SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Kristina Lozina

Učenje iz pogrešaka i pogrešnog razumijevanja

Diplomski rad

Osijek, 2016

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Kristina Lozina

Učenje iz pogrešaka i pogrešnog razumijevanja

Diplomski rad

Mentorica:
doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016

Sadržaj

1 Uvod

Mnogi učitelji, nastavnici, profesori pa i roditelji te neki političari, reći će da postoje određeni problemi u matematičkom obrazovanju. Uzrokom se općenito smatra neadekvatna pedagogija koja je neprikladna učenicima i njihovim potrebama prilikom učenja matematike. Treba naglasiti da se pri tome ne misli na pedagošku neadekvatnost učitelja, nastavnika i profesora, već je cilj ukazati na problem u cjelokupnom obrazovnom sustavu. U kontekstu navedenog problema, kada se govori o neadekvatnoj pedagogiji, tada se misli na teoriju i praksu u nastavi matematike. Nedostatak prakse, te slaba povezanost matematike i primjera sa svakodnevnim životom ono je što uzrokuje probleme u matematičkom obrazovanju.

Navedeni problemi uzrok su pogrešaka, pogrešnog razumijevanja i zabluda vezanih za matematiku, kako učenika tako i nastavnika. Dakle, cilj je ovog diplomskog rada razmotriti strategiju učenja upravo kroz pogreške i zablude, kao i prednosti koje donosi u obrazovanju. U 1. poglavlju govorit će se o poimanju samoga broja, te o razvoju algebarskog mišljenja kojemu se ne pridaje dovoljno pažnje tijekom obrazovanja. Raspravit će se o formalnim simbolima, te o tome što x predstavlja u matematici i koja mu je uloga. Nadalje, u 2. poglavlju navedene su pogreške koje su zajedničke učenicima tijekom obrazovanja od 11. do 14. godine, odnosno pogreške koje se mogu očekivati od učenika u toj dobi. Radi se o pogreškama koje su otkrivene istraživanjem, a cilj je da pomognu nastavnicima u svakodnevnom obrazovanju. S druge strane, u 3. poglavlju govorit će se o rezultatima istraživanja o pogreškama i zabludama koje su napravili budući nastavnici matematike, te na koji način njihove pogreške utječu na same učenike.

2 Od broja do algebre

U ovom poglavlju promatrat ćemo ključne značajke usvajanja i poimanja broja. Zapravo, promatrat ćemo tijek od stvaranja koncepcije broja do razvoja algebarskog mišljenja, uključujući pogreške i zablude. Mogli bismo reći da nema područja matematike koje ne izaziva poteškoće. Algebra je na lošem glasu, a često je uzrok problema nesklad između matematike i djetetove intuicije ili zdravog razuma. Ako se ne koriste odgovarajuće pedagoške metode, djeca se naviknu na omalovažavanje njihove inteligencije te da se na njihova osjetljiva pitanja ne daje odgovor. Često im se čini da uče slijediti besmislene rutine.

Učenje i podučavanje algebre treba učiniti smislenim. To se može napraviti povezivanjem algebre, broja, oblika i prostora u kontekst koji povezuje algebru s dječjim svijetom u kojem se primjenjuje "zdrav razum". Središnja je ideja algebre razvoj različitih shvaćanja slova i simbola kod učenika. Treba krenuti od temeljnih operacija i osnovnog razumijevanja do simboličkih ili strukturnih nivoa razumijevanja.

2.1 Što je algebra?

Prvom knjigom algebre smatra se djelo arapskog matematičara Muhammada ibn Musa al-Khwarizmija (790. − 840.g.) pod nazivom *Hisab al-jabr w'al-muqabala*, ili kraće *Al-jabr*. To je bila knjiga o pravilima za rješavanje jednadžbi.

Proučavanje algebre često se izjednačava s manipulacijom slova i brojeva na simboličan način kao što su pronalaženje općeg pojma ili pravila, prikupljanje sličnih izraza, pojednostavljivanje izraza, rješavanje jednadžbi, pronalaženje nepoznanice x i zamjenom (tj. supstituiranjem) za x. Ovo je često način na koji se algebra prezentira u srednjim školama. Međutim, algebarsko mišljenje zapravo počinje u nižim razredima osnovne škole i razvija se zajedno s aritmetičkim mišljenjem kroz ostatak školovanja po fazama kurikuluma. Osnove algebre leže u proučavanju broja i aritmetike, i u uspješnom vladanju njihovim strukturama.

Ideja i njezin simbol u algebri podliježu razdvajanju. To je razdvajanje snažno postignuće simboličke algebre, ali i zamka za učenika. Činjenica da sveprisutni x ima fleksibilno značenje izaziva konfuziju za početnike. Je li to broj, bilo koji broj, skup brojeva ili svi brojevi? Možemo li računati s njim ako ne znamo njegovu vrijednost? Nakon što sam x postane entitet odvojen od poznatog broja, učenik ima algebarsku moć sažimanja prikaza. Može manipulirati mentalnim i pisanim objektima u skladu s prihvaćenim algebarskim pravilima, a zatim može prosuđivati i još jednom povezivati unutar konteksta problema u svrhu provjere razumnosti rješenja. Algebarsko je mišljenje u potpunosti drugačije od aritmetičkog mišljenja, a prijelaz na algebarsko mišljenje, korištenjem aritmetičkih okvira i generalizacije aritmetičkog ponašanja, intuitivan je i osjetljiv. Koncept generalizacije značajna je odskočna daska s aritmetike na algebru. Generalizacija je prepoznata kao temeljna karakteristika koja razdvaja aritmetiku i algebru, a poopćavanje ili generalizacija nekog uzorka samo je središte rane algebre koju možemo nazvati i *pred-algebra*. Razmatranje numeričkih uzoraka u aritmetici, te oblika i prostora često se shvaća kao intuitivni most za početnike u algebri. Pojam varijabilnosti također je značajna odskočna daska za algebarsko razumijevanje. Prethodna dva pojma, generalizacija i varijabilnost, utjelovljuju bit algebre.

2.2 Pred-algebra: uzorci i struktura rane aritmetike

Razmotrimo primjer s uzorcima i uočavanjem strukture u ranoj aritmetici. Parni i neparni brojevi uočljivi su upravo zato što se pojavljuju naizmjence. Brojanje $1, 2, 3, 4, 5\ldots$ ide ovako: $neparan, paran, neparan, paran, neparan\ldots$. Što možemo reći o broju iza/ispred neparnog broja? Što možemo reći o broju iza/ispred parnog broja? Je li to uvijek istina? Ovaj uzorak navodi nas da primijetimo da je $neparan\ broj + 1 = paran, paran\ broj + 1 = neparan\ broj$, i tako dalje.

Zatim možemo prijeći na tzv. algebru brojeva modulo 2: $neparan + neparan =$

$paran, neparan + paran = paran, paran + neparan = paran$, i $paran + paran = paran$. Ovaj se uzorak neparnih i parnih brojeva na isti način može generalizirati i općenito primijeniti na uzorke koji uključuju višekratnike broja 5: neparni i parni višekratnici broja 5 završavaju znamenkom 0 ili 5 pa je tako $5 + 5 = 10, 15 + 15 = 30$ itd. Generalizirajući se dobije da je $neparan + neparan = paran$ višekratnik broja 5, a zatim slijedi da neparan broj puta 5 uvijek završava znamenkom 5 dok paran broj puta 5 uvijek završava znamenkom 0. Sve se ove generalizacije mogu testirati, a pronalaženje samo jedne iznimke, odnosno specijalnog slučaja, dovoljno je za dokaz da je generalizacija pogrešna, što je važan uvod u algebarske argumentacije i dokaz.

Nadalje, promatrajući uzorke znamenki u tablici množenja brojem 9 ($9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90$), učenik uočava sljedeće:

a) znamenka jedinice smanjuje se za 1 svaki put sve do 90

b) znamenka desetice povećava se za 1 sve dok se ne dođe do 90, a tada preskače jedan.

Opažanje da je suma znamenki uvijek 9 (sve do 90) generalizira se na zanimljiv način, a to je da je suma znamenki uvijek višekratnik broja 9. Ova opažanja o aritmetičkim pravilima i kako ona funkcioniraju važna su za stvarno učenje same aritmetike.

U jednom je istraživanju učenik rekao da zna da je $9 \cdot 4 = 36$ zato što je kod kuće naučio da kada od 4 oduzmemo 1 dobijemo 3 i to pišemo u desetice, i onda od 9 oduzmemo 3 što je 6, dakle dobili smo 36. Zaista je izvanredno što je to naučio kod kuće, ali zapravo bismo se radije trebali pitati zašto to nije naučio u školi. Jedan od razloga je taj što mnogi učitelji razredne nastave ne vjeruju da bi trebali podučavati algebru niti da bi podučavanje algebre trebalo biti u njihovom nastavnom planu i programu, za razliku od aritmetike.

Pred-algebra nije samo priprema za učenje algebre kasnije. Aritmetičke vještine djelomično se razvijaju i kroz razumijevanje uzoraka i strukture aritmetike. Stoga osoba vješta u aritmetici "osjeti" da je $8 \cdot 7 = 55$ netočno zato što bi točan odgovor trebao biti paran broj ili zato što samo tablica množenja brojem 5 završava znamenkom 5 ili zato što je odgovor za 6 veći od 7^2. Svi ovi problemi proizlaze iz svijesti o strukturi broja, odnosno iz pred-algebarske svijesti uzorka broja.

2.3 Algebarski objekti, metafore i prikazi

U pred-algebri, aritmetička struktura opisuje se koristeći svakodnevni jezik. Povremeno, a sve više s uzrastom i učenjem, jezik se skraćuje sa izrazima poput 'neparan' za 'bilo koji neparan broj' ili 'dodaj broj dva broju kako bi dobio sljedeći broj'. Pomak od opisivanja uzorka i strukture običnim (svakodnevnim) jezikom do opisivanja skraćenim jezikom je suptilan, ali i značajan pomak u algebarskom razmišljanju. U povijesnom razvoju algebre kao simboličkog sustava prva faza retoričke algebre je uključivala opis u svakodnevnom jeziku za rješavanje posebnih tipova problema i bez upotrebe simbola ili znakova za prikaz nepoznanica. Nakon toga u 16. stoljeću slijedi sinkopirana algebra koja uključuje upotrebu skraćenica za nepoznate veličine. Treća se faza naziva simbolička algebra, a uveo ju je Viete koji je prvi koristio simbole u jednadžbama dajući klase jednadžbi koje treba riješiti. Vieteova simbolička algebra omogućuje pisanje pravila numeričkim relacijama i izraza općenitih rješenja. Međutim, Vieteova je generalizacija bila ograničena jer nije bio u mogućnosti prihvatiti negativne (ili imaginarne) brojeve. Viete i Descartes vodili su algebru dalje od ovisnosti o aritmetici i geometriji u 17. stoljeću. Ovdje imamo prekid, značajnu promjenu u razmišljanju, koja je dovela do rođenja algebre kakva je i danas poznata.

Objekti algebre su brojevi u općem obliku. Slično, aritmetički procesi poput množenja s 9 također su skraćeni i postaju objekti u svom vlastitom smislu: trebaju imena i druge prikaze. Npr. proces 'množenje brojem 9' može se promatrati u tabličnom prikazu, koristeći *funkcijski stroj* ($\times 9$) ili kao graf funkcije ($y = 9x$). Ova razmatranja uspostavljaju proces množenja s 9 kao matematičku funkciju koja je objekt predstavljen tablicom, grafom ili formulom.

Tablice brojeva često su prvi prikaz koncepta funkcije s kojim se djeca susreću. Prikazi uvijek imaju svojstva koja na neki način zabranjuju ili ograničavaju matematiku koju predstavljaju. Ako o tablici množenja razmišljamo poput djece kao o prikazu procesa množenja s 9, i kao o objektu koji sada može biti imenovan i može postati objekt algebarskog mišljenja, primjećujemo da tablica počinje s 1 i završava s 10, i upravo je zbog toga ograničena na brojeve od 1 do 10. Time se sugerira da će dijete imati problema s množenje broja 9 s brojem 0, ili možda druge pogreške vezane uz broj 0.

Funkcijski je stroj koristan jer dopušta da operacije postanu *lanci* - numerički izlazi iz jednog stroja mogu se iskoristiti i pohraniti u drugi. Primjerice, dva uzastopna množenja brojem 3 isto je kao množenje brojem 9. No, i ovaj prikaz ili model ima ograničenja. Smisao pojma 'funkcijski stroj' možda neće imati smisla djeci čija iskustva strojeva nisu povezana s matematičkim 'strojem', gdje je množenje analogno naizmjeničnom skupljanju i rastezanju.

2.4 Formalni simboli: što je x?

Uvođenjem formalnih simbola u algebru, djeca mogu postaviti pitanje: "Što je x?". Mnogi će nastavnici vjerojatno ignorirati ovo pitanje, ali potrebno je raspraviti o tome. Grci su koristili slova za označavanje brojeva kojima će računati umjesto hindu-arapskih brojeva koje koristimo i danas, i djeci to može biti na isti način prirodno. Stoga, nije neobično da djeca misle da je $m + 1 = n$ zato što n u abecedi dolazi poslije m. Ova pogreška može biti prototip nastao kao rezultat vježbi 'Uvrsti' u kojima djeca imaju dano da je $a = 1, b = 2, c = 3$ itd. koje trebaju supstituirati u formulu. Mnogo je bolje koristiti prave ili realne formule poput $S = 3T$, gdje S predstavlja ukupan broj stranica, a T broj danih trokuta.

Često korištenje oznake x u aritmetici kao oznake za 'puta' ili množenje dovodi do nepotrebne zbunjenosti, te zbog toga učenici mogu $5x$ promatrati kao 5 puta. Puno je bolje korištenje oznaka a, b, n, y, z, odnosno bilo što osim x. Niz nedostataka u matematičkoj notaciji (tzv. površinskoj strukturi) uzrokuje probleme na konceptualnoj razini (tzv. dubinskoj strukturi) za učenike.

Algebra potiče uporabu dva značenja za slovo x (ili bilo koje drugo slovo koje koristimo algebarski). Prvo, to je naziv za određeni nepoznati broj ili skup nepoznatih brojeva. Termin 'opći broj' ponekad se koristi za izražavanje 'znak kao rezervirano mjesto' za privremeno nepoznati broj. Drugo, to je ime za generalizirani broj ili varijablu.

2.4.1 x je broj ili skup brojeva

Prvo školsko značenje za x je da je x broj ili skup brojeva koji trebamo pronaći, npr. broj čarapa u torbi, broj na koji prvo pomislite, odgovor na teži problem izračunavanja, raspon mogućih odgovora itd. Pogledajmo primjer iz prvog razreda djece u Japanu koji je opisan u Easley i Easle (1992.). Sensei, tj. učitelj, postavlja razredu zagonetku: "Dječak pozove dva prijatelja na igru u svoju kuću, ali došla su još dva prijatelja. Koliko ih se igra zajedno?". Razred je odgovorio da ih se igra četvero. Zatim su modelirali problem. Jedan dječak iz razreda odabran je da stane ispred ostalih učenika u razredu. Pozvao je dvojicu prijatelja na igru, a zatim još dvojicu. Tada su vidjeli da će ih se igrati ukupno pet. U svrhu rješavanja zagonetke koja nije odmah prisutna, sa x možemo označiti nepoznati broj koji treba pronaći. Aritmetika bi se trebala baviti ovakvim problemima u kojima se na početku ne zna odgovor, mora se razmišljati, i na kraju odgovor postaje poznat. To je x – ime onoga što želimo pronaći. U ovom slučaju $x = 5$.

