Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Ana Tomić**

# Numeričke karakteristike slučajnih varijabli

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Ana Tomić**

# Numeričke karakteristike slučajnih varijabli

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2022.

**Sažetak:** Tema ovog rada su numeričke karakteristike slučajnih varijabli. Za potrebe njihovog definiranja, bilo je potrebno ponoviti osnovne pojmove i iskazati najvažnije rezultate iz teorije vjerojatnosti. Na osnovu slike slučajne varijable, promatrane su dvije vrste slučajnih varijabli - diskretna i neprekidna slučajna varijabla. Kako se definiranje numeričkih karakteristika razlikuje za te dvije varijable, prvo su definirane numeričke karakteristike za diskretnu slučajnu varijablu, reprezentirani su primjeri određivanja tih karakteristika, a zatim je bilo navedeno kako se računaju neke od osnovnih numeričkih karakteristika za neke od najvažnijih parametarskih distribucija. Zatim, analogno je prikazano sve navedeno za slučaj neprekidnih slučajnih varijabli. Dodatno, prikazan je tablični prikaz numeričkih karakteristika za neke od poznatijih parametarskih diskretnih i neprekidnih distribucija. U posljednjem poglavlju objašnjena je i na primjerima prikazana interpretacija numeričkih karakteristika slučajne varijable.

**Ključne riječi:** vjerojatnost, diskretna slučajna varijabla, neprekidna slučajna varijabla, funkcija distribucije, funkcija gustoće, očekivanje, moment, varijanca, kvantil

# Numerical characteristics of random variables

**Abstract:** The topic of this bachelor's thesis is numerical characteristics of random variables. For the purpose of defining them, it was necessary to repeat the basic concepts and express the most important results from probability theory. Based on the image of a random variable, two types of random variables were observed - discrete and continuous random variables. As the definition of numerical characteristics differs for these two types, firstly were defined numerical characteristics for a discrete random variable, examples of determining these characteristics were presented, and then some of the basic numerical characteristics for some of the most important parametric distributions were calculated. Analogously everything stated was shown for the case of continuous random variables. Additionally, a tabular presentation of many numerical characteristics for some of the most important parametric discrete and continuous distributions is presented. In the last chapter, the interpretation of the numerical characteristics of a random variable is explained and shown with examples.

**Keywords:** probability, discrete random variable, continuous random variable, distribution function, density function,expected value, moment, variance, quantile

# Sadržaj

# Uvod

Kako se teorija vjerojatnosti gradila, bilo je očito da je za slučajnu varijablu moguće definirati neke karakteristične brojeve koji zbog svojstava koje imaju mogu biti korisni u opisivanju slučajnih varijabli.

U prvom poglavlju ovog rada definirani su osnovni pojmovi i iskazana su svojstva iz teorije vjerojatnosti koja će biti potrebna kako bi definirali slučajne varijable i njihove numeričke karakteristike.

Zatim, u drugom poglavlju, definirane su diskretna i neprekidna slučajna varijabla te su iskazana i dokazana neka njihova svojstva.

U trećem poglavlju definirane su neke od najvažnijih numeričkih karakteristika diskretnih i neprekidnih slučajnih varijabli te su navedeni primjeri numeričkih karakteristika nekih parametarskih diskretnih te neprekidnih distribucija.

Četvrto poglavlje sadržava tablični prikaz numeričkih karakteristika definiranih u radu za nekoliko važnih diskretnih i neprekidnih parametarskih distribucija.

U posljednjem poglavlju navedena je interpretacija i važnost numeričkih karakteristika obrađenih ranije u ovome radu koja je zatim ilustrirana na konkretnim distribucijama.

# 1 Osnovni pojmovi iz teorije vjerojatnosti

Za potrebe razumijevanja u daljnjem radu će biti uvedeni sljedeći pojmovi: slučajni pokus, prostor elementarnih događaja, $\sigma-$algebra, vjerojatnost, vjerojatnosni prostor i Borelovi skupovi. Nadalje, biti će definirana slučajna varijabla, slika slučajne varijable te njezina funkcija distribucije.

**Definicija 1.** *Za pokus koji ima barem dva (a može i beskonačno mnogo) ishoda, odnosno, za koji ne možemo sa sigurnošću znati realizaciju kažemo da je slučajan.*

**Napomena 1.** *Svaki ishod jednog izvođenja slučajnog pokusa naziva se elementarni događaj.*

**Definicija 2.** *Neprazan skup $\Omega$ je skup svih ishoda slučajnog pokusa i nazivamo ga prostor elementarnih događaja.*

Iz toga slijedi da je elementarni događaj $\omega$ sadržan u prostoru elementarnih događaja $\Omega$.

**Definicija 3.** *Za događaj $A$ stavimo $A^c = \Omega \backslash A$. Događaj $A^c$ zovemo suprotan događaj događaju $A$.*

**Definicija 4.** *Familija $\mathcal{F}$ podskupova od $\Omega$ jest $\sigma$-algebra skupova (na $\Omega$) ako je*

*(F1)* $\emptyset \in \mathcal{F}$

*(F2)* $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$

*(F3)* $(A_i, i \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

**Definicija 5.** *Neka je $\mathcal{F}$ $\sigma - algebra$ na skupu $\Omega$. Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se izmjeriv prostor.*

**Definicija 6.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Funkciju $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ zovemo vjerojatnost ako vrijedi*

*(P1)* ***(nenegativnost vjerojatnosti)*** $P(A) \geq 0$ *, za sve* $A \in \mathcal{F}$

*(P2)* ***(normiranost vjerojatnosti)*** $P(\Omega) = 1$

*(P3)* ***($\sigma$ -aditivnost vjerojatnosti)*** *Ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i,\ i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ vrijedi* $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.

**Definicija 7.** *Uređenu trojku $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$, gdje je $\Omega$ prostor elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ $\sigma$ -algebra na $\Omega$ i $P$ vjerojatnost na $\mathcal{F}$ nazivamo vjerojatnosni prostor.*

**Definicija 8.** *Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Sa $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ označimo $\sigma$-algebru generiranu familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. Elemente $\sigma$-algebre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ćemo zvati Borelovi skupovi.*

**Napomena 2.** *Borelovi skupovi su svi otvoreni skupovi, zatvoreni skupovi, intervali oblika* $(a, b]\,, [a, b)$, *jednočlani skupovi, prebrojivi podskupovi od* $\mathbb{R}$, *itd.*

**Definicija 9.** *Neka je* $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *je slučajna varijabla (na* $\Omega$*) ako je* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ *za svaki* $B \in \mathcal{B}$, *tj.* $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$.

**Definicija 10.** *Skup vrijednosti koje slučajna varijabla* $X$ *može poprimiti naziva se slika slučajne varijable i označava s* $\mathcal{R}(X)$.

Slučajne varijable dijelimo na diskretne slučajne varijable kojima je slika diskretan skup (konačan ili prebrojiv) i na neprekidne slučajne varijable kojima je slika neprebrojiv skup. Osim na osnovu slike, podjela slučajnih varijabli provodi se i na osnovi njihovih funkcija distribucija, također na diskretne i neprekidne. Dodatno, funkcijom distribucije su opisana svojstva slučajnih varijabli.

**Definicija 11.** *Neka je* $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $X$ *slučajna varijabla na njemu. Funkciju* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *koja realnom broju* $x$ *pridružuje vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi realizaciju manju ili jednaku tom broju, tj. funkciju definiranu s*

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)$$

*zovemo funkcija distribucije slučajne varijable.*

# 2 Slučajna varijabla

U nastavku će biti definirane diskretna i neprekidna slučajna varijabla te će biti navedena i dokazana neka njihova osnovna svojstva i primjeri.

## 2.1 Diskretna slučajna varijabla

**Definicija 12.** *Slučajna varijabla $X$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je diskretna ako postoji diskretan skup $D \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $P(X \in D) = 1$, odnosno, ako je slika slučajne varijable $X$ najviše prbrojiv skup.*

Diskretne slučajne varijable zadajemo tako da zadamo skup $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$ i pripadne vjerojatnosti $p_i = P(X = x_i), i \in I, I \subseteq \mathbb{N}$. To zapisujemo u obliku tablice:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

i taj prikaz nazivamo **zakon razdiobe**, **tablica distribucije** ili **distribucija slučajne varijable** $X$.

