Nizovi u nastavi matematike te provjera kompetentnosti budućih nastavnika matematike za podučavanje tog područja

Gurdon, Ana

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Gurdon

Nizovi u nastavi matematike te provjera kompetentnosti budućih nastavnika matematike za podučavanje tog područja

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Gurdon

Nizovi u nastavi matematike te provjera kompetentnosti budućih nastavnika matematike za podučavanje tog područja

Diplomski rad

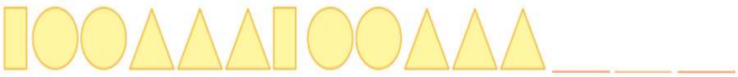
Mentor: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2023.

Sadržaj

Uvod

Učenici se već na samim početcima svog osnovnoškolskog obrazovanja susreću s pojmom niza, iako ga tada još ne definiraju. U nižim razredima osnovne škole učenici se s pojmom niza susreću u obliku nabrajanja uzastopnih elemenata gdje je njihov zadatak zaključiti koji će se element sljedeći pojaviti u nizu.



Slika 1: Primjer zadatka u kojemu učenici trebaju nastaviti niz

Takvi zadatci, osim što su korisni za razumijevanje pojma niza, učenicima pomažu u razvoju logičkog razmišljanja. U višim razredima se pojam niza nadograđuje kompleksnijim zadatcima. Kroz ovaj rad, cilj nam je pružiti uvid u važnost proučavanja nizova u osnovnoj i srednjoj školi te istaknuti pedagoške strategije koje doprinose uspješnom učenju i razumijevanju nizova.
Rad je podijeljen u četiri dijela. U prvom dijelu rada ćemo iz Predmetnog kurikuluma za nastavni predmet matematike istaknut odgojno-obrazovne ishode koji su vezani uz koncept nizova. Zatim ćemo analizirati na koji način su nizovi predstavljeni u školskim udžbenicima te kakvi se zadatci zadaju učenicima. Na samom kraju ovog rada, prikazat ćemo rezultate istraživanja provedenog među studentima završne godine diplomskog studija nastavničkog studija matematike i informatike. Cilj istraživanja je bio provjeriti koliko i sami budući učitelji i nastavnici matematike razumiju pojam niza te limes niza.

1 Aspekti i osnovne ideje za pojam niza i limesa niza

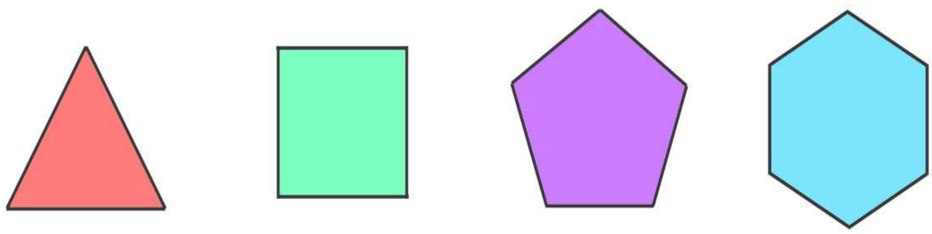
Na samom početku ovog poglavlja definirat ćemo dva pojma - aspekt i osnovna ideja matematičkog pojma.
Aspekt matematičkog pojma odnosi se na bitnu karakteristiku koja može koristiti za njegovu matematičku karakterizaciju. Svaki aspekt matematičkog pojma pruža određeno gledište na određeni pojam, a razumijevanje aspekata pomaže učenicima da steknu cjelovitiju sliku o raznim matematičkim konceptima i njihovim svojstvima. Za jedan matematički pojam postoje različiti aspekti, što ćemo vidjeti u nastavku ovoga rada.
Osnovna ideja matematičkog pojma odnosi se na interpretaciju koja daje značenje tom pojmu. Ona nam služi za temeljno razumijevanje pojma te pomaže da ga primijenimo prilikom rješavanja različitih problema. Osnovnu ideju možemo promatrati s dva različita stajališta, preskriptivnog i deskriptivnog. Preskriptivni pristup je fokusiran na "pravilno" razumijevanje matematičkih pojmova te propisuje kako bi matematički pojam pravilno trebao biti interpretiran. Za razliku od preskriptivnog, deskriptivni pristup je usmjeren na opisivanje i razumijevanje kako učenici interpretiraju određene matematičke pojmove, bez obzira jesu li te intrepretacije ispravne ili ne.

1.1 Pojam niza

1.1.1 Aspekti za pojam niza

Uz pojam niza vežemo tri različita aspekta. To su aspekt nabrajanja, aspekt pridruživanja te aspekt iteracije. Svaki od njih ćemo detaljnije objasniti u nastavku.

Aspekt nabrajanja
Aspekt nabrajanja kod niza odnosi se na način promatranja niza kao uzastopnog popisa, liste ili redanja brojeva ili objekata. Prilikom korištenja aspekta najbrajanja, svaki element niza se izdvaja i zapisuje jedan za drugim te se na taj način stvara jasna vizualna reprezentacija niza.
S ovim aspektom se učenici prvo susreću te im on pomaže da razumiju redoslijed i raspored elemenata u nizu te da uoče određenu pravilnost u njegovoj strukturi.
Nizanje geometrijskih likova prema različitim svojstvima ili poredak prirodnih brojeva samo su neki od primjera aspekta nabrajanja.



Slika 2: Nizanje geometrijskih likova prema broju stranica i vrhova

Aspekt nabrajanja primjenjiv je i u raznim svakodnevnim situacijama, koje nisu vezane uz matematiku. Primjerice, nabrajanje dana u tjednu te slaganje karata prema njihovim vrijednostima.

Slika 3: Slaganje karata prema njihovim vrijednostima

Aspekt pridruživanja
Kod ovog aspekta, niz promatramo kao funkciju $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ koja svakom prirodnom broju pridružuje realan broj, odnosno vrijednost funkcije $a(n)$. Vrijednost funkcije $a(n)$ nazivamo n-ti ili opći član niza i označavamo a_n. Niz označavamo sa (a_n).
Nizovi su najčešće zadani općim članom a_n, pomoću kojega možemo izračunati bilo koji član toga niza.

Primjer 1. *Niz je zadan formulom $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Odredimo prvih 5 članova toga niza.*

$$\begin{array}{cccccc} \text{n} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_n & 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{6}{5} & \frac{5}{3} \end{array}$$

Nizovi osim formulom, odnosno općim članom, mogu biti zadani i opisno.

Primjer 2. *Niz a_n je niz svih prostih brojeva od manjih prema većima. Odredite koji je 5.član niza.*
Zapišimo prvih nekoliko prostih brojeva poredanih od najmanjeg prema većima pridruživši im redni broj na kojemu se nalaze u nizu:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{n} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_n & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 \end{array}$$

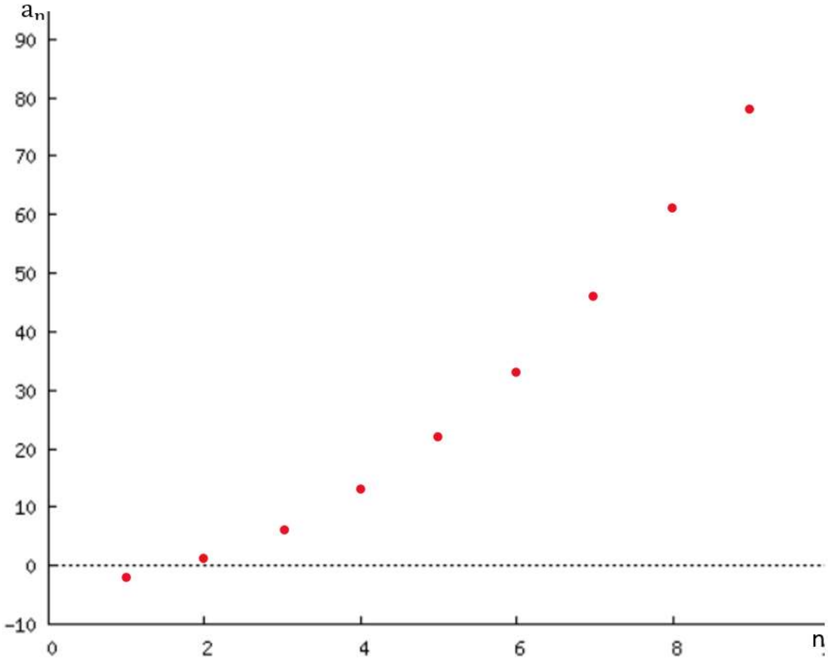
Iz gore navedenog prikaza, lako možemo uočiti da je $a_5 = 11$

Svaki niz možemo prikazati grafički i tablično.