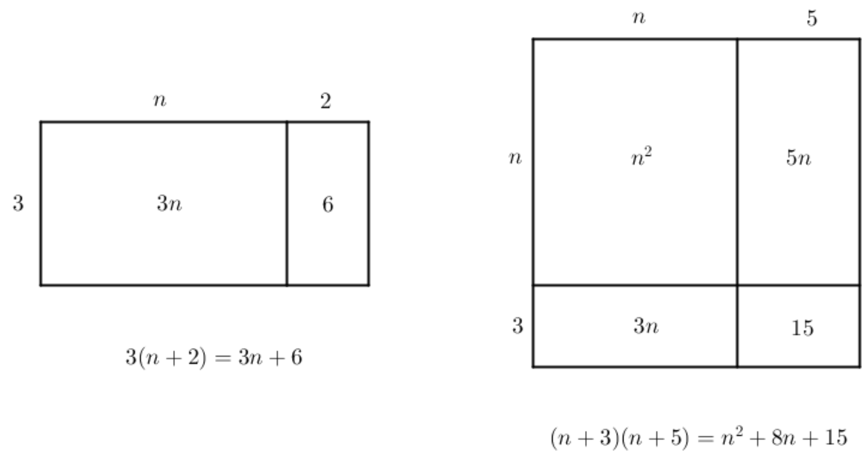
Ovdje vrlo dobro može poslužiti igra 'Razmisli o broju' u kojoj učenik ili nastavnik razmišlja o broju, zatim izvodi različite operacije koristeći taj broj, a učenici trebaju pronaći broj koji odgovara. 'Traži se broj kojemu kada se doda 1 dobije se 10. Koji je traženi broj?' ili 'Traži se broj koji kada se podijeli s 4 daje ${}^{3}/_{4}$. Koji je traženi broj?'

Važan kontekst koji podržava ovaj rad je u geometriji ili prostoru i obliku. Povijesno gledano, brojni algebarski problemi bili su povezani s praktičnim geometrijskim problemima, poput pronalaženja određene duljine ili površine. Dakle, imamo problem poput sljedećeg: 'Površina pravokutnika je 400, a njegov opseg je 100. Kolika je duljina njegove baze?' Baza koja se traži je x pa je duljina druge stranice ${}^{400}/_{x}$, a zatim pola opsega je $(x + {}^{400}/_{x})$, što mora biti jednako 50. (Važno je primijetiti da ovdje postoje dva odgovora za x: duljina baze može biti 10 ili 40.)

2.4.2 x je bilo koji broj

Drugo značenje za x je naziv za bilo koji broj (ili, u prostornom kontekstu, bilo koja duljina). Točnije, x je naziv za opći član skupa brojeva: varijabla. Možemo izraziti aritmetičko pravilo govoreći: 'zbroji s 2, a zatim pomnoži s 3 jednako je kao množenje s 3, a zatim zbrajajanje sa 6', simbolički zapisano kao $3(x + 2) = 3x + 6$. Budući da se pretpostavlja da je ovo pravilo točno za sve brojeve, ako pokušamo riješiti ovu jednadžbu ustanovit ćemo da x može biti bilo koji broj (učenici obično ovakvu jednadžbu riješe tako da dobiju izraz $x = x$, što je naravno istinito za bilo koji broj).

Važan kontekst za vizualizaciju ovakvih generalizacija ili identiteta poput $3(n + 2) = 3n+6$ može biti geometrijsko, gdje $3(n+2)$ predstavlja pravokutnik dimenzija 3 sa $(n+2)$, a $3n$ i 6 predstavljaju pravokutnik 3 sa n i 3 sa 2 ukupne površine $3n$ i 6. Slično, identiteti poput $(n+3)(n+5) = n^2+8n+15$ mogu biti vizualizirani. *Slika* 1 prikazuje da su navedeni identiteti očigledni. Ako se takva upotreba algebarskih identiteta shvaća kao nešto što je općenito istinito za broj i aritmetiku, od učenika se očekuje da uvide smisao u provjeri bilo kojeg identiteta sa nekim vrijednostima za varijable.



Slika 1: Vizualizacije identiteta: istinito za svaki n

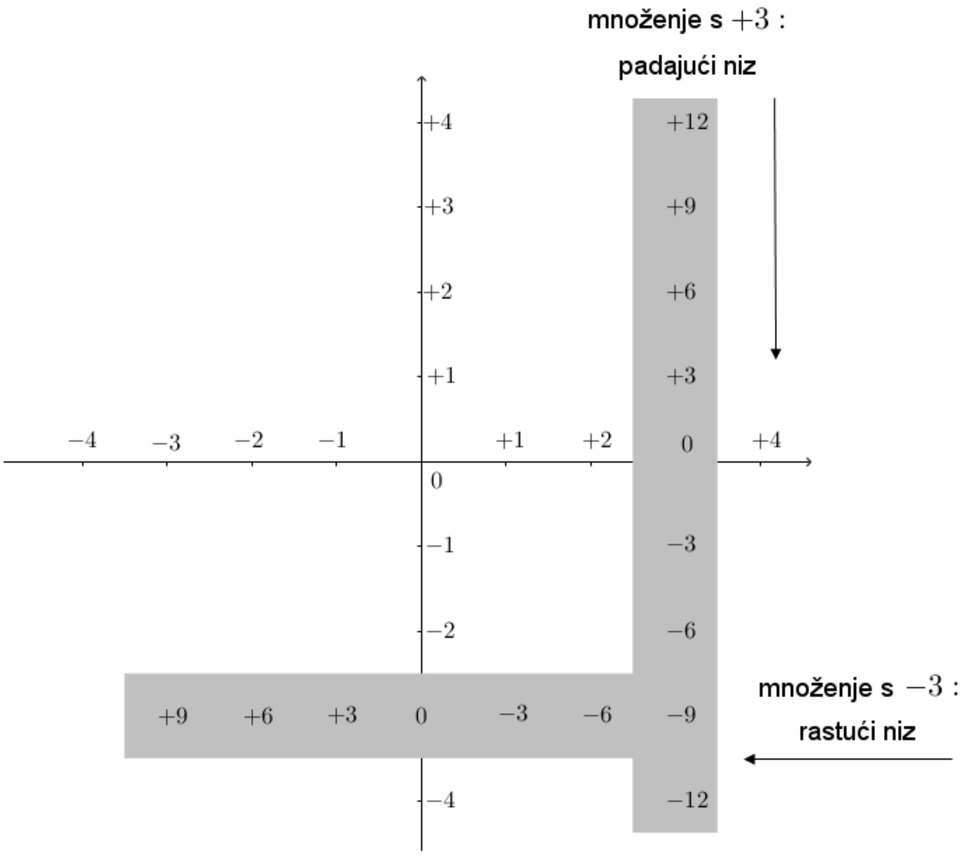
Uvrštavanjem $n = 10$ u gore navedene identitete dobije se $3 \cdot 12 = 36$ i $13 \cdot 15 = 195$. Uočavanje ovakve aritmetičke strukture može pomoći učeniku da izvodi očite mentalne aritmetičke poteze, poput pravila 'vertikalno i dijagonalno' koje predstavlja u ovom jednostavnom slučaju samo zbrajanje znamenaka da se dobije znamenka desetice ($2+1$ daje 3 u stupcu desetica) i množenje 3 i 2 da se dobije stupac broja, premda ako stupac desetica nije jedan, tada je potrebno prvo provesti dijagonalno množenje i ovdje će možda biti potrebno prenošenje, kao u $13 \cdot 15 = 1(8, 1)5 = 195$ i $14 \cdot 15 = 1(9, 2)0 = 210$.

Primjer pravokutnika za vizualizaciju broja i aritmetike vrijedi samo kada su duljine stranica pozitivne. Dolazi do potrebe za novim objašnjenjima za uspostavljanje konkretne veze s negativnim brojevima. Izazov je modelirati negativne brojeve tako da imaju smisla učenicima.

2.5 Učenje i podučavanje cijelih (negativnih) brojeva

Negativni brojevi svojim pojavljivanjem predstavljaju učenicima brojne probleme. Mnogi nastavnici imaju poteškoća kada se suočavaju s pitanjima poput sljedećeg: "Kada oduzmemo negativni broj od nekog broja, npr. od $+5$ oduzmemo -1, dobijemo $+6$. Rezultat je veći od broja s kojim smo počeli. Kako možemo oduzeti nešto od nečega i dobiti veći rezultat?" ili "Kako možemo oduzeti nešto od ničega, kao npr. $0-(-1)=+1$" ili, konačno, "Zašto minus puta minus daje plus?". Potrebno je da učenici dobiju odgovore na koja zadovoljavaju njihov zdrav razum i intuiciju umjesto da se od njih zahtijeva poštivanje pravila bez razumijevanja.

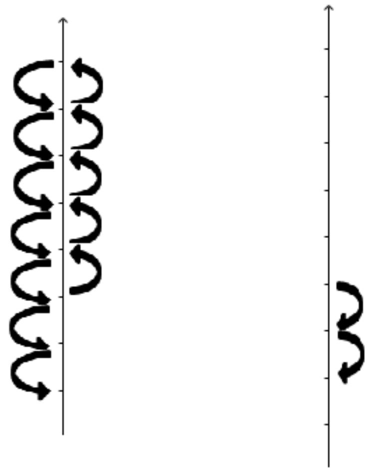
Na ova pitanja treba dati algebarski odgovor, a to je da su negativni brojevi proširenje, odnosno nastavak pozitivnih brojeva, te da se pravila aritmetičkih operacija logično i dosljedno proširuju iz aritmetike s "običnim" brojevima. Fischbein (1997.) je argumentirao ovaj pristup predlažući da pedagogija mora pokazati kako se tablica množenja pozitivnog kvadranta mora logički i algebarski proširiti na ostale kvadrante tako da podrži pravila 'minus puta plus je minus' i 'minus puta minus je plus'.



Slika 2: Strukturiranje cijelih brojeva

Na *Slici* 2 slijedeći tablicu množenja brojem $+3$ prema dolje $(+3)\times(+4)=(+12), (+3)\times(+3)=(+9), (+3)\times(+2)=(+6), (+3)\times(+1)=(+1), (+3)\times(0)=0$, padajući niz $+12, +9, +6, +3, 0$ proširuje se na $-3, -6, -9, -12$ itd. (formalno zbog pravila distribucije), pod pretpostavkom da je $(+) \times (-) = (-)$. Proširenje argumenta s desna na lijevo, niz dobiven za množenje brojem -3, $(-3) \times (+3) = (-9), (-3) \times (+2) = (-6), (-3) \times (+1) = (-3), (-3) \times (0) = 0$, iz čega zaključujemo da se rastući niz $-9, -6, -3, 0$ proširuje na $+3, +6, +9, \ldots$ i stoga $(-) \times (-)$ mora biti $(+)$.

Dakle, mnogi udžbenici koriste prirodni smjer cijelih brojeva (gore/dolje) da bi ih modelirali kao vektor kretanja duž brojevnog pravca koji se proteže od negativnih brojeva do pozitivnih. *Slika* 3 prikazuje postupak računanja $(+5) + (-7) = (-2)$: 5 poteza prema gore, zatim 7 poteza prema dolje daje isto što i 2 poteza prema dolje.

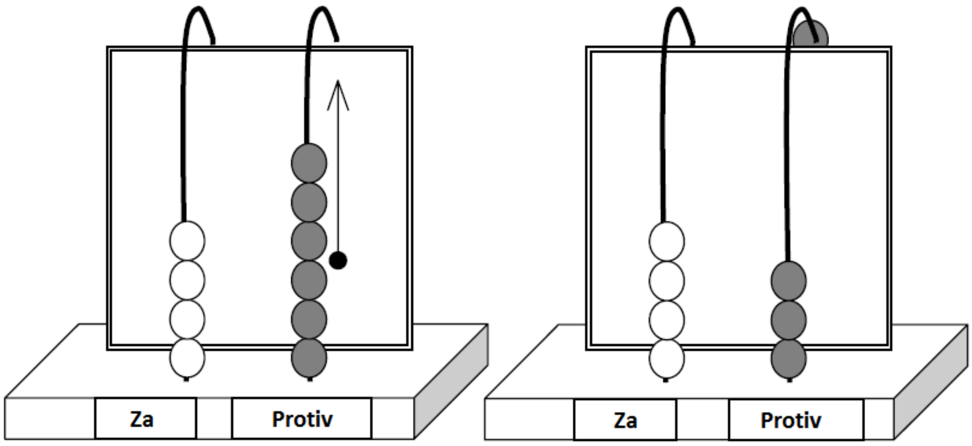


Slika 3: $(+5) + (-7) = (-2)$

2.6 Intuitivni modeli za cijele brojeve kao proces

Prethodno opisani model koristi cijele brojeve kao proces (pomicanje gore/dolje). Međutim, ovaj model nije lako proširiti na operaciju oduzimanje osim koristeći "trik" koji je zapravo algebarski, te stoga nije konkretno intuitivan. Neki nastavnici zagovaraju postavljanje cijelih brojeva u kontekst gdje svaki broj ima jednu od dvije vrijednosti koje se poništavaju, tj. međusobno isključuju (hrpe i rupe, protoni i elektroni, itd.). U jednom su istraživanju uspoređena dva takva konteksta. Prvi je slučaj modeliran kao broj ljudi koji ulaze u zgradu ili izlaze iz zgrade, a u drugom pomoću bodova za tim i bodova protiv tima. Konteksti su učenicima omogućili da naprave veze koje će im intuitivno pomoći u računanju s negativnim brojevima.

Na primjer, predstavljena je igra Jamb (igra s kockicama) u kojoj postoje dvije vrste postignutih bodova: bodovi *za* i bodovi *protiv*. Djeca uče da se ovi bodovi poništavaju, odnosno ako su bacanjem kockice dobili 3 za i 4 protiv, to je isto kao 1 protiv (ili eventualno minus 1 u sljedećoj verziji igre, zapisano na kocki kao -1). Uvođenje ideje timskog rezultata manjeg od 0 nije bila problem s obzirom na implementaciju bodovanja na dvostrukom abakusu: rezultat je direktna razlika između dva stupca abakusa (*Slika* 4).



Slika 4: Dvostruki abakus pokazuje $(-2) - (-3) = (+1)$

Postoje situacije koje se pojavljuju u igri kada je abakus pun i tada djeca mogu poništiti za i protiv bodove na svojim abakusima. Međutim, u praksi se pokazalo da oni raspoznaju da je "fer" za svaki tim da uzme kuglice iz stupca bodovi protiv umjesto da ih dodaju u stupac bodovi za, i obratno. Ovo predstavlja kompenzaciju koja se čini prilično intuitivna, te je preduvjet da oduzimanje kasnije postane isto što i suprotno dodavanje, tj. zbrajanje.

Doista, uvođenje zbrajanja i oduzimanja pozitivnih i negativnih bodova postalo je očito: oduzimanje 4 protiv postalo je isto kao zbrajanje 4 za tim kada se računa na abakusu. Konačno, izračunavanje suma poput $(-2) - (-3) = +1$ može biti modelirano na abakusu postavljanjem dvostrukog abakusa s rezultatom -2 i oduzimanjem 3 od negativnih bodova (minusa). U slučaju kada na dvostrukom abakusu nema 3 minusa za maknuti, koristi se strategija kompenzacije. Dodavanje pozitivnih bodova postaje jednako kao oduzimanje negativnih bodova i formalizirano je u matematičkom smislu, a mogu se koristiti simbolički izračuni. Ovo je ključno kada su u pitanju cijeli brojevi.

Na temelju ovakvih igara, može se raspravljati o tome da je pošteno ukloniti bankovni dug stvarajući depozit. Ovo je zapravo kulturno podrijetlo cijelih brojeva - kineski bankari su vodili financijsko knjigovodstvo koristeći crvene i crne štapiće, a otpis dugova vršen je pomoću tih štapića na isti način kako je poništavanje provođeno na dvostrukom abakusu. Ideja poštenja čini se vrlo moćna u kontekstu timske igre koju su igrala djeca u eksperimentima sa stvarnim kockicama i s pravim natjecateljskim duhom.

Međutim, postavlja se pitanje što je pedagoški značajno u ovim modelima za cijele brojeve. U razvoju metoda za računanje, uključujući nove brojeve i aritmetičke operacije, imamo:

a) kontekst u kojem pozitivni brojevi imaju smisla, ali također u kojem bi novi brojevi bili smisleno uvedeni

b) intuicije iz konteksta poštenih igara koje će podržati aktivnu konstrukciju korisnih strategija

c) model (dvostruki abakus) koji predstavlja brojeve na način koji dopušta modeliranje bodovnog rezultata za početak, a kasnije modeliranje simboličkih operacija za cijele brojeve (što Realno matematičko obrazovanje (RME) naziva 'model od' i 'model za', gdje je model početnog konteksta generaliziran preko drugih konteksta da bi eventualno postao matematički model).

