Eksponencijalna distribucija

Posavac, Luka

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Luka Posavac

Eksponencijalna distribucija

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Luka Posavac

Eksponencijalna distribucija

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2022.

Sažetak:

U ovom radu smo imali cilj opisati i objasniti eksponencijalnu distribuciju, njena svojstva, povezanost s ostalim distribucijama i upotrebu u stvarnom životu. Prisjetit ćemo se nekih osnovnih definicija iz teorije vjerojatnosti, a zatim ćemo definirati funkciju gustoće eksponencijalne distribucije, te izvesti funkciju distribucije, očekivanje i varijancu za eksponencijalnu distribuciju. Nakon toga obraditi ćemo svojstva eksponencijalne distribucije među kojima je vrlo bitno svojstvo odsustva memorije koje ćemo i dokazati. Analizirat ćemo povezanost eksponencijalne distribucije s Laplaceovom i s Paretovom distribucijom te napraviti izvod za njihove funkcije distribucije.
Ključne riječi: funkcija gustoće, funkcija distribucije, očekivanje, varijanca, eksponencijalna distribucija, Laplaceova distribucija, Paretova distribucija, svojstvo odsustva memorije

Exponential distribution

Abstract:

In this paper we had a goal to closely examine and explain very interesting exponential distribution, it's properties and uses in real life. We will discuss it's density function, distribution, expected value and variance. Next we will define and prove very important memoryless property and also define some others properties of exponential distribution which we will not prove. In last chapter we will talk about connection between the Laplace and Pareto distributions and exponential distribution.
Keywords: density function, distribution, expected value, variance, memoryless property,Laplace distribution, Pareto distribution

Sadržaj

Uvod

Eksponencijalna distribucija je jedna od prvih korištenih u analizama i danas često korištena kojom se modeliraju kvarovi koji su potpuno slučajni. U prvom poglavlju navesti ćemo neke osnovne definicije iz teorije vjerojatnosti koje će nam biti potrebne za izvod funkcije distribucije, očekivanja i varijance eksponencijalne distribucije. U drugom poglavlju definirat ćemo funkciju gustoće eksponencijalne distribucije i izvesti funkciju distribucije. Nakon toga u trećem poglavlju ćemo napraviti izvod za očekivanje i varijancu eksponencijalne distribucije koristeći gama funkciju i bez nje, kao i proći kroz jednostavan primjer. Četvrta cjelina bit će posvećena svojstvima eksponencijalne funkcije, provesti ćemo i dokaz za svojstvo odsustva memorije dok ćemo ostala svojstva samo iskazati. U konačnici, u petoj cjelini, bavit ćemo se povezanosti Laplaceove i Paretove distribucije s eksponencijalnom distribucijom.

1. Osnovni pojmovi iz teorije vjerojatnosti

Definicija 1.1 *Skup svih mogućih ishoda nekog slučajnog pokusa tj.skup čiji su elementi svi elementarni događaji iz tog slučajnog pokusa označavat ćemo sa* Ω.

Definicija 1.2 *Neka je dan* $\Omega \neq \emptyset$. *Familija* $\mathcal{F}$ *podskupova skupa* Ω *jest* $\sigma - algebra$ *skupova na* Ω *ako vrijedi:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. *ako je* $A \in \mathcal{F}$ *onda je i* $A^c \in \mathcal{F}$
   (Zatvorenost $\sigma - algebre$ *na komplementiranje)*
3. *ako je dana prebrojiva familija skupova* $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, *tada* $\mathcal{F}$ *sadrži i njihovu uniju, tj.* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
   (Zatvorenost $\sigma - algebre$ *na prebrojive unije).*

Definicija 1.3 *Neka je* $\Omega \neq \emptyset$ *skup elementarnih događaja i* $\mathcal{F}$ σ*-algebra na njemu. Funkcija* $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *je vjerojatnost na* Ω *ako vrijedi:*

A1) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
(Nenegativnost vjerojatnosti)

A2) $P(\Omega) = 1$
(Normiranost vjerojatnosti)

A3) Ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subset \mathbb{N}$ *(tj.* $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ *čim je* $i \neq j$*) tada vrijedi:*

$$P(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$
(σ *- aditivnost vjerojatnosti).*

Definicija 1.4 *Uređenu trojku* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *skupa elementarnih događaja* $\Omega \neq \emptyset$, σ*-algebre* $\mathcal{F}$ *na njemu i vjerojatnosti* $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *nazivamo vjerojatnosni prostor.*

Definicija 1.5 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $\mathcal{B}(\mathbb{R})\sigma$*-algebra na* $\mathbb{R}$ *generirana svim otvorenim podskupovima od* $\mathbb{R}$ *(tzv. Borelova* σ*-algebra). Svaka funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *za koju je* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ *događaj u* $\mathcal{F}$, *tj. za koju je* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *zove se slučajna varijabla.*

U radu ćemo se baviti samo neprekidnim slučajnim varijablama, pa u nastavku definiramo pojmove vezane samo za njih.

