

# Van Aubelov teorem

---

**Korpak, Martina**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:684511>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Martina Korpak**

**Van Aubelov teorem**

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Martina Korpak**

**Van Aubelov teorem**

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Zdenka Kolar-Begović

Osijek, 2022.

## Sažetak

U radu se razmatra Van Aubelov teorem, poznata tvrdnja iz geometrije ravnine. Prema Van Aubelovom teoremu središta nasuprotnih kvadrata konstruiranih nad stranicama četverokuta određuju okomite i sukladne dužine. U radu su razmatrane različite vrste dokaza teorema. Navedeni su i geometrijski interpretirani specijalni slučajevi ove tvrdnje. Istražene su i neke generalizacije Van Aubelovog teorema.

## Ključne riječi

Van Aubelov teorem, kvadrat, četverokut, sukladnost

# Van Aubel's theorem

## Summary

In this paper we will consider Van Aubel's theorem, a well-known statement from plane geometry. According to Van Aubel's theorem, the line segments connecting the centers of squares constructed on the opposite sides of a quadrilateral are congruent and lie on perpendicular lines. We will present some different proofs of Van Aubel's theorem. Some special cases of this statement are geometrically presented. Some generalizations of Van Aubel's theorem are also investigated.

## Keywords

Van Aubel's theorem, square, quadrilateral, congruence

# Sadržaj

|   |    |
|---|----|
| Uvod  | i  |
| 1 Iz povijesti Van Aubelovog teorema            | 1  |
| 2 Dokazi Van Aubelovog teorema                  | 1  |
| 2.1 Dokaz pomoću sukkladnosti . . . . .         | 2  |
| 2.2 Dokaz pomoću kompleksnih brojeva . . . . .  | 8  |
| 2.3 Dokaz pomoću ortogonalnih vektora . . . . . | 10 |
| 3 Specijalni slučajevi Van Aubelovog teorema    | 12 |
| 4 Generalizacije Van Aubelovog teorema          | 14 |
| Literatura                                      | 19 |

## Uvod

U predivnom svijetu geometrije ravnine susretali smo se s raznim tvrdnjama vezanim uz geometrijske figure, njihova svojstva i odnose među njima. U ovom radu razmatrat ćemo Van Aubelov teorem. Ova poznata tvrdnja iz geometrije može se dokazati na više načina. Teorem konkretno opisuje povezanost kvadrata konstruiranih nad stranicama četverokuta. Prema Van Aubelovom teoremu ako za zadani četverokut nad svakom njegovom stranicom konstruiramo kvadrat, te promatramo dužine određene središtima nasuprotnih kvadrata, te dužine bit će jednake duljine i ležat će na okomitim pravcima. U daljnjoj razradi teme iskazat ćemo Van Aubelov teorem te ga dokazati pomoću sukladnosti trokuta, kompleksnih brojeva i ortogonalnih vektora. Navest ćemo geometrijske interpretacije ove tvrdnje te navesti neke njezine generalizacije.

# 1 Iz povijesti Van Aubelovog teorema

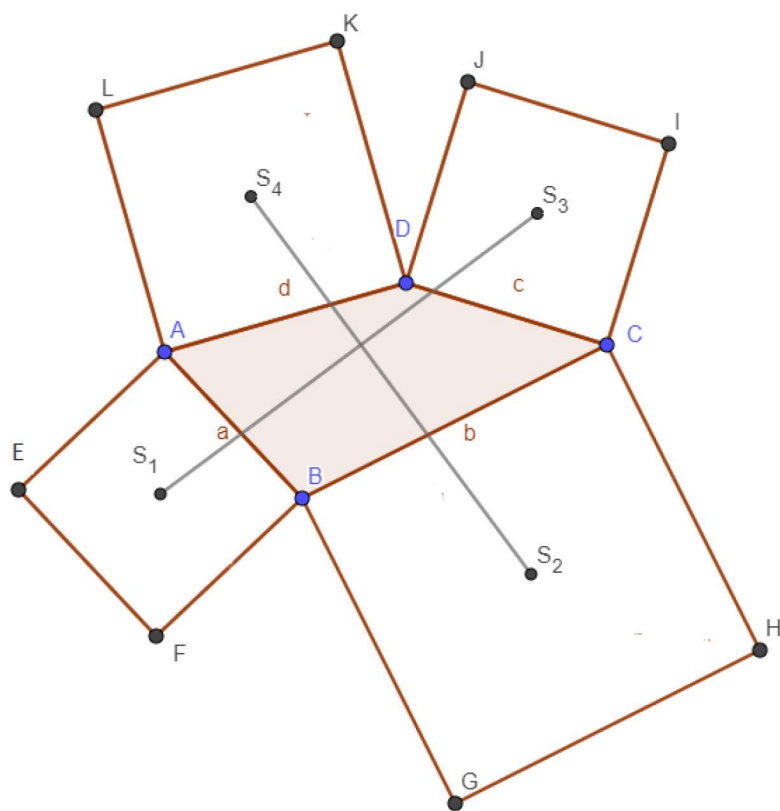
Van Aubelov teorem dobio je ime po belgijskom znanstveniku Henri van Aubelu. Henri van Aubel rođen je 20.11.1830. godine u Nizozemskoj u gradiću Maastricht. Po profesiji je bio matematičar, a radio je kao učitelj u kraljevskom dvoru u Antwerpenu. Ovaj izuzetan matematičar umro je 3.2.1906. u Antwerpenu u Belgiji. Teorem je objavljen prvi puta u listu *Nouvelles Corresp, Mathématique 4* 1878. godine. *Nouvelles Corresp, Mathématique 4* bio je akademski časopis o matematičkom obrazovanju mladih koji je izlazio tri puta godišnje, i objavljivao članke o poučavanju i učenju matematike.

## 2 Dokazi Van Aubelovog teorema

U ovom poglavlju rada razmatrat ćemo različite vrste dokaza Van Aubelovog teorema. Iskažimo najprije ovu poznatu tvrdnju.

**Teorem 1.** *Ako su nad stranicama  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  i  $\overline{DA}$  četverokuta  $ABCD$ , s vanjske strane redom, konstruirani kvadrati sa središtima  $S_1, S_2, S_3$  i  $S_4$  (slika 1), tada vrijedi*

$$\overline{S_1S_3} \perp \overline{S_2S_4} \quad i \quad |S_1S_3| = |S_2S_4|.$$



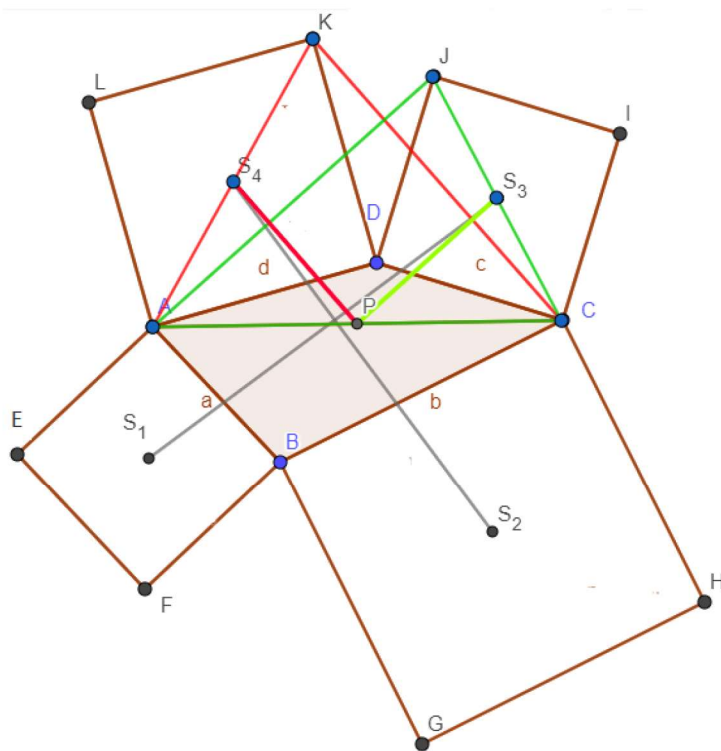
Slika 1.: Geometrijska interpretacija Van Aubelovog teorema



## 2.1 Dokaz pomoću sukladnosti

U ovom dijelu rada ćemo dokazati teorem korištenjem sukladnosti trokuta (vidi [7, Zadatak 2]).

