Pozitivni operatori, izometrije, polarna dekompozicija i dekompozicija na singularne vrijednosti

Širanović, Ana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Ana Širanović

Pozitivni operatori, izometrije, polarna dekompozicija i dekompozicija na singularne vrijednosti

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Ana Širanović

Pozitivni operatori, izometrije, polarna dekompozicija i dekompozicija na singularne vrijednosti

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2022.

Sažetak: U ovom radu smo se bavili operatorima definiranim na unitarnim prostorima. U uvodu smo definirali sam pojam unitarnog prostora te skalarnog produkta,a zatim smo u svakom poglavlju zasebno opisali pozitivne operatore te izometrije. Na samom kraju rada smo iskazali i dokazali dva teorema, a to su polarna dekompozicija te dekompozija na singularne vrijednosti.

Ključne riječi: pozitivni operatori, izometrija, polarna dekompozicija, dekompozicija na singularne vrijednosti

Positive operators, isometries, polar and singular-value decompositions

Summary: In this paper,we have dealt with operators defined on inner-product spaces. In the introduction, we defined the concept od inner-product space and scalar product,and them we described the positive operators and isometry separately in each chapter. At the very end of the paper, we presented and proved two theorems, namely polar decomposition and decomposition to singular values.

Keywords: positive operators, isometry, polar decompositions, singular-value decompositions

Sadržaj

1 Uvod

Definicija 1.1. Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbf{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ se naziva **linearan operator** ako vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{F}.$$

Često govorimo samo operator, a linearnost podrazumijevamo.

Definicija 1.2. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbf{F}$. Skalarni produkt na V je preslikavanje $< \cdot | \cdot >: V \times V \to \mathbf{F}$ koje ima sljedeća svojstva:

(1) $\langle v, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V$

(2) $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0, \quad \forall v \in V$

(3) $\langle v_1 + v_2, y \rangle = \langle v_2, y \rangle + \langle v_2, y \rangle, \quad \forall v_1, v_2, y \in V$

(4) $\langle av, y \rangle = a \langle v, y \rangle, \quad \forall a \in \mathbf{F}, \forall v, y \in V$

(5) $\langle v, y \rangle = \overline{\langle y, v \rangle}, \quad \forall v, y \in V$

Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se **unitarni prostor**. Najveći rezultati o unitarnim prostorima su vezani upravo za operatore definirane na njima. U ovom radu ćemo obraditi dvije vrste takvih operatora, a to su pozitivni operatori i izometrije.

Također, u cijelom radu podrazumijevamo da je prostor V konačnodimenzionalan, neprazan te prostor nad poljem $\mathbf{F}$, gdje $\mathbf{F}$ označava $\mathbb{C}$ ili $\mathbb{R}$.

2 Pozitivni operatori

Definicija 2.1. Operator $T \in \mathcal{L}(V)$ nazivamo pozitivnim ako je T hermitski, tj. $T^* = T$ te vrijedi

$$\langle Tv, v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

Primijetimo, ukoliko je V kompleksan vektorski prostor tada iz definicije možemo izbaciti uvjet da je T hermitski operator.

Definicija 2.2. Operator S nazivamo kvadratnim korijenom operatora T ukoliko je $S^2 = T$.

Glavni rezultat o pozitivnim operatorima nam daje sljedeći teorem.

Teorem 2.3 ([1, Theorem 7.27]). *Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) T je pozitivan;

(b) T je hermitski i sve svojstvene vrijednosti operatora T su nenegativne;

(c) T ima pozitivan kvadratni korijen

(d) T ima hermitski kvadratni korijen;

(e) postoji operator $S \in \mathcal{L}(V)$ takav da vrijedi $T = S^*S$.