Definicija 1.6 (Neprekidna slučajna varijabla) *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi:*

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable f tako da vrijedi*

$$P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Funkciju X zovemo apsolutno neprekidna slučajna varijabla ili samo neprekidna slučajna varijabla, a funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne variable X ili kraće funkcija gustoće slučajne varijable.

Definicija 1.7 (Funkcija distribucije slučajne varijable) *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Funkciju $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da dana slučajna varijabla X poprimi manju ili jednaku vrijednost tom broju. tj. funkcija*

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x).$$

Definicija 1.8 *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $f(x)$ te ako je*

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx < \infty$$

onda kažemo da slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje i broj $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ nazivamo očekivanje neprekidne slučajne varijable X.

Propozicija 1.1 *[2] Neka je X slučajna varijabla, te neka je $E[X]$ matematičko očekivanje slučajne varijable X i neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$E[aX + b] = aE[X] + b \text{ (Svojstvo linearnosti).}$$

Definicija 1.9 *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $f(x)$ te ako je*

$$\int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^2 f(x) dx < \infty,$$

broj $Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^2 f(x) dx$ nazivamo varijanca slučajne varijable X i označavamo ga s $VarX, \sigma_x^2$ ili samo σ^2.

Propozicija 1.2 *[2] Neka je X slučajna varijabla t.d. je $E[X^2] < \infty$. Tada vrijedi:*

$$VarX = E[X^2] - (E[X])^2.$$

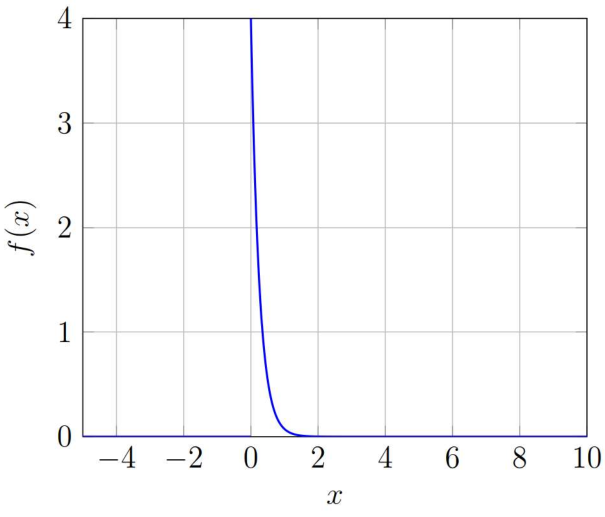
2. Eksponencijalna slučajna varijabla

2.1. Funkcija gustoće

Definicija 2.1 (Eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$) *Za neprekidnu slučajnu varijablu kažemo da ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$, ako je pripadna funkcija gustoće dana izrazom:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \in [0, \infty\rangle \\ 0 & , x \in \langle -\infty, 0\rangle \end{cases}$$

i pišemo $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Parametar λ nazivamo parametar eksponencijalne distribucije, tj parametar eksponencijalne slučajne varijable.



Slika 1: Graf funkcije gustoće eksponencijalne distribucije s parametrom $\lambda = 4$.

2.2. Funkcija distribucije

Sljedeće što ćemo definirati je funkciju distribucije. Kako bismo ju odredili potrebno je integrirati funkciju gustoće koju možemo podijeliti na dva dijela:

- Za $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ imamo:

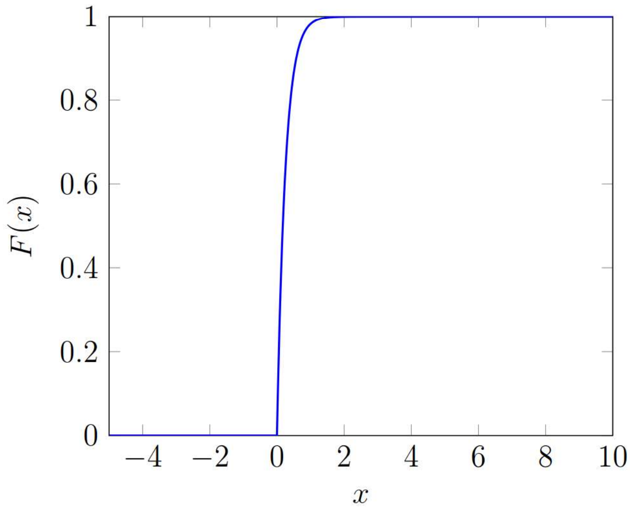
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0.$$

- Za $x \in [0, \infty\rangle$ imamo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \begin{vmatrix} \lambda t & = & u \\ \lambda dt & = & du \end{vmatrix} = \int_{0}^{\lambda x} e^{-u} du = -e^{-u}\Big|_{0}^{\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Na taj način funkciju distribucije možemo zapisati u obliku:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \in [0, \infty\rangle \\ 0 & , x \in \langle -\infty, 0\rangle . \end{cases}$$



Slika 2: Graf funkcije distribucije eksponencijalne distribucije s parametrom $\lambda = 4$.

3. Očekivanje i varijanca eksponencijalne distribucije

U ovom dijelu izvodimo formule za očekivanje i varijancu eksponencijalne distribucije:

- Očekivanje:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \begin{vmatrix} \lambda x & = & u \\ \lambda dx & = & du \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ue^{-u} = \begin{vmatrix} t = u & dv = e^{-u}du \\ dt = du & v = -e^{-u} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda}\Big[t(-e^{-t})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}dt\Big] = \frac{1}{\lambda}[(t+1)(-e^{-t})\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{\lambda}\Big[(t+1)(-e^{-t})\Big]\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

- Varijanca:

$$
\begin{aligned}
VarX &= E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \begin{vmatrix} \lambda x & = & t \\ \lambda dx & = & dt \end{vmatrix} \\
&= \int_0^\infty \frac{t^2}{\lambda^2}e^{-t}dt - \frac{1}{\lambda^2} = \begin{vmatrix} u = t^2 & dv = e^{-t}dt \\ du = 2tdt & v = -e^{-t} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\Big[-(t^2)(e^{-t})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}2tdt\Big] - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\Big[-(t^2)(e^{-t})\Big|_0^\infty - \Big[(2t)(-e^{-t})\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-t}dt\Big]\Big] - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\Big[-(t^2)(e^{-t})\Big|_0^\infty - \big[(2t)(-e^{-t}) + (-2)e^{-t}\big]\Big|_0^\infty\Big] - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Na ovaj način smo izveli očekivanje i varijancu za eksponencijalnu distribuciju čije rezultate ćemo moći koristiti u daljnjem dijelovima. Također ovo nije jedini način da odredimo očekivanje i varijancu eksponencijalne distribucije.

Kod nekih zahtjevnijih izračuna momenata distribucija nije baš jednostavno rješavati na ovaj način tako da ćemo proći kroz još jedan način računanja očekivanja i varijance za eksponencijalnu distribuciju pomoću gama funkcije.

Definicija 3.1 *Funkciju* $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *definiranu izrazom:*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$$

zovemo gama funkcija.

Da bismo koristili gama funkciju u izvodu potrebno je još izreći teorem koji glasi:

Teorem 3.1 *[3] Vrijedi*

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \ \forall x \in \mathbb{N}$$

Koristeći navedeno svojstvo gama funkcije, odredimo očekivanje i varijancu za eksponencijalnu distribuciju.

- Očekivanje

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \begin{vmatrix} \lambda x & = & u \\ \lambda dx & = & du \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ue^{-u}du = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty u^{2-1}e^{-u}du \\ &= \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}(2-1)! = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

- Varijanca

$$\begin{aligned} VarX &= E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0dx + \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \begin{vmatrix} \lambda x & = & t \\ \lambda dx & = & dt \end{vmatrix} \\ &= \int_0^\infty \frac{t^2}{\lambda^2}e^{-t}dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty t^{(3-1)}e^{-t}dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{(3-1)!}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

- Odredimo radi praktičnosti i formulu za n-ti moment:

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)dx = \int_{-\infty}^0 x^n \cdot 0 \cdot dx + \int_0^\infty x^n\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \begin{vmatrix} \lambda x & = & u \\ \lambda dx & = & du \end{vmatrix} = \int_0^\infty \frac{u^n e^{-u}}{\lambda^{n-1}}\frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^n}\int_0^\infty u^n e^{-u}du = \frac{1}{\lambda^n}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{\lambda^n}. \end{aligned}$$

  Uvrštavanjem $n = 1$ i $n = 2$ u prethodnu formulu dobivamo prethodno izračunate momente reda 1 i 2.