**Propozicija 1.** *([2], str. 58.) Niz $(p_i, i \in \mathbb{N})$ ima sljedeća svojstva:*

1. $0 \leq p_i \leq 1, \forall i \in \mathbb{N}$
2. $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} p_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

*Dokaz.* Budući da je $X$ slučajna varijabla koja prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X)$, slijedi da je:

$$P(X \in \mathcal{R}(X)) = P(\Omega) = 1.$$

Dakle, imamo:

$$\{X = x_i\} \subseteq \{X \in \mathcal{R}(X)\}.$$

Zbog monotonosti vjerojatnosti i definicije vjerojatnosti vrijedi:

$$0 \leq P(X = x_i) \leq P(X \in \mathcal{R}(X)).$$

Konačno, dobivamo:

$$0 \leq p_i = P(X = x_i) \leq 1.$$

Osim toga, zbog toga što je $\mathcal{R}(X)$ skup, vrijedi da je $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, pa su događaji $\{X = x_i\}$ disjunktni. Iz toga slijedi:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\}\right) = P(X \in \mathcal{R}(X)) = 1.$$

$\square$

**Napomena 3.** *U slučaju diskretne slučajne varijable funkcija distribucije dana je s*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

**Definicija 13.** *Neka je $X$ slučajna varijabla i $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ slika slučajne varijable $X$. Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu formulom*

$$f(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}, x_i \in \mathcal{R}(X)$$

*nazivamo gustoća diskretne slučajne varijable $X$.*

**Primjer 1.** *Prilikom bacanja pravilno izrađenog novčića dva puta za redom, skup svih mogućih ishoda je $\Omega = \{(p,p),(g,g),(p,g),(g,p)\}$, gdje $p$ označava realizaciju pisma, a $g$ realizaciju glave. Odredimo skup vrijednosti koje ta slučajna varijabla može primiti i njima pridružene vjerojatnosti, distribuciju slučajne varijable te vjerojatnost da se glava realizira barem jednom.*
*Označimo sa $X$ slučajnu varijablu koja svakom bacanju novčića pridružuje broj realiziranih glava. Kako se radi o pravilno izrađenom novčiću, svi ishodi su jednako mogući, odnosno: $P(\{(p,p)\}) = P(\{(g,g)\}) = P(\{(p,g)\}) = P(\{(g,p)\}) = \frac{1}{4}$.*
*Skup svih vrijednosti koje slučajna varijabla $X$ može poprimiti, odnosno slika slučajne varijable $X$ je: $\mathcal{R}(X) = \{0,1,2\}$.*
*Pridružene vjerojatnosti elementima slike su:*

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(\{(p,p)\}) = \frac{1}{4} \\ P(X=1) &= P(\{(p,g),(g,p)\}) = P(\{(p,g)\}) + P(\{(g,p)\}) = \frac{1}{2} \\ P(X=2) &= P(\{(g,g)\}) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

*Dakle, tablica distribucije slučajne varijable $X$ je*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

*Označimo s $A$={glava je pala barem jednom}={glava je pala jednom ili dva put}.*
*Dakle, $P(A) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{3}{4}$.*

## 2.2 Neprekidna slučajna varijabla

**Definicija 14.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dan vjerojatnosni prostor i funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava:*

1. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, *za svaki $x \in \mathbb{R}$*

2. *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable f takva da je* $P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

*Funkciju X zovemo apsolutno neprekidna ili samo neprekidna slučajna varijabla. Funkciju f zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X ili kraće funkcija gustoće slučajne varijable X.*

**Propozicija 2.** ***Svojstva funkcije gustoće****([2], str. 61.)*
*Za funkciju gustoće f slučajne varijable X vrijede sljedeća svojstva:*

1. *(**nenegativnost**)* $f(x) \geq 0$, *za sve* $x \in \mathbb{R}$
2. *(**normiranost**)* $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

*Dokaz.* Nenegativnost slijedi direktno iz definicije neprekidne slučajne varijable.
Pokažimo da vrijedi normiranost. Vrijedi $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{n} f(x)dx.$
Zbog neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na monotonu rastuću familiju skupova, slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{n} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} P(X \leq n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X \in \langle -\infty, n]) = P(\Omega) = 1.$ □

**Napomena 4.** *U slučaju neprekidne slučajne varijable, funkcija distribucije dana je s*

$$F_(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

**Primjer 2.** *Odredimo funkciju distribucije neprekidne slučajne varijable s funkcijom gustoće zadanom s:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(x), & x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}] \\ 0, & x \notin \langle 0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}.$$

*Ako je* $x \in \langle -\infty, 0]$, *vrijedi*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.$$

*Za* $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}]$ *je*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \sqrt{2}\cos(t)dt = \sqrt{2}\sin(x).$$

*Za* $x \in \langle \frac{\pi}{4}, \infty \rangle$ *je*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos(t)dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} 0dt = \sqrt{2}\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

*Slijedi da je funkcija distribucije dane neprekidne slučajne varijable X*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\infty, 0] \\ \sqrt{2}\sin(x), & x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right] \\ 1, & x \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \infty \right\rangle \end{cases} .$$

# 3 Numeričke karakteristike slučajnih varijabli

## 3.1 Numeričke karakteristike diskretne slučajne varijable

### 3.1.1 Matematičko očekivanje

**Primjer 3.** *Kao uvodni primjer, pretpostavimo da promatramo duljinu telefonskog poziva iz određene telefonske govornice u određeno doba dana. Recimo, promatramo prvi poziv poslije 12 sati. Pretpostavimo da nezavisno ponovimo pokus n puta, gdje je n vrlo velik i pritom zabilježimo trošak svakog od njih (trošak je određen duljinom poziva). Ako uzmemo aritmetičku sredinu troškova, odnosno zbrojimo ukupnu cijenu svih n poziva i zatim podijelimo s n, očekujemo da će aritmetička sredina u nekom smislu konvergirati nekom broju kojeg bismo trebali tumačiti kao dugoročnu očekivanu cijenu poziva.*

**Definicija 15.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i $X$ slučajna varijabla na njemu. Ako red $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$ apsolutno konvergira, odnosno, ako red $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)P(\omega)|$ konvergira, kažemo da slučajna varijabla $X$ ima matematičko očekivanje i broj*

$$E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$$

*zovemo matematičko očekivanje slučajne varijable $X$.*

**Teorem 1.** *([2], str. 56.) Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

*slučajna varijabla na njemu. Redovi $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$ i $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i$, istovremeno apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju. U slučaju apsolutne konvergencije, sume su im jednake, tj. vrijedi*

$$E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i.$$

*Dokaz.* Familija $\{\{X = x_i\}, i \in \mathbb{N}\}$ čini particiju skupa $\Omega$ (jer je s X zadana funkcija), pa jedan red možemo dobiti iz drugog, tj.

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x_i\}} X(\omega)P(\omega) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x_i\}} x_i P(\omega) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \sum_{\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x_i\}} P(\omega) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i.
\end{aligned}$$

Ukoliko iskoristimo rezultate vezane za ponovljene redove, možemo zaključiti da ovi redovi istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju te da su im kod apsolutne konvergencije sume jednake.