Primjer 3. *Niz $n \to a_n$, pri čemu je $a_n = n^2 - 3$ prikažite pomoću tablice i grafa.*
Zapišimo najprije prvih nekoliko članova zadanog niza u tablicu:

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
a_n	*-2*	*1*	*8*	*15*	*24*	*33*	*46*	*61*	*78*

Sada ćemo, dobivene podatke u tablici prikazati grafički:



Slika 4: Grafički prikaz prvih nekoliko članova niza

Osim gore navedenih matematičkih primjera, aspekt pridruživanja za niz prisutan je i u stvarnim životnim situacijama koje ne uključuju matematiku. Navest ćemo nekoliko primjera:

1. Mjesec $\to$ ukupna količina padalina
2. Dob $\to$ prosječna visina
3. Godina $\to$ prosječan broj posjetitelja

Aspekt iteracije (Rekurzivni aspekt)
Posljednji aspekt koji ćemo objasniti je apekt iteracije. Ukoliko se članovi niza računaju pomoću prethodnih članova, tada se radi o aspektu iteracije. Svaki element, osim prvih nekoliko, možemo promatrati kao funkciju prethodnih elemenata. Najpoznatiji rekurzivno zadani niz je Fibbonaccijev niz.

Primjer 4. *Fibbonaccijev niz*

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \text{ za } n \in \mathbb{N}$$

U ovome nizu svaki član, osim prva dva, možemo promatrati kao funkciju prethodna dva elementa:

$$a_{n+2} = f(a_n, a_{n+1})$$

Izračunajmo prvih nekoliko elemenata niza:

$$\begin{gathered} a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ \vdots \end{gathered}$$

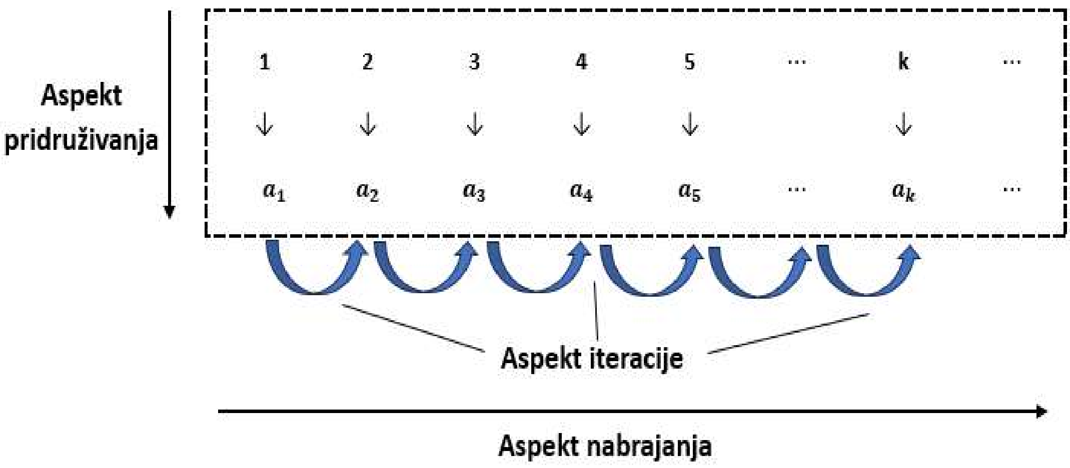
Pogledajmo sada jedan nematematički primjer:

Primjer 5. *Pretpostavimo da određene bakterije mogu udvostručiti svoju veličinu, a zatim se podijeliti svakih sat vremena. Napišite rekurzivnu formulu za opći član niza koji opisuje rast ove vrste bakterija. Neka $a_1 = 430$ predstavlja početni broj prisutnih bakterija.*
Na početku ima 430 bakterija. Nakon jednog sata, broj bakterija se udvustručio te se povećao na 860, nakon još jednog sata dobiveni broj se ponovno udvostručio te sada ima 1720 bakterija itd. Možemo vidjeti kako ćemo broj bakterija nakon određenog broja sati dobiti tako da broj bakterija prethodnog sata pomnožimo s 2. Prema tome, broj bakterija nakon n sati možemo promatrati kao rekurzivni niz:

$$a_1 = 430,\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

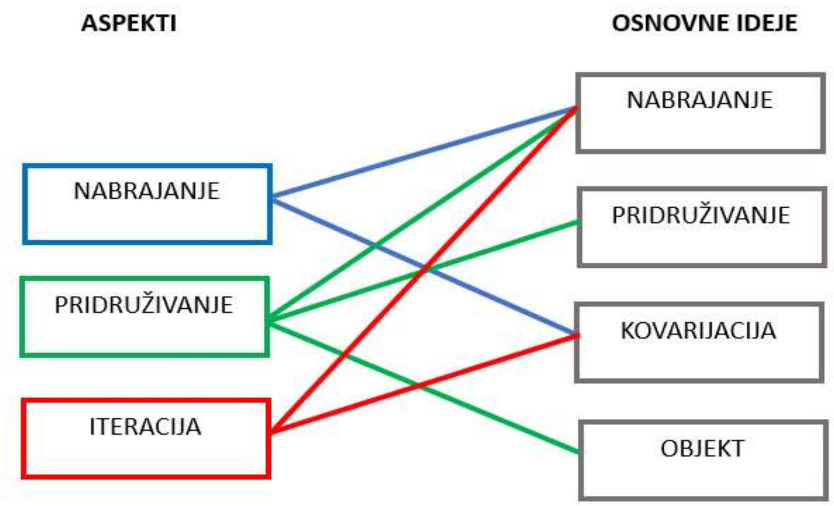
Osim u biologiji, rekurzivne nizove primjenjujemo i u financijskoj matematici prilikom obračuna složenih kamata na depozite te izračuna godišnje djelomične otplate kredita.

Svaki od navedenih aspekata ima bitnu ulogu u nastavi matematike jer ističu različita svojstva niza te svaki od njih koncept niza prikazuje s različitih gledišta, što se može prikazati i na slikovit način:



1.1.2 Osnovne ideje za pojam niza

Svaki od prethodno navedenih aspekata vežemo uz određene osnovne ideje. Razlikujemo četiri osnovne ideje za pojam niza - *nizanje, pridruživanje, kovarijacija, objekt.* Ispod možemo vidjeti vizualni prikaz veza između apsekata te osnovnih ideja za pojam niza:



Slika 5: Veze između aspekata i osnovnih ideja za pojam niza

Osnovna ideja nizanja

Osnovna ideja nizanja nizove promatra kao poredak objekata po određenom redoslijedu te daje značenje apsektu nabrajanja. Ovakav način promatranja pojma niza primjenjiv je u raznim situacijama. Primjerice, prilikom stvaranja raznih popisa, bilježenje glazbenih nota ili prilikom slaganja riječi i izraza.
Učenici bi trebali naučiti stvarati nizove objekata, prepoznati pravilnosti koje se pojavljuju u tim nizovima te bi im ova osnovna ideja trebala olakšati razumijevanje koncepta beskonačnih nizova na primjerju skupa prirodnih brojeva.

Osnovna ideja pridruživanja

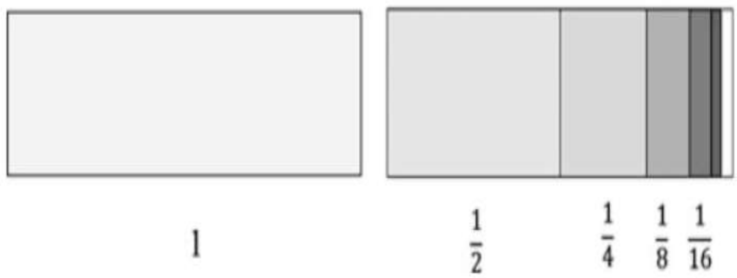
Kao što i sam naziv kaže, ovu osnovnu ideju vežemo uz aspekt pridruživanja. Osnovna ideja pridruživanja podrazumijeva da svakom prirodnom broju pridružujemo član toga niza. Također, ukoliko učenici razumiju neka osnovna svojstva niza prirodnih brojeva kao što su svojstvo poretka ili jednake udaljenosti među članovima niza, lakše će razumijeti ta ista svojstva na nizovima općenito.
Učenici bi trebali nizove shvaćati kao funkciju čija je domena skup prirodnih brojeva te trebaju znati da način zadavanja niza nije jedinstven. Isti niz može se zadati na nekoliko načina - tablično, pomoću grafova ili dijagrama, algebarskim izrazom i slično. Osim toga, učenici bi trebali razviti kompetencije da prepoznaju razna stvojstva nizova poput monotonosti, periodičnosti te omeđenosti.