Vidimo da smo dobili iste iznose za očekivanje i varijancu kao i u prvom slučaju samo u manje koraka i jednostavnije.

Vrlo je važno znati gdje se koristi eksponencijalna distribucija u stvarnom životu što ilustriramo sljedećim primjerom.

Primjer 3.1 *Prosječni (očekivani) životni vijek novih Teslinih automobilskih baterija iznosi oko 30 godina s pretpostavkom da životni vijek Teslinih baterija možemo modelirati eksponencijalnom distribucijom. Odredite koliko iznosi parametar λ, te napišite funkciju gustoće i distribucije. Izračunajte kolika je vjerojatnost da životni vijek Teslinih baterija bude manji od 22 godine, kolika je vjerojatnost da traju dulje od 37 godina ? Također izračunajte kolika je vjerojatnost da baterije traju između 22 i 37 godina ?*

Znamo da je očekivani životni vijek 30 godina, a očekivanje je $\frac{1}{\lambda}$. Iz čega dobivamo da je parametar λ jednak $\frac{1}{30}$, a funkcija gustoće i distribucije će biti oblika:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}e^{-\frac{1}{30}x} & , x \in [0, \infty\rangle \\ 0 & , x \in \langle -\infty, 0\rangle \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{30}x} & , x \in [0, \infty\rangle \\ 0 & , x \in \langle -\infty, 0\rangle \end{cases}.$$

Vjerojatnost da životni vijek Teslinih baterija bude manji od 22 godine računamo po definiciji funkcije distribucije:

$$F(x) = P(X < 22) = 1 - e^{-\frac{1}{30}\cdot 22} = 0.5197.$$

Iz ovoga slijedi da vjerojatnost da Tesline baterije traju manje od 22 godine iznosi 51.97 % Vjerojatnost da životni vijek baterija bude dulji od 37 godina izračunati ćemo ovako:

$$P(X > 37) = 1 - P(X < 37) = e^{-\frac{1}{30}\cdot 37} = 0.2913.$$

Iz čega slijedi da vjerojatnost da baterije traju dulje od 37 godina iznosi 29.13 %,a vjerojatnost da životni vijek baterije bude između 22 i 37 godina izračunati ćemo:

$$P(22 < X < 37) = P(X < 37) - P(X < 22) = 1 - e^{-\frac{1}{30}\cdot 37} - (1 - e^{-\frac{1}{30}\cdot 22}) = 0.1889.$$

Slijedi da je vjerojatnost da baterije traju između 22 i 37 godina 18.89 %.

4. Svojstva eskponencijalne distribucije

Vrlo bitno svojstvo koje posjeduje eksponencijalna distribucija je svojstvo odsustva memorije.

Teorem 4.1 (Svojstvo odsustva memorije) *[1] Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ ima eksponencijalnu distribuciju ako i samo ako vrijedi svojstvo odsustva memorije:*

$$P(X > s + x | X > s) = P(X > x) \quad \forall x, s \geq 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, odnosno da slučajna varijabla X dolazi iz eksponencijalne distribucije s parametrom λ. Sada je:

$$P(X > s + x | X > s) = \frac{P(X > s + x)}{P(X > s)} = \frac{1 - P(X \leq s + x)}{1 - P(X \leq s)} = \frac{1 - 1 + e^{-\lambda(s+x)}}{1 - 1 + e^{-\lambda(s)}} =$$
$$= e^{-\lambda s - \lambda x + \lambda s} = e^{-\lambda x} = P(X > x).$$