□

**Teorem 2.** *([2], str. 87.) Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor,*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

*slučajna varijabla na njemu i $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$ funkcija takva da postoji $E[g(X)]$. Tada vrijedi:*

$$E[g(X)] = \sum_{i \in \mathbb{N}} g(x_i) p_i.$$

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega))P(\omega) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}} g(X(\omega))P(\omega) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}} g(x_i)P(\omega) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} g(x_i) \sum_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}} P(\omega) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} g(x_i) p_i. \end{aligned}$$

□

Uz prethodni teorem i definiciju očekivanja, može se pokazati da vrijede svojstva očekivanja iskazana u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 3.** ***Važna svojstva matematičkog očekivanja****([2], str. 87.)*
*Za matematičko očekivanje diskretne slučajne varijable $X$ vrijede sljedeća svojstva:*

1. ***(linearnost očekivanja)*** *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, a $X$ slučajna varijabla koja ima očekivanje. Tada i slučajna varijabla $aX + b$ ima očekivanje te vrijedi: $E[aX + b] = aE[X] + b$.*

2. ***(monotonost očekivanja)*** *Ako su $X$ i $Y$ dvije slučajne varijable koje imaju očekivanja i ako vrijedi $X(\omega) \leq Y(\omega)$ za sve $\omega \in \Omega$ tada vrijedi $E[X] \leq E[Y]$.*

3. ***(pozitivnost očekivanja)*** *Ako je $X$ slučajna varijabla takva da je $X(\omega) \geq 0$ te ukoliko je red $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$ konvergentan, tada vrijedi $E[X] \geq 0$.*

*Dokaz.*

1. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $X$ slučajna varijabla koja ima očekivanje te neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom $g(t) = at + b$. Tada je $g(X) = aX + b$ i vrijedi

$$\begin{aligned} E[aX + b] = E[g(X)] &= \sum_{i \in \mathbb{N}} g(x_i) p_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} (ax_i + b) p_i = \\ &= a \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i + \sum_{i \in \mathbb{N}} b = aE[X] + b \cdot 1 = aE[X] + b. \end{aligned}$$

2. Neka su $X$ i $Y$ dvije slučajne varijable koje imaju očekivanje te neka je $X(\omega) \leq Y(\omega)$, za svaki $\omega \in \Omega$. Vrijedi

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\omega) = E[Y] \implies E[X] \leq E[Y].$$

3. Neka je X slučajna varijabla sa svojstvom da je $X(\omega) \geq 0$ za svaki $\omega \in \Omega$ te neka je red $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$ konvergentan. Iz definicije znamo da vrijedi $P(\omega) \geq 0$ za svaki $\omega \in \Omega$, pa je red $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$ apsolutno konvergentan i $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) \geq 0$, odnosno, $E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) \geq 0$. Dakle, vrijedi $E[X] \geq 0$.

□

**Teorem 3.** *([2], str. 87.) Neka su $X$ i $Y$ slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ koje imaju očekivanja $E[X]$, odnosno $E[Y]$. Tada za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ slučajna varijabla $aX + bY$ također ima očekivanje i vrijedi $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$.*

*Dokaz.* Iz tvrdnji vezanih za sume konvergentnih redova, kako redovi $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$ i $\sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\omega)$ apsolutno konvergiraju, slijedi da i red $\sum_{\omega \in \Omega}(aX(\omega) + bY(\omega))P(\omega)$ apsolutno konvergira. Sada je

$$\begin{aligned} E[aX + bY] &= \sum_{\omega \in \Omega}(aX(\omega) + bY(\omega)) = \\ &= a\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) + b\sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega))P(\omega) = \\ &= aE[X] + bE[Y]. \end{aligned}$$

□

### 3.1.2 Varijanca i ostali momenti

Neka je $X$ slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i $r > 0$.

**Definicija 16.** *Ako postoji $E(X^r)$, onda broj*

$$\mu_r = E(X^r)$$

*zovemo **moment r-tog reda** ili **r-ti apsolutni moment od X**.*

**Definicija 17.** *Ako postoji $E(|X|^r)$, onda broj*

$$E(|X|^r)$$

*zovemo **apsolutni moment r-tog reda** ili **apsolutni r-ti moment od X**.*

**Definicija 18.** *Ako postoji $E[X]$ i $E(|X - E[X]|^r)$ onda broj*

$$E(|X - E[X]|^r)$$

*zovemo **r-ti apsolutni centralni moment od X**.*

**Definicija 19.** *Neka je $X$ slučajna varijabla i neka $E[X]$ postoji.* ***Varijancu*** *slučajne varijable $X$ označavamo s*

$$VarX = E[(X - E[X])^2]$$

*ukoliko postoji $E[(X - E[X])^2]$.*

Uočimo da je varijanca drugi centralni moment slučajne varijable $X$.

**Definicija 20.** *Neka je $X$ slučajna varijabla te neka postoji $E[(X-E[X])^2]$, odnosno, neka $X$ ima varijancu. Kvadratni korijen iz varijance naziva se* ***standardna devijacija*** *i označava se s $\sigma_X = \sqrt{VarX}$.*

**Propozicija 4.** ***Važna svojstva varijance****([3], str. 32.)*
*Za varijancu diskretne slučajne varijable $X$ vrijede sljedeća svojstva:*

1. $VarX = E[X^2] - (E[X])^2$.

2. *Neka je $X$ slučajna varijabla koja ima varijancu te neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:* $Var(aX + b) = a^2 VarX$.

*Dokaz.*

1. $E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$.

2. $Var(aX + b) = E((aX + b) - (aE[X] + b))^2 = E(aX - aE[X])^2 = a^2 E(X - E[X])^2 = a^2 VarX$.

□

**Propozicija 5.** ***Postupak standardizacije*** *([2], str. 101.) Neka je $X$ slučajna varijabla s očekivanjem $\mu \in \mathbb{R}$ i varijancom $\sigma^2 > 0$. Tada slučajna varijabla:*

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

*ima očekivanje 0 i varijancu 1.*

*Dokaz.*
Ukoliko iskoristimo rezultate pokazane u Propoziciji 3. i Propoziciji 4., imamo:

$$E[Y] = \frac{1}{\sigma}(E[X] - \mu) = 0,$$
$$VarY = \frac{1}{\sigma^2} VarX = 1.$$

□

**Definicija 21.** *Treći centralni standardizirani moment, ukoliko postoji, odnosno*

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

*naziva se asimetričnost (engl. skewness).*

**Definicija 22.** *Četvrti centralni standardizirani moment, ukoliko postoji, odnosno*

$$\gamma_2 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right]$$

*naziva se spljoštenost (engl. kurtosis).*

### 3.1.3 Kvantili

Osim iz momenata, distribuciju slučajne varijable možemo proučiti i promatrajući kvantile.

**Definicija 23.** *Za $p \in \langle 0, 1\rangle$, $p$-**kvantil** slučajne varijable $X$ s funkcijom distribucije $F$ je realan broj $x_p$ takav da je $P(X \leq x_p) \geq p$ i $P(X \geq x_p) \geq 1-p$.*

Uočimo: $p$-kvantil je broj takav da je slučajna varijabla manja od tog broja s vjerojatnošću većom ili jednakom $p$ te veća od tog broja s vjerojatnošću većom ili jednakom $1-p$.

**Definicija 24.** ***Medijan** slučajne varijable $X$ je $0.5$-kvantil slučajne varijable $X$, odnosno, medijan je realan broj $x_{0.5}$ takav da je $P(X \leq x_{0.5}) \geq 0.5$ i $P(X \geq x_{0.5}) \geq 0.5$.*

**Definicija 25.** ***Donji kvartil** slučajne varijable $X$ je $0.25$-kvantil slučajne varijable $X$, odnosno realan broj $x_{0.25}$ takav da je $P(X \leq x_{0.25}) \geq 0.25$ i $P(X \geq x_{0.25}) \geq 0.75$ a **gornji kvartil** slučajne varijable $X$ je $0.75$-kvantil slučajne varijable $X$, odnosno realan broj $x_{0.75}$ takav da je $P(X \leq x_{0.75}) \geq 0.75$ i $P(X \geq x_{0.75}) \geq 0.25$.*

**Primjer 4.** *Neka je $X$ slučajna varijabla dana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

*Odredimo očekivanje, varijancu, standardnu devijaciju, asimetričnost, spljoštenost i medijan. Očekivanje te slučajne varijable iznosi*

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

*Kako je*

$$E[X]^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{4},$$

*varijanca te slučajne varijable iznosi*

$$VarX = E[X^2] - (E[X]^2) = \frac{13}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

*Standardna devijacija iznosi*

$$\sigma = \sqrt{VarX} = 1.$$

*Kako vrijedi*

$$E(X^3) = 0^3 \cdot \frac{1}{8} + 1^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{8} + 3^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{33}{4},$$