*Dokaz.* Neka je dan četverokut  $ABCD$ . Konstruirajmo nad svakom stranicom tog četverokuta redom prema van kvadrate  $BAEF$ ,  $CBGH$ ,  $DCIJ$  i  $ADKL$  i označimo redom njihova središta sa  $S_1, S_2, S_3, S_4$ .



Slika 2.

Spojimo središta nasuprotnih kvadrata kao što je prikazano na slici 1.

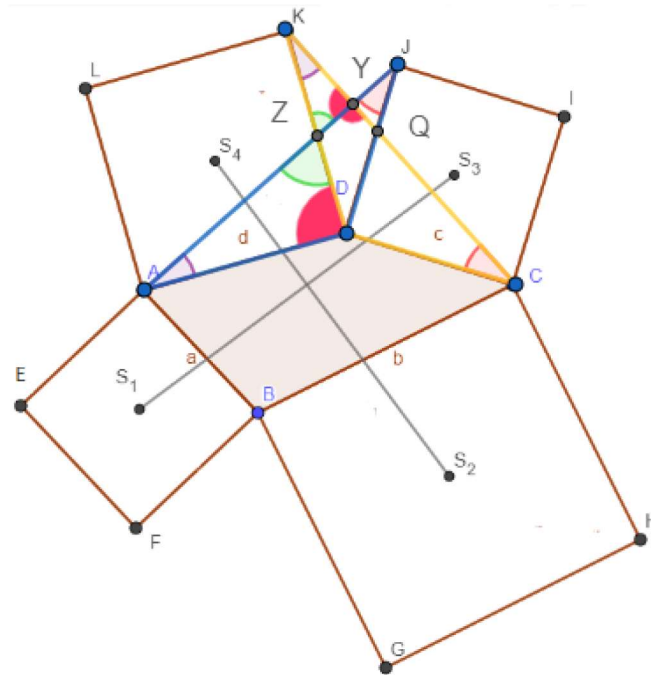
Nacrtajmo dužinu  $\overline{AC}$  i njezino polovište označimo s  $P$ . Uočimo trokut  $ACK$  (slika 2).

Kako je  $S_4$  polovište dužine  $\overline{AK}$  jer se dijagonale kvadrata međusobno raspolavljaju, možemo zaključiti da je  $\overline{S_4P}$  srednjica trokuta  $ACK$ , pa vrijedi

$$|CK| = 2|S_4P| \quad \text{i} \quad \overline{CK} \parallel \overline{S_4P}.$$

Uočimo sada trokut  $ACJ$  (slika 2). Znamo da je  $S_3$  polovište dužine  $\overline{JC}$ , pa možemo zaključiti da je  $\overline{PS_3}$  srednjica trokuta  $ACJ$  i vrijedi

$$|AJ| = 2|S_3P| \quad \text{i} \quad \overline{AJ} \parallel \overline{S_3P}.$$



Slika 3.

Sada uočimo  $\triangle KDC$  i  $\triangle ADJ$  (slika 3).

$$\begin{aligned} |AD| &= |KD| \\ |DC| &= |DJ| \\ |\angle ADJ| &= |\angle KDC| \end{aligned}$$

što implicira sljedeću sukladnost  $\triangle ADJ \cong \triangle KDC$ , odakle dobivamo

$$|AJ| = |KC|.$$

Označimo s  $Y$  sjecište dužina  $\overline{AJ}$  i  $\overline{CK}$  i sa  $Z$  sjecište dužina  $\overline{KD}$  i  $\overline{AJ}$ , te s  $Q$  sjecište dužina  $\overline{DJ}$  i  $\overline{CK}$ . Uočimo sada trokut  $KZY$ .

Vrijedi

$$\begin{aligned} |\angle YKZ| &= |\angle ZAD| \text{ (jer je } \triangle ADJ \cong \triangle KDC) \\ |\angle KZY| &= |\angle DZA| \text{ (vršni kutovi)} \\ |\angle ZYK| &= |\angle ADZ| \end{aligned}$$

odakle dobivamo

$$|\angle ZYK| = 90^\circ \text{ (jer je } \angle ADZ \text{ pravi kut).}$$

Kako vrijedi

$$|\angle ZYK| + |\angle QYZ| = 180^\circ$$

imamo

$$|\angle QYZ| = 90^\circ$$

odakle slijedi

$$\overline{AJ} \perp \overline{KC}.$$

Kako je sada  $\overline{PS}_3 \parallel \overline{AJ}$  i  $\overline{CK} \parallel \overline{S}_4\overline{P}$  i kako je  $\overline{AJ} \perp \overline{KC}$  dobivamo

$$\overline{PS}_3 \perp \overline{S}_4\overline{P}. \quad (2.1.1)$$

Kako je

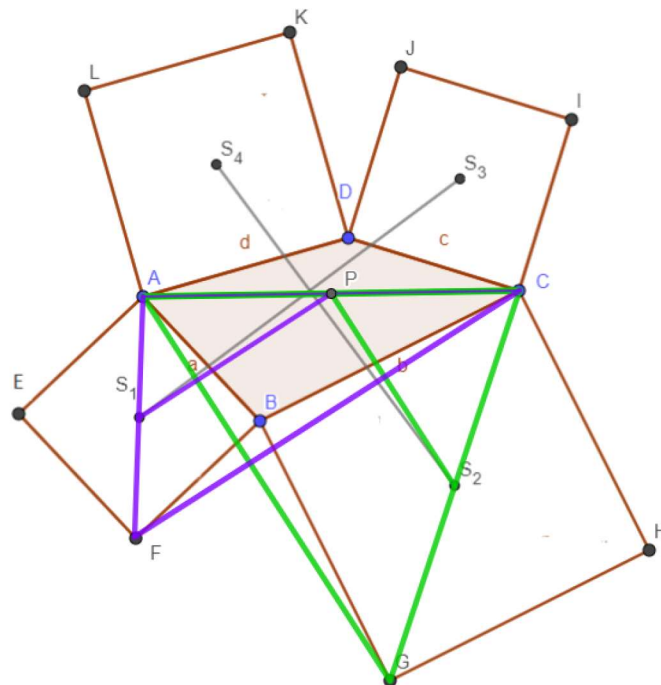
$$|AJ| = |KC| \text{ (zbog } \triangle ADJ \cong \triangle DCK)$$

dobivamo

$$|S_4P| = |S_3P|. \quad (2.1.2)$$

Uočimo trokut  $AFC$  (slika 4). Kako je  $S_1$  polovište dužine  $\overline{FA}$  to je  $\overline{S}_1\overline{P}$  srednjica trokuta  $\triangle FCA$ , pa vrijedi