Ovakav pristup može biti uspješan za djecu, no mogu se pojaviti i problemi. To je ilustrirano kroz primjer djece u jednom istraživanju koja su raspravljala o tome da je -8 veće od -5 zato što je stupac u kojemu stoji -8 puniji (prikazan pomoću 8 kuglica u negativnom stupcu) od stupca u kojemu se nalazi -5.

Također, jasno je da razumijevanje cijelih brojeva nije potpuno dok djeca ne počnu učiti algebru i sustavno rješavati jednadžbe. Matematičari su kroz povijest ostvarili potpuno formalno razumijevanje cijelih brojeva samo onda kada su počeli vjerovati da su oni zaista brojevi, a to se dogodilo samo kroz algebru. No, ne smijemo zaboraviti da se to dogodilo otprilike u isto vrijeme kada su kompleksni brojevi postali vjerodostojni, što nije bilo tako davno. Mnoga djeca neće postići razumijevanje cijelih brojeva nakon što su ih učili koristiti na poprilično intuitivne načine s ograničenim shvaćanjima, a neki možda neće nikada shvatiti njihovu matematičku realnost. Tako i mnogi odrasli još uvijek imaju poteškoće s vjerovanjem u postojanje imaginarnih brojeva.

U jednom istraživanju proučavale su se veze koje djeca stvaraju kako bi osigurali uspjeh dok igraju ovakve igre. 'Veze' su slab termin za ono što znanost o znakovima naziva 'lanac znakova'. Ono što se obično događa kada se uspostavljaju matematičke veze je da svaka poveznica u lancu treba biti korištena sve dok ne počne nestajati iz svijesti, npr. iz 'a dijeli b' i 'b dijeli c' slijedi da 'a dijeli c'. Tako lanac koji povezuje bodovanje rezultata timske igre koja uključuje bodove za i protiv računanjem poput $(+3) - (-2) = (+5)$ podrazumijeva puno zaključivanja koja se javljaju samo vježbanjem. Nakon što netko uspješno napravi postupak, često zaboravi zašto je oduzimanje negativnih brojeva isto što i zbrajanje.

Učitelji vrlo često zanemaruju što sve učenici trebaju znati osim krajnjeg ishoda učenja. Primjerice, razlog zašto se kaže 'minus puta minus je plus' za nastavnike predstavlja nešto o čemu nije potrebno raspravljati. Činjenica je da se sve poveznice u lancu, kojima učenici trebaju biti izloženi (i izvježbani prije prije nego ih zaborave), gube upravo zato što ih učitelji zaboravljaju.

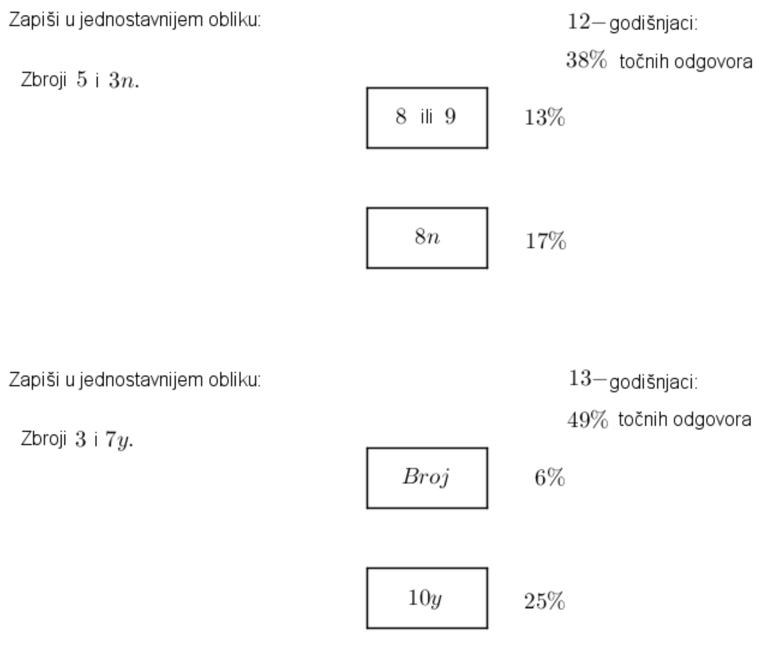
Što je matematika elementarnija, problemi postaju očitiji: kako je učenik naučio da 7 i 8 daju 15? Na to pitanje je teško odgovoriti. Možemo promatrati na način da je 7 udvostručeno jednako 14, što zbrojeno s 1 ukupno daje 15, ili možda da od 7 do 10 treba 3 i još 5 daje 15. Postoji i potpuno drugačiji način: uzastopno brojanje do 8 i zatim brojanje dodatnih 7 da se dobije 15, ili računanjem napamet da je $8+7=15$, što svakako nije poželjan način.

2.7 Algebra: od riječi do simbola

Razmotrit ćemo dokaze o vrstama poteškoća koje djeca imaju sa školskom algebrom. Probleme koje imaju 12−godišnjaci i 15−godišnjaci u početku učenja algebre zabilježio je 1980. Odjel za procjenu učinka (APU), u projektu Koncepti u srednjoškolskoj matematičkoj znanosti (CSMS) i drugim projektima. Problemi su potvrđeni od strane Matematičke procjene za učenje i podučavanje (MaLT).

Uporaba geometrijskog niza (npr. broj šibica za povećanje broja kvadrata u nizu) kao modela za algebarsku generalizaciju testirana je u MaLT12 i 14. Uspjeh u korištenju uzorka za pronalaženje vrijednosti u tablici je prilično dobar (35% i 65%), ali oko 10% u svakom slučaju daje samo sljedeći izraz i sugerira da je to vještina koja se usavršava između 12. i 14. godine. Pisanje izraza za n−ti član u tablici također se poboljšava dramatično (od 3% do 43%): glavna pogreška kod dvanaestogodišnjaka je ta što radije jednostavno napišu broj za traženi izraz dok četrnaestogodišnjaci prave više netočnih formula (45% daje formulu koja opisuje iteraciju ili formulu koja odgovara samo prvom članu).

Pitanja neovisna o kontekstu pokazuju da samo 38% 12−godišnjaka i 49% 13−godišnjaka može napisati ispravno algebarski izraz uključujući broj i varijablu (*Slika* 5).



Slika 5: Algebarski izrazi

Glavna pogreška koju je ovdje napravilo 30% od obje dobne skupine je završavanje izraza na način da daje $8n$ ili broj poput 8 ili 9. Manji postotak (19% i 36%) napravilo je nešto složenije primjere, u kojima je broj trebao biti nadodan izrazu tako da ga dalje pojednostavljuje (npr. dodaj broj 5 izrazu $3 + n$), u sličnim postotcima radili su iste pogreške zaključivanja. Kod 13−godišnjaka pojavljuje se nova pogreška: kada su izrazu $x + 3$ trebali dodati 6 , 11% ih je odgovorilo da je to $6x + 3$. Istraživači su ove koncepcije opisali kao 'ne korištenje slova', 'slovo kao specifična nepoznanica' i 'neprihvaćanje nedostatka zaključivanja'. Vrlo visok udio 12−godišnjaka i 14−godišnjaka može koristiti funkcijski stroj u obratnom smjeru za izvođenje željenog računa, npr. pretvorba Celzijevih stupnjeva u Fahrenhite (41% 12−godišnjaka i 56% 13−godišnjaka). Međutim, problemi se pojavljuju čim se pojavi konkretna vrijednost i kada nema funkcijskog stroja za takav model. Samo 12% 13−godišnjaka može točno pronaći d kada je $t = 3$ za $d = 5t^2$, dok 21% radi pogreške zbog kvadratne funkcije. To upućuje na zaključak da je funkcijski stroj koristan, ali se možda spontano ne koristi ako se ne spominje u pitanju.

2.8 Konteksti, modeli i metafore kao temelj

Zaključak koji slijedi iz istraživanja za 12−godišnjake i 14−godišnjake je da trebaju kontekste, modele i metafore kao temelj za razvoj algebarskih kompetencija u toj dobi. Međutim, manje je poznato kako učinkovito koristiti ove modele. Čini se da bi to trebalo zahtijevati bolje razumijevanje uloge samih modela. Najbolje istraživanje o tome potječe iz rada Luisa Radforda (2002.) o učenju generalizacija u zadacima s uzorcima. Radford je pokazao vrlo sugestivan način razumijevanja i korištenja pedagogije. U njegovom radu značajan je trenutak kada su formulacije ispitanika pomaknute od "pokazujućih" i kontekstualiziranih ('ovo dodano onome da se dobije ovaj') u općenitiju formulaciju ('prva slika i broj daju iduću sliku'). Radford je primijetio da je ključni element u "guranju" učenika od jednog do drugog shvaćanja potreba da se obrati i udaljenom slušateljstvu, kao što je ostatak razreda. Sve dok se argumentacija rješava na lokalnoj razini, u maloj grupi oko slike, nije potrebno eksplicitno izraziti uzorak. Lokalno, kontekstualizirani znakovi ostaju pokazujući, što je vrlo poticajno za istraživački razgovor u malim grupama. Radford smatra da je uloga znakova u različitim govornim kontekstima od izuzetnog značaja.

U potrebi za daljnjim istraživanjem drugi važan aspekt je uloga uključenih modela. Različite mogućnosti i ograničenja algebarskih izraza i jednadžbi prikazanih u funkcijskom stroju nisu u potpunosti razumljivi. Učenici trebaju biti sposobni predočiti izraze poput $3x + 1$ barem na nekoliko načina (npr. numerički, geometrijski i simbolički), ali nije potpuno poznato kako bi te vizualizacije trebale biti razvijene i korištene. U jednom neuspjelom istraživanju istraživač je intervjuirao učenike u dobi između 14 i 16 godina o tome što mogu zamisliti u svojim glavama kada su im prikazani različiti matematički objekti. Izrazi poput $3(x + 1)$ nisu im predstavljali ništa osim samog izraza.

3 Zajedničke pogreške i zablude

U ovom poglavlju nalaze se odabrani dijelovi iz baze projekta Matematičke procjene za učenje i podučavanje (MaLT) sastavljenih od niza testova za rješavanje na papiru, standardiziranih na velikim nacionalnim primjerima za svaku dobnu skupinu od 5. do 14. godine, no u diplomskom radu razmatraju se učenici u dobi od 11. do 14. godine. Ovi testovi su upotpunjeni prilagodljivim računalnim verzijama za osnovnu i srednjoškolsku dob.

Za svaku odabranu zanimljivu stavku izdvojeni su:

- opis pitanja i postotak onih koji su, iz relevantne dobne skupine, točno odgovorili na pitanje
- značajnu pogrešku napravljenu u zadacima ispita i njezinu učestalost izraženu kao postotak dobne skupine
- objašnjenje ili dijagnozu koja se predlaže za svaku pogrešku, zasnovano na prethodnim istraživanjima (tamo gdje je moguće)
- opis zadatka i njegovu referencu u MaLT testovima, za potrebe daljnjih studija i istraživanja; također, dana je i skala bodovanja (SS) za zadatke, što je mjera težine zadatka neovisno o dobnoj skupini.

Dakle, gledajući prvi red tablice, pitanje namijenjeno za procjenu sposobnosti jedanaestogodišnjaka 'Nadopuni rečenicu brojem uključujući operaciju dijeljenje' uspješno je riješilo 63% $11-$godišnjaka u istraživanju (ukupno je sudjelovalo otprilike 1000 engleskih privatnih škola u ožujku 2005. godine); 27% $11-$godišnjaka koristilo je operaciju množenje umjesto dijeljenje, što se interpretira kao sintaktička pogreška čitanja oznake $\div$ kao $\cdot$. U pitanju se od djece traži da upišu broj koji nedostaje: $\_\_\_ \div 5 = 35$. Pitanje M11.1 može se naći u MaLT11, pitanje 1 u testu za $11-$godišnjake. Konačno, skala bodovanja je 64, što znači da je ovo bio jedan od zahtijevnijih zadataka za djecu u toj dobi.

Skala bodovanja (SS) dobivena je iz vertikalne jednadžbe svih stavki i djece u bazi podataka, gdje je $1logit = 5bodova$, točnije jednadžba je dana izrazom $SS = 61+5*(logit)$. To se najbolje interpretira imajući na umu sljedeće prosječne rezultate prikazane u tablici prosječnih (medijan) vrijednosti za dobnu skupinu od 5. do 14. godine:

Dob (godine)	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0
Prosječna ocjena	35	44	50.5	56	60	64	68	70	71	73

3.1 11−godišnjaci

BROJ **Opis** **(vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**
Dopuniti rečenicu brojem uključujući operaciju dijeljenje (koristeći kalkulator) 63%	$7 \div 5 = 35$ 27%	Sintaktička pogreška: čita $'\div'$ kao '·' ILI Zabluda da je dijeljenje komutativno ILI Sintaktička složenost brojevne rečenice: rad unatrag	Upiši broj koji nedostaje: $\_\_\_ \div 5 = 35$. CALC M11.1 SS 64
Identificirati i koristiti odgovarajuću operaciju *(množenje)* za rješavanje problema iz svakodnevnog života (koristeći kalkulator) 63%	Netočno postavljanje decimalne točke za novac kada se očitava s kalkulatora: 7044 postane £70.44 14%	Strukturiranje temeljeno na iskustvu s novcem	587 ljudi je otišlo u zoološki vrt. Svatko je platio £12. Izračunajte ukupan iznos plaćenog novca. CALC M11.6 SS 64
Identificirati i koristiti odgovarajuću operaciju *(dijeljenje)* za rješavanje problema iz svakodnevnog života (koristeći kalkulator) 45%	Netočno zaokruživanje prema dolje radije nego prema gore ILI Skraćivanje decimala 19%	Ne provjeravanje s kontekstom stvarnog života	560 učenika je išlo u zoološki vrt autobusom. Svaki autobus je prevozio 42 učenika. Koliko autobusa je prevozilo učenike? CALC M11.9 SS 69

Oduzimati troznamenkaste brojeve koristeći pisane metode (bez kalkulatora) 68%	Oduzimanje manjeg od većeg broja u *vertikalnom* zapisu 13%	Prototip oduzimanja manjeg od većeg broja	Vertikalni zapis: Oduzmi $567 - 185$. M11.14 SS 62
Množiti troznamenkasti broj jednoznamenkastim brojem 43%	Pogreška u prenošenju u vertikalnom zapisu 5%	Složenost zadataka s dva koraka I/ILI Svojstva množenja	Dovrši dugo množenje: $238 \times 5 = \_\ \_\ \_\ 0$. M11.34 SS 70
Zbrajati cijele brojeve (pozitivne i negativne) 66%	Zbroji $+4$ i -5: $(+)1$ 5% Zbroji $+4$ i -5: $+9$ ili -9 4% Zbroji $+4$ i -5: 3 4%	Strategija pridruži prvi predznak ILI Koncepcija razlike Cijeli brojevi zamišljeni kao dva odvojena objekta: 'predznak' i 'broj' Obrnuta slika negativnih brojeva: $-5, 0, 1, 2, 3$	Zbroji $+4$ i -5. M11.16 SS 63
Prepoznati negativne decimalne brojeve na brojevnom pravcu 45%	Smješta brojeve manje od -4 na njegovu desnu stranu 25%	Ignoriranje predznaka ILI Pogrešno razumijevanje smjera brojevnog pravca	Na brojevnom pravcu označeni su brojevi $-6, -4, -2$ i strelica na mjestu -3.5. Na koji broj pokazuje strelica? M11.20 SS 69

Rješavati jednostavne probleme uključujući omjer i proporciju 52%	Množi pogrešne brojeve: $8 \div 4 = 12 \div \mathit{48}$ ili $\mathit{96}$ 17% $8 \div 4 = 12 \div \mathit{8}$ 5%	Neproporcionalno zaključivanje Pogreška zbrajanja	8 boca vode košta £4.00. Koliko košta 12 boca vode? M11.17 SS 67
Zaokružiti bilo koji cijeli broj do 10 000 na najbližu stoticu 73%	Zaokružuje prema manjoj stotici umjesto prema većoj 11%	Skraćivanje za zaokruživanje	Zaokruži 951 na najbližu stoticu. M11.22b SS 61
Množiti decimalne brojeve s 10 da bi dovršio niz 54%	Pisanje $0.25 \times 10 = 25$ 11%	Pogreška mjesta vrijednosti	Konstruiran je niz množenjem s 10 svaki put. Nastavi: $0.025, 0.25, \_\_, \_\_.$ M11.19 SS 67
Množiti dva broja s jednim decimalnim mjestom 9%	Pisanje $0.2 \times 0.4 = 0.8$ 68%	Decimalni brojevi shvaćeni kao da se sastoje od dva odvojena objekta: točka i broj	$0.2 \times 0.4 = \_\_\_.$ M11.28 SS 82
Prepoznati kvadrat brojeva do barem 12×12 36%	Računanje $4^2 + 5^2 = 9^2 = 81$ 27% Računa kvadriranje kao udvostručavanje 7%	Pogrešno razumije redoslijed provođenja računskih operacija Pogreška u označavanju indeksa	$4^2 + 5^2 = \_\_\_.$ M11.23 SS 72

