

# Parametarska redukcija reda modela koristeći IRKA algoritam

---

**Vidaković, Antonio**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:582003>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-03**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski smjer matematike, smjer: Matematika i  
računarstvo

Antonio Vidaković

**Parametarska redukcija modela  
koristeći IRKA algoritam**

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski smjer matematike, smjer: Matematika i računarstvo

Antonio Vidaković

**Parametarska redukcija modela  
koristeći IRKA algoritam**

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Zoran Tomljanović

Osijek, 2022.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Definicija LTI sustava i njegovih svojstava . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Redukcija reda sustava</b>	<b>3</b>
2.1	Redukcija reda LTI sustava koristeći potprostore . . . . .	3
2.2	Računanje redukcije reda za pLTI sustave . . . . .	4
2.3	Računanje pogreške izlaza . . . . .	5
<b>3</b>	<b>IRKA za parametarski sustav</b>	<b>8</b>
3.1	Interpolacijske projekcije . . . . .	8
3.2	IRKA algoritam za optimalnu $\mathcal{H}_2$ redukciju LTI modela . . . . .	10
3.3	IRKA algoritam za pLTI . . . . .	13

# 1 Uvod

Neki sustavi mogu se zapisati preko parametara poput visine, širine, dužine, itd., zbog kojih se matrice sustava mijenjaju pri svakoj njihovoj promjeni, na primjer model hlađenja tračnica ovisi o obliku tračnica koje želimo ohladiti, anemometar koji mjeri protok tekućine, model termalnog bloka koji ovisi o različitim koeficijentima prijenosa topline, položaja, itd. Analiza, simulacija i optimizacija parametara u takvim sustavima može biti numerički vrlo zahtjevna, a posebno u slučajevima kada je dimenzija sustava vrlo velika. Stoga, u praksi se često primjenjuje redukcija dimenzije sustava koja omogućava da se utjecaj ulaza na izlaz simulira pomoću stanja koji ima znatno manju dimenziju. Svaka promjena u bilo kojem mogućem parametru na velikim sustavima bi tražila računanje nove redukcije sustava, pa zbog toga radimo parametarske redukcije koje ovise o prostoru parametara, to jest o svim mogućim vrijednostima parametara sustava, i one nam omogućavaju brže računanje redukcije sustava bez obzira na promjene u parametrima.

## 1.1 Definicija LTI sustava i njegovih svojstava

**Definicija 1.1.** Linearno vremenski invarijantan (LTI) sustav je definiran s dvije jednačbe

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad \text{uz } x(0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{LTI})$$

Gdje je  $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stanje sustava,  $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  ulaz sustava i  $y : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$  izlaz sustava, te  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$  i  $D \in \mathbb{R}^{k \times m}$  matrice sustava.

**Definicija 1.2.** Parametarski LTI (pLTI) sustav je verzija LTI sustava definirana sa

$$\begin{cases} E(p)\dot{x}(t; p) = A(p)x(t; p) + B(p)u(t), \\ y(t; p) = C(p)x(t; p) + D(p)u(t), \quad \text{uz } x(0; p) = x_0. \end{cases} \quad (\text{pLTI})$$

$p \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^l$  predstavlja moguću parametrizaciju sustava ne samo za jedan model nego za cijelu familiju modela u prostoru parametara  $\mathcal{P}$ . Za zadani  $p \in \mathcal{P}$  sustav pLTI se ponaša kao ekvivalentan LTI sa matricama sustava  $E(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(p) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(p) \in \mathbb{R}^{k \times n}$  i  $D(p) \in \mathbb{R}^{k \times m}$ .

*Primjedba 1.* Sustave LTI i parametarske LTI za koje vrijedi  $m = 1$  zovemo single-input ili SI ukratko, inače, kada je  $m > 1$ , sustave zovemo multi-input ili MI ukratko. Ekvivalentno, za sustave za koje vrijedi  $k = 1$  zovemo single-output ili SO ukratko, inače, kada je  $k > 1$ , zovemo ih multi-output ili MO ukratko. U ovom radu ćemo se usmjeriti na single-input-single-output ili SISO sustave.

*Primjedba 2.* Sustav LTI možemo zapisati kao uređenu petorku  $[E, A, B, C, D]$ , odnosno za pLTI  $[E(p), A(p), B(p), C(p), D(p)]$ . U slučaju  $E = I$ ,  $E$  je jedinična matrica, sustave možemo zapisivati kao uređenu četvorku ostalih matrica.

U ovom radu ćemo se usredotočiti na sustave s  $x(0) = x_0 = 0$ , odnosno  $x(0; p) = x_0 = 0$ , i  $D = 0$ , odnosno  $D(p) = 0$ , tj. sustav LTI  $[E, A, B, C, 0]$  je dan sa

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \quad \text{uz } x(0) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

te odgovarajući pLTI sustav  $[E(p), A(p), B(p), C(p), 0]$  je dan sa

$$\begin{cases} E\dot{x}(t; p) = A(p)x(t; p) + B(p)u(t), \\ y(t; p) = C(p)x(t; p), \end{cases} \quad \text{uz } x(0) = 0. \quad (1.2)$$

*Primjedba 3.* U nastavku rada raditi ćemo s parametarskim matricama koje se mogu linearizirati, na primjer, ako imamo matricu  $M(p)$ , gdje je  $p = (p_1, p_2, \dots, p_t)$ , onda možemo pretpostaviti da ju možemo zapisati preko odgovarajuće sume matrica  $M_0, M_1, \dots, M_t$ :

$$M(p) = M_0 + \sum_{j=0}^t p_j M_j$$

**Definicija 1.3.** Za sustav LTI kažemo da je upravljiv ako u konačnom vremenu  $t_1$  sustav možemo dovesti iz stanja  $x(0) = x_0$  u stanje  $x(t_1)$  uz pravilan odabir ulaza  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ . Više o upravljivosti i svojstvima upravljivosti možete pronaći u [6] i [9].

**Definicija 1.4.** Za sustav LTI kažemo da je opažajan ako  $\exists t_1 > 0$  tako da početno stanje  $x(0)$  može biti jedinstveno određeno iz poznavanja ulaza  $u(t)$  i izlaza  $y(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ . Više o osmotrivosti i svojstvima osmotrivosti možete pronaći u [6] i [9].

**Definicija 1.5.** Za sustav

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

kažemo da je asimptotski stabilan ako za svaki početni uvijet  $x_0$  vrijedi  $x(t) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow \infty$ .

Više o svojstvu asimptotske stabilnosti možete pronaći u [3].

*Primjedba 4.* Primjenom Laplaceove transformacije (detalje o definiciji i primjeni možete pronaći u [8]) na jednadžbu (1.1) koja opisuje LTI, uz  $x(0) = 0$  dobivamo jednadžbe:

$$\hat{x}(s) = (sE - A)^{-1}B\hat{u}(s), \quad (1.4)$$

$$\hat{y}(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s). \quad (1.5)$$

Uvrstimo li 1.4 u 1.5 dobivamo:

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= (C(sE - A)^{-1}B + D)\hat{u}(s), \\ \hat{y}(s) &= H(s)\hat{u}(s), \quad H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D. \end{aligned} \quad (1.6)$$

**Definicija 1.6.** Funkciju

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (1.7)$$

nazivamo funkcija prijenosa LTI sustava.  $H(s)$  je  $k \times m$  matrična funkcija kompleksne varijable  $s$ , čiji su elementi racionalne funkcije, koja jedinstveno određuje ulazno-izlazno preslikavanje sustava LTI.

*Primjedba 5.* S obzirom da radimo na sustavima (1.1) i (1.2), funkcije prijenosa koje ćemo koristiti bit će

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B \quad (1.8)$$

$$H(s; p) = C(p)(sE(p) - A(p))^{-1}B(p). \quad (1.9)$$

Naznačimo još i da se prilikom svake evaluacija funkcije prijenosa (1.8) ili (1.9) zahtijeva rješavanje linearnog sustava dimenzije  $n$ , što dovodi do problema kod sustava gdje je  $n$  velik. Više o funkciji prijenosa možete pronaći u [2], [6] i [9].

## 2 Redukcija reda sustava

Za analizu i evaluaciju funkcija prijenosa velikih sustava potrebna je velika količina prostora i za njihovo izvršavanje je potrebno dugo vremena, zato ih želimo reducirati na manji model  $[E_r, A_r, B_r, C_r, D_r]$ , gdje je  $E \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{k \times r}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{k \times m}$ . Ciljevi redukcije reda sustava su:

- dimenzija sustava bude puno manja;
- izlaz  $y_r$  reduciranog sustava  $[E_r, A_r, B_r, C_r, D_r]$  sustava LTI, tj. sustav

$$\begin{cases} E_r \dot{x}(t) = A_r x(t) + B_r u(t), \\ y(t) = C_r x(t) + D_r u(t), \quad \text{uz } x(0) = x_0; \end{cases} \quad (2.1)$$

bude blizu originalnog izlaza  $y$  sustava  $[E, A, B, C, D]$ , tj. da je norma pogreške izlaza  $\|y - y_r\|$  mala. To ćemo provjeravati preko norme razlike funkcija prijenosa  $\|H - H_r\|$ ;

- Ako je originalni sustav asimptotski stabilan tada i reducirani sustav mora biti asimptotski stabilan.

Primjetimo da će evaluacija reducirane funkcije prijenosa uključivati i rješavanje linearnih sustava koji imaju dimenziju  $r$ , a to ima direktan utjecaj na računanje normi sustava, što je moguće vrlo zahtjevno. U nastavku teksta uvest ćemo i neke važne norme koje mjere utjecaj ulaza na izlaz.

Postoji više vrsta metoda za redukciju reda modela sustava među kojima su metode redukcije reda bazirane na odsjecanju i metode redukcije reda koristeći potprostore, s kojima ćemo nastaviti u ostatku rada.

### 2.1 Redukcija reda LTI sustava koristeći potprostore

Parametarski model se može reducirati na razne načine, no u ovom radu ćemo se usredotočiti na redukciju modela koristeći projekcije. Započnimo s primjenom redukcije reda modela na sustav (1.1).