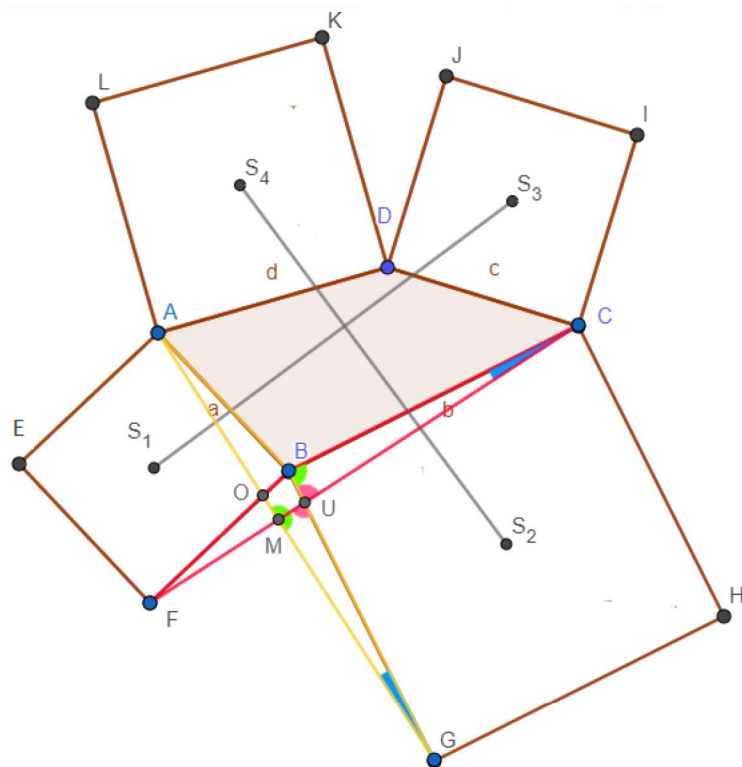
$$|FC| = 2|S_1P| \quad \text{i} \quad \overline{FC} \parallel \overline{S}_1\overline{P}.$$



Slika 4.

Sada uočimo trokut  $AGC$  (slika 4).  $S_2$  je polovište dužine  $\overline{GC}$ , pa je  $\overline{S}_2\overline{P}$  srednjica trokutu  $GCA$  iz čega imamo

$$|GA| = 2|S_2P| \quad \text{i} \quad \overline{GA} \parallel \overline{S}_2\overline{P}.$$



Slika 5.

Promatrajmo sada trokute  $\triangle AGB$  i  $\triangle FCB$  (slika 5).

$$\begin{aligned} |CB| &= |BG| \\ |AB| &= |FB| \\ |\angle GBA| &= |\angle CBF| \end{aligned}$$

odakle dobivamo sukladnost  $\triangle AGB \cong \triangle FCB$  pa slijedi

$$|GA| = |CF|.$$

Označimo s  $M$  sjecište dužina  $\overline{FC}$  i  $\overline{AG}$ , s  $U$  sjecište dužina  $\overline{FC}$  i  $\overline{BG}$  i s  $O$  sjecište dužina  $\overline{FB}$  i  $\overline{GA}$ .

$$\begin{aligned} |\angle BUC| &= |\angle GUM| \text{ (vršni kutovi)} \\ |\angle UCB| &= |\angle MGU| \\ |\angle CBU| &= |\angle UMG| \end{aligned}$$

odakle dobivamo

$$|\angle UMG| = 90^\circ \text{ (jer je } \angle CBU \text{ pravi kut).}$$

Kako vrijedi

$$|\angle UMG| + |\angle OMU| = 180^\circ$$

dobivamo

$$|\angle OMU| = 90^\circ$$

odakle slijedi

$$\overline{AG} \perp \overline{CF}.$$

Kako je  $\overline{FC} \parallel \overline{S_1P}$  i  $\overline{GA} \parallel \overline{S_2P}$ , a kako su  $\overline{AG} \perp \overline{CF}$  slijedi

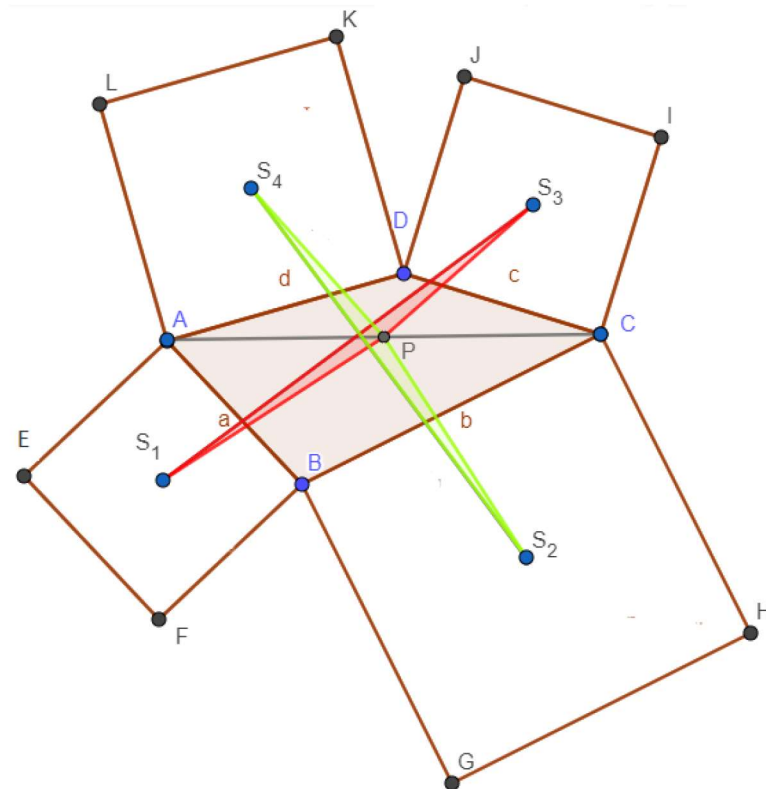
$$\overline{PS_1} \perp \overline{S_2P}. \quad (2.1.3)$$

Kako je i  $|AG| = |FC|$  (zbog  $\triangle AGB \cong \triangle FCB$ ) dobivamo

$$|S_1P| = |S_2P|. \quad (2.1.4)$$

Ostaje nam dokazati sukladnost

$$\triangle S_2PS_4 \cong \triangle S_1PS_3.$$



Slika 6.