Redati skup prirodnih s 0 (N) i decimalnih brojeva (D) 36%	$N\ DDD\ N$: daje redoslijed decimalnih brojeva prema decimalnim znamenkama 18% $NNDDD$: niže najprije prirodne brojeve 11% $DDDNN$: redoslijed tako da su decimalni brojevi prvi, a zatim prema decimalnim znamenkama 7% DDDNN: redoslijed tako da su decimalni brojevi prvi i prema principu 'najveći je najmanji' 6%	Jedina pogreška je da je decimalna točka ignorirana Prototip prirodnih brojeva s 0: decimalni brojevi su 'drugi' I Pogreška ignoriranja decimalne točke Zabluda da su decimalni brojevi manji od prirodnih brojeva s 0 I Pogreška ignoriranja decimalne točke Zabluda da su decimalni brojevi manji od prirodnih brojeva s 0 I Pogreška 'najveći je najmanji'	Poredaj brojeve od najmanjeg do najvećeg: $73.2, 73.65, 25, 120, 73.5$. M11.26 SS 71
Pronalaziti jednostavne postotke malih prirodnih brojeva 51%	Interpretira zasjenčano 10% od 40 kao zasjenčano 10 29%	Pogreška ignoriranja znaka za postotke	Rešetka veličine 8 puta 5 napravljena je od 40 kvadratića. Osjenčaj 10% dane mreže. M11.24 SS 67

Zbrajati razlomke sa zajedničkim nazivnikom 33%	Zbrajanje brojnika i nazivnika 30%	Razlomci shvaćeni kao dva odvojena objekta: brojnik i nazivnik	$^3/_8 + {}^2/_8 =$ ___. M11.29 SS 72
MJERENJE **Opis** **(vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**
Računati površinu pravokutnika u složenom obliku 18%	Pronalaženje opsega zbrajajući samo vidljive mjere 24% Pronalaženje opsega 11%	Zabuna oko pojmova površina/opseg I Složenost zadataka s dva koraka Zabuna oko pojmova površina/opseg	Izračunaj površinu ako su zadane mjere 4 od 6 stranica. CALC M11.10 SS 77
Računati opseg jednostavnih oblika 34%	Izračunavanje površine 36% Brojanje dijagonala jediničnog kvadrata kao 1 13%	Zabuna oko pojmova površina/opseg Pogrešno razumijevanje mjere dijagonale i stranica kvadrata	Odaberi dva oblika sa jednakim opsegom (iz rešetke). M11.15 SS 73

Odabrati najmanji kut iz grupe kutova 83%	Odabire kut s najkraćim kracima kao najmanji kut 7%	Pogrešno razumijevanje pomicanja krakova kuta	Na rešetci su nacrtani kutovi s različitom orijentacijom i duljinom krakova. Odaberi najmanji kut. M11.18a SS 57
Usporediti veličine kutova 66%	Uspoređuje veličina kutova iz udaljenosti između krajnjih točaka krakova 23%	Pogrešno razumijevanje duljine	Odaberi dva kuta jednake veličine. M11.18b SS 63
Usporediti mjere u metrima i centrimetrima 53%	Pretvaranje 1m 20cm u 12 ili 1020 m 23%	Pogrešno razumijevanje 10 ili 1000 centimetara u metrima	U skoku u vis letvica je na početku postavljena na 1 m. Ako se pomjeri za 20cm prema gore, na kojoj visini se tada letvica nalazi? $1.02\,m, 1.2\,m, 12.0\,m,$ $1020\ cm, 102\ m$ M11.36 SS 67
OBLIK I PROSTOR Opis (vještina)	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**
Prepoznati gdje će biti oblik nakon rotacije u smislu svakodnevnog života 19%	Netočno modelira rotaciju kao refleksiju 63%	Složenost zadataka u dva koraka: ograničavanje realnosti	Promatramo isprintane oblike. Koji su oblici jednaki? M11.31 SS 77

OBRADA PODATAKA Opis (vještina)	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak MaLT referenca Skala bodovanja**
Izdvajati i objasniti podatke u tablici da bi riješio problem 77%	Koristi samo jedan od uvjeta: odabire dan s najvećim brojem radije nego najveći broj ukupno 12%	Složenost zadataka s dva koraka	Tablica prikazuje cijene za vožnju parkom za 3 različita dana. Koji dan se mora platiti najviše? CALC M11.8b SS 59
Računati prosjek skupa podataka (koristeći kalkulator) 24%	Djelomično točno, ali zaokružuje na najbliži prirodni broj sekundi 11%	Izbjegavanje decimalnih brojeva	Dana je tablica mjerenja u utrci na 100 m. Izračunaj prosječno (srednje) vrijeme. CALC M11.11a SS 76
Izdvajati i objasniti podatke u tablici da bi riješio problem uključujući vrijeme u satima i minutama 40%	Koristi da 1 sat ima 100 minuta 13%	Prototip decimalnog vremena ILI Pogrešno razumijevanje da 1 sat ima 100 minuta	Dana je tablica za 3 putovanja s vremenom i cijenom po osobi. Vratili su se s putovanja s trenerom u $17:15h$. Kada je trener otišao? M11.12c SS 70

Koristiti jezik povezan s vjerojatnošću 68%	Očekuje $CPCP\ C$, gdje C predstavlja crvenu boju, a P plavu boju 18%	Zabluda kockara – vjerojatnost temeljena na uzorku nedavnih događaja	Rezultati okretanja zvrka za prve 4 vrtnje su: $CPCP\_\_$. Što možeš reći o petom? M11.30 SS 62
Čitati koordinate i crtati točke u sva 4 kvadranta 49%	Netočno identificira negativnu koordinatu kao pozitivnu 13% Zamjenjuje koordinate 10%	Pogreška ignoriranja negativnog predznaka Nedostatak znanja o usvojenim pravilima	Točka P nalazi se u trećem kvadrantu. Odredi njezine koordinate. M11.32 SS 68

3.2 12−godišnjaci

BROJ **Opis (vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**
Identificirati i koristiti odgovarajuću operaciju *(dijeljenje)* za	Netočno zaokružuje prema dolje umjesto prema gore ILI Skraćuje decimale 15%	Ne provjerava s kontekstom stvarnog života	90−minutna vježba ravnomjerno se raspodjeljuje na 7 dana. Koliko minuta se vježba svaki dan? CALC M12.3 SS 70

rješavanje problema iz svakodnevnog života (koristeći kalkulator) 46%	Koristi množenje umjesto dijeljenja 12%	Izbjegavanje decimala	
Dijeliti troznamenkasti broj s jednoznamenkastim brojem koristeći pisane metode 59%	$621 \div 3 = 27$ 7%	Pogreška mjesne vrijednosti	$621 \div 3 = \_\_\_.$ M12.17 SS 67
Razumjeti decimalan zapis 18%	Piše jednu desettisućinku kao 0.001 ili 0.00001 Pogrešno čita tisućinke kao tisuću 5% Pisanje 10.000 7%	Pogreška mjesta vrijednosti 12% Problem čitanja Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti	Napiši jednu desettisućinku kao decimalan broj. M12.29 SS 80
Zbrajati decimalne brojeve na dvije decimale 57%	Piše $8.04 + 1.6 = \mathit{9.1(0)}$ u horizontalnom zapisu 6%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti: decimalni dio kao prirodan broj	$8.04 + 1.6 = \_\_\_.$ M12.25 SS 67
Nalaziti brojeve 100 *puta veće od* broja s jednim decimalnim mjestom 53%	100 puta veći od 8.2 je *82* ili *8200* 12%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti	Koji broj je 100 puta veći od 8.2? M12.26 SS 68

Proširiti mentalne metode računanja na decimalne brojeve 60%	Piše $6 \times 0.5 =$ *30* ili *0.3(0)* 9%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti: decimalni dio kao prirodan broj	$6 \times 0.5 =$ ___. M12.28 SS 66
Rješavati problem koristeći zbrajanje i oduzimanje decimalnih brojeva 64%	Odabire operaciju oduzimanja umjesto zbrajanja 11%	Zbunjen suprotnim smjerovima putokaza u dijagramu	Putokaz: Grad A nalazi se na udaljenosti od 2.4 km ulijevo, a grad B 13.3 km udesno. Koliko su gradovi A i B udaljeni? M12.16 SS 65
Proširiti pisane metode množenja na decimalne brojeve s 2 decimalna mjesta 26%	Računa dvostruko za kvadrat 27% Odabire 4.25 ili 4.10 kao kvadrat broja 2.5 21% Uzimanje da je 0.5 kvadrat broja 2.5 14%	Pogrešno razumijevanje pojmova kvadrat – dvostruko Decimalni brojevi zamišljeni kao dva prirodna broja odvojeni decimalnom točkom Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti	Kvadrat broja 3 je broj 9 zato što je $3 \times 3 = 9$. Odaberi broj koji je kvadrat broja 2.5: $5, 0.5, 4.235, 6.25, 4.10$. M12.31 SS 76

Odrediti razlomak nekog broja (koristeći kalkulator) 17%	Piše $^3/_{10}$ od $6 = 2$ 14%	Pogreška dijeljenja brojnikom ILI Pogrešno razumijevanje $^3/_{10} = {}^1/_3$	Tablica: Nutritivna vrijednost porcije 30 g žitarica uvijek je $^3/_{10}$ od 100 g porcije. Za 100 g vrijednost je 6, a za 30 g je ___. CALC M12.10a SS 79
Oduzimati dva razlomka svodeći ih na zajednički nazivnik 22%	Oduzima brojnike i nazivnike 34%	Razlomci zamišljeni kao dva prirodna broja razdvojena razlomačkom crtom	$^3/_8 - {}^1/_4 =$ ___. M12.36 SS 77
Odrediti jednostavne postotke broja ljudi u tekstualnom zadatku (koristeći kalkulator) 21%	28% od 45: dijeli veći broj postotkom 14%	Znak % potiče pogrešku dijeljenja	U anketi je sudjelovalo 425 ljudi. 28% ih je izabralo plavu boju. Koliko ljudi je izabralo plavu boju? CALC M12.5 SS 77
Odrediti jednostavne postotke novca u tekstualnom zadatku (koristeći kalkulator) 15%	4% od £50: dijeli veći broj s manjim brojem 20%	Znak % potiče pogrešku dijeljenja	Izračunaj kamatni dobitak zarađen u jednoj godinu na £50 uz 4% kamate po godini. Kamatni dobitak iznosi £___. CALC M12.11 SS 80

Rabiti ekvivalenciju decimalnih brojeva i postotaka 17%	Piše 2 za 20% 6%	Pogrešno razumijevanje pojmova decimalni broj – postotak ILI Znak % potiče pogrešku dijeljenja	Majica košta £8 i cijena je snižena za 20%. Napiši decimalan broj da bi izračunao uštedu: £8 × ___. M12.32 SS 79
Razumjeti operacije množenja i dijeljenja i njihovu međusobnu vezu *(udvostručavanje i prepolavljanje)* 34%	Točno proširuje udvostručavanje niza unaprijed, ali netočno unazad oduzimanjem umjesto prepolavljanjem 29%	Prototip aritmetičkog niza ILI Prototip niza prirodnih brojeva s 0 ILI Izbjegavanje razlomaka	Konstruirajte niz u kojemu je svaki član jednak dvostrukom prethodnom članu. Nadopuni: $\_, \_, 1, 2, 4, 8, \_$. M12.21 SS 73
Razumjeti operacije množenja i dijeljenja i njihovu međusobnu vezu u kontekstu nejednakosti 9%	Odabire da je $0.6 \times 0.3 > 0.6 \div 0.3$ točno 46%	Zabluda da množenje čini veće	Označi svaku nejednakost je li točna ili netočna: $60 \times 3 > 60 \div 3$ $60 \times 0.3 < 60 \div 0.3$ $0.6 \times 0.3 > 0.6 \div 0.3$. M12.33 SS 83
Razumjeti vezu između omjera i proporcije da bi izračunao postotak 41%	Rabi omjer dio po dio umjesto kao cjelinu 13%	Pogrešno razumijevanje omjera	Miješamo 4 dijela crvene boje i 1 dio žute boje da se dobije narančasta boja. U kojem postotku je bilo žute boje u mješavini? CALC M12.9 SS 71

Rješavati jednostavne probleme koristeći ideje omjera i proporcije 24%	$3 : 10 = \mathit{4} : 15$ ILI $3 : 10 = \mathit{5} : 15$ Zaokružuje prema gore ili dolje do najbližeg cijelog broja 24% $3 : 10 = \mathit{50} : 15$ Zamjenjuje izraze problema 5%	Prednosti prirodnih brojeva s 0 ILI Procjena Računanje prema prednostima prirodnih brojeva s 0	3 kruha je potrebno za izradu 10 sendviča. Koliko je kruha potrebno za izradu 15 sendviča? CALC M12.12b SS 76
Prepoznati približne proporcije cjeline kao postotak 46%	Zamjenjuje postotak sa stupnjevima za osjenčani dio kruga 5%	Prototip dijagrama u obliku kolača	Prikazan je krug označen u osminama (oko 28% osjenčano): Koliko je približno osjenčano u postotcima? M12.18 SS 70
Pojednostaviti linearne algebarske izraze prikupljanjem sličnih izraza 38%	Pojednostavljuje zbroj 5 i $3n$ kao broj (npr. 8 ili 9) 13% Pojednostavljuje kao $8n$ 17%	Pogreška slovo kao posebna nepoznanica ILI Ignoriranje slova Pogreška ne upotrebljavanja slova: zahtijevanje zatvaranja algebarskih objekata	Napiši u najjednostavnijem obliku: Zbroji 5 i $3n$. M12.22b SS 72

Pojednostaviti linearne algebarske izraze prikupljanjem sličnih izraza 19%	Pojednostavljuje zbroj 5 i $n+3$ kao broj (npr. 8 ili 9) 15% Pojednostavljuje kao $8n$ 17%	Pogreška slovo kao posebna nepoznanica ILI Ignoriranje slova Pogreška ne upotrebljavanja slova: zahtijevanje zatvaranja algebarskih objekata	Napiši u najjednostavnijem obliku: Zbroji 5 i $n+3$. M12.22a SS 77
Interpretirati algebarsku funkciju stroja (dijagram toka) 41%	Za inverznu funkciju pretvaranja temperaturnih mjernih jedinica, zamijena operacija, ali ne redoslijeda 9%	Pogreška redoslijeda izvođenja računaskih operacija	Metoda za približnu pretvorbu iz Celzijevih stupnjeva u Fahrenheite je ... Koja je metoda za pretvaranje natrag u Celzijeve stupnjeve: $F\_\_C$. M12.37 SS 71
Generirati uvjete uzorka niza brojeva 35%	Generira sljedeći broj (četvrti) umjesto traženog broja (šestog) 9%	Konstruiranje niza u jednom koraku	Prikazan je brojač $Z-$oblika za niz od 3. Nadopuni tablicu: niz brojeva $1, 2, 3, \ldots, 6$ i upotrijebljeni brojač: $7, 10, 13, \ldots, \_\ \_$. M12.39a SS 73

Opisati opći član niza broja 3%	Piše broj umjesto izraza za $n-$ti član niza 21% Pisanje algebarskog izraza za iterativni uzorak 11%	Pogrešno razumijevanje generalizacije Aditivna pogreška (dodavanja) zasnovana na strukturiranju po jedan korak ILI Pogreška iterativnog strukturiranja	Napiši izraz za $n-$ti član niza. M12.39b SS 91
MJERENJE **Opis (vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**
Čitati i interpretirati oznake na mjernom instrumentu gdje jedan interval predstavlja 5 jedinica 72%	Računa svaki interval na skali kao jednu jedinicu (81 za 85) 4%	Prototip 'jedinica skale'	Brzinomjer se okreće u većim intervalima: $20, 40, 60, \ldots, 200$. Što se očitava ...? M12.35 SS 63
OBLIK I PROSTOR **Opis (vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**
Vizualizirati i opisati 3D oblike iz 2D prikaza 24%	Zbunjen oko pojmova 'trokutasta baza' i 'kvadratna baza' piramide 31%	Složenost zadataka s dva koraka	Prikazan je tetraedar: piramida kojoj je baza trokut s četiri strane i četiri vrha. Koliko ima bridova? M12.14 SS 76

	Broji samo vidljive bridove tetraedra 20%	Nedostatak slike	
Prepoznati paralelne pravce 54%	Odabire za paralelne pravce samo one koji su jednake duljine 21%	Prototip paralelnih pravaca	Zadan je skup od pet pravaca. Koji su paraleleni? M12.20 SS 68
Razumjeti i rabiti pojmove rotacije 16%	Rotiranje trokuta oko vrha u smjeru kazaljke na satu radije nego u obratnom smjeru 6%	Pogreška smjera okretanja	Trokut u koordinatnom sustavu s točkom rotacije u vrhu $(1,1)$. M12.38 SS 79
OBRADA PODATAKA Opis (vještina)	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak MaLT referenca Skala bodovanja**
Izdvajati i rabiti informacije iz tablice za rješavanje problema 33%	Interpretira 'manje od 6' na način da se uključi 6 31%	Pogreška graničnog stanja i složenost zadatka	Prikazana je tablica cijena ulaznica za odrasle i djecu: A ima 6 godina, a B ima 12 godina. Koliko će uštedjeti za obiteljsku ulaznicu? CALC M12.4 SS 73
Interpretirati podatke u dijagramu učestalosti 29%	Računa Σf za sve $x > 0$ umjesto Σxf 30%	Složenost zadataka s više koraka	Prikazan je grafikon učestalosti za učenike s različitim brojem kućnih ljubimaca.