Aproksimiramo stanja pomoću baze koja ima puno manju dimenziju i projiciramo stanje na prikladno definirane niskodimenzionalne potprostore. Posebice, odaberimo  $r$ -dimenzionalne potprostore označene s  $\mathcal{V}$  i  $\mathcal{W}$ , gdje je  $r \ll n$ . Definiramo pripadne bazne matrice  $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$  i  $W \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , gdje  $\mathcal{V} = \text{Ran}(V)$  i  $\mathcal{W} = \text{Ran}(W)$ , pri čemu  $\text{Ran}$  označava sliku matrice. Koristeći aproksimaciju da se početno stanje dobiva iz  $r$ -dimenzionalnog potprostora  $\mathcal{V}$ , pišemo  $x(t) \approx Vx_r(t)$ , gdje je  $x_r(t) \in \mathbb{R}^r$ . Koristeći ovu aproksimaciju na sustav LTI definiramo rezidual

$(EV\dot{x}_r(t) - AVx_r(t) - Bu(t))$  i reducirani izlaz sustava  $y_r(t) = CVx_r(t) + Du(t)$ . Pridrživajući se Petrov-Galerkinov uvjeta

$$W^T(EV\dot{x}_r(t) - AVx_r(t) - Bu(t)) = 0,$$

dolazimo do reduciranog sustava

$$\begin{cases} E_r\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t), \\ y_r(t) = C_r x_r(t) + D_r u(t), \end{cases} \quad (2.2)$$

gdje su reducirane matrice dane s

$$E_r = W^T E V, \quad A_r = W^T A V, \quad B_r = W^T B, \quad C_r = C V, \quad \text{i} \quad D_r = D. \quad (2.3)$$

Izbor matrica  $V$  i  $W$  je važan radi točnije aproksimacije redukcije reda matrice. U nastavku teksta ćemo objasniti kako se redukcija koristeći potprostore generalizira na parametarske sustave.

## 2.2 Računanje redukcije reda za pLTI sustave

U slučaju parametarskog sustava redukcija reda modela također postaje parametarski ovisna. Nekoliko izazova proizlaze u postizanju efikasne izgradnje i evaluacije reduciranog modela s obzirom na varijaciju parametara.

Prvi izazov je kako uvesti parametarsku ovisnost u bazne matrice  $V \in \mathcal{V}$  i  $W \in \mathcal{W}$ ,  $V, W \in \mathbb{R}^{n \times (rK)}$ , gdje je  $r$  dimenzija redukcije matrica, a  $K$  je broj parametara redukcije parametarskog modela. Jedan izbor je izgradnja "globalnih" baznih matrica na prostoru parametara, to jest, jedna matrica  $V$  i jedna matrica  $W$ , koje obuhvaćaju parametarsku ovisnost uključujući informaciju o cijelom prostoru parametara (npr. informacije sakupljene kroz sakupljanje podataka više parametarskih vrijednosti). Drugi izbor je izgradnja "lokalnih" baznih matrica. To jest, razmatranje  $K$  točaka  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_K$  iz prostora parametara  $\mathcal{P}$ . Za realizaciju sustava koji se odnosi na  $\hat{p}_i$ , matrice sustava su konstantne, određujemo lokalne bazne matrice  $V_i$  i  $W_i$ . Postoji nekoliko načina za određivanje redukcije, no mi ćemo se usredotočiti na računanje globalne baze iz lokalnih poput konkatenacije lokalnih baza  $V_i$  i  $W_i$  koje odgovaraju parametru  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , u matrice

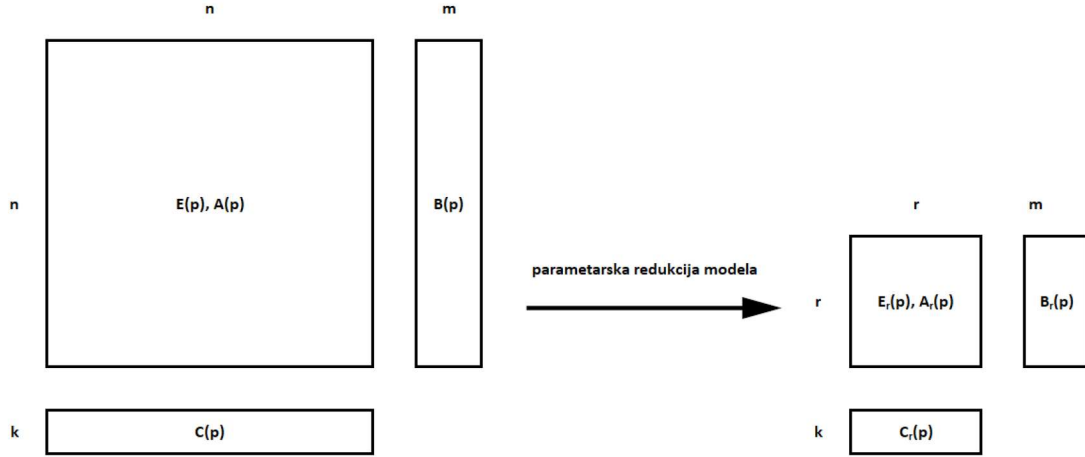
$$V = [V_1, \dots, V_K] \in \mathcal{V} \quad \text{i} \quad W = [W_1, \dots, W_K] \in \mathcal{W}. \quad (2.4)$$

Drugi izazov je efikasno računanje parametarski reduciranog modela za globalne redukcije. Na primjer, za dane matrice  $V$  i  $W$  razmotrimo računanje matrice  $A_r$ ,  $A_r(p) = W^T A(p) V$ . Generalno za parametarsku ovisnost,  $A_r$  ne može biti unaprijed izračunat. Umjesto toga, računanje reduciranog modela za parametar  $p$  zahtjeva računanje  $A(p)$  i naknadno pred- i postmultiplikaciju sa matricama  $W^T$  i  $V$ , tim redom. Te operacije ovise o (velikoj) dimenziji  $n$  originalnog problema. Na sreću, u nekim situacijama struktura problema nam daje efikasnu strategiju računanja. Na primjer koristeći zapis iz Primjedbe 2. koji ćemo koristiti u nastavku rada matrica  $A_r$  je dana s

$$A_r(p) = W^T A(p) V = W^T A_0 V + \sum_{i=1}^l p_i W^T A_i V. \quad (2.5)$$



Analogno dobijemo redukcije za matrice  $E(p)$ ,  $B(p)$  i  $C(p)$ . Iz ovoga možemo zaključiti da je za ovaj primjer i ostatak našeg rada, za dane bazne matrice  $V$  i  $W$ , najefikasnije izračunati matrice  $W^T A_i V$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$ , unaprijed i preko njih za dani parametar  $p$  izračunati matrice  $A_r(p)$ .



Slika 1: Redukcija reda parametarskog modela u parametru  $p$

## 2.3 Računanje pogreške izlaza

**Definicija 2.1.** Neka je  $H(s)$   $p \times m$  matična funkcija s elementima koje su analitičke za  $s$  u otvorenom desnom dijelu kompleksne ravnine,  $Re(s) > 0$ , i takve da, za  $x = Re(s) > 0$ ,  $H(x + iy)$  je uniformno kvadratno integrabilna kao funkcija od  $y \in \langle -\infty, \infty \rangle$ , u smislu da vrijedi:

$$\sup_{x>0} \int_{-\infty}^{\infty} \|H(x + iy)\|_F^2 dy < \infty,$$

gdje  $\|\cdot\|_F$  označava Frobeniusovu normu matrice.  $\mathcal{H}_2^{p \times m}$ , uz standardno zbrajanje i množenje skalarom, je vektorski prostor svih takvih matičnih funkcija,  $H(s)$ , i kada nema dvosmislenosti prostor označavamo s  $\mathcal{H}_2$ .

Više možete pronaći u [2] i [5].

*Primjedba 6.* U [5] možemo pronaći da se za funkcije iz definicije prostora  $\mathcal{H}_2$  u  $x = 0$  postiže supremum u definiciji 2.1.

*Primjedba 7.* Za skup  $\mathcal{H}_2$  važno je da za sustav mora vrijediti  $D = 0$ , odnosno sustav mora biti oblika 1.1, tj. za parametarske sustava 1.2.

Štoviše, može se pokazati da je  $\mathcal{H}_2$  Hilbertov prostor definiran s sljedećim skalarnim produktom.

**Definicija 2.2.** Neka su  $G(s)$  i  $H(s)$  funkcije prijenosa pridružene realnim SISO LTI sustavima s  $m$  ulaza i  $k$  izlaza. Onda se skalarni produkt od  $\mathcal{H}_2$  može definirati sa:

$$\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} \left( \overline{G(i\omega)} H(i\omega) \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} \left( G(-i\omega) H(i\omega) \right) d\omega. \quad (2.6)$$

Primijetimo da definicija skalarnog produkta 2.6 izravno daje normu za  $\mathcal{H}_2$ :

$$\|H\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\langle H, H \rangle_{\mathcal{H}_2}} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|H(i\omega)\|_F^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.7)$$

gdje  $trace()$  označava trag matrice. Primijetimo, za realne sustave,  $\overline{H(i\omega)} = H(-i\omega)$ . Prema tome, iz definicije skalarnog produkta za  $\mathcal{H}_2$  slijedi da za dva realna LTI sustava s funkcijama prijenosa  $H(s)$  i  $G(s)$ ,

$$\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle H, G \rangle_{\mathcal{H}_2},$$

i stoga skalarni produkt  $\langle H, G \rangle_{\mathcal{H}_2}$  mora biti realan.

Više možete pronaći u [2], [5] i [1].

