = 0$ slijedi da je

$$T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{k}.$$



Slika 10: Grafički prikaz zakona radioaktivnog raspada.

Primjer 3.8. *Vrijeme poluraspada izotopa ugljika* ^{14}C *je 5730 godina. Promatramo uzorak ugljika koji ima masu 200mg.*
a) Odredite jednadžbu kojom je opisana masa promatranog uzorka ugljika nakon t godina.
b) Odredite masu uzorka nakon 1050 godina.
c) Kada će masa uzorka biti jednaka 20mg?
Rješenje:
Znamo da model radioaktivnog raspada glasi:

$$m'(t) = km(t), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Rješenje navedene jednadžbe dano je s

$$m(t) = m(0)e^{kt}.$$

a) Uočimo da vrijeme poluraspada predstavlja vrijeme u kojem se masa izotopa ugljika ^{14}C *prepolovi stoga možemo zapisati sljedeće:*

$$\frac{1}{2}m(t) = m(0)e^{kt}. \tag{19}$$

Uočimo zadano: $t = 5730$ *i* $m = 200mg$ *te uvrstimo u* (19) *i dobivamo:*

$$k = \frac{-\ln 2}{5730}.$$

Jednadžba kojom opisujemo masu promatranog uzorka ugljika nakon t godina glasi:

$$m(t) = 200e^{\frac{-\ln 2}{5730}t}.$$

b) Budući da nas zanima masa uzorka nakon 1050 godina, u prethodnu jednadžbu uvrstit ćemo $t = 1050$*, te imamo sljedeće:*

$$m(1050) = 200e^{\frac{-\ln 2}{5730}1050} \approx 176.$$

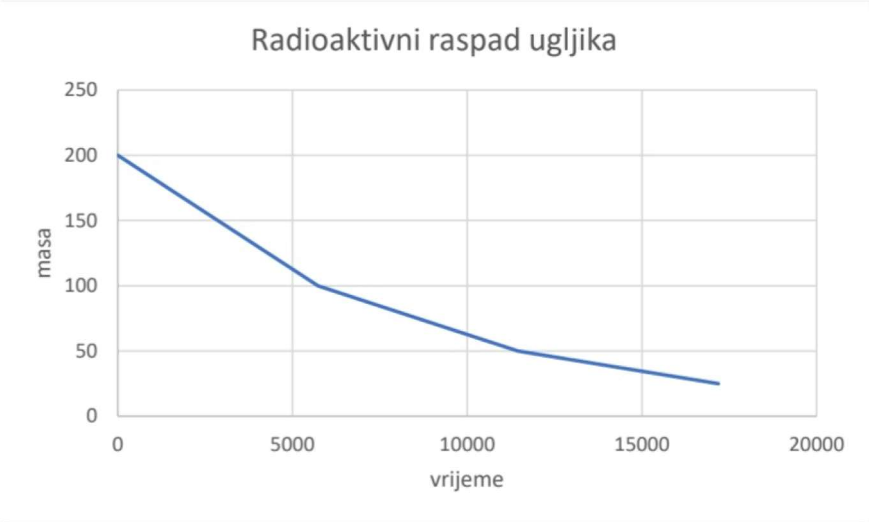
Masa uzorka nakon 1050 godina iznosi 176 mg.
c) Zanima nas kada će masa uzorka biti jednaka 20 mg, tj. zanima nas za koji će t vrijediti $m(t) = 20$*:*

$$200e^{\frac{-\ln 2}{5730}t} = 20.$$

Nakon što podijelimo prethodni izraz s 200 te logaritmiramo dobivamo:

$$t \approx 19034.$$

Masa uzorka nakon 1903 godina bit će 20mg.
Na sljedećem grafu možemo pogledati kako izgleda grafički prikaz radioaktivnog raspada ^{14}C*.*



Slika 11: Grafički prikaz radioaktivnog raspada ^{14}C.