Osnovna ideja kovarijacije
Ova ideja se temelji na pojmu funkcije jer se članovi niza mogu promatrati kao funkcija prethodnih članova. Kod ove ideje niz se može zamisliti kao poredak elemenata koji su međusobno povezani tako da svaki član ovisi o prethodnome članu.
Učenici bi trebali biti sposobni prepoznati, a zatim i opisati ovisnost među članovima rekurzivno zadanih nizova. Primjerice, trebali bi moći odrediti formulu za opći član niza u aritmetičkom ili geometrijskom nizu. Osim određivanja formule, trebali bi biti sposobni prepoznati svojstva aritmetičkih i geometrijskih nizova te ista ta svojstva uspješno primjenjivati u raznim nematematičkim situacijama.

Osnovna ideja objekta
Ova ideja je najapstraktnija i ona se nadovezuje na aspekt pridruživanja. Niz može biti prikazan simboličkim zapisom (a_n), grafički ili tablično. Ova osnovna ideja se temelji na tome da svakome prirodnom broju pridružujemo odgovarajuću vrijednost i na taj način stvaramo matematički objekt sa raznim svojstvima.
Slično kao i kod prethodno opisane osnovne ideje kovarijacije, učenici bi trebali moći preopoznati aritmetičke i geometrijske nizove u raznim, matematičkim i nematematičkim, situcijama te primijeniti razna svojstva tih nizova.

1.2 Limes niza

Limes niza je bitan koncept u matematici i koristi se u različitim područjima kao što su analiza, teorija brojeva, diferencijalni račun, teorija skupova itd. Pomaže nam razumjeti ponašanje nizova i njihove granice. Sami pojam limes niza počinje se promatrati u 16. i 17. stoljeću. Tada se pojam limesa vezao uz pojam niza, nabrajanje te navođenje članova niza. U početcima se beskonačno zbrajanje članova niza $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ prikazivalo grafički, što možemo vidjeti na sljedećoj slici:



Slika 6: Grafički prikaz beskoačnog zbrajanja članova niza

U 18. i 19. stoljeću dolazi do razvoja raznih ideja vezanih uz pojam limesa niza. Isaac Newton, d'Alembert i Euler su neki od matematičara toga doba koji su dali doprinos razvoju ovog pojma, dajući svoje ideje. Svojevrsni vrhunac pojam limesa doživljava 1821. kada u udžbeniku "Cours d'Analyse" Cauchyja pojam limesa niza, točnije graničnih vrijednosti postaje temeljni pojam matematičke analize. Također, Cauchy je 1828. dao verbalnu verziju definicije graničnih vrijednosti:

Definicija 1. *Kada su vrijednosti, koje se uzastopno pridaju promjenjivoj veličini brojeva, stalno približavaju određenoj vrijednosti, tako da se na kraju od te vrijednosti razlikuju onoliko malo koliko netko želi, tada, se potonja naziva granična vrijednost.*

Definiciju limesa, onakvu kakvu mi danas poznajemo, dao je Weierstrass u 19. stoljeću:

Definicija 2. *Kažemo da je realan broj L limes, odnosno granična vrijednost, niza (a_n) ako vrijedi*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ takav da je } \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \epsilon$$

Sada kada smo napravili kratki povijesni pregled ovog pojma, navest ćemo aspekte i osnovne ideje pojma limesa niza.

1.2.1 Aspekti za pojam limesa niza

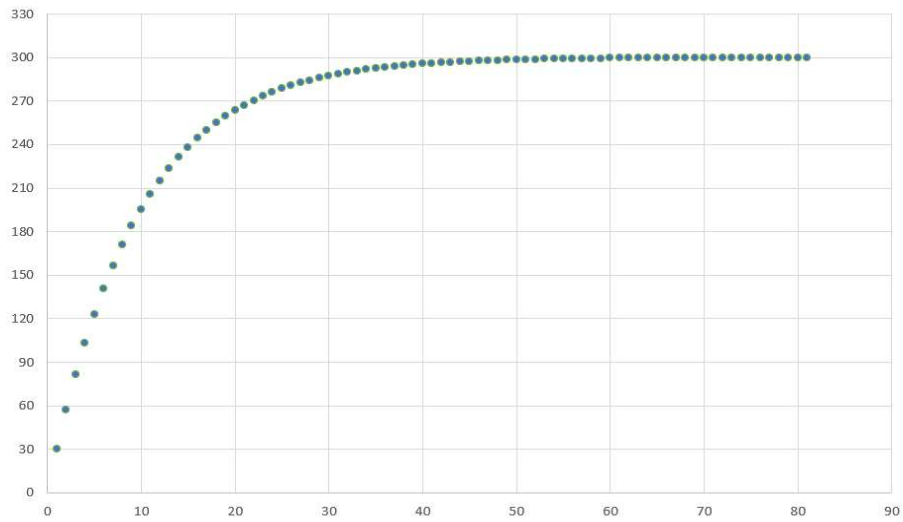
Dinamički aspekt

Dinamički aspekt pojma limesa niza temelji se na ideji potencijalno beskonačnih procesa. Primjerice, zamislimo dužinu koju neprestano dijelimo na dva jednaka dijela. Svaki put kada prepolovimo dužinu, dobivamo dvije dužine čije su duljine jednake polovini početne duljine. Nastavljajući ponavljati isti postupak, dolazimo do ideje da se dužina sužava prema nekoj krajnjoj vrijednosti, koju ćemo smatrati limesom toga niza. Za lakše razumijevanje dinamičkog aspekta, promotrimo još jedan primjer:

Primjer 6. *Pretpostavimo da osoba konzumira voće bogato vitaminom C svaki sat tijekom 8-satnog radnog dana, pri čemu prvu porciju voća pojede čim dođe na posao. Neka svako voće koje konzumira sadrži 30 mg vitamina C. Po satu se razgradi oko 10 % udjela vitamina C. Izračunajmo te tablično i gračiki prikažimo kako se sadržaj vitamina C razvija u organizmu tijekom radnog dana.*
Nakon prvih sat vremena, od 30 mg vitamina C koje je osoba unijela u organizam, razgrađeno je 10 %, što znači da je 90 % još uvijek dostupno. Od prve porcije voća koja je unesena u organizam, u organizmu je ostalo $0.90 \cdot 30$ *mg, odnosno* 27 *mg. Zatim osoba ponovno konzumira voće te unosi još 30 mg vitamina C. Nakon još sat vremena, 10 % od 57 mg je razgrađeno te se u organizmu nalazi još* $0.9 \cdot 57$ *mg* $= 51.3$ *mg vitamina C. Nakon nove porcije voća, osoba ponovno unosi 30 mg vitamina C te je nakon još sat vremena u organizmu preostalo* $0.9{\cdot}81.3$ *mg* $= 73.17$. *Ako se postupak nastavi dobivamo sljedeće podatke:*

Broj sati na poslu	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Vitamin C(u mg)	*30*	*57*	*81.3*	*103.17*	*122.85*	*140.57*	*156.51*	*170.86*	*183.77*

Ako bi se proces konzumiranja voća neprestano ponavljao iz sata u sat pod navedenim uvjetima, količina vitamina C u organizmu bi bila oko 300 mg:



Slika 7: Grafički prikaz članova niza u koordinatnom sustavu

Intuitivno razumijevanje pojma limesa koje se razvija iz dinamičkog aspekta mora se postupno preoblikovati u cjelovito razumijevanje limesa u okviru nastave matematike jer limes čini osnovu temljnih koncepata analize, poput derivacija i integrala.

Statički aspekt

Statički aspekt je povijesno gledajući puno mlađi nego dinamički aspekt. Formalizirao ga je Weierstrass tijekom 19. stoljeća. Za razliku od dinamičkog aspekta u kojemu određujemo graničnu vrijednost, kod statičkog aspekta je granična vrijednost fiksirana te tražimo onaj element niza nakon kojega svi ostali članovi imaju vrijednost približnu fiksiranoj graničnoj vrijednosti. Preciznije rečeno, traži se onaj element niza nakon kojega svi daljnji elementi niza leže u zadanom području oko fiksirane vrijednosti. Ovaj aspekt je ključan za formalnu definiciju limesa.