**Definicija 2.3.** Za matrice funkcije  $F(s)$ , pol funkcije u  $s = \lambda$  je jednostavan pol od  $F(s)$  ako

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda)^l F(s) &= 0, \text{ za } l \geq 2 \\ \text{i } \text{res}[F(s), \lambda] &= \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda) F(s) = 0 \text{ ima rang } 1, \end{aligned}$$

gdje  $\text{res}$  označava reziduum (više o reziduumima možete pročitati u [7]). S druge strane, pol  $s = \lambda$  je polu-jednostavne pol od  $F(s)$  ako

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda)^l F(s) &= 0, \text{ za } l \geq 2 \\ \text{i } \text{res}[F(s), \lambda] &= \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda) F(s) = 0 \text{ ima rang veći } 1. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da  $F(s)$  ima konačno mnogo polova i da su oni ili jednostavni ili polu-jednostavni. Dimenzija od  $F(s)$  je definirana kao

$$\dim F(s) = \sum_{\lambda} \text{rank}(\text{res}[F(s), \lambda]),$$

pri čemu sumiramo po svim polovima  $\lambda$ . Primijetimo da  $F(s)$  možemo zapisati kao

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\dim F} \frac{1}{s - \lambda_i} c_i b_i^T, \quad (2.8)$$

gdje su  $\lambda_i$  indeksirani po multiplicitetima kako je naznačeno po  $\text{rank}(\text{res}[F(s), \lambda_i])$  puta. Više možete pronaći u [2].

**Lema 1.** Neka su  $G(s)$  i  $H(s)$  odgovaraju realnim stabilnim sustavima s polovima u otvorenom dijelu lijeve poluravnine. Pretpostavimo da  $H(s)$  ima polove u  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v$ . Onda

$$\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = \sum_{k=1}^v \text{res}[\text{trace}(\overline{G}(-s)H(s)^T), \mu_k].$$

Posebno, ako  $H(s)$  ima samo jednostavne ili polu-jednostavne polove u  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v$  i  $v = \dim(H)$ , korsteći definiciju 2.3, točnije izraz (2.8), tada vrijedi

$$H(s) = \sum_{i=1}^v \frac{1}{s - \mu_i} c_i b_i^T,$$

i

$$\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = \sum_{k=1}^v c_k^T \overline{G}(-\mu_k) b_k \quad (2.9)$$

Tada,  $\mathcal{H}_2$  normu možemo zapisati kao

$$\|H\|_{\mathcal{H}_2} = \left( \sum_{k=1}^v c_k^T \overline{H}(-\mu_k) b_k \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

*Primjedba 8.* Dokaz možete pronaći u [2].

**Teorem 2.4.** *Neka je dana matrica funkcije prijenosa  $H(s)$  neka je  $H_r(s)$  oblika*

$$H_r(s) = \sum_{i=1}^r \frac{c_i b_i^T}{s - \lambda_i}.$$

*Dodatno pretpostavimo da  $H(s)$  i  $H_r(s)$  pripadaju realnim sustavima. Tada,  $\mathcal{H}_2$  norma greške sustava je dana s*

$$\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|H\|_{\mathcal{H}_2}^2 - 2 \sum_{k=1}^r c_k H(-\lambda_k) b_k - \sum_{k,l=1}^r \frac{c_k^T c_l b_l^T b_k}{\lambda_k + \lambda_l} \quad (2.11)$$

*Dokaz.* Koristeći raspis skalarnog produkta za  $\mathcal{H}_2$  iz (2.7) dobivamo

$$\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \langle H - H_r, H - H_r \rangle_{\mathcal{H}_2} = \|H\|_{\mathcal{H}_2}^2 - 2 \langle H, H_r \rangle_{\mathcal{H}_2} + \|H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2,$$

gdje u zadnjoj jednakosti koristimo činjenicu da su  $H(s)$  i  $H_r(s)$  realne, pa je i  $\langle H, H_r \rangle_{\mathcal{H}_2}$  realan. Tada krajnji rezultat dobivamo primjenom prethodne leme, točnije primjenom (2.9) na  $\langle H, H_r \rangle_{\mathcal{H}_2}$  i (2.10) na  $\|H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2$ .  $\square$

*Primjedba 9.* Primjetimo da smo u ciljevima redukcije rekli da se norma izlazne pogreške  $\|y - y_r\|$  može aproksimirati s  $\|H - H_r\|$ , pokažimo to. Primjetimo da, primjenom primjedve 3. na originalni i reducirani sustav, vrijedi sljedeće

$$\hat{y}(s) - \hat{y}_r(s) = (H(s) - H_r(s))\hat{u}(s).$$

Ako želimo da svaka komponenta izlazne pogreške  $y(t) - y_r(t)$ , u SISO sustavu, uniformno mala za svaki  $t > 0$  (tj, želimo da je  $\max_{t>0} \|y(t) - y_r(t)\|_{\infty}$  mala) i da ovo vrijedi uniformno za sve ulaze  $u(t)$  s ograničenom energijom, npr. sa  $\int_0^{\infty} \|u(t)\|_2^2 dt < 1$ , onda vrijedi, uz primjenu Parsevalove relacije,

$$\begin{aligned} \max_{t>0} \|y(t) - y_r(t)\|_{\infty} &= \max_{t>0} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{y}(i\omega) - \hat{y}_r(i\omega)) e^{i\omega t} dt \right\|_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{y}(i\omega) - \hat{y}_r(i\omega)\|_{\infty} d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|H(i\omega) - H_r(i\omega)\|_{\mathbb{F}} \|\hat{u}(i\omega)\|_2 d\omega \\ &\leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|H(i\omega) - H_r(i\omega)\|_{\mathbb{F}}^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}(i\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|H(i\omega) - H_r(i\omega)\|_{\mathbb{F}}^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

U slučaju da sustav nije SISO, tada za konačne energije ulaza  $u(t)$ , jednakost prelazi u nejednakost manje jednako:

$$\|y - y_r\|_{L_{\infty}} \leq \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} \|u\|_{L_2}.$$

Više o možete pronaći u [2] i [1].

*Primjedba 10.* U slučaju sustava pLTI s  $k$  parametara vrijedi nejednakost.

*Primjedba 11.* Kako ćemo se usredotočiti na SISO promjere i kako je računski zahtjevno računanje norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}$  uvodimo normu  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\infty}$ .

**Definicija 2.5.** Norma  $\mathcal{H}_\infty$  asimptotski stabilnog linearnog sistema s pripadnom funkcijom prijenosa  $H(s)$  je definirana s

$$\|H\|_{\mathcal{H}_\infty} = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \|H(i\omega)\|_2.$$

Više možete pronaći u [2].

Stoga, ako uspijemo postići ja je  $\|H - Hr\|_{\mathcal{H}_2}$ , odnosno  $\|H - Hr\|_{\mathcal{H}_\infty}$ , malo, onda ćemo dobiti i malu pogrešku u razmatranom izlazu. To se može postići pomoću IRKA algoritma kojeg ćemo uvesti u sljedećem poglavju.

## 3 IRKA za parametarski sustav

### 3.1 Interpolacijske projekcije

Neka je dana funkcija prijenosa  $H(s)$  sustava LTI, set od  $r$  desnih interpolacijskih točaka  $\{\sigma_i\}_{i=1}^r \in \mathbb{C}$ , s desnim tangencionalnim smjerovima  $\{b_i\}_{i=1}^r \in \mathbb{C}^m$ , i set od  $q$  ljevih interpolacijskih točaka  $\{\mu_j\}_{j=1}^q \in \mathbb{C}$ , s lijevim tangencionalnim smjerovima  $\{c_j\}_{j=1}^q \in \mathbb{C}^k$ , interpolacijska redukcija sustava uključuje traženje reduciranog sustava s funkcijom prijenosa  $H_r(s)$  koja tangencijalno interpolira  $H(s)$  s danim podatcima, tj. tražimo  $H_r(s)$  takav da

$$\begin{aligned} H(\sigma_i)b_i &= H_r(\sigma_i)b_i \quad \text{za } i = 1, \dots, r \\ c_j H(\mu_j) &= c_j H_r(\mu_j) \quad \text{za } j = 1, \dots, q \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pokažimo i dokažimo kako riješiti racionalnu interpolacijsku redukciju problema 3.1. Više možete pronaći u [2].

**Teorem 3.1.** *Neka su  $\sigma, \mu \in \mathbb{C}$  takvi da su  $sE - A$  i  $sE_r - A_r$  su invertibilni za  $s = \sigma, \mu$ . Također, neka baze  $V, W \in \mathbb{C}^{n \times r}$  imaju puni rang. Ako su  $b \in \mathbb{C}^m$  i  $c \in \mathbb{C}^k$  fiksni netrivialni vektori i  $D_r = D$ , onda*

(a) *ako  $(\sigma E - A)^{-1} B b \in \text{Ran}(V)$ , onda  $H(\sigma)b = H_r(\sigma)b$ ;*

(b) *ako  $(c^T C (\mu E - A)^{-1})^T \in \text{Ran}(W)$ , onda  $c^T H(\mu) = c^T H_r(\mu)$ ; i*

(c) *ako su uvjeti (a) i (b) zadovoljeni, te  $\sigma = \mu$ , onda vrijedi  $c^T H'(\sigma)b = c^T H'_r(\sigma)b$ .*

Više možete pronaći u [2].

