Europska call i put opcija na financijskom tržištu u diskretnom vremenu

Pejović, Gita

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Gita Pejović

Europska call i put opcija na financijskom tržištu u diskretnom vremenu

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Gita Pejović

Europska call i put opcija na financijskom tržištu u diskretnom vremenu

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2022.

Sažetak

Svrha ovog rada je predstaviti europske call i put opcije u diskretnom vremenu na financijskom tržištu. Za početak u prvom poglavlju definirani su temeljni pojmovi vezani za financijsko tržište i financijske instrumente koji su glavni alat trgovanja na financijskom tržištu. Nadalje objašnjena je osnovna podjela financijskih instrumenta na osnovne i izvedene. U drugom poglavlju se obrađuju općenite karakteristike najfleksibilnije vrste izvedenica, a to su opcije. Sljedeće poglavlje daje kratki pregled različitih vrsta opcija koje su po određenim karakteristikama razvrstane u šest skupina. Pojašnjene su sljedeće opcije: call, put, europske, američke, robne, financijske, pokrivene, nepokrivene, kratkoročne, dugoročne, standardne i egzotične. Četvrto poglavlje detaljnije predstavlja pojam diskretnog vremena i obrađuju se osnovni pojmovi vezani za diskretan vjerojatnosni prostor. Također predstavljaju se osnovne pretpostavke matematičkih modela financijskih tržišta, jednoperiodni i višeperiodni model na financijskom tržištu. Zadnje poglavlje posvećeno je europskoj call i put opciji, obrađene su njihove vrijednosti u trenutku dospijeća i primjeri uspješne i neuspješne europske call opcije. Objašnjen je jednoperiodni binarni model financijskog tržišta, te cijene rizičnih i nerizičnih financijskih instrumenata na njemu. Na kraju predstavljeni su teoremi o slučaju kada jednoperiodni binarni model ne dopušta arbitražu i o nearbitražnoj cijeni ECO i EPO u okviru binarnog modela, te dokazi i primjeri vezani za njih.

Ključne riječi

financijsko tržište, diskretno vrijeme, europske opcije, call i put opcije

European call and put options on the financial market in discrete time

Abstract

The purpose of this paper is to present a European call and put options in discrete time on the financial market. The first chapter defines the basic terms related to the financial market and financial instruments, which are the main trading tools on the financial market. Furthermore, the basic division of financial instruments into basic and derivative financial instruments is explained. The second chapter deals with the general characteristics of the most flexible type of derivatives, which are options. The following chapter gives a brief overview of different types of options, which are classified into six groups according to certain characteristics. The following options are clarified: call, put, European, American, commodity, financial, covered, uncovered, short-term, long-term, standard and exotic. The fourth chapter presents the concept of discrete time in more detail and describes basic concepts of discrete probability space. The basic assumptions of mathematical models of financial markets, single period and multiperiod financial market models are also presented in this chapter. The last chapter is devoted to a European call and put options, their values at maturity and examples of successful and unsuccessful European call options. The single period binary model of the financial market, the prices of risk-free financial instruments and the prices of financial instruments with risk are also explained. Finally, theorem when the single period binary model does not allow arbitrage and theorem on the non-arbitrage price of ECO and EPO on the binary model are presented, as well as proofs and examples related to them.

Keywords

financial market, discrete time, European options, call and put options

Sadržaj

Uvod

Tržište je pojam za mjesto na kojem se susreću ponuda i potražnja za nekim dobrom. U slučaju financijskog tržišta, dobro oko kojeg se odvija ponuda i potražnja su financijski instrumenti. Tržišta novca i kapitala, kao dijelovi financijskog tržišta otvoreni su prema konkurentnom djelovanju. To znači da povećanje ponude i smanjenje potražnje dovodi do smanjenja vrijednosti, a povećanje potražnje i smanjivanje ponude rezultira povećanjem vrijednosti na tržištu. Budući da su u današnje vrijeme financijska tržišta sve osjetljivija na rizik od pada vrijednosti, razvile su se nove mogućnosti investiranja kako bi se taj rizik smanjio. Neke od tih mogućnosti nude izvedeni financijski instrumenti od kojih se opcije smatraju kao najfleksibilnije. Osnovne vrste opcija su call opcije i put opcije. Call opcija daje vlasniku pravo, ali ne i obvezu, da kupi ugovorni vrijednosni papir ili eventualno neku drugu prethodno dogovorenu temeljnu imovinu po točno određenoj cijeni u određenom vremenskom periodu. Put opcija predstavlja pravo na prodaju temeljne imovine ili vrijednosnog papira po zajamčenoj cijeni izvršenja tijekom cijelog životnog vijeka. Osim na call i put, opcije se mogu podijeliti i na europske i američke. Europski tip opcije je financijska opcija koju kupac može iskoristiti tek nakon isteka ugovora, odnosno na datum dospijeća. Drugim riječima, ako temeljna imovina daje prednost kupcu opcije prije isteka, on neće moći profitirati korištenjem opcije, za razliku od američkih opcija koje se mogu izvršiti bilo kada prije isteka. Opcije su izuzetno vrijedna "imovina" na današnjim financijskim tržištima, nudeći financijskim stručnjacima mnoge prilike. Prednosti koje nude opcije su potencijalno visoki prihodi, ograničenja rizika, financijska poluga, fleksibilnost i mogućnost da se ostane na tržištu bez posjedovanja imovine koja se može prodati. Same mogućnosti su prilično složene i zahtijevaju napredno poznavanje njihove upotrebe, kao i razumijevanje njihovih prednosti i mana. Dalje u radu biti će objašnjene europske call i put opcije na financijskom tržištu u diskrentom vremenu, no prvo ćemo započeti sa definicijom osnovnih pojmova.