Dokaz. Pokazat ćemo da $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$.
Pretpostavimo da vrijedi (a), odnosno T je pozitivan operator. Očito je, po definiciji, T hermitski. Kako bismo pokazali da su mu svojstvene vrijednosti nenegativne, pretpostavimo da je λ svojstvena vrijednost operatora T. Neka je v nenul svojstveni vektor operatora T koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ. Tada

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Tv, v\rangle \\ &= \langle \lambda v, v\rangle \\ &= \lambda\langle v, v\rangle \end{aligned}$$

odakle vidimo da je λ nenegativan broj, stoga vrijedi (b).
Sada pretpostavimo da vrijedi (b), tj. operator T je hermitski i sve njegove svojstvene vrijednosti su nenegativne. Po spektralnom teoremu znamo da postoji ortonormirana baza $\{e_1, ..., e_n\}$ od V koja se sastoji od svojstvenih vektora od T. Neka su λ_1,...,λ_n svojstvene vrijednosti kojima pripadaju svojstveni vektori $e_1, ..., e_n$, tako da je svaki od λ_j nenegativni broj.

Definirajmo $S \in \mathcal{L}(V)$ tako da vrijedi

$$Se_j = \sqrt{\lambda_j} e_j$$

za $j = 1, .., n$. Tada je S pozitivan operator. Štoviše, $S^2 e_j = \lambda_j e_j = Te_j$ za svaki j, što implicira da je $S^2 = T$. Tako definiran operator S je pozitivan kvadratni korijen te je tvrdnja (c) dokazana.
Po definiciji, (c) očito implicira (d) (svaki pozitivan operator je hermitski).
Sada pretpostavimo da vrijedi (d). Dakle, postoji hermitski operator S na V takav da vrijedi $T = S^2$. Tada $T = S^* S$ (jer $S^* = S$), te vrijedi (e).
Pretpostavimo da vrijedi (e). Neka je $S \in \mathcal{L}(V)$ takav da vrijedi $T = S^* S$. Tada $T^* = (S^* S)^* = S^*(S^*)^* = S^* S = T$, stoga je T hermitski.
Kako bi završili dokaz, pokažimo još da vrijedi (a). Primijetimo da

$$\begin{aligned} \langle Tv, v\rangle &= \langle S^* Sv, v\rangle \\ &= \langle Sv, Sv\rangle \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

za svaki $v \in V$. Tada operator T pozitivan.

Primijetimo da karakterizacija pozitivnih operatora odgovara karakterizaciji nenegativnih brojeva u $\mathbb{C}$. Posebno, kompleksan broj z je nenegativan broj ako i samo ako ima nenegativan kvadratni korijen, što odgovara uvjetu (c). Također, z je nenegativan ako i samo ako ima realan kvadratni korijen, što odgovara tvrdnji (d). Isto tako, z je nenegativan ako i samo ako postoji kompleksan broj w takav da $z = \overline{w}w$, što odgovara tvrdnji (e).

Svaki nenegativni broj ima jedinstveni nenegativni kvadratni korijen. Sljedeća propozicija nam govori da slično vrijedi i za pozitivne operatore.

Propozicija 2.4 ([1, Proposition 7.28])**.** Svaki pozitivan operator iz $\mathcal{L}(V)$ ima jedinstveni pozitivan kvadratni korijen.

Dokaz. Pretpostavimo da je $T \in \mathcal{L}(V)$ pozitivan. Neka su λ_1,...,λ_m različite svojstvene vrijednosti operatora T. Zbog toga što je T pozitivan, po prethodnom teoremu, sve svojstvene vrijednosti su nenegativne. T je hermitski, pa vrijedi

$$V = \operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(T - \lambda_m I).$$

Sada pretpostavimo da je $S \in \mathcal{L}(V)$ pozitivan kvadratni korijen operatora T. Također pretpostavimo da je α svojstvena vrijednost od S. Ako je $v \in \operatorname{Ker}(S - \alpha I)$, tada $Sv = \alpha v$, što implicira

$$Tv = S^2 v = \alpha^2 v \tag{1}$$

pa $v \in \mathrm{Ker}(T - \alpha^2 I)$. Stoga je α^2 svojstvena vrijednost operatora T, što znači da mora biti jednaka jednom od λ_j. Drugim riječima, $\alpha = \sqrt{\lambda_j}$, za neki j. Štoviše, (1) implicira

$$\mathrm{Ker}(S - \sqrt{\lambda_j} I) \subset \mathrm{Ker}(T - \lambda_j I). \tag{2}$$

Već smo pokazali da su jedine moguće svojstvene vrijednosti operatora S $\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_m}$. S je hermitski, pa vrijedi

$$V = \mathrm{Ker}(S - \sqrt{\lambda_1} I) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(S - \sqrt{\lambda_m} I). \tag{3}$$

Sada zbog (1), (2) i (3) vrijedi

$$\mathrm{Ker}(S - \sqrt{\lambda_j} I) = \mathrm{Ker}(T - \lambda_j I)$$

za svaki j. Stoga je S, pozitivan kvadratni korijen operatora T, jedinstveno određen s T.