*Dokaz.* Definirajmo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r(s) &= V(sE_r - A_r)^{-1} W^T (sE - A) & \text{i} \\ \mathcal{Q}_r(s) &= (sE - A) \mathcal{P}_r(s) (sE - A)^{-1} = (sE - A) V (sE_r - A_r)^{-1} W^T. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_r(s)$  i  $\mathcal{Q}_r(s)$  su analitičke matrice funkcije u susjedstvu oko točkaka  $s = \sigma$  i  $s = \mu$ . Lako je provjeriti da su  $\mathcal{P}_r(s)$  i  $\mathcal{Q}_r(s)$  projektori, tj.,  $\mathcal{P}_r^2(s) = \mathcal{P}_r(s)$  i  $\mathcal{Q}_r^2(s) = \mathcal{Q}_r(s)$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_r^2(s) &= V(sE_r - A_r)^{-1}W^T(sE - A)V(sE_r - A_r)^{-1}W^T(sE - A) \\ &= V(sE_r - A_r)^{-1}(sE_r - A_r)(sE_r - A_r)^{-1}W^T(sE - A) \\ &= V(sE_r - A_r)^{-1}W^T(sE - A) = \mathcal{P}_r(s), \\ \mathcal{Q}_r^2(s) &= (sE - A)V(sE_r - A_r)^{-1}W^T(sE - A)V(sE_r - A_r)^{-1}W^T \\ &= (sE - A)V(sE_r - A_r)^{-1}(sE_r - A_r)(sE_r - A_r)^{-1}W^T \\ &= (sE - A)V(sE_r - A_r)^{-1}W^T = \mathcal{Q}_r(s).\end{aligned}$$

Štoviše, za sve  $s$  u susjedstvu točke  $\sigma$ ,  $\mathcal{V} = \text{Ran}(\mathcal{P}_r(s)) = \text{Ker}(I - \mathcal{P}_r(s))$  i  $\mathcal{W}^\perp = \text{Ker}(\mathcal{Q}_r(s)) = \text{Ran}(I - \mathcal{Q}_r(s))$ , pri čemu  $\text{Ran}(R)$  kao i prije označava sliku matrice. Primijetimo prvo da

$$\begin{aligned}H(s) - H_r(s) &= C(sE - A)^{-1}B - C_r((sE_r - A_r)^{-1}B_r \\ &= C(sE - A)^{-1}B - C_r((sE_r - A_r)^{-1}B_r \\ &\quad - C_r((sE_r - A_r)^{-1}TB_r + C_r((sE_r - A_r)^{-1}TB_r \\ &\quad \vdots\end{aligned}$$

$$H(s) - H_r(s) = C(sE - A)^{-1}(I - \mathcal{Q}_r(s))(sE - A)(I - \mathcal{P}_r(s))(zE - A)^{-1}B. \quad (3.2)$$

Evaluacijom ovog izraza u  $s = \sigma$  i množenjem s desna s  $b$  dobivamo prvu tvrdnju, a evaluacijom istog u  $z = \mu$  i množenjem s lijeva s  $c^T$  dobivamo drugu tvrdnju. Može se pokazati koristeći Taylorov razvoj (više detalja u [2]) da vrijedi:

$$\begin{aligned}((\sigma + \epsilon)E - A)^{-1} &= (\sigma E - A)^{-1} - \epsilon(\sigma E - A)^{-1}E(\sigma E - A)^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{i} \\ ((\sigma + \epsilon)E_r - A_r)^{-1} &= (\sigma E_r - A_r)^{-1} - \epsilon(\sigma E_r - A_r)^{-1}E_r(\sigma E_r - A_r)^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned}$$

pa evaluacijom izraza (3.2) u  $s = \sigma + \epsilon$ , množenjem s lijeva s  $c^T$ , i množenjem s desna s  $b$  pod pretpostavkom treće tvrdnje dobivamo

$$c^T H(\sigma + \epsilon)b - c^T H_r(\sigma + \epsilon)b = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Sad primijetimo da, kako vrijedi  $c^T H(\sigma + \epsilon)b = c^T H_r(\sigma + \epsilon)b$ ,

$$\frac{1}{\epsilon} \left( c^T H(\sigma + \epsilon)b - c^T H(\sigma)b \right) - \frac{1}{\epsilon} \left( c^T H_r(\sigma + \epsilon)b - c^T H_r(\sigma)b \right) \rightarrow 0$$

kako  $\epsilon \rightarrow 0$ , što dokazuje treću tvrdnju. □

Problem s pronalaskom "najbolje aproksimacije" se može reformulirati kao: Neka je dana funkcija prijenosa punog reda  $H$  i red redukcije  $r$ , pronađimo reduciranu funkciju prijenosa danog reda,  $H_r$ , koja minimizira  $\mathcal{H}_2$  normu pogreške:

$$\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} = \min_{\dim(\tilde{H}_r)=r} \|H - \tilde{H}_r\|_{\mathcal{H}_2} \quad (3.3)$$

Uvjeti za optimalnu  $\mathcal{H}_2$  interpolaciju su najbolje opisanu u pol-rezidual raspisu funkcije prijenosa  $H_r(s)$ , za razliku od standardne reprezentacije. Reduciranu funkciju prijenosa  $H_r(s) = C_r(sE_r - A_r)^{-1}B_r$  prikazujemo sa

$$H_r(s) = \sum_{i=1}^r \frac{c_i b_i^T}{s - \lambda_i}, \quad (3.4)$$

gdje smo pretpostavili da su polovi  $\lambda_i$  polu-jednostavni. Da uspostavimo analogiju s tangencijalnim smjerovima u 3.4,  $c_i \in \mathbb{C}^k$  i  $b_i \in \mathbb{C}^m$  nazivamo rezidualnim smjerovima koji odgovaraju polu  $\lambda_i$  u  $H_r(s)$ .

**Teorem 3.2.** *Neka je  $H_r(s)$  u (3.4) optimalna aproksimacija  $r$ -tog reda od  $H(s)$  u odnosu na  $\mathcal{H}_2$  normu. Tada je  $H_r$  tangencijalna interpolacija od  $H$ :*

$$\begin{aligned} H(-\lambda_k)b_k &= H_r(-\lambda_k)b_k, \\ c_k^T H(-\lambda_k) &= c_k^T H_r(-\lambda_k), \\ c_k H'(-\lambda_k)b_k &= c_k H'_r(-\lambda_k)b_k, \end{aligned} \tag{3.5}$$

za  $k = 1, \dots, r$ .

*Dokaz i više možete pronaći u [2].*

*Primjedba 12.* Ovaj teorem nam govori da je bitangencijalna Hermitska interpolacija potrebna da  $H_r$  bude  $\mathcal{H}_2$ -optimalna aproksimacija od  $H$ .

### 3.2 IRKA algoritam za optimalnu $\mathcal{H}_2$ redukciju LTI modela

Prvi problem kod teorema 3.2 i 3.5 jest da su sve tri jednadžbe potrebne za uvjet optimalnosti, u suštini daje uvjete da  $\mathcal{H}_2$  pogreška bude stacionarna u  $H_r$ . U principu, moguće je zadovoljiti uvjete teorema 3.2 s reduciranim modelom koji je ili u sedlastim točkama za  $\mathcal{H}_2$  pogrešku ili čak u lokalnom maksimumu. U praksi je rješavanje jednadžbi iz teorema 3.2. radi iterativno i tijekom izvođenja iteracija algoritam se neće zadržavati u stacionarnim točkama koje nisu lokalni minimumi.

Drugi problem je malo više zabrinjavajući, jer optimalne fiksne točke i njima pridruženi tangencijalni smjerovi ovise o optimalno reduciranom modelu koji će se izračunati i zbog toga nisu poznati unaprijed.

Iterativni racionalni Krylov algoritam iterativno popravljajući interpolacijske točke i tangencijalne smjerove na sljedeći način: koristeći inicijalni odabir interpolacijskih točaka  $\{\sigma_i\}_{i=1}^r$  te tangencijalnih smjerova  $\{b_i\}_{i=1}^r$ ,  $\{c_i\}_{i=1}^r$ , posredni reducirani model  $H_r(s)$  je izgrađen koristeći (3.4)  $H_r(s)$  je bitangencijalan Hermitski interpoland za trenutne interpolacijske podatke.

Tada je reprezentacija pomoću polova za  $H_r(s)$  dana s  $H_r(s) = \sum_{i=1}^r \frac{\hat{c}_i \hat{b}_i^T}{s - \lambda_i}$  (ovo uključuje rješavanje malog  $r \times r$  generaliziranog problema svojstvenih vrijednosti). Polovi od  $H_r(s)$  se koji nalaze na imaginarnoj osi postaju nove interpolacijske točke, a lijevi/desni rezidualni smjerovi postaju novi lijevi/desni tangencijalni smjerovi:

$$\sigma_i \leftarrow -\lambda_i, \quad b_i \leftarrow \hat{b}_i, \quad i \quad c_i \leftarrow \hat{c}_i, \quad \text{za} \quad i = 1, \dots, r,$$

koji definiraju novi set interpolacijskih podataka. Novi bitangencijalnu Hermitovi interpolant za originalni sistem je izgrađen i procedura se nastavlja dok procedure ne konvergira.

**Algoritam 1** (IRKA algoritam).

- 1: Odaberi inicijalni set od  $r$  pomaka  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ , i dva seta njima pridruženih tangencijalnih smjerova  $b_1, \dots, b_r$ ,  $c_1, \dots, c_r$ . Sva tri seta moraju biti zatvorena s obzirom na kompleksnu konjugaciju.
- 2:  $V_r = [(\sigma_1 E - A)^{-1} B b_1 \cdots (\sigma_r E - A)^{-1} B b_r]$
- 3:  $W_r = [(\sigma_1 E^T - A^T)^{-1} C^T c_1 \cdots (\sigma_r E^T - A^T)^{-1} C^T c_r]$
- 4: Dok (ne konvergira)

- 5:  $A_r = W_r^T A V_r$ ,  $E_r = W_r^T E V_r$ ,  $B_r = W_r^T B$ ,  $C_r = C V_r$   
 6: Izračunaj reprezentaciju pomoću polova za  $H_r(s)$  :

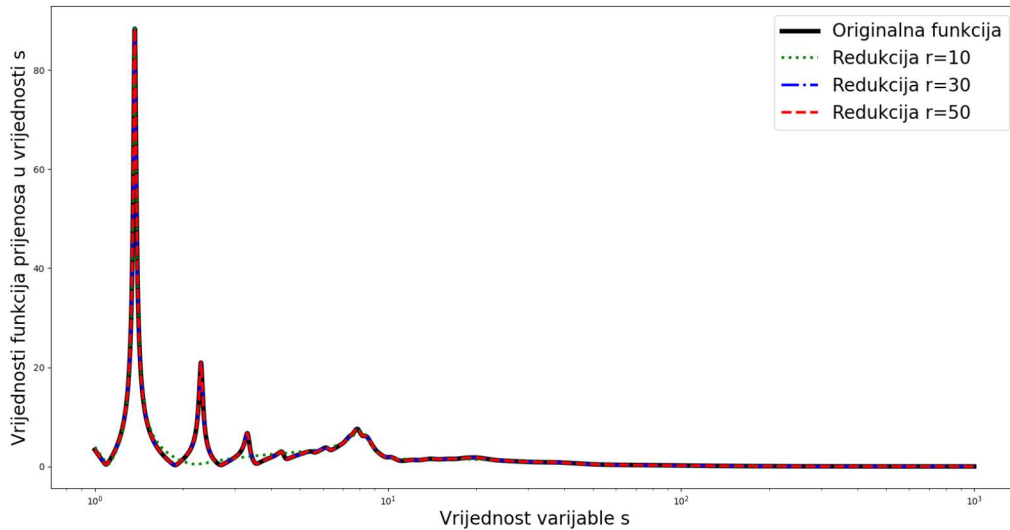
$$H_r(s) = C_r (sE_r - A_r)^{-1} B_r = \sum_{i=1}^r \frac{\hat{c}_i \hat{b}_i^T}{s - \lambda_i}$$