Za obrat tvrdnje, pretpostavimo da za X vrijedi svojstvo odsustva memorije, uvijek kada je $P(X > s) > 0$. Onda $g(x) = P(X > x)$ zadovoljava jednakost:

$$g(s + x) = g(s)g(x) \quad \forall s, x \geq 0.$$

Pretpostavili smo da je $X > 0$ tako da vrijedi da je $g(\frac{1}{n}) > 0$ za neki n. Iz posljednje jednadžbe rekurzivno dobivamo:

$$g(1) = g\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)^n > 0.$$

Označimo $g(1) = e^{-\lambda}$ za neki $0 \leq \lambda < \infty$. Dalje za proizvoljne $p, q \geq 1$ imamo:

$$g(p) = g(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{p puta}}) = g(1)^p$$
$$g(1) = g\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots \frac{1}{q}\right) = \left[g\left(\frac{1}{q}\right)\right]^q.$$

Stoga je $g(1)^{\frac{1}{q}} = g\left(\frac{1}{q}\right)$. Gdje sada uvrštavanjem dobivamo:

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = g\underbrace{\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}\right)}_{\text{p puta}} = g\left(\frac{1}{q}\right)^p = g(1)^{\frac{p}{q}}.$$

Time smo dokazali da je za bilo koji $r > 0$ racionalan broj vrijedi $g(r) = e^{-\lambda r}$. Ako sada pogledamo za svaki realan broj $t > 0$ i odaberemo proizvoljne $r, s > 0$ t.d. je $r \leq t \leq s$ te pošto je g padajuća funkcija vrijedi nejednakost:

$$e^{-\lambda r} = g(r) \geq g(t) \geq g(s) = e^{-\lambda s}.$$

Kako su r,s proizvoljni možemo uzeti r i s koji će biti vrlo bliski broju t iz čega slijedi da je $g(t) = e^{-\lambda t}$, odnosno slijedi da slučajna varijabla X dolazi iz eksponencijalne distribucije s parametrom λ. □

Ovaj teorem možemo objasniti i primjerom ako zamislimo da imamo žarulju čiji je vijek trajanja opisan eksponencijalnom distribucijom. Bez obzira koristimo li tu žarulju jedan dan ili jednu godinu preostalo vrijeme koje ostaje do kad će se žarulja pokvariti ostaje isto distribuirano, odnosno svojstvo gubitka memorije nam govori da prvi dio vremena nema utjecaja na buduće trajanje žarulje.

Napraviti ćemo sada jedan primjer u kojem koristimo svojstvo odsustva memorije.

Primjer 4.1 *Pretpostavimo da u trgovinu sportske opreme u prosjeku u jednom satu uđe 15 kupaca i vrijeme između dolazaka je eksponencijalno distribuirano. Ako se dogodi da 10 minuta prođe od dolaska zadnjeg kupca kolika je vjerojatnost da produ još 2 minute od dolaska sljedećeg kupca ?*

U ovom primjeru ćemo koristi svojstvo odsustva memorije eksponencijalne distribucije i to na sljedeći način. Neka slučajna varijabla X modelira očekivano vrijeme koje prođe između dolaska dva kupca. Kako u prosjeku prođu 4 minute između dva posjeta trgovini λ će biti $\frac{1}{4}$.

$$P(X > 10 + 2 | X \geq 10) = P(X > 2) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 2}) = 0.6065.$$

Bez obzira koliko je vremena prošlo od dolaska zadnjeg kupca, u proizvoljno zadanom trenutku vjerojatnost da prođe još dvije minute od dolaska sljedećeg kupca je 0.6065.

Teorem 4.2 *[1] Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli koje dolaze iz eksponencijalne distribucije ($S_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$) i $0 < \lambda_n < \infty \; \forall n$. Tada vrijedi:*

(i) Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, onda je $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n < \infty\right) = 1$,

(ii) Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, onda je $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \infty\right) = 1$.

Teorem 4.3 *[1] Neka su $S_1, \cdots, S_n$ međusobno nezavisne slučajne varijable koje dolaze iz eksponencijalne distribucije s parametrima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Tada je $min\{S_1, \ldots, S_n\} \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ i vrijedi:*

$$P(S_i = min\{S_1, \ldots, S_n\}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

Teorem 4.4 *[1] Za nezavisne slučajne varijable $S \sim \mathcal{E}(\lambda)$ i $X \sim \mathcal{E}(\mu)$ i za svaki $t \geq 0$ vrijedi:*

$$\mu P(S \leq t \leq S + X) = \lambda P(X \leq t < X + S).$$

5. Veze s ostalim distribucijama

U sljedećem poglavlju izvesti ćemo povezanost Laplaceove i Paretove distribucije s eksponencijalnom.