<table>
<tr><td></td><td>Računa Σf za sve x umjesto Σfx
30%</td><td>Složenost zadataka s više koraka</td><td>Koliko kućnih ljubimaca imaju svi učenici zajedno?
CALC
M12.7b
SS 75</td></tr>
<tr><td>Računati srednju vrijednost diskretnog skupa podataka
39%</td><td>Računa zbroj podataka
16%</td><td>Složenost zadataka s dva koraka</td><td>Bacanjem kocke 7 puta dobije se $3, 3, 4, 2, 5, 6, 5$. Izračunaj srednju vrijednost.
M12.27a
SS 72</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Odrediti raspon diskretnog skupa podataka
25%</td><td>Piše izraz za raspon (npr. od 3 do 6) radije nego numeričku vrijednost
13%</td><td>Nedostatak znanja o usvojenim pravilima</td><td rowspan="2">$\ldots 3, 3, 4, 2, 5, 6, 5$. Koji je raspon bodova?
M12.27b
SS 76</td></tr>
<tr><td>Ne reda prvo skup podatka
5%</td><td>Složenost zadataka s dva koraka
ILI
Nepotpuni koncept</td></tr>
</table>

3.3 13−godišnjaci

BROJ **Opis** **(vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**

Rješavati problem sa prirodnim brojevima uključujući dijeljenje s ostatkom (koristeći kalkulator) 55%	Točno odabire dijeljenje, ali ne zaokružuje odgovor u kontekstu 17%	Složenost zadataka s dva koraka	Torba puna riže teška je 4000 g. Svaka porcija teži 75 g. Koliko se porcija može dobiti od ukupne težine riže? CALC M13.2 SS 68
Proširiti mentalne metode računanja na decimalne brojeve 70%	$0.5 \times 8 =$ *40* ili *0.4(0)*	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti: decimalni dio kao prirodan broj s 0 9%	$0.5 \times 8 =$ ___. M13.19 SS 63
Zbrajati decimalne brojeve na dva decimalna mjesta 57%	Računa: $2.02 + 1.8 + 2.13 =$ *5.23* u horizontalnom zapisu 13%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti: decimalni dio kao prirodan broj s 0	Dijelovi vrpce su 2.02 m, 1.8 m i 2.13 m. Koliko je duga ta vrpca? M13.23 SS 67
Oduzimati decimalne brojeve na dva decimalna mjesta 51%	$12.09 - 1.5 =$ *11.(0)4* 17%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti: decimalni dio kao prirodan broj s 0	$12.09 - 1.5 =$ ___. M13.30 SS 69
Izdvajati informacije iz tablice i oduzimati decimalne brojeve na dva decimalna mjesta 40%	Računa $9.05 - 7.2$ kao *2.(0)3* 18%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti: decimalni dio kao prirodan broj s 0	Prikazana je tablica s mjesečnim podacima o oborinama (cm). Koja je razlika između studenog i listopada? M13.24 SS 73

Proširiti pisane metode dijeljenja na decimalne brojeve s dva decimalna mjesta 30%	Računa četvrtinu od 0.16 kao 0.4 16%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti: decimalni dio kao prirodan broj s 0	Svaki član niza je četvrtina prethodnog člana. Nadopuni: $10.24, 2.56, 0.64, \_, \_.$ M13.27 SS 75
Dijeliti decimalne brojeve s dva decimalna mjesta 42%	Piše $0.64 \div 8 = \mathit{0.8}$ 11%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti: decimalni dio kao prirodan broj s 0	$0.64 \div 8 = \_\_\_.$ M13.34 SS 72
Razumjeti operacije množenja i dijeljenja, i njihovu međusobnu vezu u kontekstu nejednakosti 12%	Odabire da je 0.8×0.4 veće od 0.8×0.4 35%	Pogrešno shvaćanje da množenje čini veće	Što je veće: 8×4 ili $0.8 \div 4$, 8×0.4 ili $8 \div 0.4$, 0.8×0.4 ili $0.8 \div 0.4$? M13.38 SS 82
Skratiti razlomak do njegovog najjednostavnijeg oblika 57%	Odabire da je ${}^{12}/_{20} = {}^{20}/_{12}$ 14% Odabire da je ${}^{12}/_{20} = {}^{10}/_{18}$ 10%	Zabluda da je dijeljenje komutativno Aditivna pogreška	Koji razlomak je ekvivalentan razlomku ${}^{12}/_{20}$? M13.33 SS 67
Rješavati tekstualne zadatke uključujući postotke od neke količine (koristeći kalkulator) 21%	Pronalazi postotak, ali ne zaokružuje u kontekstu 8%	Složenost zadatka s dva koraka	U 70 putovanja vlak je kasnio 69% puta. Koliko putovanja je kasnio? CALC M13.4 SS 79

	Ignorira znak % 4%	Pogrešno razumijevanje postotaka: ignoriranje oznake	
Odrediti koji broj može uzeti za cjelinu kada se određuju postotci (koristeći kalkulator) 18%	Koristi izvornu vrijednost kao cjelinu radije nego uvećanu vrijednost 11%	Složenost zadataka s dva koraka	Boca je sadržavala 500 *ml* soka, a sada sadrži 10% više. David je popio 20% soka. Koliko soka ima u boci? ___ *ml* CALC M13.8 SS 79
Rješavati jednostavne probleme koristeći ideje omjera i proporcije 27%	$4 : 6 = 6 : \mathit{8}$ 37%	Aditivna pogreška	Da bi se nahranilo 6 životinja potrebna su 4 kruha. Koliko životinja možeš nahraniti pomoću 6 kruhova? M13.39a SS 77
Rješavati jednostavne probleme koristeći ideje omjera i proporcije 24%	$4 : 6 = \mathit{13} : 15$ 19%	Aditivna pogreška	Da bi se nahranilo 6 životinja potrebna su 4 kruha. Koliko je kruha potrebno da bi se nahranilo 15 životinja? M13.39b SS 78

Pojednostaviti linearne algebarske izraze prikupljanjem sličnih izraza 49%	Pojednostavljuje zbroj 3 i $7y$ kao broj 6% ILI Pojednostavljuje kao $10y$ 25%	Pogreška 'slovo kao posebna nepoznanica' ILI Pogreška 'nekorištenje slova': traži zaključivanje algebarskog objekta	Napiši u jednostavnijem obliku: Zbroji 6 i $7y$. M13.15b SS 71
Pojednostaviti linearne algebarske izraze prikupljanjem sličnih izraza 36%	Pojednostavljuje zbroj 6 i $x+3$ kao broj 9% Pojednostavljuje kao $9x$ 9% Pojednostavljuje kao $6x+3$ 11%	Pogreška 'slovo kao posebna nepoznanica' ILI Ignoriranje slova Pogreška 'nekorištenje slova': traži zaključivanje algebarskog objekta Pogreška 'nekorištenje slova'	Napiši u najjednostavnijem obliku: Zbroji 6 i $x+3$. M13.15a SS 73
Uvrštavati brojeve u algebarsku formulu (koristeći kalkulator) 12%	Računa kvadrat kao dvostruko i potom množi s 5 4% Računa $(5t)^2$ 17%	Pogreška u zapisu indeksa Pogreška u redoslijedu izvođenja operacija	Dana je formula $d = 5t^2$ opisuje. Pronađi d kada je $t = 3$. M13.6 SS 82

Tumačiti i rabiti algebarsku funkciju stroja (dijagram toka) 56%	Za inverznu funkciju pretvaranja temperaturnih mjernih jedinica, zamjenjuje operacije, ali ne i redoslijed 5%	Pogreška u redoslijedu izvođenja operacija	Metoda za približnu pretvorbu iz Celzijevih stupnjeva u Fahrenheite je $C \times 2 + 30 = F$. Pretvori 50 $°F$ u $°C$. M13.25b SS 68
	Ne koristi inverzne funkcije (rad unaprijed) 7%	Složenost dva koraka: rad unatrag	

MJERENJE **Opis** **(vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**
Prepoznati i rabiti sumu kutova u točki (koristeći kalkulator) 26%	Računa okretanje kazaljke za minute umjesto kazaljke za sate 41%	Složenost zadatka s dva koraka	Za koliko se stupnjeva kazaljka koja pokazuje sate okrene na satu? CALC M13.7 SS 77
Pretvarati kilometre u metre (koristeći kalkulator) 28%	Pretvara 0.34 km u $3.4, 34$ ili 3400 m 36%	Pogrešno razumijevanje $10, 100$ ili 10 000 metara u kilometrima	Zvuk putuje 0.34 km u jednoj sekundi. Koliko metara zvuk prijeđe u jednoj sekundi? CALC M13.5 SS 76

Pretvarati mjeru površine iz kvadratnih milimetara u kvadratne metre (koristeći kalkulator) 3%	Pretvara koristeći točan linearni omjer 1000 : 1 12% Radi druge pogreške s decimalnim mjestima 31%	Složenost zadatka s dva koraka Složenost zadatka s dva koraka	Dimenzije papira su 210 mm sa 297 mm. Koja je površina papira u kvadratnim metrima (m^2)? CALC M13.10 SS 92
Razumjeti i koristiti formulu za površinu pravokutnika 46%	Izračunava opseg umjesto površine za pronalazak nepoznatih dimenzija 32%	Zbunjenost oko pojmova površina/opseg	Dimenzije prikazanih pravokutnika su 12 sa 5 i 10 sa __. Ova dva pravokutnika imaju jednake površine. Koliko iznosi nepoznata dimenzija drugog pravokutnika? M13.29 SS 70
Izračunati površinu složenog oblika napravljenog od kvadara 10%	Računa volumen umjesto površinu 19%	Zbunjenost oko pojmova površina/volumen	Prikazani križ sastavljen je od 5 kvadara. Kolika je ukupna površina križa? M13.20 SS 84

OBLIK I PROSTOR **Opis (vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**

Prepoznati os simetrije 37%	Neuspješno prepoznaje dijagonalnu os simetrije 39%	Složenost zadatka s više koraka I Prototip vertikalne osi simetrije	Osjenčaj još jedno područje tako da slika nema osi simetrije. M13.35 SS 74
OBRADA PODATAKA Opis (vještina)	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak MaLT referenca Skala bodovanja**
Razumjeti i upotrijebiti srednju vrijednost diskretnih podataka: pronađi ukupnu vrijednost od srednje vrijednosti (koristeći kalkulator) 58%	Odabire operacije dijeljenja umjesto množenja 9%	Strukturna složenost: rad unatrag	U tri bacanja srednja udaljenost je 40.2 m. Kolika je ukupna udaljenost od sva tri bacanja? CALC M13.9 SS 68
Razumjeti da različiti rezultati mogu biti posljedica ponavljanja eksperimenta 61%	Odabire $GPGPGP$ kao najvjerojatniji ishod za bacanje novčića pet puta, gdje je G oznaka za ishod 'glava', a P oznaka za ishod 'pismo' 17% Odabire $PGGPG$ kao najvjerojatniji ishod 12%	Pogrešno razumijevanje prikaza Pogrešno razumijevanje prikaza	Novčić se bacao pet puta. Koji niz je najvjerojatniji ishod ili su svi jednako vjerojatni? M13.26 SS 67

3.4 14−godišnjaci

BROJ **Opis** **(vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**
Redati decimalne brojeve s tri decimalna mjesta 81%	Odabire najveći decimalni broj prema decimalnoj znamenci, a ne prema decimalnom mjestu (decimali) 9%	Pogreška ignoriranja decimalne točke	Zaokruži decimalni broj s najvećom vrijednošću: $0.063, 0.80, 0.21,$ $0.078.$ CALC M14.4 SS 62
	Odabire najveći decimalni broj kao onaj koji ima najmanju decimalnu znamenku 7%	Pogreška 'najmanje je najveće'	
Razumjeti ekvivalenciju između razlomka i decimalnog broja 53%	Pretvara ${}^{2}/_{100}$ u 0.2 ili 2 12%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti	${}^{2}/_{100}$ u decimalnom zapisu je: ___. M14.23 SS 71
Zbrajati decimalne brojeve na dva decimalna mjesta 72%	$0.6 + 0.73 =$ *0.79* ili *0.079* 13%	Pogrešno razumijevanje mjesne vrijednosti: decimalni dio kao prirodan broj s 0	$0.6 + 0.73 =$ ___. M14.22 SS 65
Zbrajati razlomke svodeći ih na zajednički nazivnik 31%	Zbraja brojnike i nazivnike 27%	Razlomci shvaćeni kao dva odvojena objekta: brojnik i nazivnik	${}^{1}/_{4} + {}^{3}/_{8} =$ ___. M14.35 SS 77

Rješavati problem pretvarajući razlomak u postotak (koristeći kalkulator) 38%	Ignorira znak %: $^{20}/_{80}$ je 20 31% Računa postotak prodanog točno ($^{60}/_{80} = 75\%$), ali izostavlja jedan od uvjeta u problemu 6%	Pogrešno razumijevanje postotka: ignoriranje oznake Složenost zadatka s dva koraka	Na početku je bilo 80 knjiga, a zatim je prodano 60 knjiga. Koliki postotak knjiga nije prodan? CALC M14.6 SS 75
Rješavati tekstualni problem uključujući postotne udjele neke količine (koristeći kalkulator) 49%	Računa nove ukupne količine (275) umjesto postotka povećanja 24% Ignorira znak %: 10% od 250 je 10 8%	Očekivanje dva dijela u problemu s riječima Pogrešno razumijevanje postotka: ignoriranje oznake	Kartonska kutija soka od naranče sadži 250 ml, a nova kutija 10% više. Koliko dodatnog soka ima u novoj kutiji? CALC M14.2 SS 72
Rješavati tekstualni problem uključujući postotne udjele količine (koristeći kalkulator) 42%	Ignorira znaka %: računanje nove cijene nakon sniženja od 5% što je za pet manje od originalne cijene 19%	Pogrešno razumijevanje postotka: ignoriranje oznake	Cijena knjige je £25. Snižena je za 5%. Kolika je prodajna cijena knjige? CALC M14.10 SS 74