*asimetričnost te slučajne varijable iznosi*

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X-E[X]}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{E[X^3]-3E[X^2]E[X]+2E[X]^3}{\sigma^3} = \frac{33}{4} - 3\cdot\frac{13}{4}\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot(\frac{3}{2})^3 = \frac{3}{8}.$$

*Kako je*

$$E[X^4] = 0^4\cdot\frac{1}{8} + 1^4\cdot\frac{1}{2} + 2^4\cdot\frac{1}{8} + 3^4\cdot\frac{1}{4} = \frac{91}{4},$$

*spljoštenost te slučajne varijable iznosi*

$$\gamma_2 = E\left[\left(\frac{X-E[X]}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{E[X^4]-4E[X]E[X^3]+6(E[X])^2E[X^2]-3(E[X])^4}{\sigma^4} =$$

$$= \frac{\frac{91}{4} - 4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{33}{4} + 6\cdot(\frac{3}{2})^2\cdot\frac{13}{4} - 3\cdot(\frac{3}{2})^4}{1^4} = \frac{31}{16}.$$

*Vrijedi*

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \approx 0.625 \geq 0.5,$$
$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8} \approx 0.875 \geq 0.5.$$

*Dakle, medijan slučajne varijable $X$ je 1.*

### 3.1.4 Numeričke karakteristike nekih parametarskih diskretnih distribucija

#### Bernoullijeva distribucija

Ako je slučajna varijabla dana tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

za $p \in \langle 0, 1\rangle$, kažemo da ona ima Bernoullijevu distribuciju.
Izračunajmo numeričke karakteristike ove slučajne varijable.
Očekivanje te slučajne varijable iznosi:

$$E[X] = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p.$$

Za računanje varijance, asimetričnosti i spljoštenosti biti će potrebno prethodno izračunati $E[X^2]$, $E[X^3]$, $E[X^4]$. Imamo

$$E[X^2] = 0^2\cdot(1-p) + 1^2\cdot p = p,$$
$$E[X^3] = 0^3\cdot(1-p) + 1^3\cdot p = p,$$
$$E[X^2] = 0^4\cdot(1-p) + 1^4\cdot p = p.$$

Varijanca te slučajne varijable iznosi

$$VarX = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Standardna devijacija te slučajne varijable iznosi

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)}.$$

Asimetričnost te slučajne varijable iznosi

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \frac{E(X - E[X])^3}{\sigma^3} &= \frac{E[X^3] - 3E[X^2]E[X] + 2(E[X])^3}{\sqrt{p^3(1-p)^3}} = \\ &= \frac{p - 3p^2 + 2p^3}{p(1-p)\sqrt{p(1-p)}} = \\ &= \frac{p - 3p^2 + 2p^3}{p(1-p)\sqrt{p(1-p)}} = \\ &= \frac{p(2p^2 - 3p + 1)}{p(1-p)\sqrt{p(1-p)}} = \\ &= \frac{(1-p)(1-2p)}{(1-p)\sqrt{p(1-p)}} = \\ &= \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}.\end{aligned}$$

Spljoštenost te slučajne varijable iznosi

$$\begin{aligned}\gamma_2 = \frac{E(X - E[X])^4}{\sigma^4} &= \frac{E[X^4] - 4E[X^3]E[X] + 6(E[X])^2E[X^2] - 3(E[X])^4]}{p^2(1-p)^2} = \\ &= \frac{p - 4p^2 + 6p^3 - 3p^4}{p^2(1-p)^2} = \\ &= \frac{p(1 - 4p + 6p^2 - 3p^3)}{p^2(1-p)^2} = \\ &= \frac{(1-p)(3p^2 - 3p + 1)}{p(1-p)^2} = \\ &= \frac{3p^2 - 3p + 1}{p(1-p)}.\end{aligned}$$

Lako se pokaže da je medijan te slučajne varijable

$$x_{0.5} = \begin{cases} 0, p < 1/2 \\ [0,1], p = 1/2 \\ 1, p > 1/2 \end{cases}.$$

**Primjer 5.** *Označimo li s $X$ slučajnu varijablu čija je vrijednost broj okrenutih glava pri jednom bacanju pravilno izrađenog novčića, možemo primijetiti da $X$ ima Bernoullijevu distribuciju. Za tu slučajnu varijablu $X$, parametar $p$ jednak je $1-p$ i iznose $\frac{1}{2}$. Prema tome, $E[X] = \frac{1}{2}$ i $Var X = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.*

### Binomna distribucija

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0,1 \rangle$. Za slučajnu varijablu koja prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ s vjerojatnostima $p_i = P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ kažemo da ima binomnu distribuciju s

parametrima $n$ i $p$ i pišemo: $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Za potrebe računanja numeričkih karakteristika binomne slučajne varijable, potrebna je binomna formula iskazana u sljedećem teoremu.

**Teorem 4.** ***Binomna formula***([4], *str. 24.) Neka su* $a, b \in \mathbb{C}$ *i* $n \in \mathbb{N}$. *Tada*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

*Dokaz.* Za dokaz vidjeti [4], str. 24.. □

**Napomena 5.** *([1], str. 4.) Za binomne koeficijente vrijedi svojstvo*

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}.$$

Odredimo očekivanje te slučajne varijable.

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Kako je za $i = 0$, $i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = 0$ i ukoliko iskoristimo Napomenu 5., imamo

$$E[X] = np \sum \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{(n-1)-(i-1)}.$$

Uvedimo supstitucije $n - 1 = m$ i $i - 1 =$ j. Sada imamo

$$E[X] = np \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}.$$

Sada, koristeći reultat Teorema 4., slijedi

$$E[X] = np(p + 1 - p)^m.$$

Dakle, očekivanje te slučajne varijable iznosi

$$E[X] = np.$$

Za računanje varijance i asimetričnosti biti će potrebno prethodno izračunati $E[X^2]$ i $E[X^3]$. U tim računima također se koristi Napomena 5., Teorem 4. i supstitucije $n - 1 = m$ i $i - 1$ $=$ j. Osim toga, za $i = 0$ vrijedi: $i^2\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = 0$ i $i^3\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = 0$.
Sada je

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i \cdot i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} in \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=-1}^{n} i \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{(n-1)-(i-1)} = \\
&= np \sum_{j=0}^{n} (j+1) \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} = \\
&= np \left[ \sum_{j=0}^{n} j \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \right].
\end{aligned}$$

Računanjem očekivanja, dobiveno je $\sum\limits_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = np$, pa je $\sum\limits_{j=0}^{n} j\binom{m}{j}p^j(1-p)^{m-j} = mp$. Dakle,

$$E[X^2] = np[mp + (p+1-p)^m] = np[(n-1)p+1] = n^2p^2 - np^2 + np.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
E[X^3] &= \sum_{i=0}^{n} i^3\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 n\binom{n-1}{i-1}p^i(1-p)^{n-i} = np\sum_{i=1}^{n} i^2\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{(n-1)-(i-1)} = \\
&= np\sum_{j=0}^{n}(j+1)^2\binom{m}{j}p^m(1-p)^{m-j} = \\
&= np\left[\sum_{j=0}^{n} j^2\binom{m}{j}p^m(1-p)^{m-j} + 2\sum_{j=0}^{n} j\binom{m}{j}p^m(1-p)^{m-j} + \sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}p^m(1-p)^{m-j}\right].
\end{aligned}$$

Računanjem $E[X^2]$, dobiveno je $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = n^2p^2 - np^2 + np$, iz čega slijedi da je $\sum\limits_{j=0}^{n} j^2\binom{m}{j}p^j(1-p)^{m-j} = m^2p^2 - mp^2 + mp$. Sada je

$$\begin{aligned}
E[X^3] &= np[m^2p^2 - mp^2 + mp + 2mp + 1] = np[m^2p^2 - mp^2 + 3mp + 1] = \\
&= np[(n-1)^2p^2 - (n-1)p^2 + 3(n-1)p + 1].
\end{aligned}$$