1 Financijsko tržište

Definicija 1. *Financijsko tržište je zajednički naziv za sva specijalizirana, međusobno povezana tržišta, na kojima se susreću ponuda i potražnja za različitim financijskim instrumentima. (vidi [4])*

Financijski instrument je dokument kojim se dokazuje vlasništvo nad nekom financijskom imovinom. On omogućava i osigurava transfer novčanih sredstava, te uređuje prava i obveze između ugovornih strana. Prema (vidi [1]), financijsku imovinu kojom se trguje dijelimo u dvije osnovne kategorije:

- osnovni financijski instrumenti
- izvedeni financijski instrumenti.

Osnovni financijski instrumenti dijele se na dvije skupine:

- nerizični: novac, državne obveznice
- rizični: strane valute, dionice, korporativne obveznice.

Glavna razlika između navedenih skupina je što kod nerizičnih financijskih instrumenata uvijek možemo točno izračunati kako će se mijenjati njihova vrijednost u budućnosti. Kod rizičnih financijskih instrumenata postoji rizik, odnosno ne možemo točno odrediti kako će se mijenjati njihova vrijednost kroz vrijeme.

Izvedeni financijski instrumenti su forward i futures ugovori, opcije i swapovi. Njihova vrijednost izvedena je iz vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata.

Definicija 2. *Forward ugovor je ugovor u kojem se jedna strana (kupac) obavezuje na kupnju, a druga strana (prodavatelj) na prodaju financijske imovine u trenutku dospijeća T po tzv. forward cijeni ili cijeni izvršenja K. (vidi [1])*

Ovom vrstom ugovora se kupac želi zaštititi od prevelikog porasta cijena, a prodavatelj od pada. Futures ugovor je ugovor između kupca i prodavatelja kod kojeg se uvjeti unaprijed dogovaraju, a isporuka je odgođena. Iako se cijena unaprijed dogovara, ona se svaki dan korigira s obzirom na vrijednost uspostavljenu na burzi.

2 Općenito o opcijama

Definicija 3. *Opcije su izvedenice koje držatelju daju pravo, ali ne i obvezu, kupnje ili prodaje vezane imovine po određenoj cijeni do datuma njihova dospijeća. (vidi [7])*

Opcije su najpopularnije izvedenice zbog svoje fleksibilnosti i mogućnosti zaštite od postojećih rizika. Na primjer za sprječavanje rizika promjene kamatnih stopa i rizika promjene tečaja među valutama. Najvažniji događaj koji je pridonio njihovoj popularnosti je osnivanje prve organizirane burze opcija u Chicagu 1973. godine pod imenom CBO (engl. Chicago Board of Options). Za razliku od future, forwards i swaps kod kojih tržišni sudionici dijele rizik koji je posljedica promjene vrijednosti, opcije se koriste kako bi se prebacio dio rizika na druge tržišne sudionike koji su spremni preuzeti rizik za određenu naknadu. (vidi [7]) Iako i opcije i future ugovori služe kao instrumenti za ograničavanje rizika, osnovna prednost opcija je mogućnost ostvarenja značajnih profita što je kod future ugovora onemogućeno.

S obzirom da se opcijama trguje na financijskom tržištu one imaju svoju vrijednost, odnosno cijenu. Treba znati razlikovati dva pojma vezana za cijenu a to su cijena izvršenja i premija.
Cijena izvršenja je cijena po kojoj vlasnik opcije može kupiti ili prodati imovinu koja je predmet opcije.
Premija je iznos koji za prava iz opcije prima njen prodavač od njezina kupca. (vidi [4])

Trgovanje opcijama ovisno o razlici između tržišne vrijednosti i cijene izvršenja može biti:

- **Out of the money -** tržišna vrijednost je manja od cijene izvršenja call opcije, odnosno tržišna vrijednost je veća od cijene izvršenja put opcije

- **At the money -** tržina vrijednost jednaka je cijeni izvršenja call i put opcije

- **In the money -** tržišna vrijednost je veća od cijene izvršenja call opcije, odnosno tržišna vrijednost je manja od cijene izvršenja put opcije (vidi [4]).

U slučaju kada je opcija "at the money" ili "in the money" kupac ima motivaciju da iskoristi svoje pravo na opciju. On ima pravo izbora da li želi upotrijebiti to pravo ili ne, ali prodavač ima obvezu izvršiti opciju ukoliko kupac to želi.

3 Vrste opcija

Opcije možemo razvrstati prema sljedećim karakteristikama:

- zauzetoj investicijskoj poziciji (call i put)
- mogućnosti izvršenja (europske i američke)
- karakteru temeljne imovine (robne i financijske)
- pokrivenosti temeljnom imovinom (pokrivene i nepokrivene)
- vremenu trajanja (kratkoročne i dugoročne)
- standardnosti temeljnih karakteristika (standardne i egzotične opcije).