Primjer 7. *Pretpostavimo da želimo pratiti razinu šećera u krvi pacijenta koji ima dijabetes. Ciljna vrijednost za zdravu razinu šećera u krvi je maksimalno 125 mg/dl. Početna razina šećera u krvi pacijenta je 300 mg/dl. Pacijent se pridržava propisane prehrane i redovito uzima propisane lijekove kako bi kontrolirao razinu šećera u krvi. Pomoću formule možemo pratiti razinu šećera u krvi pacijenta kao rezultat njegovog ponašanja*

$$c_n = 0.8^n \cdot 300 + 25 \cdot \frac{1 - 0.8^n}{1 - 0.8}$$

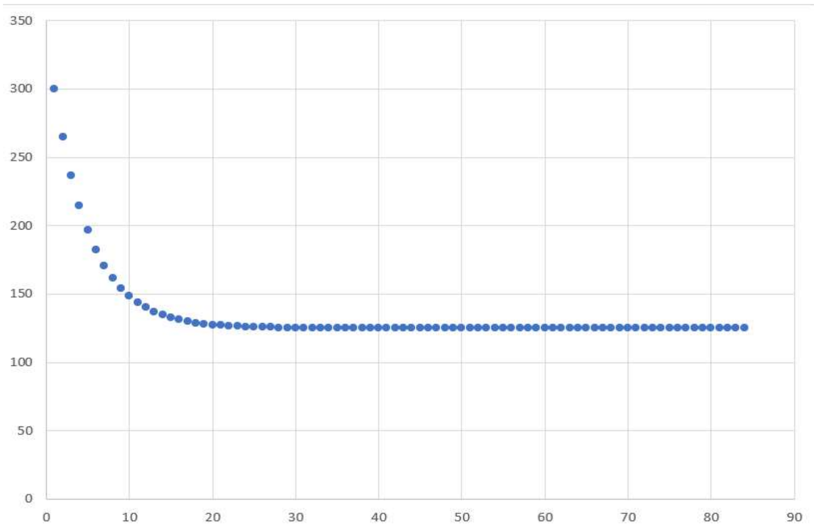
- *Razine šećera u krvi prikažite nizom, tablično te grafički u koordinatnom sustavu.*
- *Kada će pacijent postići cilj zdrave razine šećera u krvi?*

Odredimo prvih nekoliko članova niza te ih prikažimo tablično:

	A	B
1	0	300
2	1	265
3	2	237
4	3	214,6
5	4	196,68
6	5	182,344
7	6	170,8752
8	7	161,7002
9	8	154,3601
10	9	148,4881
11	10	143,7905
12	11	140,0324
13	12	137,0259
14	13	134,6207
15	14	132,6966
16	15	131,1573

Slika 8: Tablični prikaz članova niza

Možemo vidjeti da se vrijednosti, kako n raste, smanjuju te da se razlika među susjednim članovima također smanjuje. Prikažimo sada te podatke grafički:



Slika 9: Grafički prikaz članova niza u koordinatnom sustavu

Postavlja se pitanje kada će pacijent doseći zdravu razinu šećera u krvi, odnosno koliko dana se mora pridržavati terapije kako bi se razina šećera spustila na 125 mg/dl. Odgovor na ovo pitanje ovisit će o broju decimalnih mjesta na koje zaokružujemo vrijednosti elemenata niza. Razmotrit ćemo slučajeve kada zaokružujemo na dva i na šest decimalnih mjesta.
Prva tablica pokazuje članove niza prilikom zaokruživanja na dva decimalna mjesta, a druga kada zaokružujemo na 6 decimalnih mjesta:

	A	B
41	40	125,06
42	41	125,05
43	42	125,04
44	43	125,03
45	44	125,03
46	45	125,02
47	46	125,02
48	47	125,02
49	48	125,01
50	49	125,01
51	50	125,01
52	51	125,01
53	52	125,01
54	53	125
55	54	125

	A	B
93	92	125,000002
94	93	125,000002
95	94	125,000001
96	95	125,000001
97	96	125,000001
98	97	125,000001
99	98	125,000001
100	99	125,000001
101	100	125
102	101	125
103	102	125

Slika 10: Članovi niza kada zaokružujemo na dva i na šest decimalnih mjesta

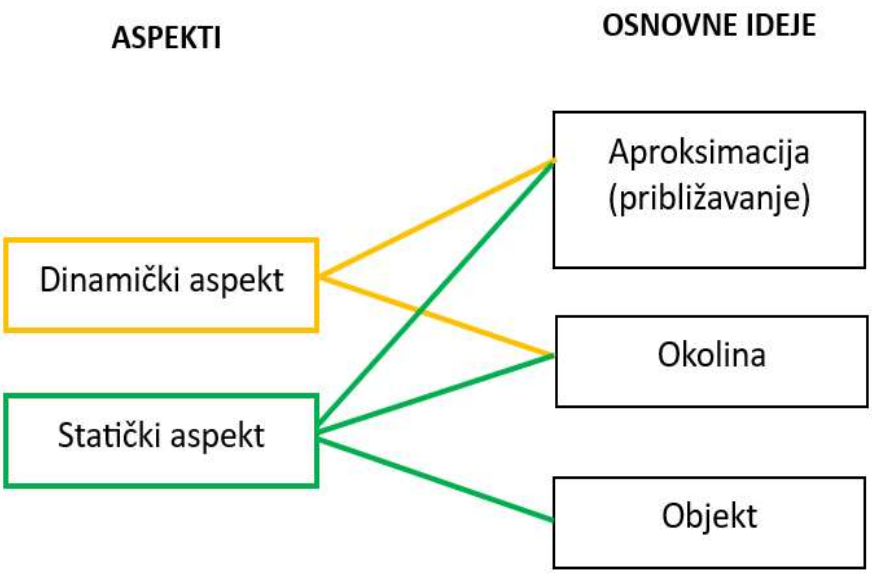
Iz gore navedenih tablica možemo vidjeti da će zdravu razinu šećera u krvi pacijent, kada zaokružujemo na dva decimalna mjesta postići za $n = 53$*, odnosno nakon 54 dana pridržavanja terapije, dok će, ako zaokružujemo na šest decimalnih mjesta istu tu razinu doseći za* $n = 100$*, odnosno nakon 101 dana.*

Prethodni zadatak i njemu slični zadatci učenicima mogu pomoći da lakše razumiju osnovnu ideju granične vrijednosti jer se iz različitih prikaza (tabličnog i grafičkog) može se vidjeti kako se vrijednosti svih članova približavaju istoj vrijednosti, ali nijedan član ne prelazi tu vrijednost.

Kako bi u potpunosti razumijeli ideju limesa, potrebno je shvaćati i povezivati oba aspekta. S jedne strane možemo odrediti beskonačno mnogo elemenata niza, o čemu nam govori dinamički aspekt. Ali s druge strane, postoje nizovi u kojima niti jedan član niza neće biti jednak graničnoj vrijednosti, nego će joj se samo "približavati". Primjer jednog takvog niza je niz $a_n = \frac{1}{n}$. Ovom nizu možemo odrediti beskonačno mnogo elemenata te se svi oni približavaju nuli, ali nijedan član nije jednak nuli, bez obzira koliko veliki n uzmemo. Koliko se blizu možemo približiti graničnoj vrijednosti, matematički je iskazano "epsilon delta definicijom" limesa niza koja se temelji na statičkom aspektu za pojam limesa niza.

1.2.2 Osnovne ideje za pojam limesa niza

Prije nego što pojasnimo svaku osnovnu ideju koju vežemo uz pojam limesa niza, pogledajmo slikovni prikaz veza između aspekata i osnovnih ideja:



Slika 11: Veze između aspekata i osnovnih ideja za pojam limesa niza

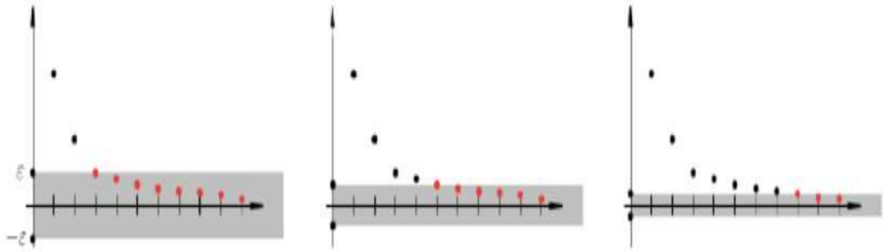
Osnovna ideja aproksimacije (približavanja)

Osnovna ideja aproksimacije, odnosno približavanja limes niza promatra kao proces kojemu se vrijednosti članova niza približavaju određenoj fiksiranoj vrijednosti ili objektu. Ova ideja daje značenje i dinamičkom i statičkom objektu.