- 7:  $\sigma_i \leftarrow -\lambda_i$ ,  $b_i \leftarrow \hat{b}_i$ ,  $c_i \leftarrow \hat{c}_i$ , za  $i = 1, \dots, r$   
 8:  $V_r = [(\sigma_1 E - A)^{-1} B b_1 \cdots (\sigma_r E - A)^{-1} B b_r]$   
 9:  $W_r = [(\sigma_1 E^T - A^T)^{-1} C^T c_1 \cdots (\sigma_r E^T - A^T)^{-1} C^T c_r]$   
 10:  $A_r = W_r^T A V_r$ ,  $E_r = W_r^T E V_r$ ,  $B_r = W_r^T B$ ,  $C_r = C V_r$

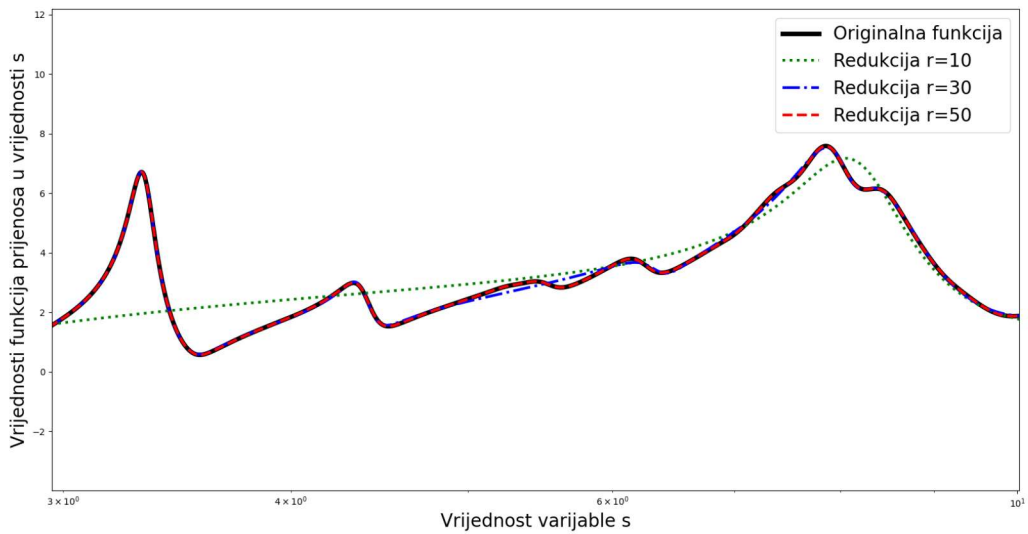
Uvjet konvergencije je uobičajeno gledanje norme pomaka nultočki/polova ili norme pomaka s obzirom na normu nultočki/polova funkcije prijenosa.

Iako se dosta zna o konvergenciji IRKA-e, mnogo toga još nije poznato ni istraženo. Za nekim značajnim izuzetcima, konvergencijsko ponašanje IRKA-e je ponekad upitno. Konvergencija je obično razumno brza i generalno reducirani model je skoro jednako dobar kao ostali koje je moguće naći za odabrani red.

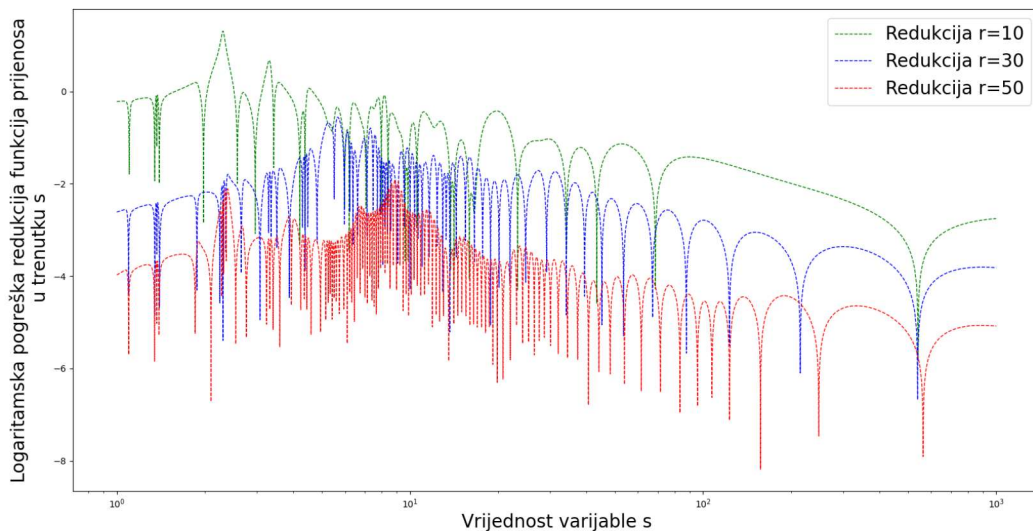
**Primjer 1.** Pogledajmo rad IRKA algoritma (Algoritam 1) na primjeru grede učvršćene s jedne strane, nosač, sa stranice MOR Wiki, [11]. Imamo sustav  $[A, B, C, 0]$ , s vrijednostima  $n = 348$  te  $m = k = 1$ , iz ovog možemo zaključiti da je  $E$  jedinična matrica. Koristeći IRKA algoritam reducirajmo sustav na dimenzije  $r = 10$ ,  $r = 30$  i  $r = 50$  te usporedimo grafove funkcija prijenosa, pogreške redukcije i maksimalnu pogrešku.



Slika 2: Grafički prikaz funkcija prijenosa na od  $10^0$  do  $10^3$



Slika 3: Grafički prikaz funkcija prijenosa na od  $3 \cdot 10^0$  do  $10^1$



Slika 4: Grafički prikaz pogreške, u  $\log_{10}$ , reduciranih funkcija prijenosa s obzirom na originalnu funkciju prijenosa

*Iz grafova možemo zaključiti da porastom dimenzije redukcije preciznost raste, redukcija na  $r = 30$  izdaleka izgleda da dobro aproksimira na većem segmentu, no ako pogledamo na nekom manjem segmentu možemo pronaći područja na kojima reducirana funkcija prijenosa ne aproksimira originalnu funkciju prijenosa. Ako izračunamo maksimalne logaritamske*



pogreške za  $r = 10$ ,  $r = 20$ ,  $r = 30$ ,  $r = 40$  i  $r = 50$  dobijemo

$$\begin{aligned}\max_{s \in \mathbb{R}} \log(H(s) - H_{10}(s)) &= 20.427, \\ \max_{s \in \mathbb{R}} \log(H(s) - H_{20}(s)) &= 1.0868, \\ \max_{s \in \mathbb{R}} \log(H(s) - H_{30}(s)) &= 0.2774, \\ \max_{s \in \mathbb{R}} \log(H(s) - H_{40}(s)) &= 0.02895, \\ \max_{s \in \mathbb{R}} \log(H(s) - H_{50}(s)) &= 0.01214.\end{aligned}$$

Iz maksimalnih pogrešaka možemo zaključiti da je s obzirom na promjenu pogreške iz  $r = 40$  u  $r = 50$  da je redukcija na  $r = 50$  dovoljno dobra redukcija za originalni sustav.

### 3.3 IRKA algoritam za pLTI

Kao što je objašnjeno u poglavlju 3.2 računanje redukcije za pLTI se računa konkatencijom matrica redukcije  $V_i$  i  $W_i$  za skup parametara od  $K$  parametara iz prostora parametara  $p_i \in \mathcal{P}$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Želimo da naše matrice redukcije  $V_r \in \mathbb{C}^{n \times (rK)}$  i  $W_r \in \mathbb{C}^{n \times (rK)}$  imaju kao i za bilo koju drugu redukciju imaju mnogo manju dimenziju, tj. da vrijedi  $rK \ll n$ , pri čemu je  $r$  dimenzija redukcije jednog parametra.

Za dani skup parametara redukcije  $\Omega_{red} = \{p_1, \dots, p_K\}$  računamo matrice  $V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_K}$ , te matrice  $W_{p_1}, W_{p_2}, \dots, W_{p_K}$  primjenom IRKA algoritama (algoritam 1) na sustav u točkama redukcije iz  $\Omega_{red}$ . Nakon toga dobivene matrice konkatencijom u matrice  $V_r$  i  $W_r$  na način naveden u (2.4), te primjenom na matrice  $A(p)$ ,  $E(p)$ ,  $B(p)$  i  $C(p)$  te reduciranjem na način naveden u (2.5) dobivamo reducirane matrice  $A_r(p)$ ,  $E_r(p)$ ,  $B_r(p)$  i  $C_r(p)$ .

**Algoritam 2** (Redukcija reda pLTI sustava IRKA algoritmom s danim parametrima redukcije).

- 1: Odaberi skup parametara redukcije  $\Omega_{red}$ .
- 2: Konstruiraj prazne matrice  $V_r$  i  $W_r$ .
- 3: Za svaki parametar  $p_i$  iz skupa  $\Omega_{red}$ :
- 4:     Izračunaj  $V_{p_i}$  i  $W_{p_i}$  korištenjem algoritma 1 na sustav  $[A(p_i), E(p_i), B(p_i), C(p_i), 0]$ ,
- 5:     Konkatenciraj  $V_{p_i}$  s desna na  $V_r$  i  $W_{p_i}$  s desna na  $W_r$ .
- 6: Izračunaj  $A_r(p)$ ,  $E_r(p)$ ,  $B_r(p)$  i  $C_r(p)$ .