Prema (2.1.4) imamo

$$|S_1P| = |S_2P|,$$

a po (2.1.2) vrijedi

$$|S_3P| = |S_4P|.$$

Iz (2.1.3) slijedi

$$|\angle S_2PS_1| = 90^\circ,$$

a po (2.1.1) imamo

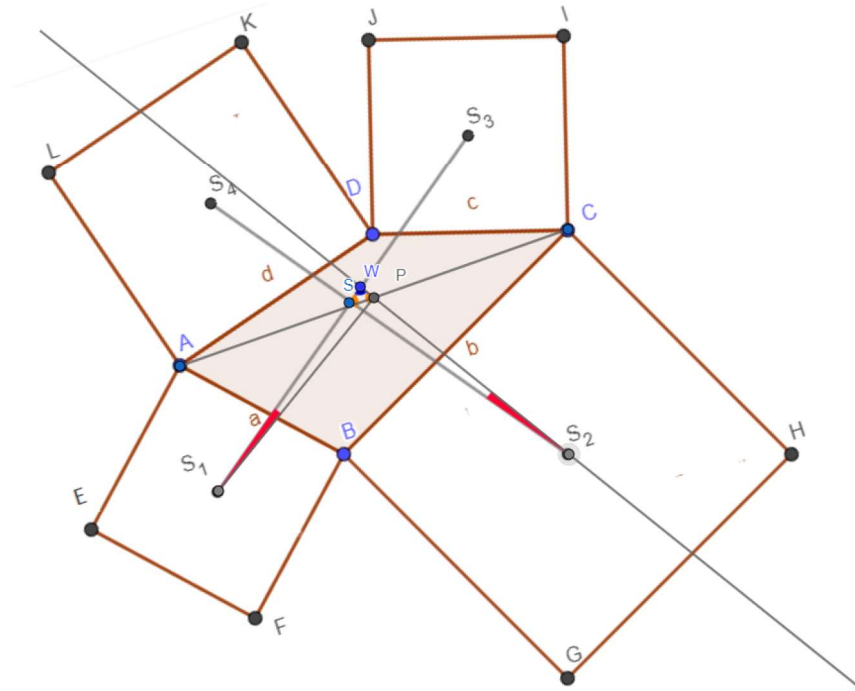
$$|\angle S_4PS_3| = 90^\circ.$$

Također vrijedi

$$|\angle S_1PS_3| = |\angle S_2PS_4|.$$

Iz gornjeg razmatranja slijedi sukladnost  $\triangle S_1PS_3 \cong \triangle S_2PS_4$ , odakle dobivamo

$$|S_1S_2| = |S_2S_4|.$$



Slika 7.

Označimo s  $W$  presjek pravaca  $SS_1$  i  $S_2P$  (slika 7)

$$|\angle SS_2W| = |\angle WS_1P|,$$

$$|\angle PWS_1| = |\angle SW S_2|$$

pa slijedi

$$|\angle S_2SW| = |\angle S_1PW| = 90^\circ$$

odakle dobivamo

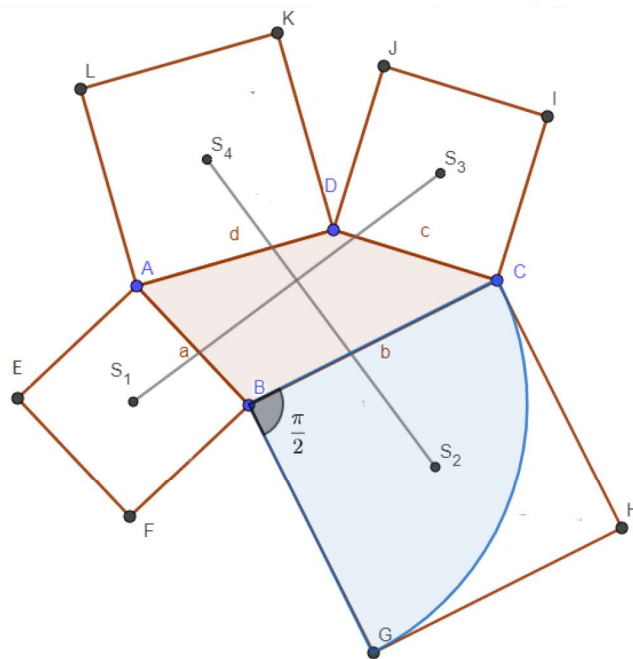
$$\overline{S_1S_3} \perp \overline{S_2S_4}.$$

□

## 2.2 Dokaz pomoću kompleksnih brojeva

U ovom dijelu rada dokazat ćemo teorem koristeći kompleksne brojeve (vidi [1]).

*Dokaz.* Neka je dan četverokut  $ABCD$  i neka su na svakoj njegovoj stranici s vanjske strane redom konstruirani kvadrati  $AEFB$ ,  $BGHC$ ,  $CIJD$  i  $DKLA$ , te neka su njihova središta redom  $S_1, S_2, S_3$  i  $S_4$ . Uočimo sada kvadrat  $BGHC$ . Uočimo kako je točka  $G$  dobivena rotacijom točke  $C$  oko točke  $B$  za  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  (slika 8).



Slika 8.

Da bi odredili koordinatu točke  $G$ , koristit ćemo sljedeću propoziciju.

**Propozicija 1.** Neka je točka  $T(t')$  nastala rotacijom točke  $T(t)$  oko točke  $S(s)$  za kut  $\alpha$ . Koordinata točke  $T(t')$  dana je izrazom

$$t' = s + (t - s)\epsilon,$$

gdje je  $\epsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$ .

Sada prema propoziciji 1, točka  $G$  ima koordinatu

$$g = b + (c - b)\epsilon$$

Kako je kut rotacije  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ , onda je  $\epsilon = -i$ . Sada imamo da je koordinata točke  $G$ :

$$g = b + (b - c)i.$$

Uočimo sada kvadrat  $CIJD$ . Točka  $I$  dobivena je rotacijom točke  $D$  oko točke  $C$  za kut  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ . Koordinata točke  $I$  prema propoziciji 1 je

$$i = c + (d - c)\epsilon,$$

odnosno,

$$i = c + (c - d)i.$$

Uočimo kvadrat  $DKLA$ . Točka  $K$  dobivena je rotacijom točke  $A$  oko točke  $D$  za kut  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ . Koordinata točke  $K$  prema *propoziciji 1* dana je s

$$k = d + (a - d)\epsilon,$$

odnosno,

$$k = d + (d - a)i.$$

Uočimo sada kvadrat  $AEFB$ . Točka  $E$  dobivena je rotacijom točke  $B$  oko točke  $A$  za kut  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ . Koordinata točke  $E$  prema *propoziciji 1* je

$$e = a + (b - a)\epsilon,$$

odnosno,

$$e = a + (a - b)i.$$

Znamo da je  $S_2$  sjecište  $\overline{BH}$  i  $\overline{GC}$  i da vrijedi  $|GS_2| = |S_2C|$ . Sada je koordinata od  $S_2$

$$s_2 = \frac{g + c}{2} = \frac{b + (b - c)i + c}{2} = \frac{b + c}{2} + \frac{b - c}{2}i.$$

Znamo da je  $S_3$  sjecište  $\overline{JC}$  i  $\overline{DI}$  i da vrijedi  $|DS_3| = |S_3I|$ . Sada je koordinata od  $S_3$

$$s_3 = \frac{d + i}{2} = \frac{d + c + (c - d)i}{2} = \frac{d + c}{2} + \frac{c - d}{2}i.$$

Znamo da je  $S_4$  sjecište  $\overline{AK}$  i  $\overline{LD}$  i da vrijedi  $|AS_4| = |S_4K|$ . Sada je koordinata od  $S_4$

$$s_4 = \frac{a + k}{2} = \frac{a + d + (d - a)i}{2} = \frac{a + d}{2} + \frac{d - a}{2}i.$$