Rješavati tekstualni problem uključujući postotne udjele količine (koristeći kalkulator) 15%	Računa omjer od dva dijela umjesto da identificira jedinice 17% Identificiranje točnog razlomka, ali netočna pretvorba u postotak 3%	Pogrešno identificiranje jedinice predlažući omjer – krivo shvaćanje razlomaka Složenost zadatka s više koraka	24 učenika putuje autobusom, a preostalih 6 ne. Koji postotak razreda ne putuje autobusom? M14.31 SS 83
Pretvarati razlomak u postotak (koristeći kalkulator) 24%	Računa 24 od 500 kao $500 \div 24$ 11%	Pogrešno razumijevanje da postotak označava dijeljenje	24 od 500 ljudi ne voli čokoladice. Koliko posto ljudi (ne)voli čokoladice? CALC M14.8 SS 79
Dijeliti pozitivne i negativne cijele brojeve 44%	$(-24) \div (+6) =$ *4* 12% $(-24) \div (+6) =$ *18* ili *-18* 7%	Ignoriranje negativnog predznaka Znak za dijeljenje čita kao oduzimanje	$(-24) \div (+6) =$ ___. M14.18a SS 73
Oduzimati pozitivne i negativne cijele brojeve 35%	$(-6) - (+3) =$ *-3* 27% ILI $(-6) - (+3) =$ *3* 7%	Cijeli brojevi zamišljeni kao dva odvojena objekta: predznak i broj	$(-6) - (+3) =$ ___. M14.18b SS 76

Zapisati algebarski izraz za problemsku situaciju 85%	Bira $20-n$ radije nego $n-20$ 9%	Pogrešno shvaćanje komutativnosti oduzimanja	Brat i sestra zajedno imaju 20 godina. Brat je star n godina. Koliko godina ima sestra? M14.21 SS 71
Koristiti slova za označavanje nepoznanica u problemu 58%	Piše jednadžbe umjesto izraza 9% Piše $n+20$ za $20n$ 8%	Pogrešno razumijevanje procijenjenih slova Aditivna prednost u tekstualnim problemima	Paket ima N ravnala, svaki košta 20 penija. Napiši izraz za ukupnu cijenu paketa. M14.27 SS 69
Generirati članove niza brojeva 65%	Za šesti član dodaje 6 zadnjoj zadanoj vrijednosti (trećoj) 10% Koristi dvostruki zadnji član za aditivni niz 9%	Neprepoznavanje strukturiranja Pogrešno razumijevanje generalizacije: stvaranje modela uzorka samo na zadnjem članu	Uzorak čačkalica prikazuje kvadrate. Ispuni tablicu: Kvadrati: $1, 2, 3, \ldots, 6$. Čačkalice: $4, 7, 10, \ldots, \_\_$. M14.20a SS 67
Opisati opći član strukturiranog niza brojeva 43%	Odabire algebarski izraz za iterativno strukturiranje 31% Odabire algebarski izraz za prvi član 14%	Aditivna pogreška zasnovana na strukturiranju s jednim korakom ILI Pogreška iterativnog strukturiranja Pogrešno razumijevanje generalizacije	Izvedi formulu za $n-$ti član kvadrata: $4n, 3n+1, 3+n, n+7$. M14.20b SS 74

Pojednostaviti linearni algebarski izraz prikupljajući slične članove 60%	$3 + 6y + 1 + 5y =$ *16y* 7%	Pogreška nekorištenja slova: traženje zatvaranja algebarskog objekta	Napiši $3 + 6y + 1 + 5y$ u najjednostavnijem obliku. M14.34a SS 69
Identificirati linearnu funkciju iz grafa oblika $y = mx + c$ 20%	Odabire $V = T + 2$ za $V = T - 2$ 30% Odabire $V = 2T + 1$ za $V = T - 2$ 11%	Uzima odsječak na osi za c Zabuna oko izostavljanja koeficijenta smjera	Prikazan je graf. Zaokruži točnu formulu. M14.36 SS 81

MJERENJE **Opis (vještina)**	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak** **MaLT referenca** **Skala bodovanja**
Računati opseg pravokutnika (koristeći kalkulator) 68%	Računa površinu 14% Zbraja samo vidljive duljine stranica 12%	Zbunjenost oko pojmova opseg/površina Zbunjenost u vezi tekstualnih problema	Promatramo ragbi teren. Prikazane su duljina i širina ragbi terena. Sudac je trčao oko prostora za bacanje. Izračunaj ukupnu udaljenost. CALC M14.1 SS 67

Procijeniti nepreciznost mjerenja i shvatiti najbližu mjeru 8%	Ignorira najbližu mjeru 36%	Složenost zadatka s dva koraka	Mjere pravokutne trake su 100 mm duljine i 6 mm širine, najbliže u mm. Koja je najmanja moguća površina te trake? CALC M14.13 SS 88
OBLIK I PROSTOR Opis (vještina)	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak MaLT referenca Skala bodovanja**
Rješavati problem koristeći svojstva kuta presjecajućih i paralelnih pravaca 28%	Piše $180 - x + y$ za $180 - x - y$ 30%	Pogreška zagrade ili redoslijeda izvođenja računskih operacija	Paralelni pravci koje siječe transverzala -3 daju kutove x, y, z. Zaokruži izraz koji izražava z pomoću x i y. M14.30 SS 78
OBRADA PODATAKA Opis (vještina)	**Opis pogreške**	**Dijagnoza pogreške**	**Zadatak MaLT referenca Skala bodovanja**

Razumjeti i koristiti srednju vrijednost diskretnih podataka: pronaći ukupnu vrijednost iz srednje vrijednosti (koristeći kalkulator) 80%	Odabire dijeljenje umjesto množenja 7%	Strukturna složenost: rad unatrag	Prosječan broj golova u 20 utakmica bio je 4 gola po utakmici. Koliko je ukupan golova bilo u 20 utakmica? CALC M14.3 SS 63
Rješavati problem koristeći srednju vrijednost i raspon skupa seta diskretnih podataka 14%	Koristi samo jedan od uvjeta u problemu 40%	Složenost zadatka s više koraka	Dano je pet karata: $\_, 6, 7, 8, \_$. Srednja vrijednost je 7. Raspon je 8. Napiši preostala dva broja. M14.26 SS 83
Tumačiti dijagram učestalosti (stupčani grafikon) 67%	Interpretira uvjet '3 ili više' kao 3 ILI više od 3 18%	Pogreška graničnog uvjeta ILI Složenost zadataka s dva koraka ILI Problem čitanja	Stupčani grafikon prikazuje broj kućnih ljubimaca koje posjeduje svaki učenik. Koliko učenika posjeduje 3 ili više kućnih ljubimaca? M14.14 SS 67
Izdvajati i rabiti informacije iz tablice za rješavanje problema (koristeći kalkulator) 53%	Ignorira jedan od uvjeta u problemu 24%	Složenost zadatka s dva koraka	Prikazana je tablica cijena. Koliko košta najjeftinija pizza? CALC M14.7 SS 71

Izdvajati i rabiti informacije iz tablice za rješavanje problema u kontekstu vremena 40%	Zabuna u vremenu dolaska i odlaska u rasporedu 33%	Složenost zadatka s više koraka	Prikazana je ruta vlaka i vremenski raspored dolaska i odlaska: vlak napušta A u .... Koliko dugo traje putovanje do C? $\_\_h\_\_min$ M14.24b SS 74
Odrediti vjerojatnosti koristeći metode zasnovane na jednakovjerojatnim rezultatima 34%	Interpretira veći od nekog broja na način da se uključi taj broj 12%	Pogreška graničnog uvjeta ILI Složenost zadatka s dva koraka	Promatramo dva zvrka i zbroj njihovih rezultata. Prikazana je tablica s rezultatima: .... Vjerojatnost da je ukupan rezultat veći od ___ jednaka je $^{10}/_{16}$. M14.29b SS 76
Demonstrirati osnovno razumijevanje korelacija 37%	Identificira negativne korelacije kao da nema korelacije 13%	Dvojaka intuicija: podaci su u korelaciji ili nisu ILI Složenost dva koraka	Prikazna su dva raspršena dijagrama. Odaberi točnu tvrdnju. M14.32b SS 75
Koristiti koordinate u prvom kvadrantu 85%	Zamjenjuje koordinate 9%	Nedostatak znanja o usvojenim pravilima	Prikazan je graf i na njemu točka P. Koordinate točke P su ______. M14.19 SS 60

4 Predznanje budućih nastavnika matematike

U prethodnim poglavljima opisane su pogreške koje djeca čine, te što pogrešno shvaćaju u okviru matematičkog kurikuluma. Znanje o tim pogreškama korisno je za poboljšanje pedagoških vještina nastavnika, ali i za promjenu dječje koncepcije onoga u čemu griješe. U ovom poglavlju razmatra se znanje matematike samog nastavnika, kakve pogreške oni rade, te pogreške i kriva shvaćanja kod učenika prouzrokovane nastavničkim pogreškama.

Ustanovilo se da budući učitelji osnovnoškolskog obrazovanja često rade iste pogreške koje rade i djeca, što nije iznenađujuće budući da učitelji nižih razreda moraju imati širu osnovu znanja i ne treba očekivati da budu stručnjaci za svako područje kurikuluma. Nastavnici u osnovnim školama, kao i pripravnici, ponekad pate i od manjka samopouzdanja u svoje matematičko znanje i zbog toga vrlo rijetko podnose izvješća o problemima s matematikom.

Iznenađujuće je da i srednjoškolski nastavnici matematike također mogu imati iste zablude kao i njihovi učenici. Za nastavnike u srednjoškolskom obrazovanju suočavanje sa slabostima svog vlastitog znanja predstavlja izazov budući da nije uobičajeno da stručnjak ustanovi da su njegove vlastite konstrukcije pogrešne ili preopćenite. Studenti, koji žele postati nastavnici matematike, u početnom osposobljavanju obično dolaze sa rekordnom prolaznošću školskih testova. Nažalost, njihovo je razumijevanje ponekad pretežno proceduralno, a posljedica toga je tjeskoba koju pripravnici mogu imati ako se nađu u situaciji nedovoljnog znanja kada ih djeca pitaju 'Zašto?' – *"trik"* pitanje u učionici (Zašto je pravokutnik također paralelogram? Zašto minus puta minus daje plus?). Ovdje je potrebno relacijsko i konceptualno znanje nasuprot njihovom proceduralnom ili instrumentalnom znanju. Dobro objašnjenje zahtijeva povezivanje matematike, modela i primjera koji služe kao potpora. Zaista, istraživanja su pokazala da su najefikasniji nastavnici matematike *povezničari* - oni rade poveznice po cijelom području predmeta, i mogu koristiti mnoštvo primjera i modela u razgovoru (diskusiji) sa djecom. To je ključno i smatra se da je upravo to potporanj konstruktivnijeg, povezanijeg i dijaloškog podučavanja.

Pri odabiru kandidata početnički edukacijski tečajevi nastavnika obično nabrzinu "bace pogled" na podnositelja zamolbe i njegovo znanje matematike, te tijekom edukacije nastoje ojačati njegovo znanje zajedno s razvojem pedagoškog sadržaja budući da se misli da je sigurno matematičko znanje povezano s uspješnim predavanjem u učionici. Postoji još jedan problem, a to je da nastavnici mogu neke greške i kriva shvaćanja prenijeti na djecu ako ih na vrijeme ne uoče i isprave.

U ovom poglavlju promatrat ćemo pogreške i zablude studenata, budućih nastavnika matematike, u nekoliko različitih matematičkih područja. Pretpostavlja se da budući nastavnik može mnogo saznati kroz ispitivanje odakle pogreške dolaze, odnosno kako su nastale. Također, pokazat ćemo kako studenti mogu koristiti personaliziranu dijagnostičku mapu postignuća i profil greške kao potporu razvoju svojih vlastitih matematičkih znanja.

4.1 Sadržaj znanja predmeta i sadržaj pedagoškog znanja

Poznavanje sadržaja predmeta mnogo je više od znanja činjenica i algoritama. Znanje predmeta matematike zahtijeva poznavanje činjenica, algoritama, te samu koncepciju, tj. suštinsku strukturu i legitimnost određenih pravila predmeta. Možemo znati *kako* se zbrajaju razlomci, ali znanje *zašto* su rutinski postupci legitimni ono je što u konačnici daje snagu procesu podučavanja i odvaja obrazovanje od samog "treninga". Različiti načini obrazloženja u matematici zapravo čine suštinski dio kreiranja uputa tako da postanu uvjerljivi, što je bit efikasne pedagogije. Razmatrajući pitanje 'Zašto je to tako?' kod djece može potaknuti porast njihovog znanja, dok pitanje 'Kako mogu na najbolji način predstaviti i dokazati?' može biti pokretač razvoja nastavnikovog pedagoškog znanja.

Pretvorba znanja o predmetu u pedagoški sadržaj znanja značajan je fokus u obrazovanju nastavnika, te se predlaže da (budući) nastavnici, koji propituju svoje vlastite matematičke pogreške, zablude i strategije da bi poboljšali svoje vlastito znanje predmeta, stvore istovremeno priliku za razvoj bogatog pedagoškog znanja. Nije cilj prikazati poboljšavajuće strategije slabog znanja nego istražiti vlastito znanje. To omogućava proces podučavanja promišljanjem.

U podučavanju se iznose vlastite spoznaje da bi sadržaj bio razumljiv drugima. U pronalaženju odgovarajućeg načina podučavanja istražuje se vlastito razumijevanje tako što se odabiru primjeri, konteksti i modeli koji najbolje predstavljaju promatrane ideje, ali koji će također biti korisni u stvaranju ostalih matematičkih ideja.

4.2 Baza istraživanja: budući nastavnici osnovnoškolskog obrazovanja

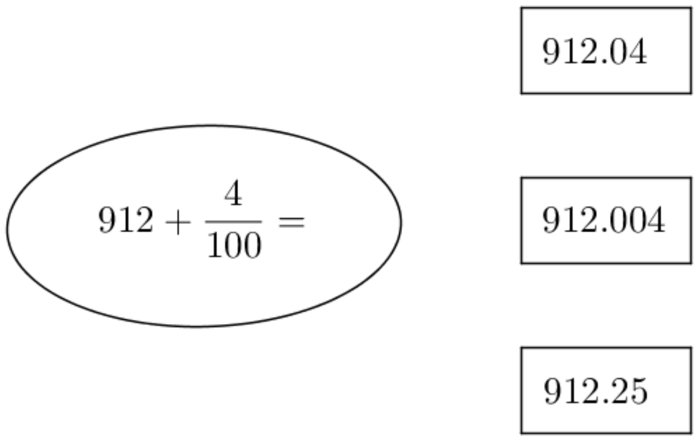
Podaci o pogreškama koje se ovdje navode potječu iz istraživanja velikog uzorka budućih nastavnika matrmatike na jednom sveučilištu u Australiji. U istraživanju su sudjelovali studenti prve godine preddiplomskih studija i studenti diplomskih studija koji čine reprezentativni uzorak budućih nastavnika matematike u Australiji. Za manju skupinu studenata u Engleskoj na drugoj godini preddiplomskog studija utvrđeni su slični rezultati.

Za testiranje nastavnika osnovnoškolskog obrazovanja pripremljena su pitanja višestrukog izbora iz sljedećih područja matematike: broj, mjerenje, prostor i oblik, vjerojatnost, algebra, razumijevanje i dokazivanje.

4.2.1 Pogreške nastavnika osnovne škole u broju: vrijednost decimalnog mjesta

Temeljni koncept broja je mjesna vrijednost, a od nastavnika se očekuje jako dobro razumijevanje tog koncepta. Proširenje pojma broja od prirodnih brojeva s 0 na decimalne brojeve (tj. decimalne razlomke) značajan je korak u razvoju matematike, što se može vidjeti na povijesnoj razini, a također se odražava i na osobnoj razini učenika. Po pitanju decimalnih razlomaka, mjesna vrijednost prirodnih brojeva s 0 (stotice, desetice, jedinice) proširuje se tako da uključuju razlomljene dijelove jedne jedinice (desetinke, stotinke, tisućinke itd.). *Decimalna točka* postaje važna oznaka za određivanje mjesne vrijednosti: lijevo od decimalne točke nalaze se dekadske jedinice, a desno od decimalne točke su decimalne jedinice, tj. decimale.

Ustanovljeno je da 24% studenata u istraživanju ne može točno napisati $912 + {}^4/_{100}$ u decimalnom obliku (*Slika* 6). Najčešća pogreška u odgovorima koju je napravilo 12% nastavnika bila je 912.004, a sljedeća pogreška koju je napravilo 6% nastavnika bila je 912.25. Budući da su ovo vrlo zanimljivi odgovori, postavlja se pitanje koje zablude su uzrok ovih pogrešaka.