Varijanca te slučajne varijable iznosi

$$VarX = E[X^2] - (E[X])^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

Standardna devijacija te slučajne varijable iznosi

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Odredimo asimetričnost te slučajne varijable. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{E(X-E[X])^3}{\sigma^3} = \frac{E[X^3] - 3E[X^2]E[X] + 2(E[X])^3}{\left(\sqrt{np(1-p)}\right)^3} = \\
&= \frac{np[(n-1)^2p^2 - (n-1)p^2 + 3(n-1)p + 1] - 3[(n^2p^2 - np^2 + np)np] + 2n^3p^3}{np(1-p)\sqrt{np(1-p)}} = \\
&= \frac{np[(n-1)^2p^2 - (n-1)p^2 + 3(n-1)p + 1 - 3n^2p^2 + 3np^2 - 3np + 2n^2p^2]}{np(1-p)\sqrt{np(1-p)}} = \\
&= \frac{n^2p^2 - 2np^2 + p^2 - np^2 + p^2 - 3p + 1 - 3n^2p^2 + 3np^2 + 2n^2p^2}{(1-p)\sqrt{np(1-p)}} = \\
&= \frac{2p^2 - 3p + 1}{(1-p)\sqrt{(1-p)}} = \frac{1-2p(1-p)}{(1-p)\sqrt{np(1-p)}}.
\end{aligned}$$

Dakle, asimetričnost te slučajne varijable iznosi:

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Na sličan način može se izračunati i spljoštenost, ali, zbog tehničke zahtjevnosti, račun se izostavlja. Spljoštenost te slučajne varijable iznosi

$$\gamma_2 = \frac{3p^2 - 3p + 1}{np(1-p)}.$$

Medijan te slučajne varijable je $\lfloor np \rfloor$ ili $\lceil np \rceil$.

**Primjer 6.** *Odredimo očekivanje i varijancu binomne slučajne varijable $X$ s parametrima $n = 20$ i $p = \frac{1}{4}$.*
*Očekivanje te slučajne varijable iznosi*

$$E[X] = n \cdot p = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5.$$

*Varijanca te slučajne varijable iznosi*

$$VarX = n \cdot p \cdot (1-p) = 20 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}.$$

## 3.2 Numeričke karakteristike neprekidne slučajne varijable

Kako bismo definirali numeričke karakteristike neke neprekidne slučajne varijable potrebno je koristiti pripadnu funkciju gustoće.

### 3.2.1 Matematičko očekivanje

**Definicija 26.** *Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla te neka je $f$ njena funkcija gustoće. Ukoliko je integral*

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx$$

*konačan, kažemo da slučajna varijabla $X$ ima matematičko očekivanje i broj*

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

*nazivamo* ***matematičko očekivanje*** *neprekidne slučajne varijable.*

**Napomena 6.** *Za očekivanje neprekidne slučajne varijable vrijede svojstva očekivanja koja su prethodno iskazana i dokazana kod diskretne slučajne varijable.*

**Napomena 7.** *Neka je $g$ realna funkcija realne varijable. Očekivanje slučajne varijable $g(X)$ (ukoliko postoji) računa se slično kao kod diskretne slučajne varijable, ali uz funkciju gustoće te integral. Odnosno,*

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

### 3.2.2 Varijanca i ostali momenti

Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla, $f$ njezina funkcija gustoće i $r > 0$.

**Definicija 27.** *Ako postoji $E(X^r)$, onda broj*

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

*zovemo r-ti moment od X.*

**Definicija 28.** *Ako postoji $E(|X|^r)$, onda broj*

$$\beta_r = E(|X|^r) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r f(x)dx$$

*zovemo r-ti apsolutni moment od X.*

**Definicija 29.** *Ako postoji $E[(X - E[X])^r]$, onda broj*

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^r f(x)dx$$

*zovemo r-ti centralni moment od X.*

**Definicija 30.** *Varijancu neprekidne slučajne varijable X (ukoliko postoji) definiramo kao broj*

$$VarX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)dx.$$

**Napomena 8.** *Za tako definiranu varijancu vrijede sva svojstva dokazana za varijancu diskretne slučajne varijable.*

**Napomena 9.** *Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla te neka je $\sigma$ varijanca te slučajne varijable. Asimetričnost i spljoštenost neprekidne slučajne varijable definiraju se analogno kao i u slučaju diskretne slučajne varijable. Dakle, asimetričnost je treći centralni standardizirani moment, odnosno*

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sigma}\right)^3\right],$$

*dok je spljoštenost četvrti centralni standardizirani moment, odnosno*

$$\gamma_2 = E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sigma}\right)^4\right].$$

### 3.2.3 Kvantili

**Napomena 10.** *Za $p \in \langle 0, 1\rangle$, p-**kvantil** neprekidne slučajne varijable $X$ s funkcijom distribucije $F$ definira se analogno kao za diskretnu slučajnu varijablu. Dakle, p-kvantil je realan broj $x_p$ takav da je $P(X \leq x_p) \geq p$ i $P(X \geq x_p) \geq 1 - p$.*

**Napomena 11.** *$P(X \leq x_p) \geq p$ i $P(X \geq x_p) \geq 1 - p$ možemo zapisati i na sljedeći način:*

$$F(x_p) \geq p \quad i \quad P(X \geq x_p) \geq 1 - p.$$
$$F(x_p) \geq p \quad i \quad 1 - P(X < x_p) \geq 1 - p.$$
$$F(x_p) \geq p \quad i \quad F(x_p-) \leq p.$$

*gdje je $F(x_p-)$ limes slijeva funkcije distribucije $F$ za točku $x_p$. Iz toga možemo zaključiti da je p-kvantil vrijednost u kojoj funkcija distribucije "preskoči" $p$.*

**Napomena 12.** *Kako je $X$ neprekidna slučajna varijabla, znamo da je $F$ neprekidna funkcija. Za neprekidne funkcije vrijedi:*

$$F(x_p) = F(x_p-)$$

*pa uvjete*

$$F(x_p) \geq p$$

*i*

$$F(x_p-) \leq p$$

*možemo zamijeniti s $F(x_p) = p$. Sada, kako bismo pronašli $x_p$, možemo promatrati invertiranje funkcije distribucije. Ukoliko $F$ nije invertibilna, može postojati više različitih $x_p$.*

**Napomena 13.** *Medijan neprekidne slučajne varijable $X$ je $0.5-$kvantil slučajne varijable $X$, odnosno, medijan je realan broj $x_{0.5}$ takav da je $F(x_{0.5}) = 0.5$.*

**Napomena 14.** *Donji kvartil neprekidne slučajne varijable $X$ je $0.25$-kvantil slučajne varijable $X$, odnosno realan broj $x_{0.25}$ takav da je $F(x_{0.25}) = 0.25$, a gornji kvartil neprekidne slučajne varijable $X$ je $0.75$-kvantil slučajne varijable $X$, odnosno realan broj $x_{0.75}$ takav da je $F(x_{0.75}) = 0.75$*

**Primjer 7.** *Slučajna varijabla dana funkcijom gustoće*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & x \in \langle 0, 2\rangle \\ 0, & x \notin \langle 0, 2\rangle \end{cases}.$$

*Odredimo očekivanje, varijancu, standardnu devijaciju, asimetričnost, spljoštenost i medijan te slučajne varijable.*
*Očekivanje te slučajne varijable iznosi*

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{2^4}{4} = \frac{3}{2}.$$

*Varijanca te slučajne varijable iznosi*

$$\sigma^2 = \int\limits_0^2 (x - E[X])^2 \cdot \frac{3}{8} \cdot x^2 dx = \frac{3}{8} \int\limits_0^2 (x^2 - 2 \cdot x \cdot E[X] + (E[X])^2)x^2 =$$

$$= \frac{3}{8} \int\limits_0^2 (x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4})x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{20}.$$

*Standardna te slučajne varijable je*

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{3}{20}} \approx 0.39.$$

*Kako je*

$$\int\limits_0^2 (x - E[X])^3 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \int\limits_0^2 (x^3 - 3x^2 E[X] + 3x(E[X])^2 + (E[X])^3)x^2 =$$

$$\frac{3}{8} \int\limits_0^2 (x^3 - 3x^2 \frac{3}{2} + 3x\frac{9}{4} + \frac{27}{8})x^2 = \frac{-1}{20},$$