3.4 Cijeljenje rana

Cijeljenje rana je kompleksan proces koji obuhvaća cijeli niz kemijskih i fizioloških događaja na staničnoj i molekularnoj razini. Neki od čimbenika koji utječu na cijeljenje rane su: veličina i dubina rane, stanje dna rane, infekcija, itd. Uobičajeno cijeljenje rana možemo opisati pomoću eksponencijalne funkcije na sljedeći način. S A_0 označimo početnu površinu rane, a s $A(t)$ površinu rane nakon t dana. Cijeljenje rana dano je sljedećim modelom:

$$A(t) = A_0 e^{-0.3t}.$$

Navedeni model je gruba aproksimacija procesa cijeljenja rana.

Primjer 3.9. *Dječak Ivan igrao se na kamenoj plaži s ostalom djecom, u trku se spotaknuo te pao na oštar kamen. Na koljenu mu je nastala rana površine $18mm^2$. Izračunajte kolika će biti površina rane nakon 5 dana te proučite kako će napredovati proces zacijeljivanja rane, tj. odredite nakon koliko dana će rana u potpunosti zacijeliti.*
Rješenje:
Znamo da model cijeljenja rana glasi:

$$A(t) = A_0 e^{-0.3t}.$$

Budući da nas zanima površina rane nakon 5 dana, u prethodnu jednadžbu uvrstit ćemo $t = 5$, te imamo:

$$A(5) = 18e^{-0.3*5} \approx 4,02.$$

Nakon 5 dana površina rane bit će $4,02mm^2$. U sljedećoj tablici možemo vidjeti kako napreduje proces cijeljenja rane, te je vidljivo da će prema ovom modelu nakon 25 dana rana u potpunosti zacijeliti.

t	A(t)	t	A(t)
1	13,33	14	0,27
2	9,88	15	0,2
3	7,32	16	0,15
4	5,42	17	0,11
5	4,02	18	0,08
6	2,98	19	0,06
7	2,2	20	0,04
8	1,63	21	0,03
9	1,21	22	0,02
10	0,9	23	0,02
11	0,66	24	0,01
12	0,49	25	0
13	0,36		

Slika 12: Proces cijeljenja rane

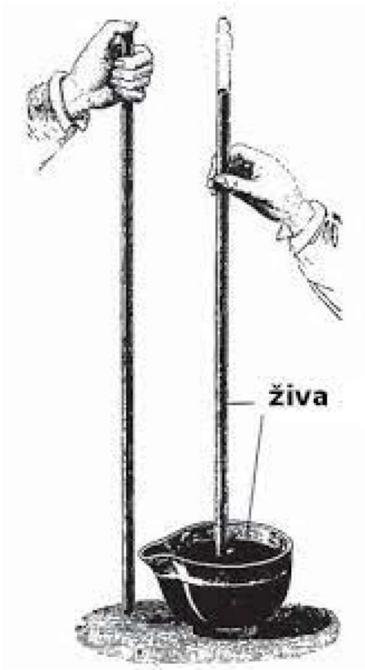
Slika 13: Grafički prikaz funkcije $A(t) = 18e^{-0.3t}$.

3.5 Promjena atmosferskog tlaka s visinom

Tlak na bilo kojem dijelu zemljine površine naziva se atmosferski tlak, te se javlja kao posljedica težine molekula zraka. Prvi čovjek koji je izmjerio atmosferski tlak bio je Evangelista Toricceli, talijanski fizičar i matematičar, 1644. godine.

Primjer 3.10. ***(Toricceliev pokus)***
Toricceli je uzeo staklenu cijev dužine 90 cm koja je na jednom kraju zatvorena, a na drugom otvorena, napunio ju je živom te je donji otvoreni kraj stavio u posudu u kojoj se također nalazi živa, pazeći pritom da u cijev ne uđe nimalo zraka. Gornji, zatvoreni dio cijevi bio je bez zraka i bez atmosferskog tlaka koji je djelovao samo na površinu žive u posudi. Tada se uspostavila ravnoteža između tlaka stupca žive i atmosferskog tlaka. Koristeći opisanu metodu, Toricceli je atmosferski tlak odredio mjerenjem stupca žive u cijevi.