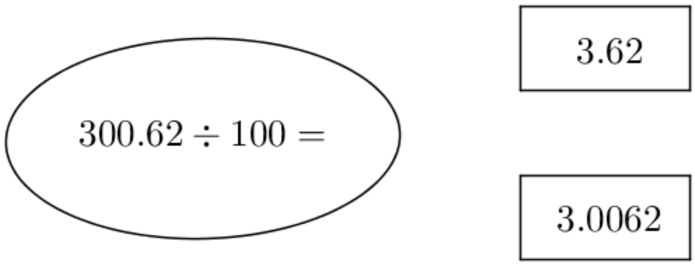


Slika 6: Razlomak u decimalnom zapisu

Odgovor 912.004 može ukazivati na to da su neki budući nastavnici pogrešno shvatili da mjesne vrijednosti *jedinica* dolaze prije desetinki i stotinki. Ako je to tako, onda se koncept decimalne jedinice može istražiti kroz diskusiju tijekom nastavnikovog obrazovanja. Također, ova pogreška može biti posljedica učenja napamet da je broja nula u nazivniku jednak broju nula u decimalnom zapisu. Postavlja se pitanje kako je konstruirano ovo pojednostavljivanje, je li generalizirano iz množenja brojem 10.

Sljedeća zanimljiva pogreška je 912.25. Potrebno je razmotriti odakle ona potječe. Moguće je da su ${}^4/_{100}$ (ispravno) skraćene u razlomak kao ${}^1/_{25}$, a nazivnik 25 (neispravno) postaje decimalni dio 0.25. Možda je ovdje jedinica razlomka upotrijebljena kao posrednički razlomak za konstrukciju decimalnog razlomka. Strategija 'jedinica nazivnika kao decimalni dio' djeluje kod deset stotinki gdje je pravilno pretvorena u jedinice razlomka jedna desetina, a potom se decimalno pravilno piše kao 0.1(0). Zašto onda ova strategija ne funkcionira za četiri stotinke? Funkcionira li za bilo koji drugi broj stotinki? To se uspješno može istražiti kroz diskusiju fokusiranu na dokazivanje. Jedinice razlomka bile su povijesno značajne i obično predstavljaju prvo iskustvo učenika s vrijednostima manjima od jedan. Zabluda 'decimala kao jedinica nazivnika' pronađena je također kod 9% studenata u istraživanju koji su rekli da je 0.3 jednako $^1/_3$ i 8% onih koji kažu da je 0.125 isto što i $^1/_{125}$.

Druge koncepcije decimalnih brojeva i uloga decimalne točke uočene su kroz odgovore u kojima su studenti provodili računske operacije decimalnim brojevima. Utvrđeno je da 31% studenata u istraživanju nije moglo točno izračunati $300.62 \div 100$ (*Slika* 7).



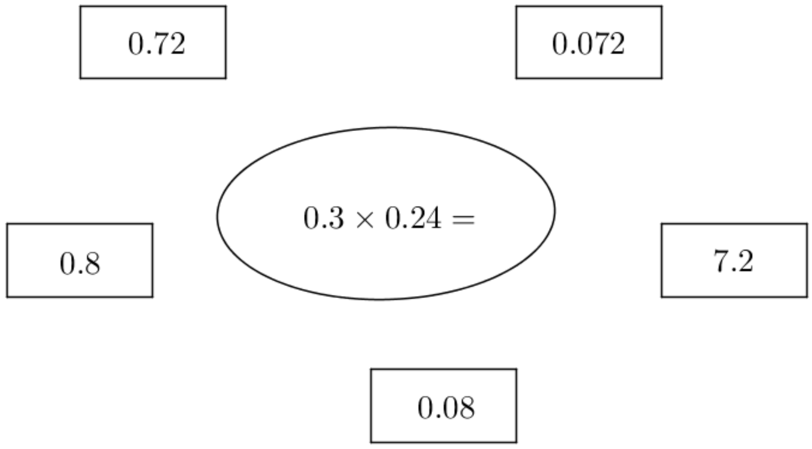
Slika 7: Dijeljenje decimalnih brojeva sa 100

Najčešća pogreška koju je napravilo 22% ispitanika bila je 3.62, gdje su cjelobrojni i decimalni dijelovi promatrani odvojeno umjesto kao dijelovi jednog broja. Jedan od načina, odnosno strategija odvojenog promatranja, može biti odvajanje cjelobrojnog i decimalnog dijela broja i raditi samo sa cjelobrojnim dijelom ($300 \div 100$), a potom ponovno spojiti dijelove (3 i 0.62). Druga strategija odvajanja može biti odvojiti dijelove i tretirati oboje kao cijele brojeve: 300 i 62. Postupak je tada podijeliti $300 \div 100$ i $62 \div 100$. To su usavršene strategije razdvajanja, ali su podložne pogreškama u smislu koncepcije prirode razdvojenih brojeva. Studenti mogu vjerovati da je ispravno precrtati ili poništiti isti broj nula kod djeljenika i djelitelja. Rasprave o takvim postupcima mogu biti vrlo korisne. Slično, diskusije o tome kako pravilno koristiti strategiju odvajanja korisna je za buduće nastavnike u utvrđivanju njihovog vlastitog znanja.

Ustanovljeno je da 24% ispitanika nije moglo dati točan odgovor na pitanje koliko je 2304.3×10. Najčešća pogreška koju je napravilo 11% ispitanika bila je 23040.3, gdje je mogla biti korištena strategija odvajanja ili metoda 'dodaj nulu' jednom ili oba dijela.

Strategija odvajanja, kao što se može primijetiti, podložna je pogreškama, ali je značajna za uočavanje pogrešaka. U tim slučajevima neispravna uporaba strategije odvajanja ukazuje na činjenicu da učenik nije proširio znanje o konceptu mjesne vrijednosti na razlomke i da ne koristi temeljene odnose susjednih znamenki. Koncepcija brojeva poput 2304.03 ili 300.62 kao jednog broja kod kojeg množenje ili dijeljenje sa deseticama, stoticama i tisućicama ima efekt pomicanja pozicije svih znamenki gore ili dolje temelj je za razumijevanje pisanja baze 10 (ili bilo koje druge baze).

Prilikom množenja dva decimalna broja poteškoće s mjesnim vrijednostima postaju još očitije. Činjenica da 64% ispitanika nije dalo točan odgovor na 0.3×0.24 ukazuje na različite probleme (*Slika* 8). Najčešća pogreška bila je 0.72, a napravilo ju je 41% ispitanika.



Slika 8: Množenje decimalnih brojeva

Taj odgovor može sadržavati problem u postupku *'dodaj i ponovo dodaj'* decimalne točke ili može uključivati dosljednu uporabu da su 'decimale jedinice nazivnika', gdje 0.3 predstavlja $^1/_3$, a 0.24 je $^1/_{24}$, pa je tako odgovor $^1/_{72}$ zapisan kao 0.72 (to se čak može podržati konceptom da se množenjem stvara veća vrijednost).

15% ispitanika odgovorilo je da je $0.3 \times 0.24 = 7.2$, što sugerira na pogrešku postavljanja decimalne točke, vjerojatno nakon promatranja decimalnih dijelova kao cjelobrojnih ili promatrajući da je 0.3×0.24 ekvivalentno 3×2.4 (ili 30×24), gdje su znamenke ili decimalne točke jednostavno pomaknute, ali odgovor nije promijenjen u skladu s takvim pomacima. Drugih 6% ispitanika promatralo je 0.3 kao $^1/_3$, a zatim računali $^1/_3$ od 0.24, te tako dobili odgovor 0.08 ili 0.8.

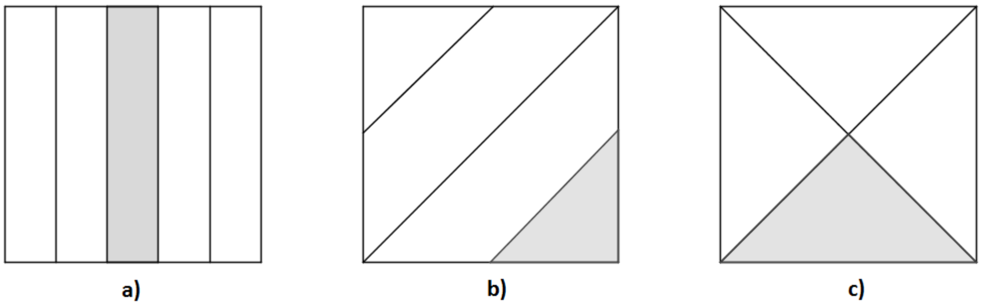
Zablude oko decimalne točke i mjesne vrijednosti glavni su uzroci dobro poznatih pogrešaka 'ignoriranja decimalne točke' (DPI) i 'najdulje je najmanje' (LiS) koje djeca rade kada su u pitanju decimalni brojevi. Djeca koja čine takve greške misle da je 0.3 manje od 0.15 zato što je 3 manje od 15 (DPI) ili da je 0.625 manje od 0.5 budući da ima duži decimalni dio (LiS). Strategije odvajanja ne uzimaju u obzir prirodu mjesnih vrijednosti razlomaka. Zbog sličnih su zabluda pogreške radili i studenti u istraživanju.

Postavlja se pitanje kakve predodžbe imaju o decimalnim brojevima. Prema prethodno opisanim pogreškama čini se da studenti koriste decimalnu točku kao oznaku refleksije za mjesnu vrijednost cjelobrojnog dijela. Zanimljivo, 8% ispitanika je broj 0.4 postavilo lijevo od nule na brojevnom pravcu, što ukazuje na koncept refleksije, ovoga puta po pitanju nule.

Što nam te greške govore o tome kako su neki studenti konstruirali svoje shvaćanje decimalnih brojeva? Računaju li proceduralno i bez razumijevanja, ili je koncept cijelih brojeva previše generaliziran na decimalne brojeve? Kako je nastala decimalna točka? O tome se još ne zna dovoljno, ali očito neki studenti previše uopćavaju korištenje prototipa u konstruiranju svog matematičkog razumijevanja o mjesnim vrijednostima decimalnih brojeva, kao i učenici.

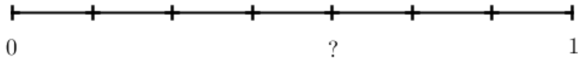
4.2.2 Nastavničke pogreške u broju: razlomci

Jedna od najtežih matematičkih tema za djecu u osnovnoškolskom i ranom srednjoškolskom obrazovanju su razlomci. Razlomci su značajan dio matematike i uključuju nekoliko važnih koncepcija. Koncepcija razlomaka kao dijela cjeline zasniva se na prepoznavanju dijelova koji moraju biti jednaki. No, 16% ispitanika odgovorilo je da je na kvadratu *b*) na *Slici* 9 osjenčana $^1/_4$ tog kvadrata iako on nije podijeljen na jednake dijelove.



Slika 9: Na kojoj slici osjenčani dio predstavlja $^1/_4$?

'Razlomak kao broj' također je važan koncept, ali 25% ispitanika nije moglo točno odrediti $^4/_7$ na brojevnom pravcu (*Slika* 10). Najčešća pogreška koju je napravilo 15% ispitanika bio je odgovor $^4/_6$ koji je posljedica brojanja unutarnjih crtica na brojevnom pravcu između 0 i 1 umjesto brojanja jednakih dijelova na koji je segment $[0, 1]$ podijeljen.



Slika 10: Određivanje razlomaka na brojevnom pravcu

Stavljanje primjera u kontekst svakodnevnih problema nužno je za shvaćanje koncepta razlomka kao procesa i razlomka kao broja. 'Imamo 3 čokoladice koje moramo ravnomjerno podijeliti na 4 osobe. Koliko će dobiti svaka osoba?' Ovaj problem zahtijeva dijeljenje manjeg broja sa većim (*Slika* 11).

3 čokoladice treba ravnomjerno podijeliti na 4 osobe.
Koliko će dobiti svaka osoba?

$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

Slika 11: Dijeljenje

Na ovo pitanje 26% ispitanika nije moglo dati točan odgovor od kojih je 15% odgovorilo da će svaka osoba dobiti $^1/_4$ od ukupne količine čokoladica. "Realistično" rješenje je crtanjem podijeliti jedno cijelo na 4 jednaka dijela i ponoviti postupak za sve 3 čokoladice, te dobiti ukupno $^{12}/_4$ koje treba razdijeliti između 4 osobe (od kojih svaka dobiva 3 komadića, odnosno $^3/_4$). Tako je problem pretvoren u dijeljenje većeg na manje. Ovdje su prvo konstruirane četvrtine i tu jedinicu razlomka dalo je kao odgovor 15% ispitanika.

Računanje s razlomcima otkriva zanimljive pogreške, te omogućava uvid u koncepcije razlomaka. Na zadatak oduzimanja kao što je $^4/_7 - ^1/_3$ netočno je odgovorilo 21% ispitanika (*Slika* 12). 9% ispitanika dalo je pogrešan odgovor $^3/_4$, a 8% ih je odgovorilo $^3/_{21}$. U prvom slučaju korištena je strategija odvajanja gdje su oduzimani brojnici i nazivnici odvojeno, dok su u drugom slučaju brojnici oduzimani, a nazivnici pomnoženi.

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{3} =$$

$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{21}$ $\frac{5}{21}$

Slika 12: Oduzimanje razlomaka

4.2.3 Nastavničke pogreške u broju: računanje

Ispitivanje računskih vještina može ukazati na probleme s određivanjem mjesne vrijednosti. Utvrđeno je da 23% ispitanika nije točno odgovorilo na zadatak oduzimanja $6701 - 1592$. Najčešća pogreška koju je napravilo 10% ispitanika bila je 5209. Ako ovi studenti koriste algoritam koji se bazira na mjesnoj vrijednosti, problem je u oduzimanju od nule. Njih 10% odgovorilo je 5201 ili 5291, što sugerira na uporabu strategije 'manja od veće znamenke' gdje se pojavljuje problem oduzimanja od nule.

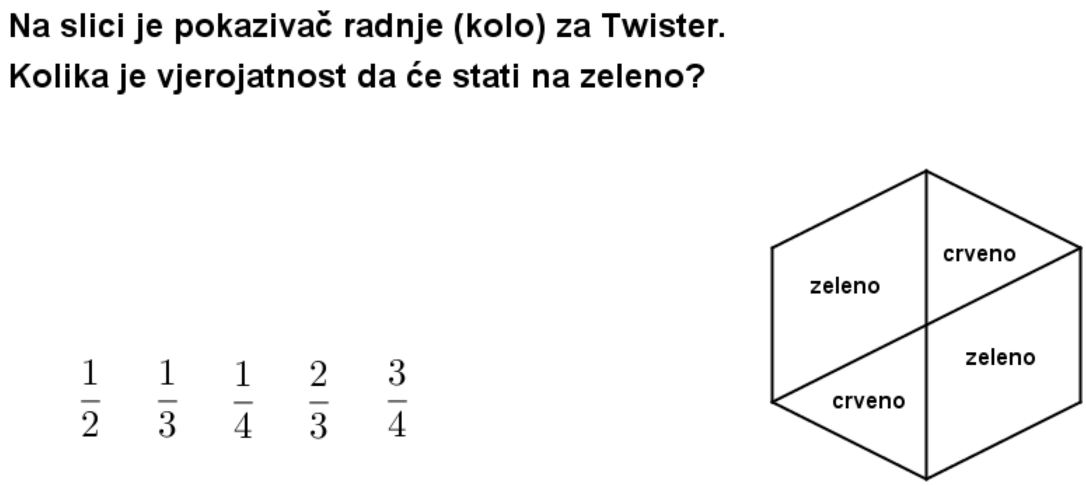
Oduzimanje decimalnih brojeva također je razotkrilo zablude po pitanju mjesne vrijednosti. Utvrđeno je da 30% ispitanika nije točno izračunalo $6.8 - 1.972$. Najčešća pogreška koju je napravilo 11% ispitanika bila je rezultat 4.972, gdje problem ponovo leži u oduzimanju od nule. 9% ispitanika odgovorilo je 5.172 koristeći strategiju 'manja znamenka od veće'. Iznenađujuće je da 8% ispitanika nije riješilo navedeni zadatak.