3.1 Call opcije i put opcije

Opcije su izvedeni financijski instrument koji su najbrže rastuća izvedenica na tržištu. Najznačaniji razlozi njihovog uspjeha je mogućnost zarade velikih iznosa i ograničavnje mogućih gubitaka. S obirom da li se ostvaruje pravo prodaje ili pravo kupnje, opcije se dijele na dvije osnovne skupine, koje će u narednim poglavljima biti detaljnije objašnjene:

- call opcije
- put opcije.

3.2 Europske opcije i americke opcije

Prema načinu na koji se može realizirati pravo iz opcije do datuma dospijeća, razlikuju se dva tipa opcija:

- europske opcije
- američke opcije.

Europske opcije omogućuju svojim vlasnicima kupnju ili prodaju vrijednosnih papira ili druge temeljne imovine na točno određen datum dospijeća T koji je naveden u opciji. To znači da ako temeljna imovina daje prednost kupcu opcije prije isteka, on neće moći profitirati korištenjem opcije. Američke opcije dozvoljavaju svom vlasniku da kupi ili proda temeljnu imovinu u bilo kojem trenutku prije T. S obzirom na to, vlasnici američkih opcija imaju veću fleksibilnost od vlasnika europskih opcija, budući da svoje pravo na opciju mogu iskoristiti u dužem vremenskom periodu. S obzirom da se ne može predvidjeti unaprijed koji je najpovoljniji trenutak za izvođenje opcije, u većini slučajeva američke opcije se također izvršavaju neposredno prije isteka, osim ako je prije isteka opcije slučaj "in the money".

3.3 Robne opcije i financijske opcije

Obzirom na vrstu temeljne imovine na koju su opcije sastavljene, dijele se na:

- robne opcije
- financijske opcije

Robne opcije su sastavljene na bilo kakvu realnu imovinu. Pod realnu imovinu se svrstavaju nekretnine, energetski proizvodi, metali, poljoprivredni proizvodi i slično. U financijskim opcijama, temeljna imovina je financijska imovina, to su vrijednosni papiri, indeksi, dionice, obveznice, valutni tečajevi, kamatne stope i ostalo.

3.4 Pokrivene opcije i nepokrivene opcije

Prema pokrivenosti temeljne imovine razlikujemo dvije vrste opcija:

- pokrivene opcije
- nepokrivene opcije

Pokrivenost opcije se odnosi na vezu između sastavljača opcije i temeljne imovine na koju se opcija sastavlja. Ukoliko sastavljač posjeduje temeljnu imovinu opcije, tada se radi o pokrivenoj opciji. U slučaju da sastavljač ne posjeduje temeljnu imovinu radi se o nepokrivenoj opciji.

3.5 Kratkoročne opcije i dugoročne opcije

Opcije su najčešće kratkoročni financijski instrumenti što znači da vrijeme dospijeća nije dulje od devet mjeseci. Također postoje i dugoročne opcije. Opcije koje imaju vrijeme dospijeća duže od jedne godine zovu se LEAPS opcije.

3.6 Standardne opcije i egzotične opcije

Na službenim tržištima opcija, opcije moraju poštovati propisana pravila i standarde koje je propisala burza. Za razliku od njih, na neslužbenim tržištima opcije mogu biti sastavljene prema dogovoru kupca i prodavatelja, bez poštivanja pravila. Opcije koje imaju standardne karakteristike zovemo "plain vanilla", a one sa posebnim karakteristikama egzotičnim opcijama.

Plan vanilla opcije imaju sljedeće karakteristike: fiksno vrijeme dospijeća T, fiksnu cijenu izvršenja K i jednu financijsku imovinu.

Egzotične opcije imaju barem jednu karakteristiku modificiranu u usporedbi s plain vanilla opcijama.

4 Diskretno vrijeme i matematički modeli financijskih tržišta

4.1 Diskretno vrijeme

Kroz želju za boljim razumijevanjem posljedica koje tržište ostavlja na sveukupnu suvremenu ekonomiju i društvo, te bolju procijenu vrijednosti financijske imovine u budućnosti, znanstvenici su stvorili matematičke modele za procijenu vrijednosti. Matematički modeli su zapravo samo gruba aproksimacija složenih i nepredvidivih stvarnih financijskih tržišta. Matematički modeli mogu se konstruirati u diskretnom i kontinuiranom vremenu. U ovom radu fokusirati ćemo se na matematičke modele financijskih tržišta u diskretnom vremenu. Vrijednost nekog financijskom instrumenta u diskretnom vremenu modelirati ćemo pomoću vrijednosti slučajne varijable čije vrijednosti promatramo u konačno mnogo trenutaka. Zbog toga će vrijednost financijskog instrumenta kojeg promatramo na intervalu između dva uzastopna trenutka biti konstantna. Diskretne slučajne varijable promatramo na diskretnom vjerojatnosnom prostoru pa ćemo za početak to definirati.

Skup Ω koji kao elemente sadrži sve što se može realizirati kad izvedemo promatranje nazivamo **prostor elementarnih događaja**.