Učenici bi trebali moći navesti primjere tzv. beskonačnih procesa te prepoznati da se ti beskonačni procesi mogu približavati graničnoj vrijednosti koliko god žele. Nadalje, trebaju na različite načine (grafički, numerički, tablično) objasniti izraz "teži prema" odnosno "približava se proizvoljno blizu". Također, trebaju znati primijeniti osnovnu ideju aproksimacije na nekim temeljnim pojmovima kao što su derivacije i integrali.

Osnovna ideja okoline

Ovu ideju, kao i prethodnu, vežemo uz oba aspekta pojma limesa niza. Osnovna ideja okoline u kontekstu pojma limesa niza je da se svi članovi, počevši od nekog člana pa nadalje, nalaze u svakoj okolini oko limesa (granične vrijednosti), bez obzira koliko ta okolina bila mala.



Slika 12: Unutar svake ϵ-okoline se nalazi beskonačno mnogo članova niza

Okolina je koncept kojim precizno opisujemo približavanje članova niza određenoj vrijednosti. Kod ove ideje, učenici bi trebali moći objasniti grafički i numerički ideju limesa niza. Koristeći ideju okoline, učenici bi trebali, verbalno i formalno opisati ponašanje niza u blizini granične vrijednost te bi također trebali moći ovu ideju primijeniti prilikom rješavanja jednadžbi koristeći iterativne metode.

Osnovna ideja objekta

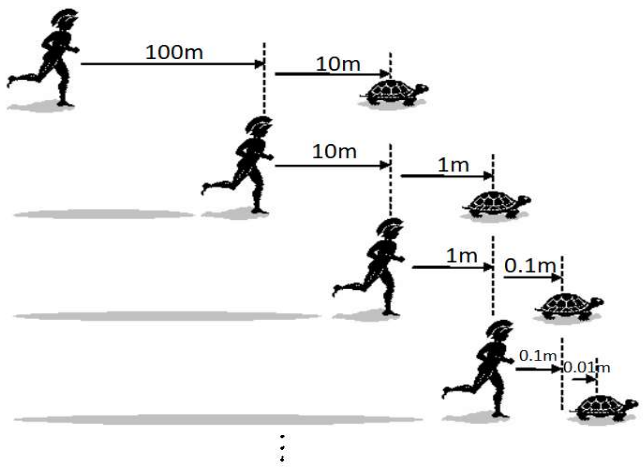
Osnovna ideja u kojoj se limes niza promatra kao matematički objekt daje značenje statičkom aspektu. Promatrani matematički objekt, odnosno granična vrijednost ne mora isključivo biti broj, nego može biti i geometrijski objekt poput točke, linije i tangente ili primjerice, u stohastičkim procesima, granična vrijednost može biti matrica.
Pomoću ove ideje učenici bi trebali nizove koji teže nuli gledati kao prototipove za konvergentne nizove te moći opisati ponašanje vrijednosti niza "u beskonačnosti". Osim toga, ova ideja trebala bi im pomoći odrediti konvergira li ili divergira zadani niz te da odrede limes konvergentnim nizovima.

Na samom kraju ovoga dijela promotrimo jedan od najpoznatijih paradoksa u matematici - paradoks o Ahileju i kornjači. U njemu možemo, na vrlo slikovit način vidjeti ideju granične vrijednosti.

Primjer 8. ***Ahilej i kornjača***

Promatramo utrku između Ahileja, najbržeg trkača svoga vremena i kornjače. Pretpostavlja se da je Ahilej 10 puta brži od kornjače, pa je kornjači dana prednost od 100 metara. Kako bi prestigao kornjaču, prvo mora nadoknaditi 100 m zaostatka. Dok Ahilej trči do mjesta s kojeg je kornjača krenula, kornjača se 10 m pomaknula naprijed i tako napravila novu prednost.

Sada Ahilej ponovno mora doći do mjesta gdje se nalazi kornjača, ali kornjača za to vrijeme prelazi još 1 m i ostvaruje novu prednost u odnosu na Ahileja. Ukoliko se postupak nastavi neprestano ponavljati na opisani način, zaključujemo da će se Ahilej neprestano približavati kornjači ali da je nikada neće prestići.



Provjerimo je li gornji zaključak istinit. Pretpostavit ćemo da se kornjača kreće brzinom 1 m/s, a Ahilej 10 m/s. Na početku utrke se kornjača nalazi 100m ispred Ahileja, što znači da je Ahileju potrebno 10 sekundi da ju dostigne. Tijekom tih 10 sekundi kornjača prijeđe još 10 m, pa je Ahileju sada potrebna 1 sekunda da ju stigne, ali kornjača tada napravi još 1 m i stvara novu prednost itd.
Put koji Ahilej treba proći iznosi: $s_A = 100 + 10 + 1 + 0.1 + ... = 111.11$ *m, a put koji prolazi kornjača iznosi:* $s_k = 10 + 1 + 0.1 + ... = 11.11$ *m. Pretpostavili smo da je brzina kornjače 1 m/s, a Ahileja 10 m/s. Prema tome, vrijeme koje je potrebno Ahileju put od 111.11 m iznosi* $t_A = \frac{s_A}{v_A} = 11.11$ *s, što je jednako vremenu koje je potrebno kornjači da prijeđe 11.11m. Prema tome, možemo zaključiti kako će Ahilej stići kornjaču nakon 11.11 sekundi.*

2 Nizovi i limes niza u kurikulumu

Kao što smo već spomenuli u uvodu ovog rada, učenici se s nizovima susreću od samih početaka svog osnovnoškolskog obrazovanja. U nastavku ovog poglavlja istaknut ćemo odgojno-obrazovne ishode koji se očekuju da učenici usvoje tijekom svog školovanja.

2.1 Osnovna škola

Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja pojam niza i njegova svojstva se ne definiraju niti se obrađuju u zasebnoj nastavnoj temi. Učenici se s pojmom niza upoznaju kroz zadatke u kojima se od njih zahtjeva da uoče pravilnost u nizu brojeva ili pojava. Primjere takvih zadataka navest ćemo kasnije u ovom radu, a sada ćemo istaknuti koje odgojno -obrazovne ishode, prema kurikulumu, učenici trebaju usvojiti tijekom osnovne škole. Unutar kurikuluma za osnovnu školu u odgojno-obrazovnim ishodima koncept niza je spomenut samo u prva tri razreda, dok se u ostalim razredima ne spominje. U prvome razredu koncept niza se spominje unutar 3 domene - *Brojevi (A), Algebra i funkcije (B) te Mjerenje(D).*

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
MAT OŠ A.1.1.	- Određuje broj neposredno ispred i neposredno iza zadanog broja, prikazuje brojeve na brojevnoj crti.
MAT OŠ A.1.2.	- Reda brojeve po veličini.
MAT OŠ A.1.3.	- Uočava redoslijed i određuje ga rednim brojem.
MAT OŠ B.1.2.	- Uočava uzorak nizanja. - Objašnjava pravilnost nizanja. Objašnjava kriterij nizanja. - Niže po zadanom kriteriju.
MAT OŠ D.1.1.	- Uspoređuje, razvrstava i niže objekte prema mjerivu svojstvu.

Tablica 1: Odgojno-obrazovni ishodi u prvome razredu osnovne škole

U drugome razredu nizovi se spominju unutar dvije domene - *Brojevi (A) i Algebra i funkcije (B)*, a u trećem razredu samo unutar domene *Brojevi (A)*. U sljedećim tablicama su prikazani odgojno - obrazovni ishodi u drugome i trećem razredu osnovne škole u kojima se spominju nizovi:

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
MAT OŠ A.2.1.	- Služi se prirodnim brojevima do 100 u opisivanju i prikazivanju količine i redoslijeda.
MAT OŠ B.2.1.	- Uočava pravilnosti nizanja brojeva, objekata, aktivnosti i pojava. - Određuje višekratnike kao brojevni niz. - Kreira nizove. - Objašnjava kriterije nizanja.

Tablica 2: Odgojno-obrazovni ishodi u drugome razredu osnovne škole

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
MAT OŠ A.3.1.	- Služi se prirodnim brojevima do 1000 u opisivanju i prikazivanju količine i redoslijeda.

Tablica 3: Odgojno-obrazovni ishodi u trećem razredu osnovne škole

2.2 Srednja škola

S pojmom niza i limesa niza učenici se u srednjoj školi susreću tek u četvrtom razredu. Tada se po prvi put definira niz, ističu svojstva niza, obrađuju specijalne vrste nizova (aritmetički i geometrijski niz) te se učenici po prvi put upoznaju s konceptom limesa niza. Postoji nekoliko vrsta srednjoškolskih programa te se oni međusobno razlikuju po godišnjem broju sati predmeta Matematike. U nastavku možemo vidjeti podjelu programa prema broju godišnjem broju sati. Obzirom da se nizovi spominju isključivo u četvrtom razredu srednje škole, istaknut ćemo godišnji broj sati samo u četvrtom razredu.