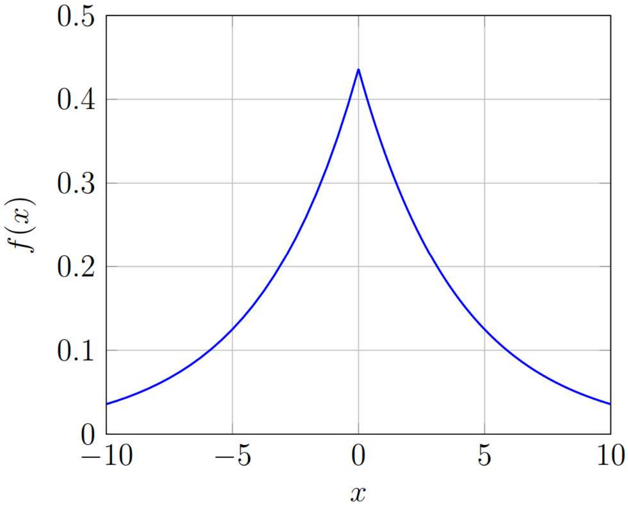
5.1. Laplaceova distribucija

Kako bismo to mogli prvo ćemo opisati Laplaceovu distribuciju i izvesti funkcije distribucije.

Definicija 5.1 *Za neprekidnu slučajnu varijablu X kažemo da ima Laplaceovu distribuciju s parametrima $\mu \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+$, ako je pripadna funkcija gustoće dana izrazom:*

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \; x \in \mathbb{R}$$

i pišemo $X \sim \mathcal{L}(\mu, b)$.



Slika 3: Graf funkcije gustoće Laplaceove distribucije sa parametrima b = 4 i $\mu = 5$.

Funkciju distribucije ćemo izvesti integrirajući funkciju gustoće:

- $x < \mu$:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2b} \lambda e^{\frac{t-\mu}{b}} dt = \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t-\mu}{b}} dt = \frac{1}{2b} b e^{\frac{t-\mu}{b}} \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2} e^{\frac{x-\mu}{b}}.$$

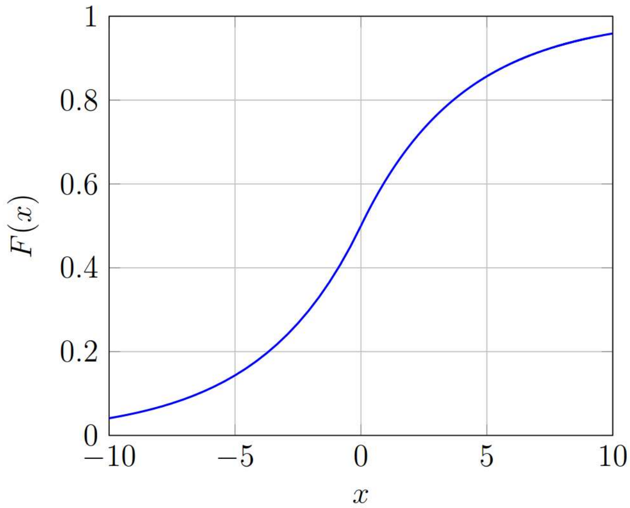
- $x \geq \mu$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{\mu} f(t)dt + \int_{\mu}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{2b} e^{\frac{x-\mu}{b}} + \int_{\mu}^{x} \frac{1}{2b} e^{-(\frac{x-\mu}{b})} = \\ &= \frac{1}{2b} b e^{\frac{t-\mu}{b}} \Big|_{-\infty}^{\mu} + \frac{1}{2b}(-b) e^{-(\frac{t-\mu}{b})} \Big|_{\mu}^{x} \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^{-(\frac{x-\mu}{b})}. \end{aligned}$$

Sada funkciju distribucije možemo zapisati u obliku:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-(\frac{x-\mu}{b})} & , x \geq \mu \\ \frac{1}{2}e^{\frac{x-\mu}{b}} & , x < \mu, \end{cases}$$

gdje su parametri $b > 0, \mu \in \mathbb{R}$.



Slika 4: Graf funkcije distribucije Laplaceove distribucije sa parametrima $b = 4$ i $\mu = 0$.

Izvedimo sada još očekivanje i varijancu Laplaceove distribucije.