Definicija 4. *Neka je dan neprazan skup Ω. Familija F podskupova skupa Ω jest* ***σ-algebra skupova*** *na Ω ako vrijedi:*

1. $\emptyset \in F$
2. *ako je $A \in F$, onda je i $A^C \in F$*
3. *ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq F$, onda F sadrži i njihovu uniju, tj.*
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

Definicija 5. *Neka je Ω neprazan prostor elementarnih događaja i F σ-algebra skupova na njemu. Funkciju*
$$P : F \to \mathbb{R}$$
zovemo ***vjerojatnost*** *na Ω ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:*

1. *nenegativnost vjerojatnosti: $P(A) \geq 0$, za sve $A \in F$*
2. *normiranost vjerojatnosti: $P(\Omega) = 1$*
3. *σ -aditivnost vjerojatnosti: ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq F, I \subseteq \mathbb{N}$, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ čim je $i \neq j$, tada vrijedi*
$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

Definicija 6. *Neka je Ω neprazan skup, F σ-algebra događaja na njemu, a P vjerojatnost na Ω. Uređenu trojku $(\Omega,\ F,\ P)$ zovemo* ***vjerojatnosni prostor****.*

Vjerojatnosni prostor kod kojega je Ω konačan ili prebrojiv skup, a pridružena σ-algebra je jednaka partitivnom skupu od Ω, zvat ćemo **diskretan vjerojatnosni prostor**.

Definicija 7. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, P(\Omega), P)$. Svaku funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zvat ćemo* ***diskretna slučajna varijabla****.*

Slučajnu varijablu X zadajemo tablicom distribucije

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \dots \end{pmatrix} \tag{1}$$

pri čemu su $x_1, x_2, ...x_n$ elementi skupa $\mathcal{R}(X)$ kojeg zovemo slika slučajne varijable, a $p_1, p_2, ...p_n$ pripadne vjetojatnosti takve da vrijedi $p_i = P\{X = x_i\}$. Pripadnu tablicu 1 zovemo distribucija slučajne varijable.

4.2 Matematički modeli financijskih tržišta

Osnovne pretpostavke matematičkih modela su (vidi [1]):

1. U trenutku $t = 0$, poznate su nam cijene svih osnovnih rizičnih imovina. U slučaju $t > 0$ cijene možemo modelirati nenegativnim slučajnim varijablama
2. U svakom trenutku t vrijednost nerizične imovine nam je poznata i ovisi o fiksnoj kamatnoj stopi. Na financijskom tržištu po toj kamatnoj stopi ulagači mogu investirati i posuđivati novac.
3. Ukoliko posjedujemo financijsku imovinu, time ne ostvarujemo dodatan prihod ili trošak
4. Svi sudionici financijskog tržišta imaju jednak pristup informacijama
5. Sva financijska imovina je beskonačno djeljiva, likvidna i moguće ju je posuđivati bez troškova
6. Moguće je trgovati bez transakcijskih troškova

Svrha matematičkih modela financijskih tržišta je minimiziranje rizika pri kupnji određene financijske imovine. Kao što je navedeno, opcije također služe u svrhu smanjenja rizika. **Jednoperiodni model** predstavlja najjednostavniji matematički model na financijskom tržištu jer mu je osnovna pretpostavka da postoje dva datuma. Ta dva datuma su datum početka kada je $t = 0$ i datum završetka kada je $t = 1$. Sam naziv modela proizlazi iz toga da je između ta dva datuma jedan period, te se samo jednom mijenja cijena financijskog instrumenta.

Višeperiodni model je proširenje jednoperiodnog modela financijskog tržišta. U navedenom modelu vremensko razdoblje koje promatramo dijelimo na T perioda, stoga ćemo imati $T + 1$ trenutaka. Cijena financijskog instrumenta mijenja se T puta i promatramo njezinu vrijednost u trenucima $t = 0, 1, ..., T$.

Definicija 8. *Ako financijsko tržište dopušta strategiju trgovanja kojojm netko ostvaruje zaradu bez rizika, tu strategiju zovemo* ***arbitražom****. [1]*

Obzirom da arbitražni modeli ne opstaju dugo na tržištu, najčešće se u modelima pretpostavlja da ne postoji mogućnost pojave arbitraže, tako će biti i u sljedećim modelima.

5 Europska call i put opcija na financijskom tržištu u diskretnom vremenu

Definicija 9. *Europska call opcija (ECO) je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da u unaprijed određenom trenutku T kupi neku financijsku imovinu po unaprijed određenoj cijeni K. (vidi [1])*

Definicija 10. *Europska put opcija (EPO) je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da u trenutku T proda neku financijsku imovinu po unaprijed određenoj cijeni K. (vidi [1])*

U prethodnim definicijama 9 i 10 vrijeme T se naziva vrijeme dospijeća, a K se zove cijena izvršenja. Sa S_T ćemo označiti tržišnu vrijednost financijske imovine u trenutku T. Koristeći prethodne oznake možemo izračunati koliko ECO i EPO vrijedi svom vlasniku u trenutku dospijeća.

Europska call opcija:

1. $S_T \leq K$, odnosno tržišna vrijednost dionice u trenutku dospijeća je manja ili jednaka cijeni izvršenja. U tom slučaju vlasniku opcije je bezvrijedna jer neće iskoristiti svoje pravo iz ugovora.