- Četverogodišnja strukovna škola – **64 sati godišnje**
- Gimnazija i četverogodišnje strukovne škole – **96 sati godišnje**
- Gimnazija i četerogodišnje strukovne škole – **128 sati godišnje**
- Gimnazija i četverogodišnje strukovne škole – **160 sati godišnje**

- Gimnazija – **192 sata godišnje**

U kurikulumu su odgojno-obrazovni ishodi prilagođeni godišnjem broju sati matematike. U sljedećim tablicama su prikazani odgojno- obrazovni ishodi vezani uz nizove.

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
MAT SŠ A.4.1.	- Objašnjava veličine koje se javljaju u kamatnome računu. - Računa jednostavne kamate za dane,mjesece i godine i primjenjuje ih u jednostanim primjerima iz života. - Opisuje razliku između jednostavnog i složenog ukamaćivanja. - Računa konačnu i početnu vrijednost uloga i ukupne složene kamate. - Primjenjuje kamatni račun u primjerima štednje ili dugovanja
MAT SŠ B.4.1.	- Nabraja svojstva i opisuje razliku između aritmetičkog i geometrijskog niza, nastavlja zadani niz - Računa razliku aritmetičkog niza, količnik geometrijskog niza i traženi član niza - Računa zbroj prvih n članova i primjenjuje ga u problemima vezanim uz složeno ukamaćivanje

Tablica 4: Odgojno-obrazovni ishodi za program sa 64 sati matematike godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
MAT SŠ B.4.1.	- Opisuje aritmetički i geometrijski niz, zapisuje opći član niza, povezuje s aritmetičkom i geometrijskom sredinom - Računa zbroj prvih n članova niza. - Rješava probleme iz svakodnevnoga života primjenom aritmetičkoga i geometrijskog niza, osobito složeni kamatni račun.
MAT SŠ B.4.2.	- Opisuje pojam limesa, uočava rast ili pad članova niza i postojanje granice, tj. konvergentnost ili divergentnost - *Prošireni sadržaj:* Primjenjuje neprekidno ukamaćivanje

Tablica 5: Odgojno-obrazovni ishodi za program s 96 sati matematike godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
MAT SŠ B.4.1.	- Opisuje aritmetički i geometrijski niz i geometrijski red, zapisuje opći član niza, povezuje s aritmetičkom i geometrijskom sredinom - Računa zbroj prvih n članova niza, računa zbroj geometrijskog reda. - Rješava probleme iz svakodnevnoga života primjenom aritmetičkoga i geometrijskog niza i geometrijskog reda, osobito složeni kamatni račun.
MAT SŠ B.4.2.	- Opisuje pojam limesa, uočava rast ili pad članova niza i postojanje granice, tj. konvergentnost ili divergentnost - *Prošireni sadržaj:* Primjenjuje neprekidno ukamaćivanje

Tablica 6: Odgojno-obrazovni ishodi za program sa 128 sati matematike godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
MAT SŠ B.4.2.	- Opisuje aritmetički i geometrijski niz i geometrijski red, zapisuje opći član niza, povezuje s aritmetičkom i geometrijskom sredinom - Računa zbroj prvih n članova niza, računa zbroj geometrijskog reda. - Rješava probleme iz svakodnevnoga života primjenom aritmetičkoga i geometrijskog niza i geometrijskog reda, osobito složeni kamatni račun.
MAT SŠ B.4.3.	- Opisuje pojam limesa niza, uočava rast ili pad članova niza i postojanje granice, tj. konvergentnost ili divergentnost - Računa limes niza i primjenjuje na problemskim zadatcima, primjerice pri neprekidnom ukamaćivanju

Tablica 7: Odgojno-obrazovni ishodi za program sa 160 i 192 sata matematike godišnje

Možemo primijetiti kako se odgojno-obrazovni ishodi značajno ne razlikuju. Svaki program, neovisno o godišnjem broju sati matematike, sadrži ishode vezane uz specijalne vrste nizova, poput aritmetičkog i geometrijskog. Također, iz priloženih tablica možemo vidjeti kako je u svakom programu zahvaćena primjena geometrijskog niza u obliku kamatnog računa. Najveća razlika se može primijetiti među ishodima vezanim uz koncept limesa niza. U programu sa 64 sati matematike godišnje takvi ishodi su izostavljeni. Pojam limesa niza prvi put se pojavljuje u ishodima za programe s 96 sati matematike godišnje. U svakom slijedećem programu se ishodi vezani uz limes niza nadograđuju i postaju složeniji. Ove minimalne razlike u odgojno-obrazovnim ishodima ukazuju na važnost koncepta nizova u matematičkom obrazovanju učenika. Proučavanje nizova omogućava učenicima da razviju sposobnost prepoznavanja i analiziranja pravilnosti, što potiče na logičko i matematičko razmišljanje.

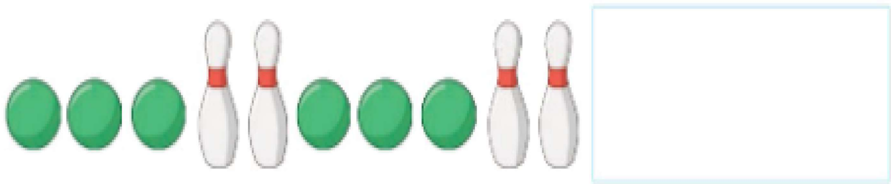
3 Nizovi i limes niza u školskim udžbenicima

3.1 Osnovna škola

U osnovnoškolskom obrazovanju učenici se upoznaju s konceptom niza kroz zadatke koji uključuju nastavljanje započetih nizova, prepoznavanje uzorka ili određivanje redoslijeda. Ovakvi zadatci služe za razvijanje logičkih i matematičih vještina učenika. Kao što smo već spomenuli, koncept niza se u kurikulumu obuhvaća u samo prva tri razreda osnovne škole. U nastavku ćemo navesti primjere zadataka s kojima se učenici susreću u školskim udžbenicima.

Prvi i najčešći tip zadatka s kojim se učenici susreću su oni zadatci u kojima trebaju nastaviti ili nadopuniti započeti niz. Učenici trebaju prepoznati pravilnost uzorka,a zatim nadopisati/nacrtati elemente koji nedostaju. Najprije to budu nizovi s predmetima iz svakodnevnog života, a kasnije se ti predmeti zamijenjuju matematičkim objektima.

Primjer 9. *Što nedostaje? Piši ili crtaj.*



Slika 13: Primjer zadatka u kojem učenici trebaju nastaviti započeti niz ([1], str. 23)

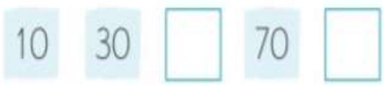
U ovom primjeru su učenici trebali uočiti pravilo po kojem se elementi slažu u niz. Pravilo je da se naizmjenično slažu tri kugle i dva čunja. Prema tom pravilu, učenici su trebali zaključiti da u nizu nedostaju tri kugle.

Primjer 10. *Što nedostaje?*

Slika 14: Primjer zadatka u kojem učenici trebaju nadopuniti započeti niz([1], str. 15)

Kao i u prethodnom primjeru, učenici su trebali uočiti pravilo po kojemu se elemnti slažu u niz. Ukoliko primijete da se uzastopno ponavlja *vilica, tanjur, nož, žlica*, učenici bi trebali doći do zaključka kako u navedenom nizu nedostaje vilica. Ovaj zadatak, osim što učenike potiče na logičko razmišljanje, učenike uči i pravilnom redoslijedu stavljanja pribora za jelo na stol.

Primjer 11. *Nastavi niz. Upiši brojeve koji nedostaju.*

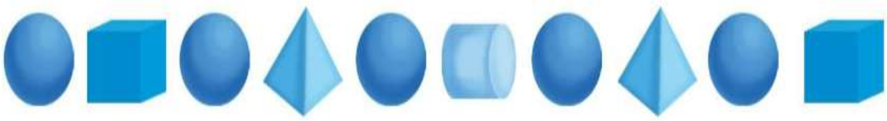


Slika 15: Primjer zadatka u kojem učenici trebaju nadopuniti započeti niz ([2], str. 35)

Zadatci u udžbenicima postepeno postaju složeniji te od učenika zahtjeva da osim logičkog razmišljanja primijeni i svoje matematičko znanje. U navedenom primjeru su učenici trebali zaključiti kako je razlika između svaka dva susjedna člana navedenog niza konstantna i iznosi 20. Prema tome, nedostaju brojevi 50 i 90. Ovaj primjer je iz udžbenika za 2. razred osnovne škole, slični takvi zadatci se pojavljuju i u udžbenicima za 3. razred, ali s troznamenkastim brojevima.