*asimetričnost te slučajne varijable iznosi* $\gamma_1 = \frac{-1/20}{(3/20)^{3/2}} \approx -0.861.$
*Vrijedi*

$$\int\limits_0^2 (x - E[X])^4 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \int\limits_0^2 (x^4 - 4x^3 E[X] + 6x^2 (E[X])^2 - 4x(E[X])^3 + (E[X])^4)x^2 =$$

$$\int\limits_0^2 (x^4 - 6x^3 + 6x^2 \frac{9}{4} - 4x\frac{27}{8} + \frac{81}{16})x^2 = \frac{39}{560}$$

*Dakle, spljoštenost je* $\gamma_2 = \frac{39/560}{(3/20)^{\frac{4}{2}}} = \frac{65}{21} \approx 3.01.$
*Kako bismo izračunali medijan, odredimo prvo funkciju distribucije slučajne varijable* $X$.
*Ako je* $x \in \langle -\infty, 0]$, *vrijedi*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^x f(t)dt = 0.$$

*Za* $x \in \langle 0, 2]$ *je*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^0 f(t)dt + \int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^x \frac{3}{8} \cdot t^2 dt = \frac{x^3}{8}.$$

*Za* $x \in \langle 2, \infty\rangle$ *vrijedi*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} \frac{3}{8} \cdot t^2 dt + \int_{2}^{x} 0dt = \frac{3}{8} \cdot \frac{2^3}{3} = 1.$$

*Slijedi da je funkcija distribucije dane neprekidne slučajne varijable* $X$ *dana s*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\infty, 0] \\ \frac{x^3}{8}, & x \in \langle 0, 2] \\ 1, & x \in \langle 2, \infty\rangle \end{cases}.$$

*Za medijan (u oznaci* $x_{0.5}$*) vrijedi* $F(x_{0.5}) = \frac{1}{2}$*, pa je* $x_{0.5} \in \langle 0, 2\rangle$*.*
*Vrijedi*

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^3}{8}, \\ F^{-1}(x) &= 8^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}, \\ F^{-1}(0.5) &= \sqrt[3]{4} \approx 1.59. \end{aligned}$$

*Dakle, medijan je približno jednak 1.59.*

### 3.2.4 Numeričke karakteristike nekih parametarskih neprekidnih distribucija

#### Uniformna distribucija

Za neprekidnu slučajnu varijablu $X$ kažemo da ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle a, b\rangle$ i pišemo $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ ako joj je funkcija gustoće dana izrazom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in \langle a, b\rangle \\ 0, & x \notin \langle a, b\rangle \end{cases}.$$

Funkcija distribucije te slučajne varijable je

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}.$$

Očekivanje te slučajne varijable iznosi

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{b-a} dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Za računanje varijance i asimetričnosti biti će potrebno prethodno izračunati $E[X^2]$ i $E[X^3]$. Vrijedi

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{b-a} dx = \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}, \end{aligned}$$

$$E[X^3] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{b-a}dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{x^3}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^4}{4}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}\right)$$
$$= \frac{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{4(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)(b^2+a^2)}{4(b-a)} = \frac{(a^2+b^2)(a+b)}{4}.$$

Varijanca te slučajne varijable iznosi

$$VarX = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$
$$\frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} =$$
$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Standardna devijacija te slučajne varijable iznosi

$$\sigma = \frac{a-b}{\sqrt{12}}.$$

Asimetričnost te slučajne varijable iznosi

$$\gamma_1 = \frac{E(X-E[X])^3}{\sigma^3} = \frac{E[X^3]-3E[X^2]E[X]+2(E[X])^3}{\left(\frac{a-b}{\sqrt{12}}\right)^3} =$$
$$= \frac{\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{4} - 3\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{3}\frac{a+b}{2} + 2\frac{(a+b)^3}{8}}{\frac{(a-b)^2}{12}\cdot\frac{a-b}{\sqrt{12}}} =$$
$$= \frac{\frac{(a^2+b^2)(a+b)+(a+b)^3}{4} - \frac{(a+b)(a^2+ab+b^2)}{2}}{\frac{(a-b)^2}{12}\cdot\frac{a-b}{\sqrt{12}}} =$$
$$= \frac{\frac{(a+b)(a^2+ab+b^2)}{2} - \frac{(a+b)(a^2+ab+b^2)}{2}}{\frac{(a-b)^2}{12}\cdot\frac{a-b}{\sqrt{12}}} = \frac{0}{\frac{(a-b)^2}{12}\cdot\frac{a-b}{\sqrt{12}}} = 0.$$

Zbog tehničke zahtjevnosti izostavlja se postupak za računanje spljoštenosti. Spljoštenost te slučajne varijable iznosi

$$\gamma_2 = \frac{9}{5}.$$

Kako je uniformna distribucija simetrična obzirom na vertikalni pravac koji prolazi kroz očekivanje, medijan te slučajne varijable jednak je njenom očekivanju, odnosno, iznosi

$$x_{0.5} = \frac{a+b}{2}.$$

### Eksponencijalna distribucija

Za neprekidnu slučajnu varijablu X kažemo da ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako joj je funkcija gustoće dana izrazom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Funkcija distribucije dana je s

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Za računanje numeričkih karakteristika eksponencijalne distribucije koristi se **gama funkcija**.

**Definicija 31.** *Funkciju* $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *definiranu izrazom*

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

*zovemo gama funkcija.*

**Napomena 15.** *([7], str. 2.) Vrijedi*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Očekivanje te slučajne varijable iznosi

$$E[X] = \int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} = \begin{vmatrix} \lambda x = t \\ \lambda dx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} te^{-t} dt = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}.$$

Za određivanje varijance, asimetričnosti i spljoštenosti biti će potrebno prvo odrediti $E[X^2]$, $E[X^3]$ i $E[X^4]$.
Vrijedi

$$E[X^2] = \int\limits_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} = \begin{vmatrix} \lambda x = t \\ \lambda dx = dt \end{vmatrix} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{t}{\lambda^2} \cdot te^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_{0}^{\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$E[X^3] = \int\limits_{0}^{\infty} x^3 \lambda e^{-\lambda x} = \begin{vmatrix} \lambda x = t \\ \lambda dx = dt \end{vmatrix} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{t^2}{\lambda^3} \cdot te^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^3} \int\limits_{0}^{\infty} t^3 e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^3}\Gamma(4) = \frac{6}{\lambda^3},$$

$$E[X^4] = \int\limits_{0}^{\infty} x^4 \lambda e^{-\lambda x} = \begin{vmatrix} \lambda x = t \\ \lambda dx = dt \end{vmatrix} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{t^3}{\lambda^4} \cdot te^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^4} \int\limits_{0}^{\infty} t^3 e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^4}\Gamma(5) = \frac{24}{\lambda^4}.$$

Varijanca te slučajne varijable iznosi

$$VarX = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Standardna devijacija te slučajne varijable iznosi

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Asimetričnost te slučajne varijable iznosi

$$\gamma_1 = \frac{E(X - E[X])^3}{\sigma^3} = \frac{E[X^3] - 3E[X^2]E[X] + 2(E[X])^3}{\frac{1}{\lambda^3}} =$$
$$= \frac{\frac{6}{\lambda^3} - 3 \cdot \frac{2}{\lambda^2}\frac{1}{\lambda} + 2\frac{1}{\lambda^3}}{\frac{1}{\lambda^3}} = \frac{\frac{2}{\lambda^3}}{\frac{1}{\lambda^3}} = 2.$$

Spljoštenost te slučajne varijable iznosi

$$\gamma_2 = \frac{E(X - E[X])^4}{\sigma^4} = \frac{E[X^4] - 4E[X^3]E[X] + 6(E[X])^2E[X^2] - 3(E[X])^4]}{\frac{1}{\sigma^4}} =$$
$$= \frac{\frac{24}{\lambda^4} - 4 \cdot \frac{6}{\lambda^3} \cdot \frac{1}{\lambda} + 6\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{2}{\lambda^2} - 3 \cdot \frac{1}{\lambda^4}}{\frac{1}{\lambda^4}} =$$
$$= \frac{\frac{9}{\lambda^4}}{\frac{1}{\lambda^4}} = 9.$$

Označimo s $x_{0.5} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Pogledajmo vrijednost funkcije distribucije za $x = x_{0.5}$. Kako je

$$F\left(\frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\lambda\frac{\ln 2}{\lambda}} = 1 - e^{-\ln 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

prema Napomeni 12. slijedi da je $x_{0.5} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ medijan te slučajne varijable.