2. $S_T > K$, odnosno tržišna vrijednost dionice u trenutku dospijeća je veća od cijene izvršenja. Vlasnik opcije će iskoristiti svoje pravo iz ugovora, te ostvariti profit od $(S_T - K)$.

Vrijednost u trenutku dospijeća je jednaka:

$$C_T^{call} = \max(0, S_T - K) = (S_T - K)_+ \tag{2}$$

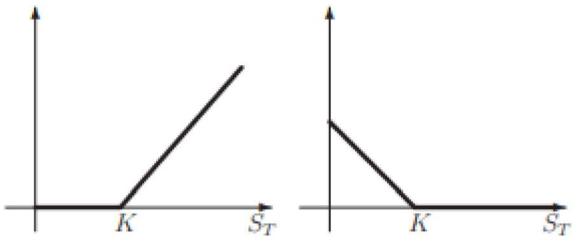
Europska put opcija:

1. $S_T \leq K$, odnosno tržišna vrijednost dionice u trenutku dospijeća je manja ili jednaka cijeni izvršenja. Vlasnik opcije će iskoristiti svoje pravo iz ugovora, te ostvariti profit od $(K - S_T)$.

2. $S_T > K$, odnosno tržišna vrijednost dionice u trenutku dospijeća je veća od cijene izvršenja. U ovom slučaju vlasniku opcije je opcija bezvrijedna jer neće iskoristiti svoje pravo iz ugovora.

Vrijednost u trenutku dospijeća je jednaka:

$$C_T^{put} = \max(0, K - S_T) = (K - S_T)_+ \tag{3}$$



Slika 1: Lijevi graf nam prikazuje vrijednost u trenutku dospijeća kao funkciju cijene dionica za europsku call opciju, a desni graf za europsku put opciju.

Primjer 1 *("In the money" europska call opcija)*. *Neka je cijena dionice nekog poduzeća u trenutku sklapanja ugovora* 4000 *HRK. Kupujemo europsku call opciju na* 6 *mjeseci i plaćamo premiju* $p = 100$ *HRK. Opcijom ostvarujemo pravo da nakon* 6 *mjeseci, na dan dospijeća* T *od prodavatelja kupimo dionicu po cijeni od* $K = 4400$ *HRK. Pretpostavimo da je za* 6 *mjeseci od sklapanja ugovora cijena dionice na tržištu porasla na* $S_T = 4800$ *HRK, no kupac opcije ima pravo kupiti ju za* $K = 4400$ *HRK. Ako kupac iskoristi svoje pravo i kupi dionicu po cijeni izvršenja* $K = 4400$ *HRK, te proda po tržišnoj vrijednosti* $S_T = 4800$ *HRK, njegova zarada biti će razlika tržišne vrijednosti* S_T *i cijene izvršenja* K *umanjena za premiju.* $(S_T - K) - p = 4800 - 4400 - 100 = 300$. *Zarada vlasnika opcije bi iznosila* 300 *HRK, što znači da je imao korist od kupnje opcije i to je primjer "in the money" call opcije.*

Primjer 2 *("Out of the money" europska call opcija)*. *Neka je cijena dionice nekog poduzeća u trenutku sklapanja ugovora* 4000 *HRK. Kupujemo europsku call opciju na* 6 *mjeseci i plaćamo premiju* $p = 100$ *HRK. Opcijom ostvarujemo pravo da nakon* 6 *mjeseci, na dan dospijeća* T *od prodavatelja kupimo dionicu po cijeni od* $K = 4400$ *HRK. Pretpostavimo da je za* 6 *mjeseci od sklapanja ugovora cijena dionice na tržištu smanjena na* $S_T = 3800$ *HRK, a kupac opcije ima pravo kupiti ju za* $K = 4400$ *HRK. U tom slučaju kupovina dionice biti će nepovoljna za kupca opcije i on neće iskoristiti svoje pravo na opciju. Tržišna vrijednost dionice* S_T *manja je od cijene izvršenja* K, *pa je ovo primjer "out of the money" call opcije.*

Na temelju predhodnih primjera 1 i 2, možemo zaključiti da kupac opcije nikada ne bi bio na gubitku, za razliku od prodavatelja koji može biti. Iz tog razloga kupac opcije plaća premiju koja je zapravo cijena opcije. Kao što je već spomenuto kupac opcije ima pravo, ali ne i obvezu, dok prodavatelj ima obvezu ukoliko se kupac odluči iskoristiti svoje pravo na opciju.

Za izradu modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu pretpostaviti ćemo da trgujemo s $(d+1)$ financijskim instrumentom u trenucima $t \in \{0, 1, ..., T\}$. Od toga je jedan nerizični financijski instrument (novac), a $d \in \mathbb{N}$ je rizičnih instrumenata (dionica). Budući da su to izvedeni financijski instrumeni, njihova vrijednost je izvedena iz vrijednosti osnovne financijske imovine na koju se odnose. Vrijednost nerizičnog financijskog instrumenta poznata nam je u svakom trenutku. U $t = 0$, vrijednost je jednaka S_0^0. Dok se za $t > 0$ vrijednost dobiva uvrštavanjem u formulu, gdje je r efektivna kamatna stopa :

$$S_t^0 = (1+r)^t. \tag{4}$$

U navedenom modelu vrijednosti $d \in \mathbb{N}$ rizičnih financijskih instrumenata smatrati ćemo neizvjesnima, te vrijednost i-tog instrumenta u trenutku t označavati ćemo sa $S_t^i, i = 1, ..., d$.