Atmosferski se tlak mijenja s obzirom na nadmorsku visinu, tj. ovisi o njoj. Kako se



Slika 14: Toricceliev pokus

nadmorska visina povećava atmosferski se tlak smanjuje i ta se ovisnost može opisati pomoću eksponencijalne funkcije na sljedeći način. Označimo s p_0 atmosferski tlak na referentnom nivou[6], a s ρ_0 gustoću zraka na referentnom nivou. Neka je g akceleracija zemljine sile teže koja iznosi $9,81 m/s^2$, a h nadmorska visina. Tada je ovisnost opisana izrazom:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} h}.$$

Primjer 3.11. ***(Tlak na Velebitu)***
Lovro se zaputio prema Manitoj peći na Velebitu čiji se ulaz nalazi na visini od $570m$. Tijekom puta napravio je pauzu kod lugarnice koja se nalazi na visini od $400m$. Gustoća zraka iznosi $1,16 kg/m^3$. Ako znamo da je tlak zraka u podnožju Velebita $101400 Pa$, izračunajte koliko iznosi tlak zraka kod lugarnice, a koliko kod ulaza u Manitu peć. Što zaključujete?
Rješenje:
Znamo da je promjena tlaka s obzirom na visinu opisana izrazom:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} h}.$$

Uočimo zadane podatke: $\rho_0 = 1,16 kg/m^3$ i $p_0 = 101400 Pa$. Zanima nas koliki je tlak zraka kod lugarnice koja se nalazi na visini $h = 400m$, stoga zadane podatke uvrstimo u početnu jednadžbu iz čega slijedi:

$$p(400) = 101400 e^{-\frac{1,16*9,81}{101400}*400} \approx 969448,81.$$

Zatim nas zanima koliki je tlak zraka kod ulaza u Manitu peć koji se nalazi na visini $h = 570m$ stoga zadane podatke i $h = 570m$ uvrstimo u početnu jednadžbu, te imamo:

$$p(570) = 101400 e^{-\frac{1,16*9,81}{101400}*570} \approx 95116,73.$$

Tlak zraka na ulazu u Manitu peć iznosi 95116,73Pa, a kod lugarnice 969448,81Pa. Zaključujemo da je kod Manite peći rjeđi, tj. na većoj nadmorskoj visini tlak zraka je rjeđi.

[6] Referentni nivo je dogovorom odabrana vrijednost neke fizikalne veličine u odnosu na koju se promatra ili mjeri promjena vrijednosti te veličine. U ovom slučaju fizikalna veličina je atmosferski tlak.

Literatura

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7th edition*, Wiley, 2000.

[2] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[3] B. P. Demidovič, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[4] D. Huljev, *Prepreke u cijeljenju rane*, Acta medica Croatica, Vol. 67 No. Suplement 1, Zagreb, 2013.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika 1*, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.

[6] J. J. Reynolds, R. J. Harshbarger, *Calculus with Application*, Houghton Mifflin College Div, Dallas, 1999.

[7] N. Roguljić, A. Burazin Mišura, I. Baras, *Eksponencijalna funkcija i njezine primjene u realnom životu*, Časopis za metodiku i nastavu matematike, Vol. 14 No. 53, Zagreb, 2013.

[8] J. Stewart, *Calculus 7th Edition*, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.

[9] Š. Ungar, *Matematička analiza u Rn*, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

[10] https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=43655 (1.7.2022.)

[11] https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=51474 (1.7.2022.)

[12] https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=69730 (4.7.2022.)

[13] https://hr.wikipedia.org/wiki/Populacija(biologija) (11.7.2022.)

[14] https://www.bbc.co.uk/history/historicfigures/malthusthomas.shtml (11.7.2022.)

[15] https://en.wikipedia.org/wiki/PierreFran (12.7.2022.)

[16] http://www.splung.com/content/sid/5/page/radioactivity (7.8.2022.)

[17] https://glossary.periodni.com/glosar.php?hr=luminiscencija (7.8.2022.)

[18] http://www.podvodni.hr/more/meteorologija/1613-sto-je-atmosferski-tlak (11.8.2022.)

[19] https://sahovski-klub-kula.com/index.php/2021/02/24/legenda-sah-i-zrno-psenice/ (13.8.2022.)