### Normalna distribucija

Za neprekidnu slučajnu varijablu $X$ kažemo da ima normalnu distribuciju s parametrima $\mu$ i $\sigma^2$ i pišemo $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ako joj je funkcija gustoće dana izrazom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija distribucije dana je s

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

**Napomena 16.** *([7], str. 5.) Vrijedi*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Ako stavimo $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ dobivamo

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Kako je $te^{-\frac{t^2}{2}}$ neparna i integrabilna na $\mathbb{R}$ vrijedi $\int\limits_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0$. S druge strane, kako je $e^{-\frac{t^2}{2}}$ parna i integrabilna na $\mathbb{R}$, vrijedi $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.
Sada imamo

$$E[X] = \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = \begin{vmatrix} \frac{t^2}{2} = u \\ tdt = du \end{vmatrix} = \frac{2\mu}{2\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \mu.$$

Kako bismo odredili varijancu te slučajne varijable, odredimo prvo $E[X^2]$.
Vrijedi

$$E[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Uz supstituciju $t = \frac{x-\mu}{2\sigma^2}$ dobivamo

$$E[X^2] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Ukoliko iskoristimo da su funkcije $t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}$ i $e^{\frac{-t^2}{2}}$ parne i integrabilne na $\mathbb{R}$, a funkcija $te^{\frac{-t^2}{2}}$ neparna i integrabilna na $\mathbb{R}$ imamo:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}dt + 0 + \frac{2\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}dt + \frac{2\mu^2}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}dt + \mu^2 = \begin{vmatrix} \frac{t^2}{2} = u \\ tdt = du \end{vmatrix} = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{2ue^{-u}}{\sqrt{2u}}du + \mu^2 = \\
&= \frac{4\sigma^2}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u}du + \mu^2 = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \mu^2 = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2.
\end{aligned}$$

Varijanca te slučajne varijable iznosi

$$VarX = E[X^2] - (E[X])^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Standardna devijacija te slučajne varijable iznosi

$$\sqrt{VarX} = \sigma.$$

Standardizacijom normalne slučajne varijable (pogledati Propoziciju 5.) dobivamo novu slučajnu varijablu

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

koja će ponovno biti normalna slučajna varijabla, ali s očekivanjem 0 i varijancom 1. Takva normalna slučajna varijabla naziva se jedinična ili standardna normalna slučajna varijabla i označavamo je s $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sada umjesto asimetričnosti slučajne varijable $X$, možemo izračunati treći moment slučajne varijable $Y$.
Vrijedi

$$\gamma_1 = E\left(\frac{X - E[X]}{\sigma}\right)^3 = E[Y^3] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Kako je podintegralna funkcija $x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$ neparna i integrabilna na $\mathbb{R}$, gornji integral je jednak nuli i asimetričnost normalne slučajne varijable iznosi $\gamma_1 = 0$.
Slično kao i za asimetričnost, umjesto spljoštenosti slučajne varijable $X$, možemo izračunati četvrti moment slučajne varijable $Y$.
Vrijedi

$$\gamma_2 = E\left(\frac{X - E[X]}{\sigma}\right)^4 = E[Y^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Kako je podintegralna funkcija parna i integrabilna na $\mathbb{R}$, imamo

$$\begin{aligned} E[Y^4] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{vmatrix} \frac{t^2}{2} = u \\ tdt = du \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{4u^2}{\sqrt{2u}} e^{-u} du = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} u^{\frac{3}{2}} e^{-u} du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 3. \end{aligned}$$

Dakle, spljoštenost normalne slučajne varijable $X$ iznosi $\gamma_2 = 3$.
Kako je normalna distribucija simetrična obzirom na vertikalni pravac koji prolazi kroz očekivanje, medijan te slučajne varijable jednak je njenom očekivanju, odnosno $x_{0.5} = \mu$.

# 4 Tablični prikaz numeričkih karakteristika važnih diskretnih i neprekidnih distribucija

| Naziv distribucije | **Bernoullijeva** | **Binomna** |
|---|---|---|
| Parametri | $p \in [0,1]$ | $n, p$ |
| Očekivanje | $p$ | $np$ |
| Varijanca | $p(1-p)$ | $np(1-p)$ |
| Asimetričnost | $\frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$ | $\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$ |
| Spljoštenost | $\frac{3p^2-3p+1}{p(1-p)}$ | $\frac{3p^2-3p+1}{np(1-p)}$ |
| Medijan | $\begin{cases} 0, p < 1/2 \\ [0,1], p = 1/2 \\ 1, p > 1/2 \end{cases}$ | $\lfloor np \rfloor, \lceil np \rceil$ |

Tablica 1: Numeričke karakteristike važnih diskretnih distribucija

| Naziv distribucije | **Uniformna na (a,b)** | **Eksponencijalna** | **Normalna** |
|---|---|---|---|
| Parametri | $a, b \in \langle -\infty, \infty \rangle$ | $\lambda > 0$ | $\mu, \sigma^2$ |
| Očekivanje | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\mu$ |
| Varijanca | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\sigma^2$ |
| Asimetričnost | $0$ | $2$ | $0$ |
| Spljoštenost | $\frac{9}{5}$ | $9$ | $3$ |
| Medijan | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{\ln 2}{\lambda}$ | $\mu$ |

Tablica 2: Numeričke karakteristike važnih neprekidnih distribucija

# 5 Interpretacija numeričkih karakteristika slučajne varijable

Matematičko očekivanje ima nekoliko tumačenja, međutim, jedno osnovno tumačenje je ono težišta. Naime, ako se promatra sustav u kojem je masa $f(x_i)$ smještena u točku $x_i$ , $i = 1, \ldots, n$ , tada je $E[X]$ težište (točka ravnoteže) tog sustava. U tom smislu, $E[X]$ se naziva mjerom središnje tendencije slučajne varijable $X$. Ista interpretacija vrijedi i kada $X$ poprima (prebrojivo) beskonačno mnogo vrijednosti.

**Primjer 8.** *([5], str. 78.) Pretpostavimo da osiguravajuće društvo plaća iznos od 1000 američkih dolara za izgubljenu prtljagu na putovanju zrakoplovom. Iz prethodnih iskustava je poznato da tvrtka plaća ovaj iznos u jednoj od 200 polica koje prodaje. Pitamo se koju bi premiju tvrtka trebala naplatiti? Definiramo slučajnu varijablu $X$ na sljedeći način: $X = 0$ ako ne dođe do gubitka, što se događa s vjerojatnošću $1 - (1/200) = 0.995$, i $X = -1000$ s vjerojatnošću $0.005$. Tada je očekivani gubitak poduzeća: $E[X] = -1000 \cdot 0.005 = -5$. Dakle, tvrtka mora naplatiti 5 američkih dolara da bi izjednačili očekivani gubitak. Tome će obično dodati razuman iznos za administrativne troškove i ostvarenje dobiti.*

Ukoliko promotrimo definiciju varijance, ona je drugi centralni moment slučajne varijable $X$ i daje mjeru očekivanog kvadratnog odstupanja slučajne varijable $X$ od njenog očekivanja. Varijanca predstavlja i mjeru raspršenja (disperzije) temeljne distribucije. U mehanici se varijanca naziva momentom tromosti.

Pozitivni kvadratni korijen od varijance, odnosno, standardna devijacija mjeri se u istim jedinicama kao $X$ (i $E[X]$) i služi kao mjerilo za mjeru odstupanja slučajne varijable X od svog očekivanja $E[X]$. Kao i varijanca, standardna devijacija govori o raspršenosti realizacije slučajne varijable oko očekivanja.