U slučaju da želimo proširiti naš skup parametara, ako nismo zadovoljni s redukcijom dobivenom primjenom algoritma 2 na isti, to možemo napraviti "greedy" izborom parametara. Ovaj izbor parametara od nas zahtijeva da izračunamo pogreške reducirane funkcije prijenosa s obzirom na originalnu funkciju prijenosa, tj. zahtijeva računanje  $\|H(s) - H_r(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ , za svaki parametar  $p_i$  iz skupa  $\mathcal{P}/\Omega_{red}$ . Za novi parametar redukcije odabiremo onaj parametar  $p_i$  za kojeg vrijedi da je njegova pogreška najveća, u slučaju više takvih parametara odabiremo prvi od mogućih parametara, te za taj parametar računamo matrice  $V$  i  $W$  koje konkatenciramo s desna na matrice  $V_r$  i  $W_r$ . Ovaj postupak ponavljamo sve dok nismo zadovoljni s dobivenim rezultatima.

**Algoritam 3** (Greedy redukcija reda pLTI sustava koristeći IRKA algoritam).

- 1: Odaberi početni skup parametara  $\Omega_{red}$ .

- 2: Izračunaj matrice  $V_r$  i  $W_r$  primijenom algoritma 2 na skup parametara  $\Omega_{red}$ .
- 3: Dok (uvjet zaustavljanja):
- 4: Odaberi  $p_m \in \mathcal{P}/\Omega_{red}$  za kojeg je pogreška  $\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_\infty}$  najveća,
- 5: Izračunaj matrice  $V_{p_m}$  i  $W_{p_m}$  koristeći IRKA algoritam i konkateniraj ih na matrice redukcije  $V_r$  i  $W_r$ .
- 6: Izračunaj  $A_r(p)$ ,  $E_r(p)$ ,  $B_r(p)$  i  $C_r(p)$ .

Neki od uvjeta zaustavljanja traženja novih parametara redukcije može biti broj parametara redukcije, ili točnost sustava, tj. najveća pogreška sustava ne prelazi toleranciju. Potrebno je napomenuti da  $\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_\infty}$  može biti vrlo zahtjevno za računanje.

Pokažimo upotrebu algoritma 2 na primjeru, a zbog zahtijevnosti algoritma 3, njega ćemo samo ilustrirati.

**Primjer 2.** *Uzmimo primjer "Mass-Spring-Damper" sa stranice MOR Wiki, [10], sa dimenzijom  $N = 150$ , masom opruga  $M_m = 1$ , konstantom opruga  $k = 2.1$ , a konstanta prigušivača  $p \in \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P} = [10, 11, \dots, 100]$ , će biti naš parametar po kojem provodimo parametarsku redukciju.*

*Prema tome imamo matrice*

$$M_m = 1 \cdot I_N,$$

$$K_m = 2.1 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D_m = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ 0 & M_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ K_m & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N},$$

$$A(\pi) = A_0 + \pi_1 \cdot A_1,$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N},$$

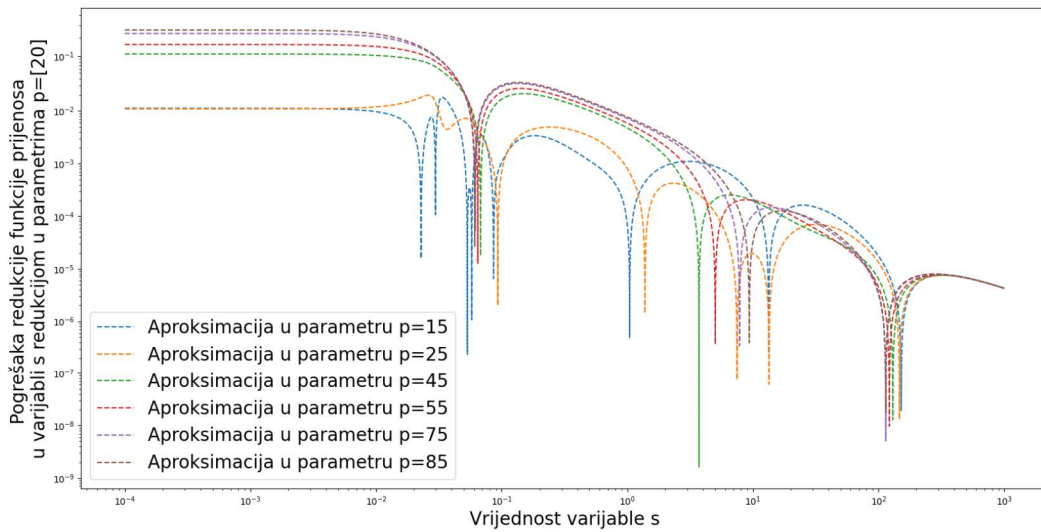
$$C = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Ove nam matrice daju pLTI sustav

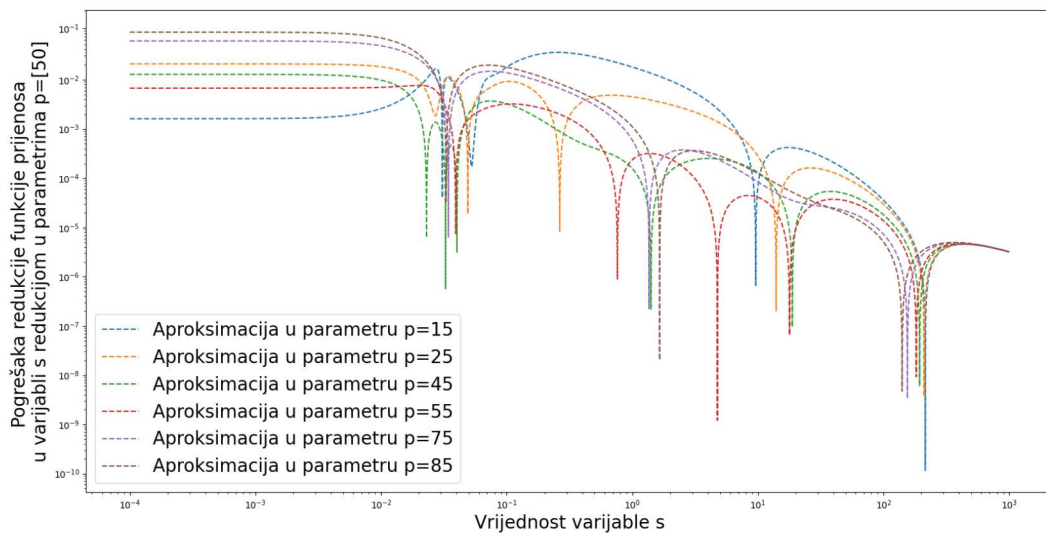
$$\begin{cases} E(p)\dot{x}(t;p) = A(p)x(t;p) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t;p), \end{cases} \quad \text{uz } x(0;p) = x_0.$$

Ovaj model ima dimenzije  $n = 200$ ,  $m = 1$ , i  $q = 1$ , te ćemo reducirati dimenziju  $n$  na dimenziju  $r = 3$ .

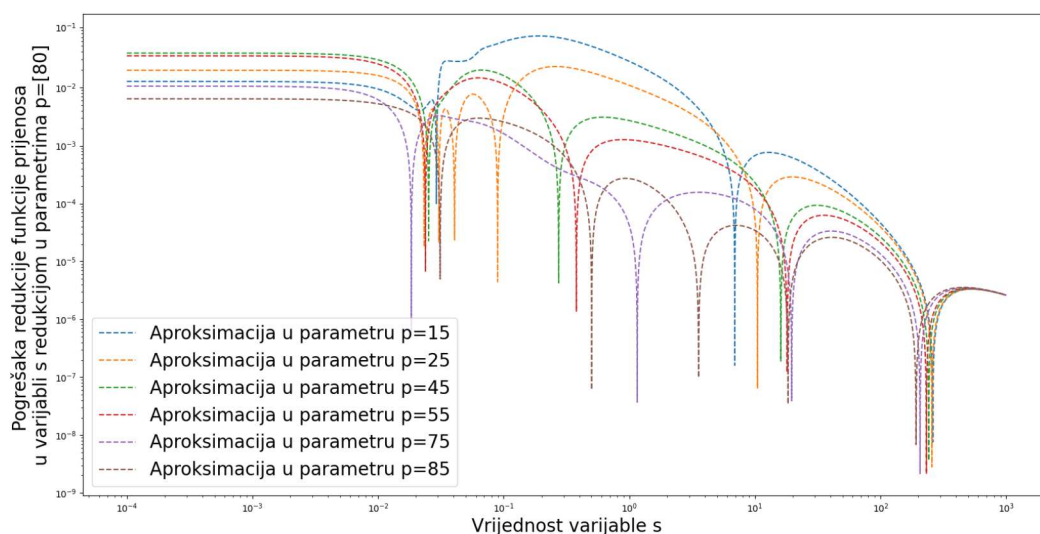
Pogledajmo prvo redukcije u parametarima  $p_{red} = 20$ ,  $p_{red} = 50$  i  $p_{red} = 80$  i njihove aproksimacije u parametrima  $p = 15$ ,  $p = 25$ ,  $p = 45$ ,  $p = 55$ ,  $p = 75$  i  $p = 85$ .