- Očekivanje: Uzmimo supstituciju

$$\begin{vmatrix} x-\mu & = & u \\ dx & = & du \end{vmatrix}.$$

Zbog svojstva linearnosti očekivanja dalje imamo:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\frac{|u|}{b}}du + \mu \\ &= \frac{1}{2b}\left(\int_{-\infty}^{0} ue^{\frac{u}{b}}du + \int_{0}^{\infty} ue^{-\frac{-u}{b}}du\right) + \mu \\ &= \underbrace{\frac{1}{2b}\int_{0}^{\infty} -ue^{\frac{-u}{b}}du + \frac{1}{2b}\int_{0}^{\infty} ue^{-\frac{-u}{b}}du}_{=0} + \mu \\ &= \mu. \end{aligned}$$

- Varijanca: Isto uzimamo supstituciju

$$\begin{vmatrix} x-\mu & = & u \\ dx & = & du \end{vmatrix}.$$

Pa imamo dalje:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{|u|}{b}} du + \mu^2 \\ &= \frac{1}{2b}\int_0^{\infty} u^2 e^{\frac{-u}{b}} du + \frac{1}{2b}\int_0^{\infty} u^2 e^{-\frac{-u}{b}} du + \mu^2 = \frac{1}{b}\int_0^{\infty} u^2 e^{-\frac{u}{b}} du + \mu^2 \\ &= \begin{vmatrix} \frac{u}{b} & = & t \\ du & = & bdt \end{vmatrix} = \frac{1}{b}\int_0^{\infty} b^3 t^2 e^{-t} dt + \mu^2 = b^2\Gamma(3) + \mu^2 \\ &= 2b^2 + \mu^2. \end{aligned}$$

Iz čega onda imamo da je varijanca:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2b^2 + \mu^2 - \mu^2 = 2b^2.$$

Napravimo sada izvod kako iz Lagrangeove distribucije doći do eksponencijalne distribucije.

Propozicija 5.1 *Ako je $X \sim \mathcal{L}(\mu, b)$ onda vrijedi da je $|X-\mu| \sim \mathcal{E}(b^{-1})$.*

Dokaz. Uzmimo supsituciju $Y = |X-\mu|$ i pogledajmo:

- Za $y \geq 0$ imamo:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|X-\mu| \leq y) = P(-y+\mu \leq X \leq y+\mu) \\ &= P(X \leq y+\mu) - P(X \leq -y+\mu) = F_X(y+\mu) - F_X(-y+\mu) \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{b}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{b}} = 1 - e^{-\frac{y}{b}}. \end{aligned}$$

- Za $y < 0$ imamo: $F_Y(y) = 0$ jer je $P(|X-\mu| \leq y) = 0$.

I sada smo upravo dobili eksponencijalnu distribuciju gdje je $\lambda = b^{-1}$ parametar eksponenecijalne distribucije

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-by} & , y \geq 0 \\ 0 & , y < 0 \end{cases}, b \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Pogledajmo n-ti moment slučajne varijable $Y = |X - \mu|$. Iz Propozicije 5.1 dobivamo:

$$E[Y^n] = E[|X - \mu|^2].$$

Specialno za $n = 2$ imamo:

$$E[Y^2] = E[(X - \mu)^2]$$

Kako je $Y \sim \mathcal{E}(b^{-1})$ vrijedi :

$$E[Y^2] = \frac{2}{b^{-2}} = 2b^2.$$

S druge strane, $E[(X - \mu)^2]$ je upravo varijanca slučajne varijable $X \sim \mathcal{L}(\mu, b)$ pa dobivamo:

$$VarX = 2b^2.$$

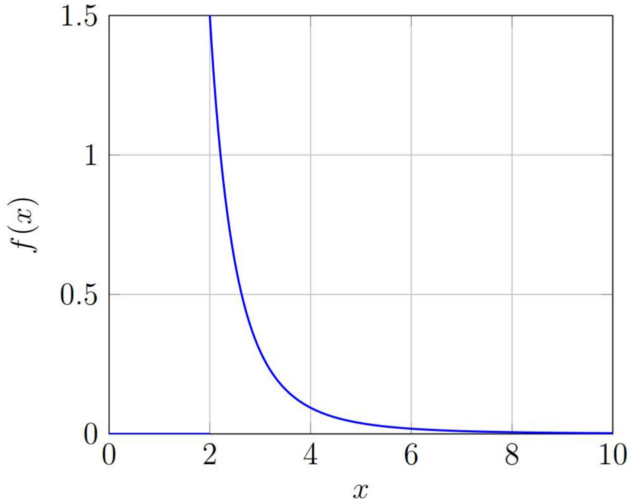
Odnosno ovime smo pokazali da ne moramo direktno računati varijancu od X već je dovoljno znati drugi moment eksponencijalne i koristiti supstituciju iz Propozicije 5.1.