5.1 Jednoperiodni binarni model

U prethodnom poglavlju objasnili smo pojam jednoperiodnog modela. Zbog jednostavnosti, pretpostaviti ćemo da na tržištu postoje samo dva financijska instrumenta.

Jednoperiodni binarni model sastoji se od jednog rizičnog i jednog nerizičnog financijskog instrumenta. U slučaju nerizičnog financijskog instrumenta, cijena u trenutku $t = 0$ je poznata i nenegativna, te iznosi S_0^0. U trenutku $t = 1$ vrijednost iznačunavamo pomoću sljedeće formule, gdje r označava efektivnu kamatnu stopu:

$$S_0^1 = S_0^0(1+r). \tag{5}$$

Kod rizičnog financijskog instrumenta, u trenutku $t = 0$ cijena je također poznata i nenegativna, te iznosi S_0^1. Za razliku od nerizičnih financijskih instrumenata, cijena u trenutku $t = 1$ nam nije poznata i ne možemo ju izračunati. Zbog toga, uvodimo slučajnu varijablu. U formuli za izračunavanje cijene kod rizičnog financijskog instrumenta dobivamo slučajnu varijablu X_1 kojom modeliramo cijenu u trenutku $t = 1$:

$$S_1^1 = S_0^1(1+X_1) \tag{6}$$

gdje je X_1 slučajna varijabla sa distribucijom

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix} \tag{7}$$

za konstante $a < b$, $p \in \langle 0, 1 \rangle$.

Iz tablice distribucije slučajne varijable X_1 zaključujemo da su dva moguća elementarna događaja $\Omega = \{a, b\}$, odnosno slučajna varijabla može primiti točno dvije vrijednosti. Reći ćemo da takva slučajna varijabla ima Bernullijevu distribuciju s parametrom p. Ako pretpostavimo da je $P(b) = p, P(a) = 1-p$ i $X_1(\omega) = \omega$, dobivamo vjerojatnosni prostor $(\Omega, P(\Omega), P)$ na kojem je definirana Bernullijeva slučajna varijabla X_1. Korištenjem formule 6 za cijenu rizičnog financijskog instrumenta u trenutku $t = 1$ možemo definirati slučajnu varijablu te cijene čija je tablica distribucije oblika:

$$S_1^1 \sim \begin{pmatrix} S_0^1(1+a) & S_0^1(1+b) \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Zaključujemo da cijena S_1^1 rizičnog financijskog instrumenta u trenutku $t = 1$ iznosi $S_0^1(1+a)$ s vjerojatnošću $1-p$, ako je slučajna varijabla X_1 realizirana sa $a \in \Omega$. U slučaju da je slučajna varijabla X_1 realizirana s $b \in \Omega$, onda s vjerojatnošću p cijena S_1^1 iznosi $S_0^1(1+b)$.

Lema 1. *Ako ne vrijedi $a < r < b$, u jednoperiodnom binarnom modelu postoji mogućnost arbitraže.*

Dokaz:
Pretpostavimo da ne vrijedi $a < r < b$.
1. slučaj: Neka je $r \leq a$
$t = 0$ Iz banke uz kamatnu stopu r posudimo iznos S_0^1 i kupimo dionicu te vrijednosti.
$t = 1$ Prodajemo dionicu čija vrijednost s vjerojatnošću $1 - p$ iznosi $S_0^1(1 + a)$, a s vjerojatnošću p iznosi $S_0^1(1 + b)$. Banci dugujemo $S_0^1(1 + r)$, a budući da vrijedi da je $r \leq a$ i $a < b$ slijedi da je $S_0^1(1 + r) \leq S_0^1(1 + a) < S_0^1(1 + b)$. Iz čega zaključujemo da je zarada $S_1^1 - S_0^1(1 + r) \geq 0$, te postoji mogućnost arbitraže.

2. slučaj: Neka je $b \leq r$
$t = 0$ Posuđujemo dionicu čija je vrijednost S_0^1, prodamo ju i taj novac uložimo u banku uz kamatnu stopu r.
$t = 1$ Vrijednost dionice s vjerojatnošću $1 - p$ je jednaka $S_0^1(1 + a)$, a s vjerojatnošću p je $S_0^1(1 + b)$. U banci sada imamo $S_0^1(1 + r)$ novaca, te koristeći pretpostavke dobivamo da vrijedi $S_0^1(1 + a) < S_0^1(1 + b) \leq S_0^1(1 + r)$. Zarada je $S_0^1(1 + r) - S_1^1 \geq 0$, što omogućava arbitražu. $\square$

Definicija 11. *Na jednoperiodnom binarnom financijskom tržištu proizvoljan vektor $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1) \in \mathbb{R}^2$ zove se* ***portfelj***.