Znamo da je  $S_1$  sjecište  $\overline{AF}$  i  $\overline{BE}$  i da vrijedi  $|ES_1| = |S_1B|$ . Sada je koordinata od  $S_1$

$$s_1 = \frac{e + b}{2} = \frac{a + b + (a - b)i}{2} = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2}i.$$

Znamo da su dva pravca okomita ako je kut između njih oblika  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ . Promotrimo sada sljedeće jednakosti kako bismo dokazali da je  $\overline{S_1S_3} \perp \overline{S_2S_4}$ .

$$\begin{aligned} s_4 - s_2 &= \frac{a + d}{2} + \frac{d - a}{2}i - \frac{b + c}{2} - \frac{b - c}{2}i \\ &= \frac{a + d - b - c}{2} + \frac{d - a - b + c}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3 - s_1 &= \frac{c + d}{2} + \frac{c - d}{2}i - \left( \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2}i \right) = \\ &= \frac{c + d - a - b}{2} + \frac{c - d - a + b}{2}i = \\ &= \frac{c + d - a - b}{2} - \frac{d - c + a - b}{2}i = \\ &= i \left( \frac{c + d - a - b}{2} + \frac{c + d - a - b}{2}i \right) = \\ &= i(s_4 - s_2) \end{aligned}$$



odakle dobivamo

$$\frac{S_3 - S_1}{S_4 - S_2} = i.$$

Dokazali smo dakle

$$\overline{S_3 S_1} \perp \overline{S_4 S_2}.$$

Kako vrijedi

$$\left| \frac{S_3 - S_1}{S_4 - S_2} \right| = |i| = 1$$

dobivamo

$$|S_3 S_1| = |S_4 S_2|.$$

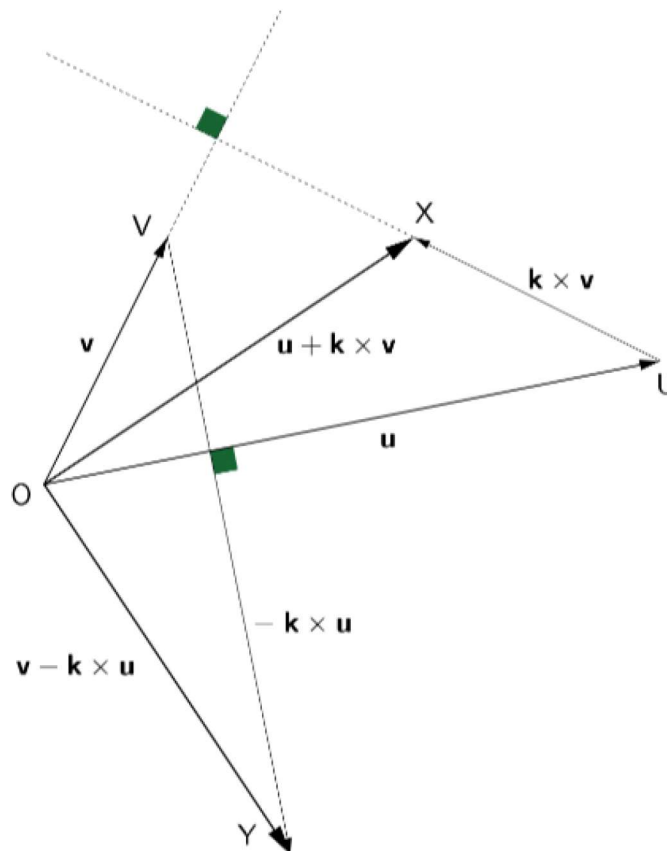
□

### 2.3 Dokaz pomoću ortogonalnih vektora

U ovom dijelu razmatrat ćemo dokaz Van Aubelovog teorema pomoću vektora ([2]). Kako bismo dokazali Van Aubelov teorem pomoću ortogonalnih vektora, uvest ćemo najprije određene vektore i veličine. Neka su  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  dva linearno nezavisna vektora i neka je  $\vec{k}$  jedinični vektor okomit na ravninu koja sadrži vektore  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ . Definirajmo vektor

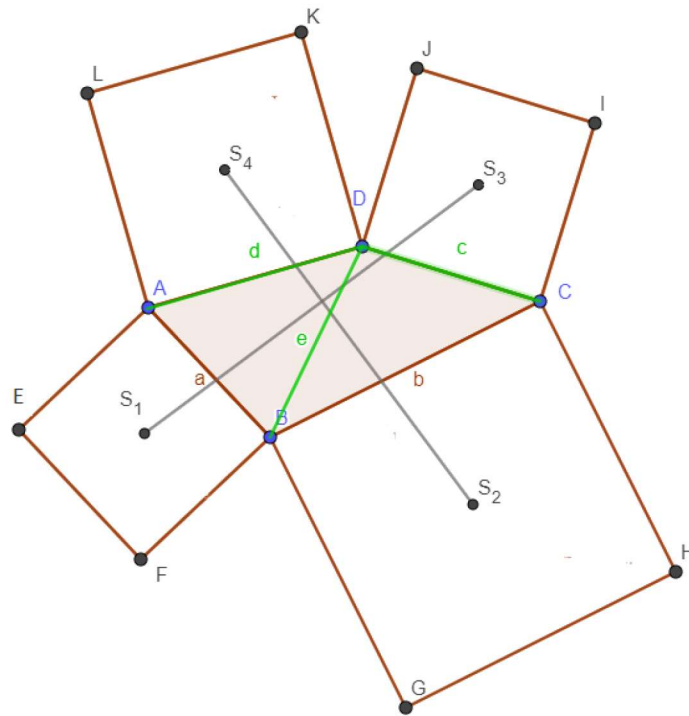
$$\vec{x} = \vec{u} + \vec{k} \times \vec{v} \text{ i vektor } \vec{y} = \vec{v} - \vec{k} \times \vec{u}.$$

Može se dokazati da su  $\vec{x}$  i  $\vec{y}$  međusobno ortogonalni i jednake duljine.



Slika 9.: Konstrukcija ortogonalnih vektora jednakih duljina.

*Dokaz.* Promotrimo četverokut prikazan na slici 10.



Slika 10.

Neka je  $\vec{k}$  jedinični vektor okomit na ravninu koja sadrži četverokut  $ABCD$ . Uočimo vektore  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$  i  $\overrightarrow{DB} = \vec{e}$ . Vrijedi

$$\overrightarrow{DS_3} = \frac{1}{2} \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{k} \times \vec{c},$$

jer je  $\vec{k}$  okomit na  $\vec{c}$ , a  $S_3$  je središte kvadrata konstruiranog nad stranicom  $c$ . Analogno tome imamo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DS_4} &= \frac{1}{2} \vec{d} + \frac{1}{2} \vec{k} \times \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2} \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{k} \times \vec{d}. \end{aligned}$$

Nadalje, imamo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DS_2} &= \vec{c} + \overrightarrow{CS_2} \\ &= \vec{c} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2} \vec{k} \times \overrightarrow{CB} \\ &= \vec{c} + \frac{1}{2} (\vec{e} - \vec{c}) + \frac{1}{2} \vec{k} \times (\vec{e} - \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{c} + \vec{e}) + \frac{1}{2} \vec{k} \times (\vec{e} - \vec{c}). \end{aligned}$$