3 Izometrije

Operator $S \in \mathcal{L}(V)$ nazivamo **izometrija** ukoliko vrijedi

$$\|Sv\| = \|v\|$$

za svaki $v \in V$. Drugim riječima, operator je izometrija ukoliko čuva norme.

Naprimjer, λI je izometrija kad god $\lambda \in \mathbf{F}$ zadovoljava $|\lambda| = 1$.

Izometriju na realnim unitarnim prostorima nazivamo ortogonalni operator, a na kompleksnim unitarnim prostorima unitarni operator. Ali koristimo naziv izometrija jer će naši rezultati se odnositi i na realni i na kompleksni unitarni prostor.

Općenito, pretpostavimo da su skalari λ_1,..,λ_n apsolutne vrijednosti 1, te da $S \in \mathcal{L}(V)$ zadovoljava $S(e_j) = \lambda_j e_j$ za neku ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ od V. Neka je $v \in V$. Tada

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + ... + \langle v, e_n \rangle e_n \tag{4}$$

i

$$\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle e_1|^2 + ... + |\langle v, e_1 \rangle e_1|^2. \tag{5}$$

Djelovanjem S na obje strane (4) dobivamo

$$\begin{aligned} Sv &= \langle v, e_1 \rangle Se_1 + ... + \langle v, e_n \rangle Se_n \\ &= \lambda_1 \langle v, e_1 \rangle e_1 + ... + \lambda_n \langle v, e_n \rangle e_n \end{aligned}$$

Zadnja jednakost, zajedno s $|\lambda_j| = 1$, daje

$$\|Sv\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + ... + |\langle v, e_1 \rangle|^2 \tag{6}$$

Uspoređujući (5) i (6), vidimo da vrijedi $\|v\| = \|Sv\|$. Drugim riječima, S je izometrija.

Ako je S izometrija, tada je S injektivan. To lako vidimo jer ako je $Sv = 0$, tada je $\|v\| = \|Sv\| = 0$, pa slijedi $v = 0$. Dakle, svaka izometrija je invertibilna.

Teorem 3.1 ([1, Theorem 7.36]). *Pretpostavimo $S \in \mathcal{L}(V)$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) *S je izometrija;*

(b) *$\langle Su, Sv \rangle = \langle u, v \rangle$ za sve $u, v \in V$;*

(c) *$S^*S = I$;*

(d) *skup $\{Se_1, e_2, .., Se_n\}$ je ortonormiran kad god je $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ skup ortonormiranih vektora iz V;*

(e) *postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ od V tako da je $\{Se_1, e_2, .., Se_n\}$ ortonormiran skup;*

(f) *S^* je izometrija;*

(g) *$\langle S^*u, S^*v \rangle = \langle u, v \rangle$ za sve $u, v \in V$;*

(h) *$S^*S = I$;*

(i) *skup $\{S^*e_1, S^*e_2, .., S^*e_n\}$ je ortonormiran kad god je $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ skup ortonormiranih vektora iz V;*

(j) *postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ od V tako da je $\{S^*e_1, S^*e_2, .., S^*e_n\}$ ortonormiran skup;*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (a). Ako je V realan unitaran prostor, tada za svaki $u, v \in V$ imamo

$$\begin{aligned}\langle Su, Sv \rangle &= (\|Su + Sv\|^2 - \|Su - Sv\|^2)/4 \\ &= (\|S(u+v)\|^2 - \|S(u-v)\|^2)/4 \\ &= (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)/4 \\ &= \langle u, v \rangle.\end{aligned}$$

Time smo dokazali tvrdnju (b). Isto vrijedi i ukoliko je V kompleksan unitaran prostor.
Sada pretpostavimo da vrijedi (b). Tada

$$\begin{aligned}\langle (S^*S - I)u, v \rangle &= \langle Su, Sv \rangle - \langle u, v \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

za sve $u, v \in V$. Uzimajući $v = (S^*S - I)u$, vidimo da $S^*S - I = 0$. Stoga je $S^*S = I$, što dokazuje da tvrdnja (b) implicira (c).