Drugi tip zadataka s kojim se učenici susreću je da u nizu izbace uljeza. Cilj ovog zadatka je da učenici prepoznaju uzorak koji se ponavlja u nizu objekata te identificiraju objekt koji ne pripada tom uzorku.

Primjer 12. *Prekriži uljeza u nizu.*

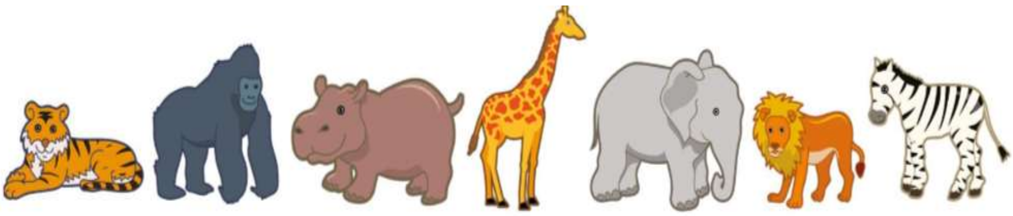


Slika 16: Primjer zadatka u kojem učenici trebaju izbaciti uljeza ([6], str. 25)

U ovom primjeru učenici su trebali uočiti da se neprestano ponavlja uzorak *kugla, kocka, kugla, piramida.* Ukoliko to uoče, lako dođu do zaključka kako je valjak na 6. mjestu u nizu uljez.

Posljednji tip zadataka s kojim se učenici susreću u osnovnoj školi je određivanje redoslijeda. Ovakvi tipovi zadataka se pojavljuju nakon što se upoznaju s rednim brojevima.

Primjer 13. *Odgovori na pitanja:*



Slika 17: Primjer zadatka u kojem učenici trebaju odrediti poredak određenog objekta u nizu ([3], str. 60)

a) Koji je po redu slon?

b) Koja je životinja treća po redu?

U ovakvim, i sličnim primjerima, učenici razvijaju sposobnost analiziranja redoslijeda i primjenu logičkog razmišljanja. Kada određujemo koja je životinja koja po redu trebamo prebrojati životinje u nizu. Nakon što prebrojimo dolazimo do zaključka kako je slon peti po redu, a da je treći po redu nilski konj. Koncept niza u ovom primjeru odnosi se na redoslijed životinja u nizu. Svaka životinja ima svoje mjesto u nizu, a poziciju životinja označavamo prirodnim brojevima. Dakle, ovaj zadatak bismo mogli promatrati kao niz koji prirodnom broju pridružuje životinju.

3.2 Srednja škola

U srednjoj školi se učenici s nizovima ne susreću do četvrtog razreda. Tada se nizovi obrađuju kao zasebna nastavna tema. U školskim udžbenicima je tema *Nizovi* najčešće podijeljena na šest podtema – *Pojam niza i zadavanje niza, Aritmetički niz, Geometrijski niz, Limes niza, Geometrijski red te Kamatni račun.* U nastavku ovog poglavlja prikazat ćemo na koji način je svaka podtema predstavljena učenicima te s kakvim primjerima zadataka se učenici susreću.

3.2.1 Pojam niza i zadavanje niza

Prije same definicije, učenicima su, kao motivacija, dani primjeri nizova s kojima su se susretali tijekom svog školovanja. Primjerice, nizovi parnih brojeva ili niz $3, 6, 12, 24, ...$ u kojemu trebaju "otkriti" pravilo prema kojemu je niz nastao. Također, u nekim udžbenicima kao motivaciju navode primjere niza iz svakodnevog života poput niza vagona ili niza učenika poredanih prema visini. Nakon motivacije, učenici se po prvi put susreću s definicijom niza.

Definicija 3. *([4], str. 78) Niz u skupu S je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to S$. Ona prirodnom broju n pridružuje element a_n skupa S. Element a_n nazivamo općim ili $n-$ tim članom niza, a sam niz označavamo simbolom (a_n). Ako je $S \subset \mathbb{R}$, govorimo o nizu realnih brojeva.*

U nekim udžbenicima je ideja niza kao funkcije čija je domena skup prirodnih brojeva, a kodomena bilo koji neprazan skup izostavljena te učenicima niz predstavljaju isključivo kao funkciju čija je kodomena skup realnih brojeva.

Postoji nekoliko načina zadavanja nizova - opisno, formulom za opći član i rekurzivnom formulom.

Primjer 14. *U zadanim nizovima zapišimo prvih 5 članova:*

a) niz višekratnika broja 7

b) $a_n = n^2 - 3$

Rješenje:

a) *Ovo je primjer opisno zadanog niza. Niz čine višekratnici broja 7 poredanih u rastućem poretku. Rješenje je:* $7, 14, 21, 28, 35, ...$

b) *Ovo je primjer niza zadanog formulom za opći član. Uvrštavanjem* $n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$ *dobivamo niz:* $-2, 1, 6, 13, 22, ...$

Osim navedenog primjera u kojemu učenici trebaju odrediti prvih nekoliko članova prema zadanoj formuli, učenici se susreću i sa zadatcima u kojima trebaju odrediti formulu za opći član niza prema prvih nekoliko članova niza.

Primjer 15. *Odredite moguću formulu za opći član niza:*

$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, ..$$

Uočimo da je zadani niz ekvivalentan nizu $0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6}...$
Sada je lako uočiti da vrijedi $a_n = \frac{n-1}{n+1}$*, što je ujedno i opći član niza.*

Ukoliko članove niza možemo promatrati kao funkciju prethodnih članova toga niza, govorimo o rekurzivno zadanom nizu. U ovom slučaju vrijednosti prvih nekoliko članova moraju biti zadane (najčešće jedan ili dva člana) kako bi se mogle izračunati vrijednosti ostalih članova.

Primjer 16. *Odredi prvih pet članova niza zadanog početnim vrijednostima i rekurzivnom formulom:* $a_1 = 1, a_2 = 4,\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 3 \cdot a_{n-2},\ n \geq 3.$

$$\begin{gathered} n = 3\text{: } a_3 = 2a_2 - 3a_1 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5 \\ n = 4\text{: } a_4 = 2a_3 - 3a_2 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2 \\ n = 5 : a_5 = 2a_4 - 3a_3 = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -4 - 15 = -19 \\ \vdots \end{gathered}$$

Dobivamo niz: $1, 4, 5, -2, -19, ...$

Navedeni primjeri su primjeri s beskonačno mnogo članova. Ako niz ima konačno mnogo članova, govorimo o konačnom nizu. Primjerice niz svih višekratnika broja 5 manjih od 50.

Prvo svojstvo nizova s kojim se učenici susreću je svojstvo monotonosti. U nekim udžbenicima se susreću i s monotonim i strogo monotonim nizovima, dok je u nekim udžbenicima svojstvo stroge monotonosti izostavljeno.

Definicija 4. *([13], str. 85) Za niz realnih brojeva* (a_n) *kažemo da je rastući (strogo rastući) ako vrijedi* $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Nadalje, ako vrijedi* $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, za niz kažemo da je padajući (strogo padajući). Takve nizove nazivamo monotonim nizovima.*

Iz definicije monotonih nizova slijede dva kriterija kojima možemo ispitati monotonost niza:

- Niz realnih brojeva a_n je rastući ako i samo ako je $a_{n+1} - a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi obrnuta nejednakost, niz je padajući.
- Niz realnih brojeva a_n je rastući ako i samo ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi obrnuta nejednakost, niz je padajući.