Slika 5: Grafički prikaz pogreške redukcije u parametru  $p_{red} = 20$



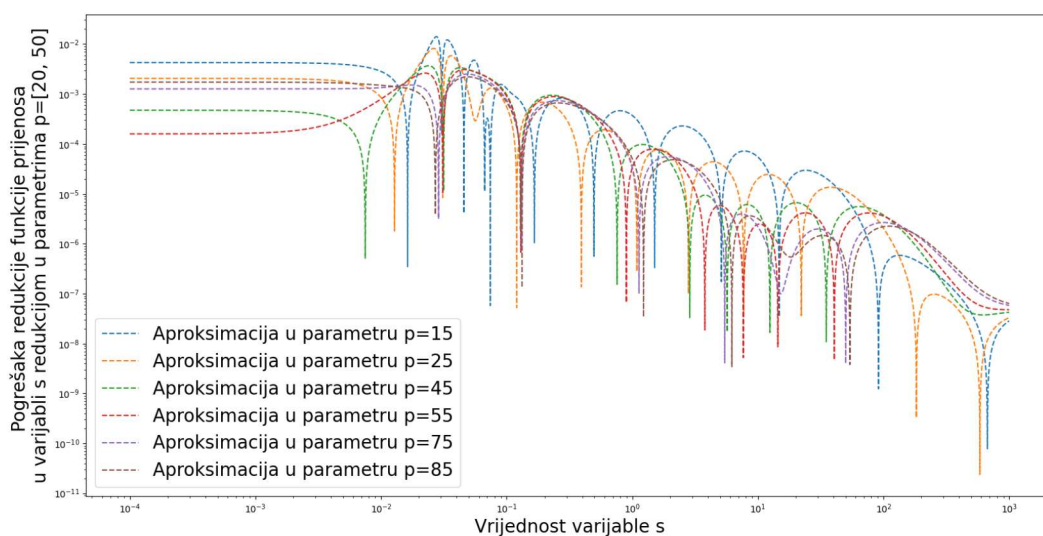
Slika 6: Grafički prikaz pogreške redukcije u parametru  $p_{red} = 50$



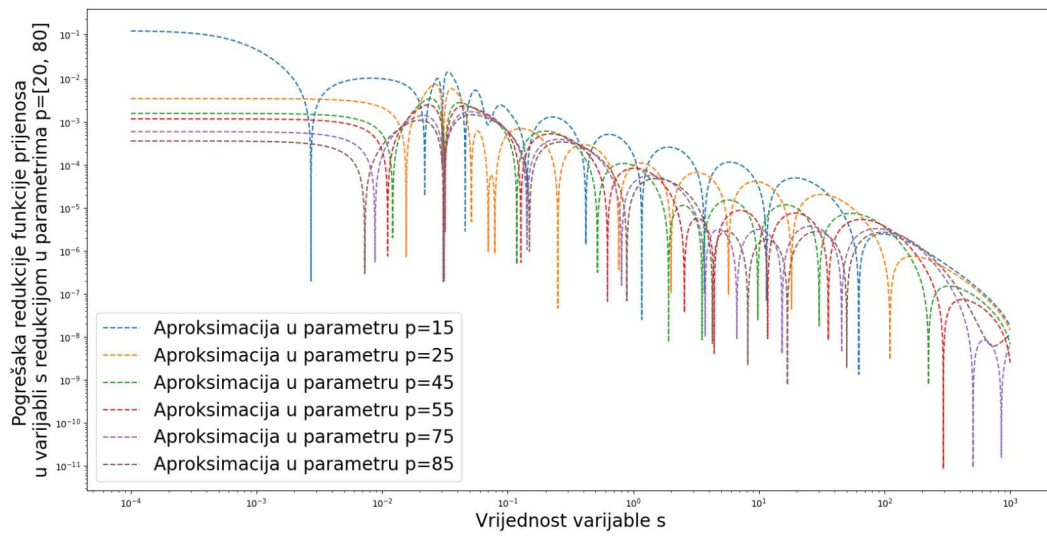
Slika 7: Grafički prikaz pogreške redukcije u parametru  $p_{red} = 80$

Na slikama 5 do 7 vidimo ponašanje pogreške funkcije prijenosa za parametre  $p = 15$ ,  $p = 25$ ,  $p = 45$ ,  $p = 55$ ,  $p = 75$  i  $p = 95$  u parametrima redukcije  $p_{red} = 20$ ,  $p_{red} = 50$  i  $p_{red} = 80$ . Na slici 5,  $p_{red} = 20$ , i na slici 7,  $p_{red} = 80$ , najbolje se vidi da je ponašanje reducirane funkcije prijenosa najbolje aproksimirano oko točaka redukcije. Za velike parametre  $p$  iz slika 5 do 7 vidimo da točnost reducirane funkcije s obzirom na originalnu funkciju prijenosa brzo raste s obzirom na manje parametre  $p$ .

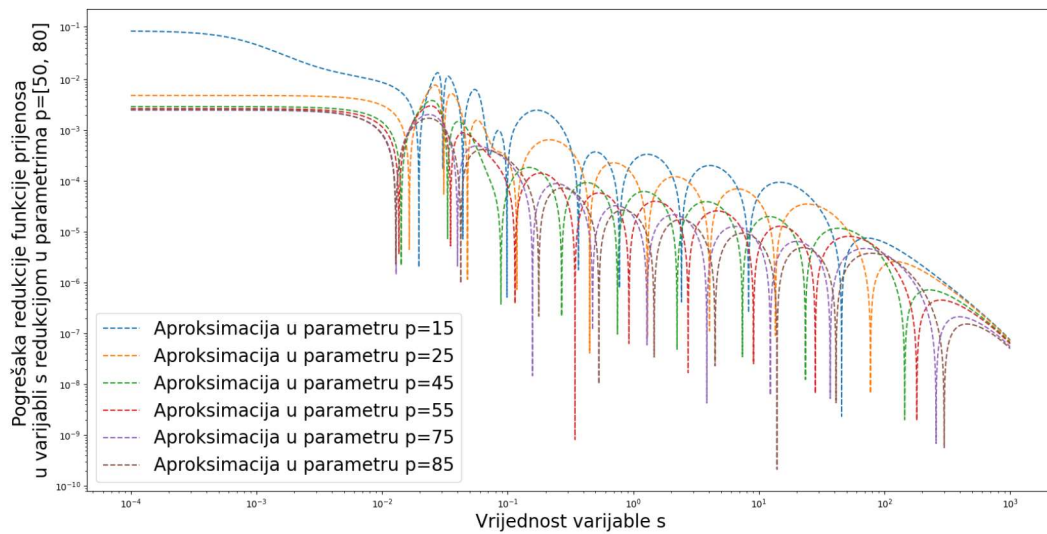
Pogledajmo sada što se dogodi s reduciranom funkcijom prijenosa kada napravimo redukciju u više od jedne točke parametra, tj. pogledajmo vrijednosti u parametrima  $p_{red} = [20, 50]$ ,  $p_{red} = [20, 80]$ ,  $p_{red} = [50, 80]$ , i  $p_{red} = [20, 50, 80]$ .



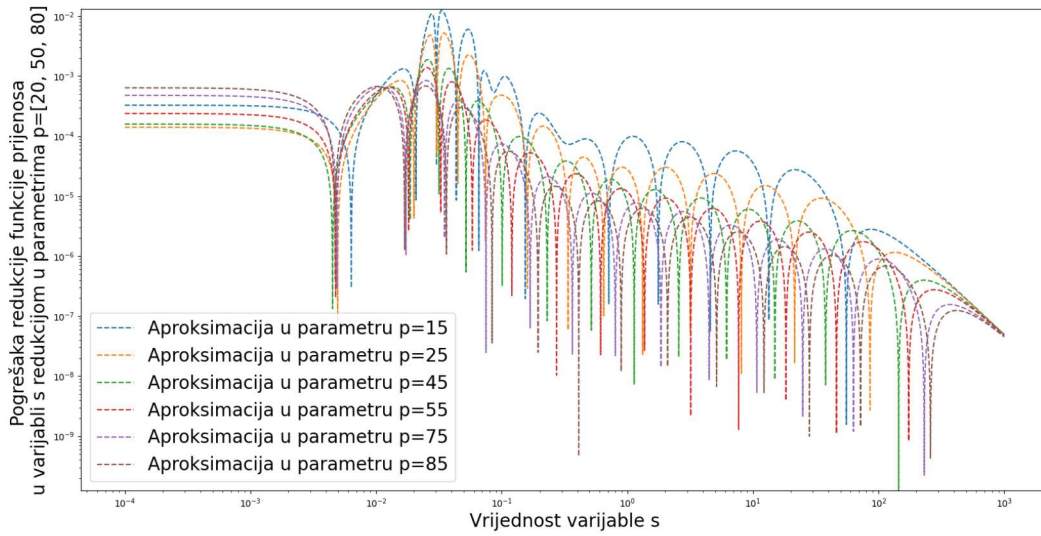
Slika 8: Grafički prikaz pogreške redukcije u parametru  $p_{red} = [20, 50]$



Slika 9: Grafički prikaz pogreške redukcije u parametru  $p_{red} = [20, 80]$

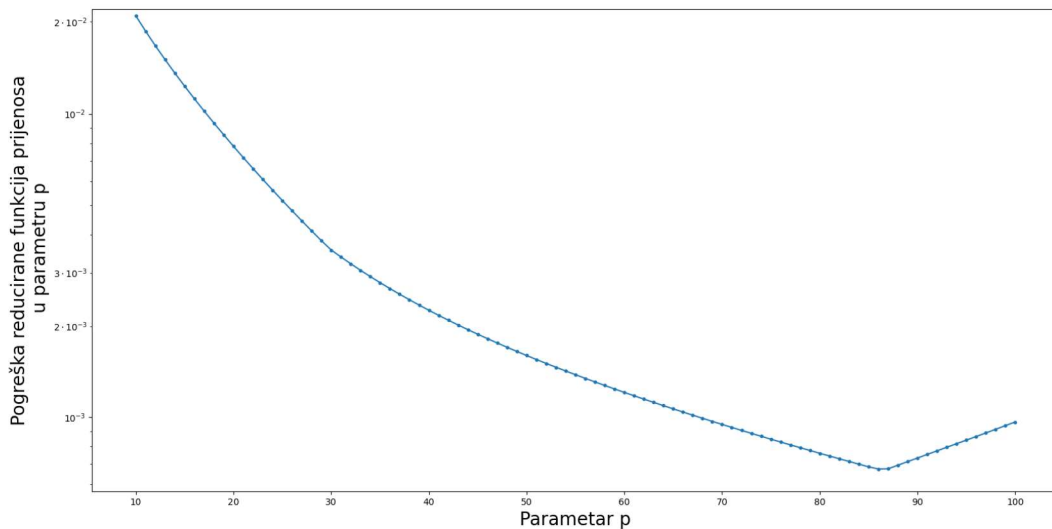


Slika 10: Grafički prikaz pogreške redukcije u parametru  $p_{red} = [50, 80]$



Slika 11: Grafički prikaz pogreške redukcije u parametru  $p_{red} = [20, 50, 80]$