Sada pretpostavimo da vrijedi (c). Pretpostavimo da je $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ skup ortonormiranih vektora iz V. Tada

$$\begin{aligned}\langle Se_j, Se_k\rangle &= \langle S^*Se_j, e_k\rangle \\ &= \langle e_j, e_k\rangle.\end{aligned}$$

Stoga je $\{Se_1, e_2, .., Se_n\}$ ortonormiran, što dokazuje da (c) implicira (d).
Očito (d) implicira (e).
Sada pretpostavimo da vrijedi (e). Neka je $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ ortonormirana baza od V tako da je $\{Se_1, e_2, .., Se_n\}$ ortonormiran. Ako je $v \in V$, tada

$$\begin{aligned}\|Sv\|^2 &= \|S(\langle v, e_1\rangle e_1 + ... + \langle v, e_n\rangle e_n)\|^2 \\ &= \|\langle v, e_1\rangle Se_1 + ... + \langle v, e_n\rangle Se_n\|^2 \\ &= |\langle v, e_1\rangle|^2 + ... + |\langle v, e_n\rangle|^2 \\ &= \|v\|^2.\end{aligned}$$

Korijenovanjem vidimo da je S izometrija te je time dokazano da (e) implicira (a).
Pokazali smo da su tvrdnje $(a) - (e)$ ekvivalentne. Zamjenjujući S sa S^*, možemo pokazati da su i tvrdnje $(f) - (j)$ ekvivalentne.
Trebamo još pokazati da je jedna od tvrdnji $(a) - (e)$ ekvivalentna jednoj od tvrdnji $(f) - (j)$. Pokazat ćemo da je tvrdnja (c) ekvivalentna tvrdnji (h). Općenito, S i S^* ne moraju komutirati. Međutim, $SS^* = I$ ako i samo ako $S^*S = I$. Time smo završili dokaz.

Ekvivalentnost tvrdnji (a) i (b) pokazuje da izometrija čuva i skalarni produkt.

Ovaj teorem nam govori da je svaka izometrija normalan operator. Stoga karakterizaciju normalnih operatora možemo iskoristiti kako bi upotpunili opis izometrija, što ćemo napraviti u sljedeća dva teorema.

Teorem 3.2 ([1, Theorem 7.37]). *Pretpostavimo da je V kompleksan unitaran prostor te $S \in \mathcal{L}(V)$. Tada je S izometrija ako i samo ako postoji ortonormirana baza V koja sadrži svojstvene vektore od S koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima apsolutne vrijednosti 1.*

Dokaz. Već smo dokazali da je S izometrija ukoliko postoji ortonormirana baza od V koja sadrži svojstvene vektore od S koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima apsolutne vrijednosti 1. Kako bi pokazali i drugi smjer, pretpostavimo da je S izometrija. Po kompleksnom spektralnom teoremu postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ od V koja sadrži svojstvene vektore od S. Za $j \in \{1, ..., n\}$, neka je λ_j svojstvena vrijednost koja odgovara e_j. Tada

$$|\lambda_j| = \|\lambda_j e_j\| = \|Se_j\| = \|e_j\| = 1.$$

Stoga svaka svojstvena vrijednost od S ima apsolutnu vrijednost 1.
Time smo dovršili dokaz.

Teorem 3.3 ([1, Theorem 7.38]). *Pretpostavimo da je V realan unitaran prostor te $S \in \mathcal{L}(V)$. Tada je S izometrija ako i samo ako postoji ortonormirana baza od V u kojoj S ima blok dijagonalnu matricu gdje je svaki blok na dijagonali matrica 1×1 koja sadrži elemente 1 ili -1 ili matrica 2×2 oblika*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{i}$$

gdje $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$.