Nadalje, i u dijeljenju su se pojavile zablude po pitanju mjesne vrijednosti. Ustanovljeno je da 36% ispitanika nije točno odgovorilo na pitanje $4949 \div 7$. Njih 30% odgovorilo je da je rezultat dijeljenja jednak 77.

Konačno, može se zaključiti da je mnogim budućim nastavnicima problematična *nula kao nositelj mjesta.*

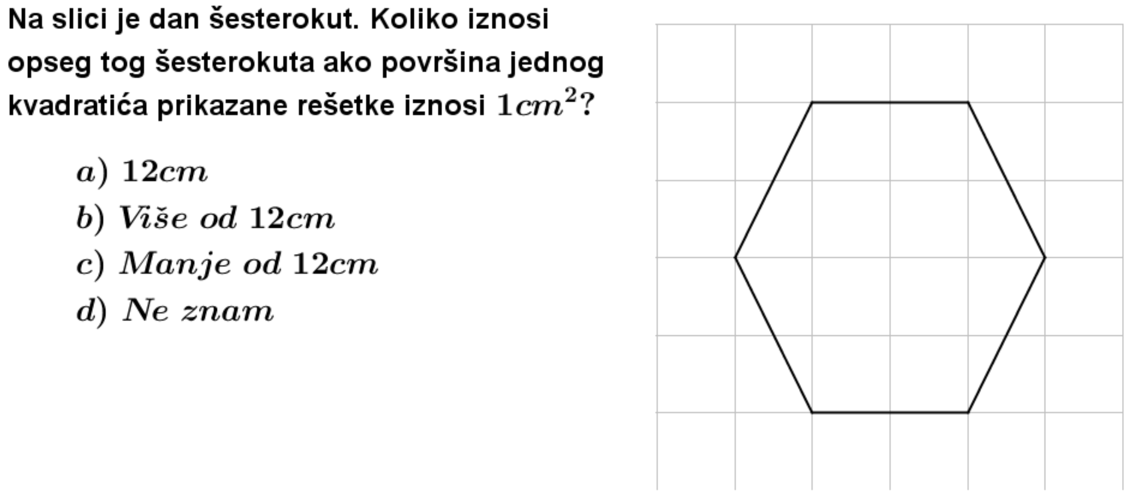
4.2.4 Nastavničke pogreške u vjerojatnosti i mjerenju

Pitanje iz područja vjerojatnosti pokazalo je da studenti rade iste pogreške kao i učenici. To je pitanje otkrilo jednako vjerojatnu intuiciju, odnosno ukoliko postoje dva ishoda (u ovom slučaju crveno ili zeleno) pretpostavlja se da se oni mogu dogoditi s jednakom vjerojatnošću. 31% ispitanika nije točno odgovorilo na pitanje, a njih 17% napravilo je pogrešku jednake vjerojatnosti (*Slika* 13).



Slika 13: Intuicije vjerojatnosti

Iz područja Mjerenje otkrivena je temeljna zabluda povezana s mjerenjem dužina. Gotovo dvije trećine ispitanika netočno je odgovorilo na pitanje (*Slika* 14).



Slika 14: Duljina dijagonalnih ili kosih dužina

Odgovori ispitanika na prethodno navedeni zadatak sugeriraju na zabludu koju su stekli o duljini dužina povučenih između crta rešetke. Samo 34% ispitanika odgovorilo je točno, a 36% ih nije pravilo razliku između vodoravnih i kosih stranica šesterokuta.

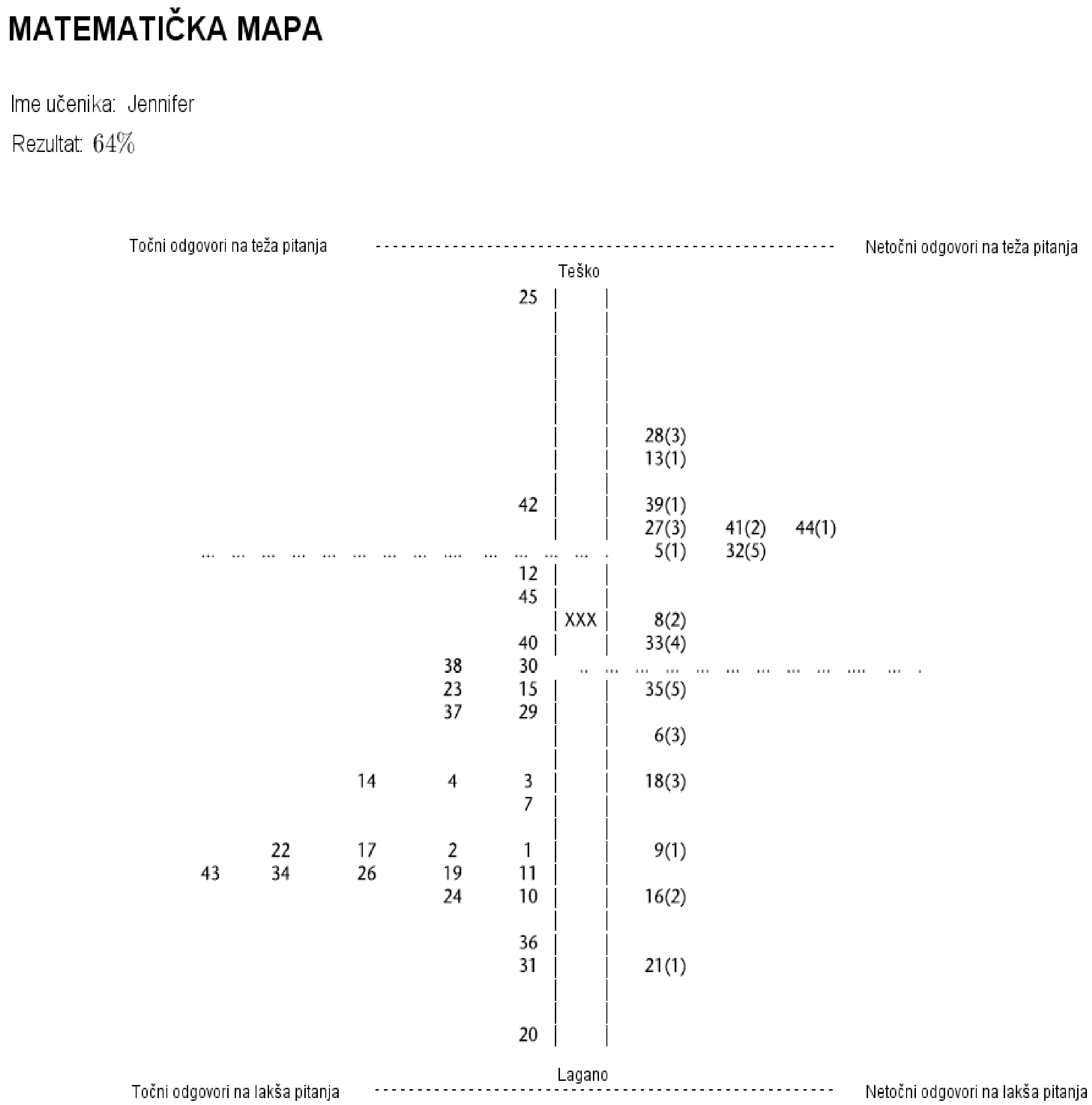
4.3 Korištenje vlastitih pogrešaka: osobna matematička mapa

Istraživanje vlastitih pogrešaka može pomoći razvoju nastavnika dok aktivno proširuju svoje osnovno znanje. Prvo, moraju znati u kojim su područjima matematičkog kurikuluma "jaki", a u kojima "slabi". Drugo, trebaju znati koje vrste pogrešaka rade.

Osim činjenice jesu li ili nisu dobro odgovorili na određenom testu, poželjno je da nastavnici mogu procijeniti težinu pitanja, što su očekivali da će točno riješiti, koje posebne pogreške su radili, te na čemu moraju poraditi, odnosno proširiti svoje znanje.

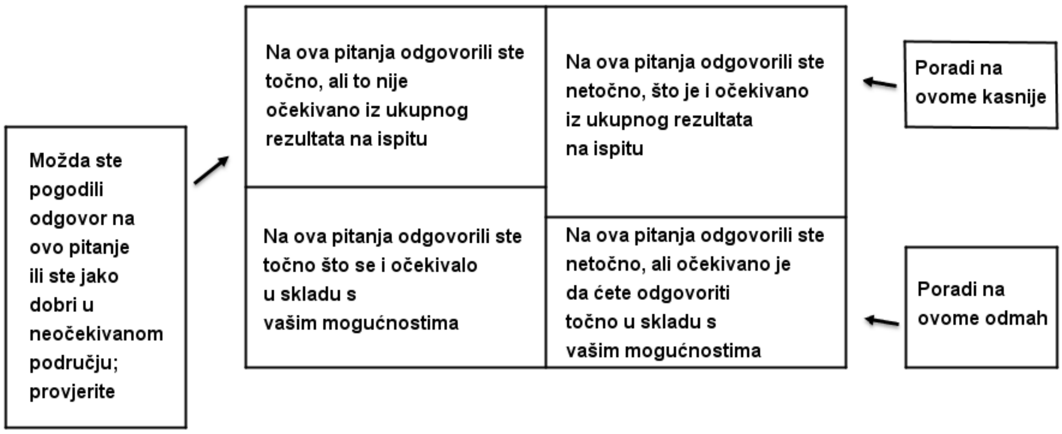
Jennifer, studentica iz istraživanja, je polagala test koji se sastojao od 45 zadataka višestrukog izbora. Točno je odgovorila je na 29 pitanja, a netočno na 16, što je dovelo do konačnog rezultata od 64%. Međutim, takav rezultat daje malo detalja o njezinom stvarnom postignuću. Matematička mapa daje detalje o njezinim odgovorima s obzirom na općenitu težinu pitanja. Na taj način ona može istražiti svoje slabe i jake strane, te koje su bile njezine pojedinačne greške.

Matematička mapa za Jennifer sadrži sva pitanja iz testa posložena okomito od lakših prema težim: pitanje 20 na dnu bilo je najlakše, a pitanje 25 na vrhu bilo je najteže (*Slika* 15). Jenniferini su odgovori poslagani vodoravno na lijevu ili desnu stranu: točni odgovori na lijevoj, a netočni na desnoj strani. Jennifer je točno odgovorila na najteže pitanje broj 25, ali na sljedeće najteže pitanje broj 28 netočno je odgovorila.



Slika 15: Osobna matematička mapa za Jennifer

No, nisu svi ispitanici sa ukupnim rezultatom 64% točno odgovorili na istih 29 pitanja. Uzimajući u obzir ukupni rezultat koji je Jennifer postigla na ispitu, moglo bi se očekivati da je točno odgovorila na 29 najlakših pitanja, ali bilo je suprotno od toga. Oznaka XXX koja se nalazi u sredini matematičke mape pokazuje koliko se, u skladu s njezinim mogućnostima, očekivalo od Jennifer (točkaste crte pokazuju granicu pogrešaka u odnosu na ono što se od nje očekivalo). Međutim, ona je teža pitanja riješila bolje od očekivanog (gornji lijevi kut mape), a nije postizala dobar rezultat na lakšim pitanjima (donji desni kut). Ovi su podaci vrlo korisni za procjenjivanje Jenniferinog znanja (*Slika* 16). Pitanja koja je Jennifer netočno odgovorila (nalaze se na cijeloj desnoj strani matematičke mape) ukazuju na specifične pogreške koje je radila.



Slika 16: Čitanje vlastite matematičke mape

Tablica 2 daje detaljan prikaz područja kurikuluma u kojima je Jennifer pokazala slabije znanje, kao i zablude koje su ustanovljene iz njezinih netočnih odgovora.

Pitanje (pogreška)	**Opis pitanja**	**Utvrđena zabluda**
8(2)	Algebra: opći pojmovi	Varijabla kao specifičan broj
33(4)	Broj: identificiranje omjera unutar nekoliko omjera	Sklonost dodavanja
35(5)	Broj: računanje površine	Zbunjenost oko pojmova površina/volumen
6(3)	Prostor: Kartezijeve koordinate	Preokretanje koordinata
9(1)	Razumijevanje: logika	Prototip trokuta (jednakostraničan)
18(3)	Mjerenje: pretvaranje grama u kilograme	$100\ g = 1\ kg$
16(2)	Broj: prikazivanje razlomaka	Nejednaki dijelovi cjeline promatrani kao jednaki
21(1)	Algebra: riječi u simbole	'Više od' podrazumijeva množenje

5 Zaključak

Matematičko obrazovanje važan je dio djetetova života. Ipak, postoje mnoge predrasude o matematici koje negativno utječu na djecu i matematičko obrazovanje u većini slučajeva počinje negativnim stavovima. Zadaća je nastavnika da razuvjere djecu i pokažu im da je matematika zaista svuda oko njih.

Uz aritmetiku, važan je dio matematike algebra kojoj se nažalost pridaje vrlo malo pažnje. Važno je da djeca uz aritmetičko razmišljanje razviju i algebarsko. Nastavnici trebaju spojiti matematičko i pedagoško znanje što podrazumijeva znanje matematike i načina na koji učenici razmišljaju, odnosno povezivanje matematike, modela i zadataka primjerenih podučavanju djece. Svako učenikovo pitanje treba shvatiti ozbiljno i dati odgovor koji će mu biti razumljiv i smislen. Važno je podučavati promišljanjem umjesto uvježbavanjem rutinskih postupaka, odnosno algoritama.

Znanje iz matematike nastavnici mogu proširiti i preispitivanjem već stečenog znanja, kako bi otkrili u čemu eventualno griješe, odnosno postoje li zablude u vlastitoj percepciji. Pri tome su korisne osobne matematičke mape koje nastavnicima pružaju korisne informacije o njihovom znanju, ono u čemu su dobri i na čemu trebaju dodatno poraditi i proširiti svoje znaje. Također, vrlo su korisne grupne diskusije u kojima studenti slušaju jedni druge i opravdavaju svoje koncepte što može rezultirati izgradnjom vlastitih stavova ili čak promjenom vlastitog mišljenja.

Literatura

[1] R. E. Reys, M. M. Lindquist, D. V. Lambdin, N. L. Smith, *Helping Children learn Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., United States, 2004.

[2] J. Ryan, J. Williams, *Children's Mathematics 4-15: learning from errors and misconceptions*, Open University Press, England, 2007.

[3] J. A. Van de Walle, K. S. Karp, J. M. Bay-Williams, *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally.-7th ed.*, Allyn & Bacon, Boston, 2010.

6 Sažetak

Učenje iz pogrešaka i pogrešnog razumijevanja. U ovome radu pažnja je usmjerena na algebarsko razmišljanje koje je iznimno važno za cjelokupno matematičko obrazovanje. Naglasak je na smisleno podučavanje matematike koje će zadovoljiti učenikove potrebe i razvijati zainteresiranost i pozitivnu sliku o matematici. Nastavnici trebaju biti upoznati sa zabludama koje učenici mogu imati u raznim područjima matematike, a koje su navedene ovome radu, te koje trebaju imati na umu tijekom svakodnevnog obrazovanja i ispraviti učenike. Osim učenika, zablude imaju nastavnici i budući nastavnici matematike koji trebaju svoje znanje testirati i proširiti u skladu s rezultatima testiranja.

7 Title and summary

Learning from errors and misconceptions. In this paper, attention is focused on algebraic thinking, which is extremely important for the overall mathematical education. The focus is on teaching that will satisfy the student's needs and develop an interest and a positive image of mathematics. It's important that teachers are informed about misconceptions that students may have in different areas of mathematics, that are given in this work and that should be kept in mind during everyday education to correct students. Also, pre-service teachers have their own misconceptions. They need to test their knowledge and expand it in accordance with the test results.

8 Životopis

Zovem se Kristina Lozina. Rođena sam 29. ožujka 1992. godine u Našicama. Ime mog oca je Željko, a majke Gordana. Imam tri godine mlađeg brata Daniela. Osnovnu školu pohađala sam u Bizovcu, u Osnovnoj školi Bratoljuba Klaića Bizovac. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja, sudjelovala sam na natjecanjima iz matematike, biologije, kemije i geografije, i na grupnom natjecanje iz ekologije na kojemu smo osvojili prvo mjesto na državnom natjecanju. S odličnim osnovnoškolskim uspjehom upisala sam I. gimnaziju Osijek u Osijeku. Nakon srednje škole upisala sam integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.