U prethodnoj definiciji φ^0 predstavlja broj jedinica nerizičnog instrumenta, npr. novca, a φ^1 predstavlja broj jedinica rizičnog financijskog instrumenta, npr. broj dionica koji investitor posjeduje u trenutku $t = 0$. U trenutku $t = 0$ vrijednost portifelja jednaka je:

$$V_0 = \varphi^0 + \varphi^1 S_0^1 \tag{9}$$

dok u $t = 1$ ona je jednaka

$$V_1 = \varphi^0(1 + r) + \varphi^1 S_1^1. \tag{10}$$

Definicija 12. *Na jednoperiodnom binarnom financijskom tržištu, slučajan zahtjev C je proizvoljna slučajna varijabla.*

Kako je vrijednost rizičnog financijskog insturmenta u trenutku $t = 1$ modelirana slučajnom varijablom, korištenjem sljedećeg teorema zaključujemo kako portifelj točno replicira vrijednost opcije.

Teorem 1. *Pretpostavimo da u jednoperiodnom binarnom modelu vrijedi $a < r < b$ (inače model dopušta arbitražu), tada za proizvoljan slučajan zahtjev C postoji jedinstven portfelj koji ga replicira, a jedina nearbitražna cijena ovog zahtjeva je*

$$\frac{1}{1 + r}\left[C(a)\frac{b - r}{b - a} + C(b)\frac{r - a}{b - a}\right]. \tag{11}$$

Dokaz:

Neka je C proizvoljan slučajan zahtjev i vrijedi $a < r < b$, $C : \{a, b\} \to \mathbb{R}$. Da bi φ replicirao slučajan zahtjev C mora vrijediti:

$$C(a) = \varphi^0(1+r) + \varphi^1 S_0^1(1+a) \tag{12}$$

$$C(b) = \varphi^0(1+r) + \varphi^1 S_0^1(1+b). \tag{13}$$

Rješavanjem sustava dobivamo jedinstvena rješenja za φ^0 i φ^1.

$$\varphi^0 = \frac{1}{1+r}\frac{C(a)(1+b)+C(b)(1+a)}{b-a} \tag{14}$$

$$\varphi^1 = \frac{C(b)-C(a)}{S_0^1(b-a)} \tag{15}$$

Time smo dokazali da postoji jedinstveni portifelj koji ga replicira, još trebamo pokazati jedinu nearbitražnu cijenu slučajnog zahtjeva C. Korištenjem jednadžbe 9 i uvrštavanjem rješenja sustava 14 i 15 dobivamo vrijednost portifelja $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$ u $t = 0$ koja je dana formulom:

$$\begin{aligned} V_0 = \varphi^0 + \varphi^1 S_0^1 &= \frac{1}{1+r}\frac{C(a)(1+b)-C(b)(1+a)}{b-a} + \frac{C(b)-C(a)}{S_0^1(b-a)}S_0^1 \\ &= \frac{1}{1+r}\frac{C(a)(b-r)+C(b)(r-a)}{b-a} \end{aligned} \tag{16}$$

Ovakva cijena ne dopušta arbitražu, trebamo pokazati da je to jedina nearbitražna cijena za slučajan zahtjev C.

1. slučaj: netko ponudi $V' > V_0$ za C

$t = 0$

- prodamo opciju za V'
- za V_0 oformimo portifelj φ
- u banku uložimo $(V' - V_0)$

$t = 1$

- isplatimo vlasnika slučajnog zahtjeva C
- ostaje nam ulog koji je u banci $(V' - V_0)(1 + r)$

2. slučaj: netko prodaje C za $V' < V_0$

$t = 0$

- kupimo opciju za V'
- za V_0 oformimo portifelj φ
- u banku uložimo $(V_0 - V')$

$t = 1$

- dobijemo C koji vrijedi upravo kao portfelj koji dugujemo
- ostaje nam ulog koji je u banci $(V_0 - V')(1 + r)$

$\square$

Sljedeći primjer ćemo također promatrati na jednoperiodnom binarnom modelu, te koristeći prethodni teorem izračunati nearbitražnu vrijednost ECO i EPO opcija. Nerizičan financijski instrument biti će novac uložen u banci uz kamatnu stopu r, a rizičan financijski instrument dionice tvrtke.

Primjer 3. *Neka je kamatna stopa* $r = 4\% = 0.04$, *vrijednost dionice u trenutku* $t = 0$ *iznosi* $S_0^1 = 879.80$ *HRK, a dogovorena cijena izvršenja iznosi* $K = 1000$ *HRK. Neka je tablica distribucije slučajne varijable cijene* S_1^1 *oblika:*

$$S_1^1 \sim \begin{pmatrix} 650 & 1180 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \tag{17}$$

iz čega zaključujemo da moguće cijene dionice S_1^1 *u trenutku dospijeća* $t = 1$ *iznose* 650 *HRK i* 1180 *HRK. Korištenjem tablica distribucija 8 i 17 izračunavamo realne brojeve* $a = -0.2612$ *i* $b = 0.3412$. *Kako vrijede pretpostavke prethodnog teorema 1, odnosno* $a < r < b$, *za slučajan zahtjev* C *koji je transformacija slučajne varijable* S_1^1 *postoji jedinstven portfelj* φ *koji ga replicira. Taj portifelj ćemo pronaći kao jedinstvena rješenja sustava jednandžbi:*

$$C(a) = 1.04\varphi^0 + 650\varphi^1 \tag{18}$$

$$C(b) = 1.04\varphi^0 + 1180\varphi^1, \tag{19}$$

a vrijednost portfelja $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$ *u trenutku* $t = 0$ *jednaka je*

$$V_0 = \varphi^0 + 879.80\varphi^1. \tag{20}$$

u slučaju ECO:

Portifelj φ *će replicirati vrijednost ECO ako je* $V_1 = C_1^{call} = \max(0, S_1^1 - K)$, *gdje je pripadna tablica distribucije od* C_1^{call} *dana:*

$$C_1^{call} \sim \begin{pmatrix} 0 & 180 \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Sada pomoću dobivenih rezultata 18, 19 i 21 dobivamo sustav jednadžbi:

$$1.04\varphi^0 + 650\varphi^1 = 0 \tag{22}$$

$$1.04\varphi^0 + 1180\varphi^1 = 180, \tag{23}$$

čija su jedinstvena rješenja sustava $\varphi^0 = -212.25$ *i* $\varphi^1 = 0.34$. *Uvrštavanjem dobivenih rješenja sustava u 20, nearbitražna cijena ove ECO iznosi:*

$$C_0^{call} = V_0 = -212.25 + 879.80 \cdot 0.34 = 86.88HRK \tag{24}$$

Također, nearbitražnu cijenu mogli smo izračunati na brži način uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u formulu 11 teorema 1 kao što ćemo pokazati za EPO.

u slučaju EPO:

Portifelj φ će replicirati vrijednost EPO ako je $V_1 = C_1^{put} = \max(0, K - S_1^1)$, gdje je pripadna tablica distribucije od C_1^{put} dana:

$$C_1^{put} \sim \begin{pmatrix} 350 & 0 \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Kako smo prethodno izračunali a i b, a iz gornje tablice distribucije 25 očitavamo $C(a) = 350$ i $C(b) = 0$, uvrštavanjem tih vrijednosti u formulu 11 dobivamo nearbitražnu vrijednost ove EPO koja iznosi:

$$C_0^{put} = V_0 = \frac{1}{1+r}\left[C(a)\frac{b-r}{b-a} + C(b)\frac{r-a}{b-a}\right] = 168.17HRK. \tag{26}$$

Teorem 2. *Jednoperiodni binarni model ne dopušta arbitražu ako i samo ako vrijedi $a < r < b$.*

Dokaz:

Iz leme 1 zaključujemo da za nepostojanje arbitraže mora nužno vrijediti $a < r < b$. Iz teorema 1 dobivamo da je to i dovoljan uvjet, jer uvrštavanjem u 11 za nearbitražnu cijenu dionice S_1^1 u $t = 0$ dobivamo S_0^1. □

Primjer 4. *Neka je $r = 0$, cijena dionice u trenutku $t = 0$ iznosi $S_0^1 = 500HRK$ i tablica distribucije cijene dionice u trenutku $t = 1$ je oblika:*

$$S_1^1 \sim \begin{pmatrix} 350 & 700 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Na temelju prethodnih pretpostavki, izračunavamo da vrijedi $-0.3 = a < r < b = 0.4$. Ukoliko želimo kupiti dionicu za koju u trenutku $t = 0$ nemamo dovoljno sredstava, možemo kupiti ECO kojom eliminiramo dio rizika prevelikog povećanja cijene dionice. Ako bi cijena izvršenja iznosila $K = 600HRK$, cijena naše dionice koju želimo kupiti bi mogla porasti za najviše 20% što je dobra motivacija za kupnju ECO. Ukoliko posjedujemo dionicu, kupnjom EPO se možemo zaštititi od prevelikog pada vrijednosti dionice koju posjedujemo. Ona nam garantira da ćemo u trenutku dospijeća $t = 1$ moći prodati dionicu po cijeni izvršenja $K = 600HRK$. Treba uočiti da se kupnjom opcija po ovim uvjetima ipak može povećati rizik. Na primjer, ako u trenutku $t = 0$ kupimo ECO u nadi da će vrijednost dionice porasti. Ukoliko njena vrijednost padne na $350HRK$, opcija će nam biti bezvrijedna jer bi njenim korištenjem kupili dionicu po izvršnoj cijeni $K = 600HRK$, koju na tržištu možemo kupiti za $350HRK$. Stoga, nećemo iskoristiti svoje pravo na opciju. Time smo izgubili sav novac koji smo uložili u kupnju opcije, te je ovo bila nearbitražna strategija.

Literatura

[1] B. Basrak, *Matematičke financije*, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, 2009.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, 2013.

[3] J. Cvitanić, F. Zapatero, *Economics and Mathematics of Financial Markets*, The MIT Press, 2004.

[4] M. Klačmer Čalopa, M. Cingula, *Financijske institucije i tržište kapitala*, FOI Varaždin, Varaždin, 2009.

[5] B. Novak, *Financijska tržišta i institucije*, Sveučilište u Osijeku, Ekonomski fakultet, 2005.

[6] S.Orsag, *Izvedenice*, HUFA, Zagreb 2006.

[7] B. Šego, M. Gardijan Kedžo, T.Škrinjarić, *Odabrana poglavlja matematičkih metoda za upravljanje financijskom imovinom*, Sveučilište u Zagrebu, Ekonomski fakultet, 2018.

[8] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, web - skripta, 2008.