Dokaz. Pretpostavimo da je S izometrija. S je normalan, pa postoji ortonormirana baza od V u kojoj S ima blok dijagonalnu matricu, gdje je svaki blok 1×1 matrica ili matrica 2×2 oblika

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \tag{ii}$$

gdje $b > 0$.
Ako je λ element matrice 1×1 duž dijagonale matrice od S, tada postoji bazni vektor e_j takav da je $Se_j = \lambda e_j$. S je izometrija, pa vrijedi $|\lambda_j| = 1$. Stoga $\lambda = 1$ ili $\lambda = -1$.
Sada promotrimo slučaj matrice 2×2 duž dijagonale matrice od S. Tada postoje bazni vektori e_j, e_{j+1} takvi da je

$$Se_j = ae_j + be_{j+1}$$

Vrijedi

$$1 = \|e_j\|^2 = \|Se_j\|^2 = a^2 + b^2.$$

Uz dodatni uvjet $b > 0$, postoji broj $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ tako da vrijedi $a = \cos\theta$ i $b = \sin\theta$. Stoga matrica (ii) ima traženu formu (i).
Obratno, pretpostavimo da postoji ortonormirana baza u kojoj S ima matricu oblika (i). Stoga postoji direktna suma dekompozicija

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_m,$$

gdje je svaki od U_j potprostor od V dimenzije 1 ili 2. Štoviše, bilo koja dva vektora koja pripadaju različitim potprostorima U_j su ortogonalna i svaki od $S_{|U_j}$ je izometrija sa U_j u U_j. Ako je $v \in V$, možemo pisati

$$v = u_1 + ... + u_m$$

gdje je svaki $u_j \in U_j$.
Djelovanjem S i dodavanjem norme dobivamo

$$\begin{aligned} \|Sv\|^2 &= \|Su_1 + ... + Su_m\|^2 \\ &= \|Su_1\|^2 + ... + \|Su_m\|^2 \\ &= \|u_1\|^2 + ... + \|u_m\|^2 \\ &= \|v\|^2. \end{aligned}$$

Dakle, S je izometrija.

4 Polarna dekompozicija i dekompozicija na singularne vrijednosti

Teorem 4.1 (Polarna dekompozicija) ([1, Theorem 7.41]). *Ako $T \in \mathcal{L}(V)$, tada postoji izometrija $S \in \mathcal{L}(V)$ takva da vrijedi*

$$T = S\sqrt{T^*T}.$$

Dokaz. Pretpostavimo $T \in \mathcal{L}(V)$. Ako $v \in V$, tada

$$\begin{aligned} \|Tv\|^2 &= \langle Tv, Tv \rangle \\ &= \langle T^*Tv, Tv \rangle \\ &= \langle \sqrt{T^*T}\sqrt{T^*T}v, v \rangle \\ &= \langle \sqrt{T^*T}v, \sqrt{T^*T}v \rangle \\ &= \|\sqrt{T^*T}v\|^2. \end{aligned}$$

Stoga

$$\|Tv\| = \|\sqrt{T^*T}v\| \tag{7}$$

za svaki $v \in V$.
Definirajmo linearan operator $S_1 : \sqrt{T^*T} \to ImT$ tako da vrijedi

$$S_1(\sqrt{T^*T}v) = Tv \tag{8}$$

Ideja ovog dokaza je proširiti S_1 do izometrije $S \in \mathcal{L}(V)$ tako da vrijedi $T = S\sqrt{T^*T}$.
Prvo moramo provjeriti je li S_1 dobro definirano. Pretpostavimo $v_1, v_2 \in V$ takvi da $\sqrt{T^*T}v_1 = \sqrt{T^*T}v_2$. Trebamo pokazati $Tv_1 = Tv_2$.