Analogno je

$$\overrightarrow{DS_1} = \frac{1}{2} (\vec{e} + \vec{d}) + \frac{1}{2} \vec{k} \times (\vec{d} - \vec{e}).$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S_3S_1} &= \overrightarrow{DS_1} - \overrightarrow{DS_3} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{e} + \vec{d} - \vec{c}) + \frac{1}{2} \vec{k} \times (\vec{d} - \vec{e} - \vec{c})\end{aligned}$$

i

$$\overrightarrow{S_4S_2} = \frac{1}{2} (\vec{d} - \vec{e} - \vec{c}) - \frac{1}{2} \vec{k} \times (\vec{e} + \vec{d} - \vec{c}).$$

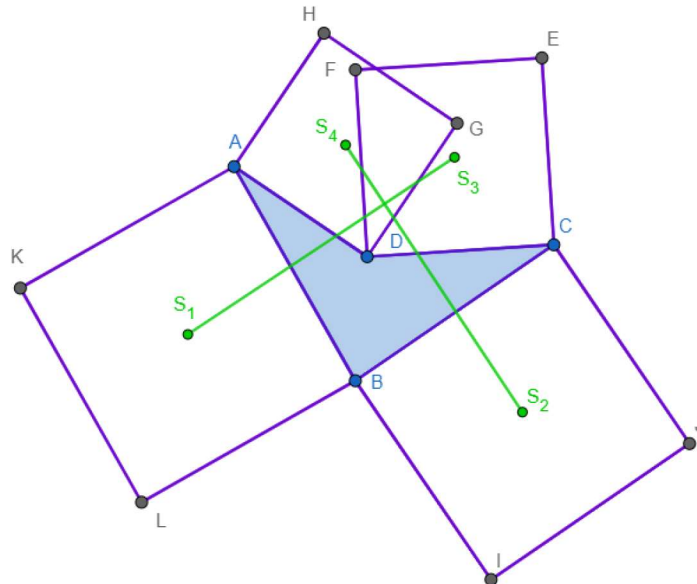
Definirajmo sada  $\vec{u} = \frac{1}{2} (\vec{e} + \vec{d} - \vec{c})$  i  $\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{d} - \vec{e} - \vec{c})$ . Sada  $\overrightarrow{S_3S_1}$  i  $\overrightarrow{S_4S_2}$  možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S_3S_1} &= \vec{u} + \vec{k} \times \vec{v} \\ \overrightarrow{S_4S_2} &= \vec{v} - \vec{k} \times \vec{u},\end{aligned}$$

pri čemu su  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  u istoj ravnini kao  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  i  $\vec{e}$ . Iz toga dobivamo da su  $\vec{u} + \vec{k} \times \vec{v}$  i  $\vec{v} - \vec{k} \times \vec{u}$  međusobno okomiti i iste duljine. Sada slijedi da su  $\overline{S_3S_1}$  i  $\overline{S_4S_2}$  međusobno okomite dužine i da su im duljine jednake.  $\square$

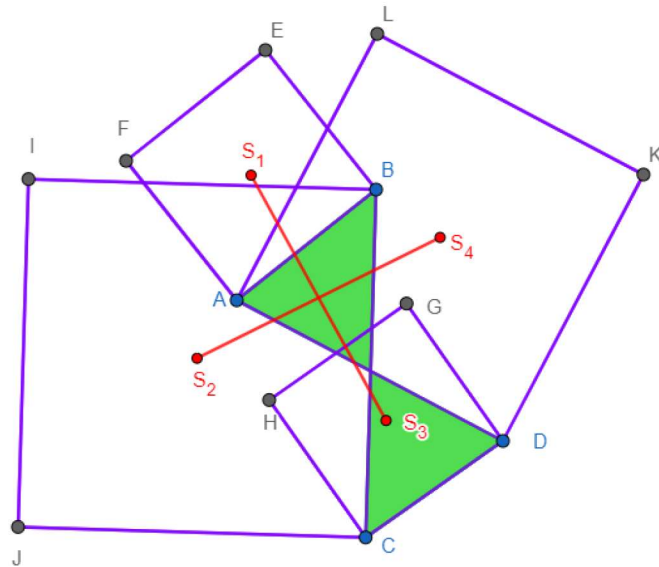
### 3 Specijalni slučajevi Van Aubelovog teorema

U ovom dijelu rada navest ćemo neke specijalne slučajeve Van Aubelovog teorema. Na početku ovog dijela važno je reći da ovaj teorem vrijedi i za četverokute koji nisu konveksni (slika 11)



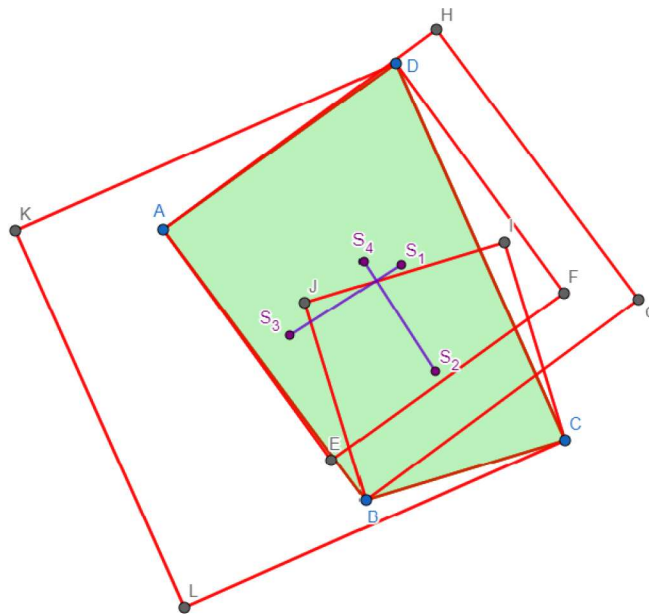
Slika 11.: Geometrijska interpretacija Van Aubelovog teorema za nekonveksni četverokut

te za četverokute koji "sijeku sami sebe" (slika 12).



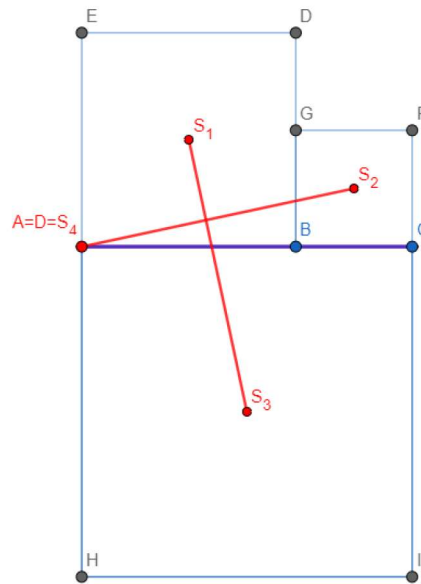
Slika 12.

Nadalje, važno je reći da ovaj teorem vrijedi za kvadrate konstruirane nad stranicama četverokuta prema van, ali i za kvadrate koji su konstruirani nad stranicama četverokuta prema unutra (slika 13).