**Primjer 9.** *Neka je $X$ slučajna varijabla dana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

*Odredimo varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable $X$.*
*Očekivanje te slučajne varijable iznosi*

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + = 1.$$

*Kako je*

$$E[X]^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

*vrijedi*

$$VarX = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X]^2) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

*Standardna devijacija te slučajna varijable iznosi*

$$\sigma = \sqrt{VarX} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$$

*Dakle, mjera raspršenja realizacije slučajne varijable oko očekivanja je približno jednaka 0.71.*

Čebiševljeva nejednakost donosi tumačenje očekivanja i varijance svake slučajne varijable koja ima varijancu.

**Propozicija 6.** *([6], str. 313.) Neka je $X$ slučajna varijabla i $g$ nenegativna Borelova funkcija takva da je $E[g(X)] < \infty$. Ako je $g$ parna funkcija i rastuća na $[0, \infty\rangle$ , tada za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi*

$$P\{|X| \geq \epsilon\} \leq \frac{E[g(X)]}{g(\epsilon)}.$$

*Dokaz.* Za dokaz vidi [6], str. 313. □

**Propozicija 7. *Čebiševljeva nejednakost*** *([2], str. 90.)*
*Neka je $X$ slučajna varijabla koja ima varijancu $\sigma^2$ te neka je dan broj $k > 0$. Tada vrijedi*

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2},$$

*gdje je $\mu$ očekivanje slučajne varijable $X$.*

*Dokaz.* Iz Propozicije 6. slijedi

$$P\{|X - E[X]| \geq k\sigma\} = P\{|X - E[X]|^2 \geq k^2\sigma^2\} \leq \frac{E|X - E[X]|^2}{k^2\sigma^2} = \frac{VarX}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}.$$

□

Čebiševljevu nejednakost tumačimo na sljedeći način: vjerojatnost da slučajna varijabla $X$ odstupa od svog očekivanja po apsolutnoj vrijednosti za više ili jednako $k$ standardnih devijacija, manja je ili jednaka od $\frac{1}{k^2}$. Pogledajmo značenja trećeg standardiziranog momenta, odnosno asimetrije i četvrtog standardiziranog momenta, odnosno spljoštenosti.

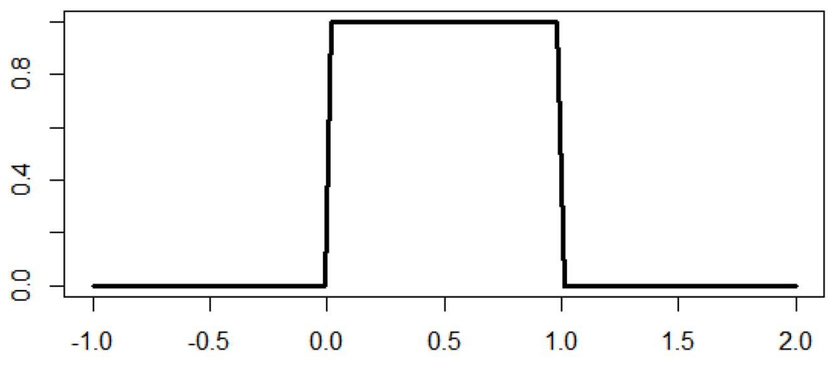
Asimetrija predstavlja mjeru asimetrije distribucije. Distribucija je asimetrična kada njena lijeva i desna strana nisu zrcalne u odnosu na pravac $x = E[X]$. Asimetrija distribucije označava nagnutost distribucije na lijevu ili desnu stranu. Distribucija može imati desnu (ili pozitivnu), lijevu (ili negativnu) ili nultu asimetriju. Normalne distribucije su simetrične, odnosno asimetrija im je jednaka nuli.

**Primjer 10.** *Promotrimo uniformnu neprekidnu distribuciju s parametrima 0 i 1. Funkcija gustoće te slučajne varijable dana je s*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 0, & x \notin \langle 0, 1\rangle \end{cases}.$$

*Očekivanje te slučajne varijable iznosi*

$$\mu = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

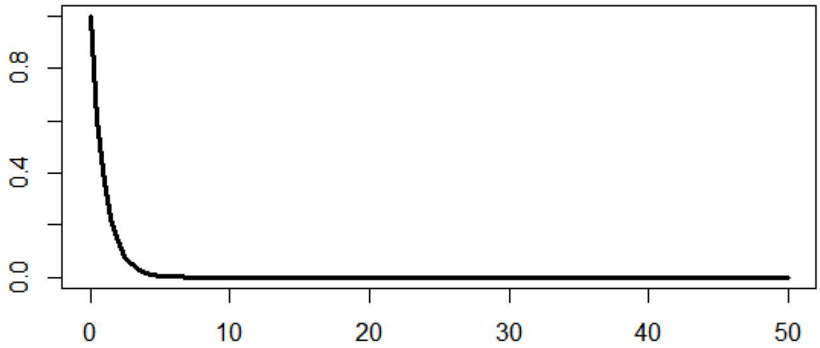



Slika 1: Graf funkcije gustoće uniformne neprekidne distribucije s parametrima 0 i 1

*Iz grafa funkcije gustoće uniformne neprekidne distribucije s parametrima 0 i 1 vidljivo je kako je ona simetrična obzirom na vertikalni pravac kroz očekivanje. Takav rezultat mogao se i pretpostaviti s obzirom na ranije izračunatu asimetričnost uniformne neprekidne distribucije koja iznosi* $\gamma_1 = 0$.

Pomoću spljoštenosti se interpretira zaobljenost vrha i debljina repova distribucije u odnosu na normalnu distribuciju. Prema tome, razlikujemo mezokurtičnu distribuciju (spljoštenost iznosi 3 i to je normalna distribucija), zatim leptokurtična distribucija čija je spljoštenost veća od 3 te ona ima šiljastiji vrh i deblje repove u odnosu na normalnu distribuciju, te postoji platikurtična distribucija koja ima spljoštenost manju od 3, a čiji je vrh niži i širi, a repovi tanji od vrha normalne distribucije. Često se promatra i tzv. višak spljoštenosti koji se računa na način da se od spljoštenosti oduzme 3.

**Primjer 11.** *Spljoštenost* $\gamma_2$ *eksponencijalne distribucije iznosi 9. Dakle, radi se o leptokurtičnoj distribuciji. To je u skladu i s grafom funkcije gustoće eksponencijalne distribucije (vrh distribucije je šiljastiji u odnosu na normalnu distribuciju).*




Slika 2: Graf funkcije gustoće eksponencijalne distribucije s parametrom 1

Promotrimo značenje $p$-kvantila slučajne varijable $X$. Za neki $p \in \langle 0, 1 \rangle$, $p$-kvantil je broj za kojeg vrijedi slučajna varijabla manja od tog broja s vjerojatnošću barem $p$ i veća od tog broja s vjerojatnošću većom ili jednakom $1 - p$. Ukoliko izdvojimo medijan (0.5-kvantil), možemo zaključiti da je medijan broj za kojeg vrijedi: vjerojatnost da je slučajna varijabla manja ili jednaka tom broju i vjerojatnost da je slučajna varijabla veća ili jednaka tom broju iznosi barem 0.5. Medijan predstavlja jednu od mjera centralne tendencije slučajne varijable.

**Primjer 12.** *Odredimo medijan slučajne varijable* $X$ *danom sljedećom tablicom distribucije:*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

*Odaberimo prozvoljni* $x' \in [2, 3]$.
*Uočimo da vrijedi*

$$P(X \leq x') = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \geq 0.5,$$
$$P(X \geq x') = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 0.5.$$

*Iz toga slijedi da je medijan dane slučajne varijable svaki realan broj iz segmenta* $[2, 3]$ *i možemo zaključiti da medijan ne mora biti jedinstven.*

# Literatura


[1] I. Anderson, *A First Course in Discrete Mathematics*, Department of Mathematics, University of Glasgow, University Gardens, Glasgow, UK, 2002.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[3] E. Durret, *Probability*, Cambridge University Press, 2010.

[4] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2017.

[5] G. G. Roussas, *An Introduction to Probability and Statistical Inference (Second Edition)*, Academic Press, 2015.

[6] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[7] P. Sebah, X. Gourdon, *Introduction to the Gamma Function*, 2002. URL : `http://scipp.ucsc.edu/~haber/archives/physics116A10/gamma.pdf` (pristupljeno 29.9.2022.)