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\| &= \|T(v_1 - v_2)\| \\ &= \|\sqrt{T^*T}(v_1 - v_2)\| \\ &= \|\sqrt{T^*T}v_1 - \sqrt{T^*T}v_2\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, S_1 dobro definirano.
Trebamo provjeriti da je S_1 linearan operator. iz (8) vidimo da S_1 ide iz slike od $\sqrt{T^*T}$ u sliku od T.
Očito iz (7) i (8) slijedi $\|S_1u\| = \|u\|$ za sve $u \in \sqrt{T^*T}$. Posebno, S_1 je injekcija. Stoga vrijedi

$$\dim Im\sqrt{T^*T} = \dim ImT.$$

Iz toga slijedi $\dim(Im\sqrt{T^*T})^\perp = \dim(ImT)^\perp$. Stoga ortonormirane baze $\{e_1, ..., e_m\}$ od $Im\sqrt{T^*T}^\perp$ i $\{f_1, ..., f_m\}$ od $ImT^\perp$ mogu biti proizvoljno izabrane, ali je bitno da su jednake dimenzije. Definirajmo linearan operator $S_2 : (Im\sqrt{T^*T})^\perp \to ImT^\perp$ tako da vrijedi

$$S_2(a_1e_1 + \cdots + a_me_m) = a_1f_1 + \cdots + a_mf_m.$$

Očito $\|S_2w\| = \|w\|$ za sve $w \in Im\sqrt{T^*T}^\perp$.
Neka je S operator na V takav da je jednak S_1 na $Im\sqrt{T^*T}$ te jednak S_2 na $Im\sqrt{T^*T}^\perp$. Preciznije, sjetimo se da svaki $v \in V$ možemo napisati na jedinstven način u obliku

$$v = u + w, \tag{9}$$

gdje je $u \in Im\sqrt{T^*T}$ i $w \in Im(\sqrt{T^*T})^\perp$. Za $v \in V$ s takvom dekompozicijom definiramo Sv tako da

$$Sv = S_1u + S_2w.$$

Za svaki $v \in V$ imamo

$$S(\sqrt{T^*T}v) = S_1(\sqrt{T^*T}v) = Tv,$$

pa je $T = S\sqrt{T^*T}$. Još nam preostaje dokazati da je S izometrija, što slijedi primjenom Pitagorinog teorema: ako $v \in V$ ima dekompoziciju oblika (9), tada je

$$\begin{aligned}
\|Sv\| &= \|S_1u + S_2w\|^2 \\
&= \|S_1u\|^2 + \|S_2w)\|^2 \\
&= \|u\|^2 + \|w)\|^2 \\
&= \|v\|^2.
\end{aligned}$$

Time smo dovršili dokaz.

Polarna dekompozicija govori da se svaki linearan operator na V može prikazati u obliku produkta izometrije i pozitivnog operatora.

Teorem 4.2 **(Dekompozicija na singularne vrijednosti)** ([1, Theorem 7.46]). *Pretpostavimo $T \in \mathcal{L}(V)$ ima singularne vrijednosti $s_1, ..., s_n$. Tada postoje ortonormirane baze $\{e_1, ..., e_n\}$ i $\{f_1, ..., f_n\}$ od V takve da vrijedi*

$$Tv = s_1\langle v, e_1\rangle f_1 + ... + s_n\langle v, e_n\rangle f_n \tag{10}$$

za svaki $v \in V$.

Dokaz. Primijenjujući spektralni teorem na $\sqrt{T^*T}$, postoji ortonormirana baza $\{e_1, ..., e_n\}$ od V takva da vrijedi $\sqrt{T^*T}e_j = s_j e_j$ za $j = 1, ..., n$. Imamo

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + ... + \langle v, e_n \rangle e_n$$

za svaki $v \in V$. Djelovanjem $\sqrt{T^*T}$ dobivamo

$$\sqrt{T^*T}v = s_1 \langle v, e_1 \rangle e_1 + ... + s_n \langle v, e_n \rangle e_n$$

za svaki $v \in V$. Zbog polarne dekompozicije postoji izometrija $S \in \mathcal{L}(V)$ tako da vrijedi $T = S\sqrt{T^*T}$. Djelovanjem sa S na obje strane, dobivamo

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle Se_1 + ... + s_n \langle v, e_n \rangle Se_n$$

za svaki $v \in V$. Za svaki j, neka je $f_j = Se_j$. S je izometrija, pa je $\{f_1, ..., f_n\}$ ortonormirana baza od V. Tada slijedi

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + ... + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$$

za svaki $v \in V$. Time smo završili dokaz.

Literatura

[1] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, Second Edition, Springer, 1997.