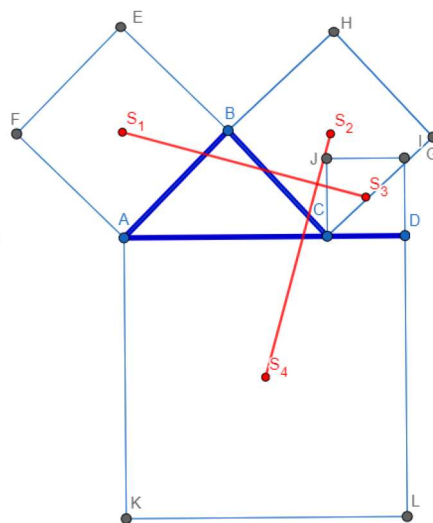
Slika 13.

Sada kada smo razmatrali Van Aubelov teorem za različite vrste četverokuta, prikazat ćemo slučaj kada su vrhovi četverokuta kolinearne točke (slika 14).



Slika 14.

Može se dokazati da teorem vrijedi i u sljedećem posebnom slučaju prikazanom na slici 15.



Slika 15.

Za svaki od navedenih slučajeva se može dokazati da vrijedi Van Aubelov teorem. Navedeni slučajevi često se koriste u trigonometriji, analitičkoj geometriji, vektorskoj analizi, kompleksnoj analizi te mnogim drugim granama matematike.

## 4 Generalizacije Van Aubelovog teorema

Van Aubelov teorem može se jednostavno generalizirati korištenjem manje poznatog koncepta dualnosti između kutova i stranica ([6]). Prema tome, kvadrat je dualan sam sebi jer ima sve kutove iste veličine i sve stranice iste duljine. Isto tako je i paralelogram dualan sam

sebi jer su mu nasuprotni kutovi iste veličine i nasuprotnne stranice iste duljine. Iz sljedeće tablice možemo zaključiti da su pravokutnik i romb jedan drugom dualni:

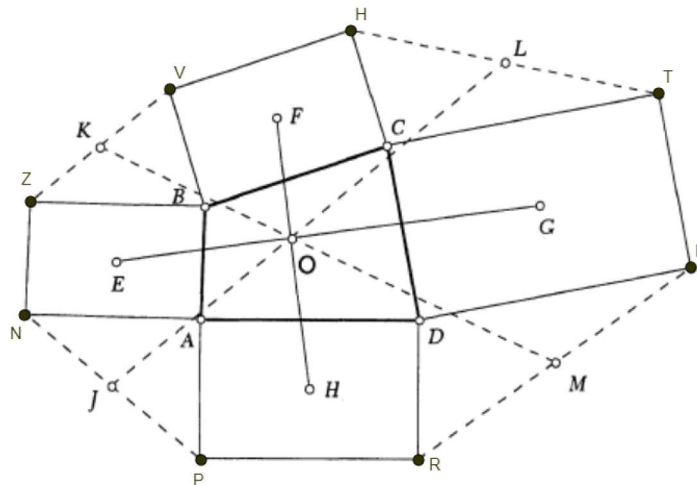
| Pravokutnik   | Romb  |
|---|---|
| Svi kutovi iste veličine  | Sve stranice iste dužine  |
| Središte je jednako udaljeno od svih vrhova, pa je to ujedno i središte kružnice opisane oko pravokutnika | Središte je jednako udaljeno od svih stranica, pa je to ujedno i središte kružnice upisane u romb |
| Osi simetrije raspolavljaju suprotne stranice   | Osi simetrije raspolavljaju suprotne kutove   |

Vrijedi da sukladne dijagonale pravokutnika imaju svoje dualne okomite dijagonale romba, i to je ilustrirano pomoću sljedeća dva rezultata:

- (1) Polovišta stranica bilo kojeg četverokuta čije su dijagonale sukladne su vrhovi romba.
- (2) Polovišta stranica bilo kojeg četverokuta čije su dijagonale okomite su vrhovi pravokutnika.

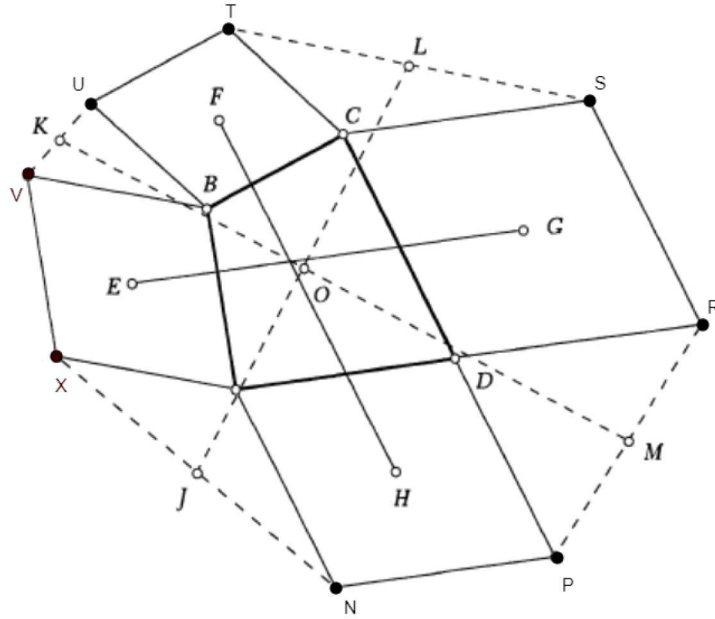
Navest ćemo sada generalizacije Van Aubelovog teorema ([6]).

**Teorem 2.** *Ako su slični pravokutnici sa središtima  $E, F, G$  i  $H$  konstruirani nad stranicama četverokuta  $ABCD$  kao na slici 16, tada dužine  $\overline{EG}$  i  $\overline{FH}$  leže na okomitim pravcima. Ako je  $J$  polovište dužine  $\overline{NP}$ ,  $M$  polovište dužine  $\overline{RS}$ ,  $L$  polovište dužine  $\overline{TH}$  i  $K$  polovište dužine  $\overline{VZ}$ , tada vrijedi da su dužine  $\overline{JL}$  i  $\overline{KM}$  sukladne i konkurentne s druga dva pravca (slika 16).*



Slika 16.

**Teorem 3.** *Ako su slični rombovi sa središtima  $E, F, G$  i  $H$  konstruirani nad stranicama četverokuta  $ABCD$  kao na slici 17, onda su dužine  $\overline{EG}$  i  $\overline{FH}$  sukladne. Nadalje, ako je  $J$  polovište dužine  $\overline{XN}$ ,  $M$  polovište dužine  $\overline{PR}$ ,  $L$  polovište dužine  $\overline{ST}$  i  $K$  polovište dužine  $\overline{UV}$ , onda dužine  $\overline{JL}$  i  $\overline{KM}$  leže na okomitim pravcima (slika 17).*



Slika 17.: Geometrijska interpretacija teorema 3.

Kombiniranjem ova dva teorema dobivamo Van Aubelov teorem. Navedimo sada sljedeću generalizaciju Van Aubelovog teorema.