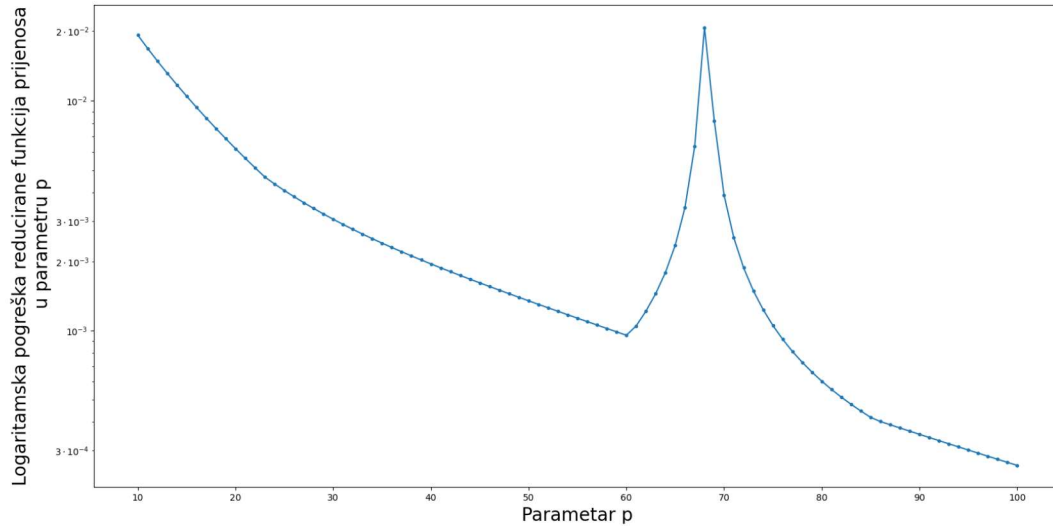
Iz slika 8 do 11 možemo zaključiti kako s porastom broja točaka aproksimacije redukcije dobivamo bolju aproksimaciju funkcije prijenosa originalne funkcije na cijeloj domeni  $\mathcal{P}$ . Pogledajmo sada na ovom primjeru, uz početne parametre redukcije 20, 50 i 80, maksimalne pogreške reduciranih funkcija prijenosa s obzirom na originalne funkcije prijenosa primjenom algoritma 3 uz uvjet zaustavljanja traženu maksimalnu pogrešku redukcije u normi  $\mathcal{H}_\infty$ , na cijelom prostoru parametara  $\mathcal{P}$ , manju  $10^{-2}$ , tj.  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|H(p) - H_r(p)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 10^{-2}$ .



Slika 12: Maksimalne pogreške reducirane funkcije prijenosa na segmentu  $[10^{-4}, 10^3]$  u točkama redukcije 20, 50 i 80 na cijeloj domeni  $\mathcal{P}$

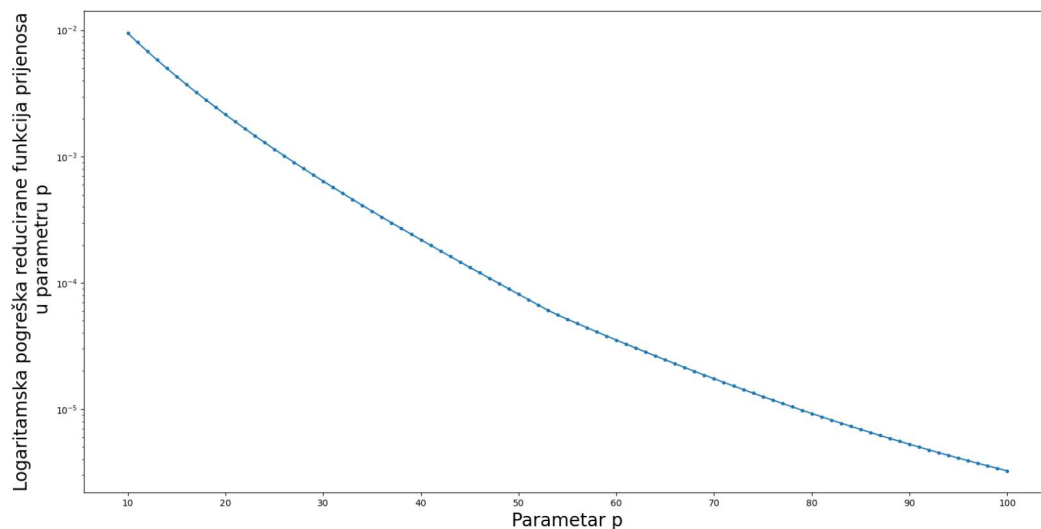
Slika 12 prikazuje maksimalne pogreške reducirane funkcije prijenosa, u točkama redukcije 20, 50 i 80, s obzirom na originalnu funkciju prijenosa po  $s$  na segmentu  $[10^{-4}, 10^3]$ , gdje

je ovaj segment računat po točkama u logaritamskoj ekvidistantnoj podjeli u 10000 točaka, u normi 2, tj.  $\max_{s \in [10^{-4}, 10^3]} \|H(s) - H_r(s)\|_2 \approx \|H(s) - H_r(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ . Iz ove slike vidimo da je u parametru  $p = 10$  pogreška reducirane funkcije prijenosa maksimalna na segmentu  $[10^{-4}, 10^3]$ ,  $2.0887 \cdot 10^{-2}$ , pa prema algoritmu 3,  $p=10$  je novi parametar redukcije i radimo redukciju u točkama 20, 50, 80 i 10.



Slika 13: Maksimalne pogreške reducirane funkcije prijenosa na segmentu  $[10^{-4}, 10^3]$  u točkama redukcije 20, 50, 80 i 10 na cijeloj domeni  $\mathcal{P}$

Iz slike 13 vidimo promjene dobivene dodavanjem parametra 10 u parametre redukcije, vidimo i da se u parametru 68 dogodilo pogoršanje s novom maksimalnom pogreškom,  $2.072 \cdot 10^{-2}$ , što još uvijek ne zadovoljava uvjet zaustavljanja i nastavljamo s novim parametrom redukcije 68.



Slika 14: Maksimalne pogreške reducirane funkcije prijenosa na segmentu  $[10^{-4}, 10^3]$  u točkama redukcije 20, 50, 80, 10 i 60 na cijeloj domeni  $\mathcal{P}$

Iz slike 14 vidimo da je odstupanje parametara u desnom djelu grafa značajno smanjeno te da je maksimalna pogreška,  $9.471 \cdot 10^{-3}$ , manja od naše zadane tolerancije i algoritam 3 tu staje i imamo krajnju redukciju originalnog sustava u parametrima 10, 20, 50, 68 i 80. Moramo napomenuti da je ovdje uzeta pogreška računata u  $\mathcal{H}_\infty$  normi i to sa aproksimativnim pristupom, no ovo ilustrira osnovnu ideju greedy pristupa za redukciju reda parametarskog sustava koristeći IRKA algoritam.



## Literatura

- [1] A. C. Antoulas, C. A. Beattie, S. Gugercin,  $\mathcal{H}_2$  Model reduction for large-scale linear dynamical systems, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol. 30, Br. 2, (2008), str. 609-638.
- [2] A. C. Antoulas, C. A. Beattie, S. Gugercin, Interpolatory Methods for Model Reduction. SIAM, Computational Science and Engineering, 2020.
- [3] P. J. Antsaklis, A. N. Michel, A Linear Systems Primer, Birkhauser Boston, 2007.
- [4] P. Benner, S. Gugercin, K. Willcox, A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems, SIAM Review, Vol. 57, Br. 4, (2015), str. 483-531.
- [5] B. A. Francis - A course in  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory-Springer, 1987.
- [6] J. Hespanha, Linear Systems Theory, Princeton University Press, 2009.
- [7] M. Petrinović, Teorem o reziduumima i primjene, Završni rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.
- [8] Ž. Salinger, Laplaceova transformacija. Završni rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2011.
- [9] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. Robust and Optimal Control, Prentice Hall, 1995.
- [10] <https://morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/index.php/Mass-Spring-Damper>, Listopad, 2022.
- [11] [https://morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/index.php/Clamped\\_Beam](https://morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/index.php/Clamped_Beam), Listopad, 2022.

# Sažetak

U ovom radu objasniti ćemo parametarske vremenski invarijantne (LTI) sustave, svojstva LTI i parametarskih LTI modela sustava. Uvest ćemo pojam redukcije sustava, svojstva redukcije dimenzije sustava, te računanje pogreške između originalnog i reduciranog sistema. Objasniti ćemo interpolacijske projekcije za reduciranje sustava i iterativni racionalni Krylov algoritam (IRKA) te primjenu istog na redukciju LTI i parametarskih LTI sustave, te ćemo na numeričkim primjerima ilustrirati efikasnost numeričkih metoda.

## Ključne riječi:

LTI, parametarski LTI, redukcija,  $\mathcal{H}_2$  norma, interpolacijske redukcije, IRKA algoritam

# Parametric model order reduction using IRKA algorithm

## Abstract

In this work we will explain parametric linear time invariant (LTI) systems and properties of LTI and parametric LTI systems. We will introduce the term of reduction of system dimensions, its properties, and calculating the errors between the original and reduced system. We will explain interpolatory projection methods for system reduction and iterative rational Krylov algorithm (IRKA) and its application on LTI and parametric LTI systems, and we will illustrate the efficiency of numerical methods on numerical examples.

## Key words:

LTI, parametric LTI, reduction of system dimensions,  $\mathcal{H}_2$  norm, interpolatory reduction, IRKA algorithm

## Životopis

Rođen sam 19. 1. 1999. godine u Našicama. Osnovnu školu završio sam 2013. godine, nakon čega sam upisao Srednju školu Isidora Kršnjavog u Našicama, smjer prirodoslovno matematička gimnazija. Gimnaziju završavam 2017. godine, te tada upisujem Sveučilišni preddiplomski studij Matematike i računarstva na Odjelu za Matematiku u Osijeku. Studij završavam 2020. godine sa završnim radom na temu "Upravljivost LTI sustava", pod mentorstvom izv. prof. dr. sc Zorana Tomljanovića. Iste godine upisujem Sveučilišni diplomski studij Matematike i računarstva, na Odjelu za matematiku.