5.2. Paretova distribucija

Definicija 5.2 *Za neprekidnu slučajnu varijablu X kažemo da ima Paretovu distribuciju s parametrima $x_m > 0, \alpha > 0$, ako je pripadna funkcija gustoće dana izrazom:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} & , x \geq x_m \\ 0 & , x < x_m \end{cases}$$

i pišemo $X \sim \mathcal{P}(x_m, \alpha)$.



Slika 5: Graf funkcije gustoće Paretove distribucije s parametrima $x_m = 2$ i $\alpha = 3$.

Izvedimo sada Paretovu funkciju distribucije:

- Za $x < x_m$ imamo:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0.$$

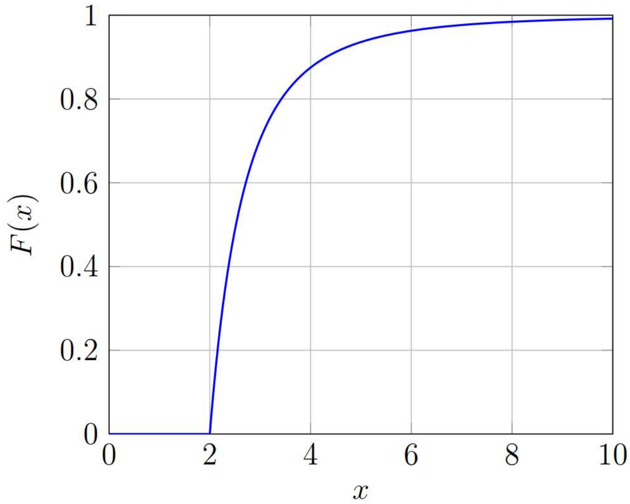
- Za $x \geq x_m$ imamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{x_m} f(t)dt + \int_{x_m}^{x} f(t)dt = 0 + \int_{x_m}^{x} \frac{\alpha x_m^\alpha}{t^{\alpha+1}}dt \\ &= \alpha x_m^\alpha \int_{x_m}^{x} \frac{1}{t^{\alpha+1}}dt = \alpha x_m^\alpha \frac{-1}{\alpha} \left[\frac{1}{t^\alpha}\right]\Big|_{x_m}^{x} \\ &= -x_m^\alpha \left[\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x_m^\alpha}\right] = 1 - \frac{x_m^\alpha}{x^\alpha}. \end{aligned}$$

Sada možemo funkciju distribucije napisati u obliku:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha & , x \geq x_m \\ 0 & , x < x_m, \end{cases}$$

gdje su $x_m > 0, \alpha > 0$ parametri distribucije.



Slika 6: Graf funkcije distribucije Paretove distribucije s parametrima $x_m = 2$ i $\alpha = 3$.

Napravimo sada izvod kako iz Paretove distribucije dobiti eksponencijalnu.

Propozicija 5.2 *Ako je $X \sim \mathcal{P}(x_m, \alpha)$ onda vrijedi da je $ln\left(\frac{X}{x_m}\right) \sim \mathcal{E}(\alpha)$.*

Dokaz. Uzmimo za supstituciju $Y = ln\left(\frac{X}{x_m}\right)$ i pogledajmo:

$$\begin{aligned} F_y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(ln\left(\frac{X}{x_m}\right) \leq y\right) = P\left(\frac{X}{x_m} \leq e^y\right) = P(X \leq x_m e^y) = F_X(x_m e^y) \\ &= \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_m}{x_m e^y}\right)^\alpha & , x_m e^y \geq x_m \\ 0 & , x_m e^y < x_m \end{cases} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{e^y}\right)^\alpha & , e^y \geq 1 \\ 0 & , e^y < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\alpha y} & , y \geq 0 \\ 0 & , y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

I na ovaj način smo upravo dobili eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda = \alpha$ što smo i htjeli pokazati. □

Literatura

[1] J. R. Norris, *Markov Chains*, 1997,
Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics

[2] Mirta Benšić, Nenad Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, 2014,
https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/ipapic/UVIS/UVIS_knjiga_web.pdf

[3] Toni Milas, *Gama funkcija i primjene*, 2019,
http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/MIL78.pdf