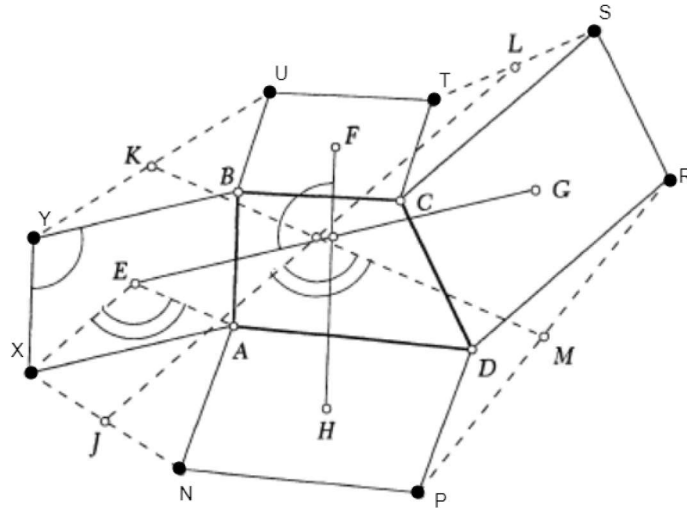
**Teorem 4.** *Ako su slični paralelogrami sa središtima  $E$ ,  $F$ ,  $G$  i  $H$  konstruirani nad stranicama četverokuta  $ABCD$ , kao na slici 18, onda vrijedi*

$$\frac{|FH|}{|EG|} = \frac{|XY|}{|YB|}$$

*i kut koji zatvaraju dužine  $\overline{EG}$  i  $\overline{FH}$  jednak je kutu kojeg zatvaraju stranice paralelograma. Nadalje, ako je  $J$  polovište dužine  $\overline{XN}$ ,  $M$  polovište dužine  $\overline{PR}$ ,  $L$  polovište dužine  $\overline{ST}$  i  $K$  polovište dužine  $\overline{UY}$ , vrijedi*

$$\frac{|KM|}{|JL|} = \frac{|YA|}{|XB|}$$

*i kut koji zatvaraju dužine  $\overline{JL}$  i  $\overline{KM}$  jednak je kutu kojeg zatvaraju dijagonale paralelograma.*



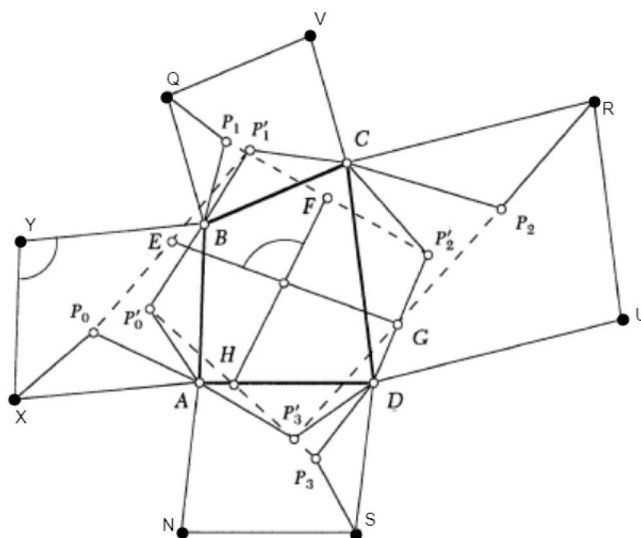
Slika 18.: Geometrijska interpretacija teorema 4.

Ovaj teorem može se dalje generalizirati u sljedeće dvije tvrdnje ([6]).

**Teorem 5.** *Ako su slični paralelogrami konstruirani nad stranicama četverokuta  $ABCD$  i ako su slični trokuti  $XP_0A$ ,  $AP'_0B$ ,  $QP_1B$ ,  $BP'_1C$ ,  $RP_2C$ ,  $CP'_2D$ ,  $SP_3D$  i  $DP'_3A$  konstruirani kao na slici 19, i ako su  $E, F, G$  i  $H$  polovišta dužina  $\overline{P_i P_{i+1}}$ , za  $i = 0, 1, 2, 3$ , onda vrijedi*

$$\frac{|FH|}{|EG|} = \frac{|XY|}{|YB|}$$

*i kut koji zatvaraju dužine  $\overline{EG}$  i  $\overline{FH}$  jednak je kutu kojeg zatvaraju stranice paralelograma.*



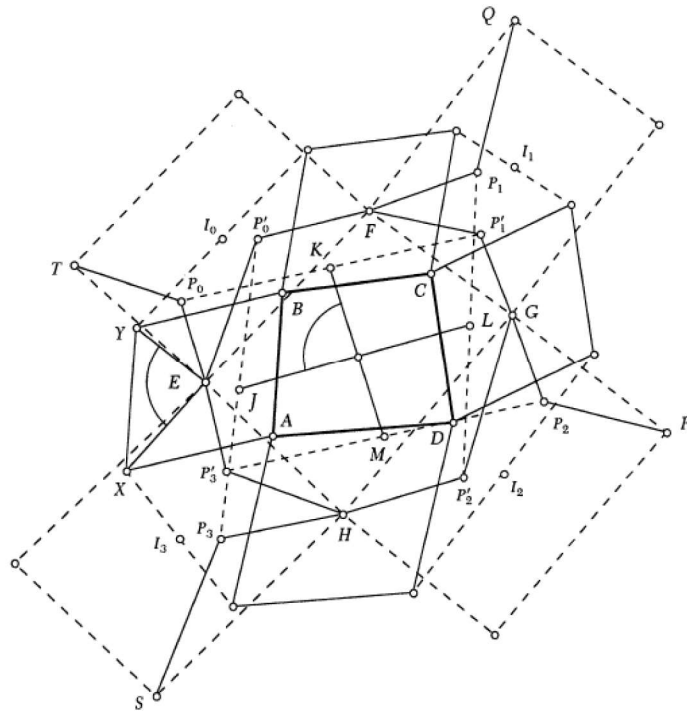
Slika 19.: Geometrijska interpretacija teorema 5.



**Teorem 6.** *Ako su slični paralelogrami sa središtima  $E, F, G$  i  $H$  konstruirani nad stranicama četverokuta  $ABCD$ ,  $I_i$  polovišta isprekidanih dužina kao što je prikazano na slici 20, paralelogrami konstruirani sa  $I_i$  kao središtima i sličnim trokutima  $TP_0E, EP_0'F, QP_1F, FP_1'G, RP_2G, GP_2'H, SP_3H, HP_3'E$  i ako su  $K, L, M$  i  $J$  respektivna polovišta dužina  $\overline{P_iP_{i+1}}$ , za  $i = 0, 1, 2, 3$ , onda vrijedi*

$$\frac{|KM|}{|JL|} = \frac{|YA|}{|XB|}$$

*i kut koji zatvaraju dužine  $\overline{JL}$  i  $\overline{KM}$  jednak je kutu kojeg zatvaraju dijagonale paralelograma.*



Slika 20.: Geometrijska interpretacija teorema 6.

## Literatura

- [1] A. Corn, *Dokaz geometrijskih tvrdnji pomoću kompleksnih brojeva*, Odjel za matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, diplomski rad.
- [2] P. Glaister, *A proof of van Aubel's theorem using orthogonal vectors*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47 (2016), No. 3, 440–443.
- [3] Y. Nishiyama, *The beautiful geometric theorem of Van Aubel*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 66 (2011), No. 1, 71–80.
- [4] V. Oxman, M. Stupel, *Elegant special cases of Van Aubel's theorem*, The Mathematical Gazette, 99 (2015), No. 545, 256–262.
- [5] D. Pellegrinetti, *The six-point circle for the quadrangle*, International Journal of Geometry, 8 (2019), No. 2, 5–13.
- [6] M. Villiers, *Generalizing Van Aubel Using Duality*, Mathematics Magazine, 73 (2000), 303–307.
- [7] <https://web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/rjesenja.pdf>