Primjer 17. *Ispitajmo monotonost navedenih nizova:*

a) $a_n = \frac{2n}{n+2}$

b) $a_n = \frac{5^{n+1}}{n}$

c) $a_n = 3$

d) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

a) Vrijedi

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)}{n+1+2} - \frac{2n}{n+2} = \frac{2n+2}{n+3} - \frac{2n}{n+2} = \frac{(2n+2)(n+2) - 2n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 2n + 4 - 2n^2 - 6n}{(n+3)(n+2)} = \frac{4}{(n+3)(n+2)}. \end{aligned}$$

Dobiveni izraz je uvijek pozitivan, pa slijedi $a_{n+1} > a_n$. Prema prethodno navedenom kriteriju je niz (strogo) rastući.

b) Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{5^{n+1+1}}{n+1}}{\frac{5^{n+1}}{n}} = \frac{\frac{5^{n+2}}{n+1}}{\frac{5^{n+1}}{n}} = \frac{n \cdot 5^{n+2}}{(n+1) \cdot 5^{n+1}} = \frac{n \cdot 5^n \cdot 5^2}{(n+1) \cdot 5^n \cdot 5} = \frac{5n}{n+1} = \\ &= \frac{n+1}{n+1} + \frac{4n-1}{n+1} = 1 + \frac{4n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Izraz $\frac{4n-1}{n+1}$ je uvijek pozitivan, prema tome vrijedi $a_{n+1} > a_n$. Pogledamo li navedeni kriterij za određivanje monotonosti, zaključujemo da je niz (strogo) rastući.

c) Svi članovi ovog niza su jednaki i iznose 3. Takve nizove nazivamo konstanti nizovi.

d) Odredimo prvih nekoliko članova niza: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$... Jasno se vidi da ovaj niz nije ni rastući ni padajući pa prema tome nije ni monoton.

Osim monotonosti, učenici se upoznaju sa svojstvom omeđenosti.

Definicija 5. *([9], str. 121) Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je omeđen ukoliko postoje realni brojevi m i M takvi da za svaki n vrijedi*

$$m \leq a_n \leq M.$$

Realni broj m nazivamo donja, a realni broj M gornja međa. Ukoliko postoji samo jedan od brojeva m i M, kažemo da je niz omeđen odozdo, odnosno odozgo.

Primjer 18. *Ispitaj omeđenost niza $a_n = \frac{1}{n+1}$.*
Možemo uočiti da su svi članovi pozitivni, jer je n prirodan broj. Također, svi članovi su manji ili jednaki $\frac{1}{2}$, obzirom da je $a_1 = \frac{1}{2}$ najveći član niza. Dakle, niz je omeđen s $m = 0$ i $M = \frac{1}{2}$.

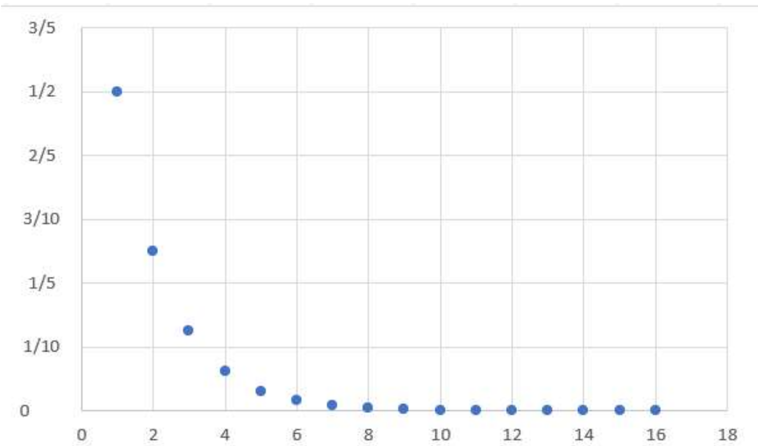
Radi lakšeg određivanja svojstava, nizove možemo prikazati grafički.

Primjer 19. *Prikaži zadane nizove grafički i odredi jesu li monotoni i omeđeni.*

a) $a_n = \frac{1}{2^n}$

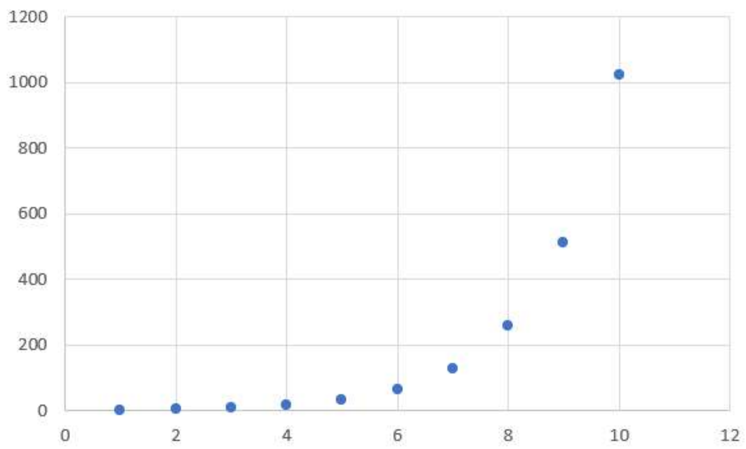
b) $a_n = 2^n + 1$

a) *Grafički prikažimo niz:* $a_n = \frac{1}{2^n}$:



Iz dobivenog prikaza možemo zaključiti kako je niz (strogo) monotono padajući te da je omeđen pri čemu je m=0, $M = \frac{1}{2}$.

b) *Grafički prikažimo niz:* $a_n = 2^n + 1$:



Iz priloženog vidimo kako je niz (strogo) monotono rastući, ali da nije omeđen. Točnije, omeđen je odozdo te je $m = a_1 = 3$.

3.2.2 Aritmetički niz

Nakon što steknu osnovno znanje o nizovima, učenici se upoznaju s nekim specijalnim vrstama nizova. Prvi takav je aritmetički niz.

Definicija 6. *Niz brojeva (a_n) u kojemu je razlika svaka dva susjedna člana konstantna, odnosno ako postoji realni broj d takav da je $a_n - a_{n-1} = d, n \geq 2$ nazivamo aritmetički niz. Broj d naziva se razlika (diferencija) niza.*

Prema gore navedenoj definiciji vrijedi:

$$\begin{aligned} & a_1 \\ & a_2 = a_1 + d \\ & a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \\ & \vdots \\ & a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Na ovaj način dolazimo do formule za opći član aritmetičkog niza:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$

pri čemu je a_1 prvi član, a d razlika tog niza. Pomoću ove formule, ukoliko znamo prvi član i razliku niza možemo izračunati bilo koji drugi član toga niza.

Primjer 20. *Izračunaj 99. član aritmetičkog niza u kojemu je $a_1 = 2$ i $d = 3$.*
Vrijedi:

$$a_{99} = a_1 + (99-1)d = 2 + 98 \cdot 3 = 296.$$

Može se postaviti pitanje zašto se nizovi s ovakvim svojstvom nazivaju aritmetički. Pogledajmo tri uzastopna člana aritmetičkog niza: a_{n-1}, a_n, a_{n+1}. Obzirom da su oni članovi aritmetičkog niza, za njih vrijedi:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= d \\ a_n - a_{n-1} &= d. \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a_n - a_{n-1} \\ a_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Iz ovoga možemo zaključiti kako je svaki član aritmetičkog niza, osim prvoga, jednak aritmetičkoj sredini svog prethodnika i sljedbenika. Pogledajmo primjer iz udžbenika koji se rješava pomoću navedenog svojstva.

Primjer 21. *([10], str. 140) Odredi nepoznanicu x tako da brojevi $x-5$, $5x+3$, $7x-1$ budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.*
Označimo s $a_{n-1} = x - 5$, $a_n = 5x + 3$, $7x - 1$. Koristeći prethodno navedeno svojstvo, vrijedi:

$$5x + 3 = \frac{x - 5 + 7x - 1}{2}$$

Sređivanjem dobivenog izraza dobivamo:

$$10x + 6 = 8x - 6$$

Slijedi, $x = 6$.

U programima s većim godišnjim brojem sati matematike ovakvi tipovi zadataka su nešto složeniji te uključuju izraze koji sadrže logaritme, korjene te trigonometrijske funkcije.

Osim općeg člana aritmetičkog niza, možemo računati i sumu prvih nekoliko članova niza. Označimo s

$$\begin{aligned} &S_1 := a_1 \\ &S_2 := a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ &S_n := a_1 + a_2 + ... + a_n, \end{aligned}$$

pri čemu S_n predstavlja sum prvih n članova aritmetičkog niza te se naziva $n-$ta parcijalna suma niza. Na ovaj način dobivamo novi niz (S_n) koji zovemo niz parcijalnih suma. Uočimo da ukoliko prvih n članova niza, $a_1, \quad a_2, ..., a_{n-1}, \quad a_n$, zapišemo obrnutim redoslijedom, tj. $a_n, \quad a_{n-1}, ...a_{2,1}$ dobivamo novi aritmetički niz. U novonastalom nizu prvi član je a_n, a razlika $-d$. Zbroj prvih n članova niza ovog i početnog niza je jednak te prema tome vrijedi:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1. \end{aligned}$$

Odnosno,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + ... + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d] \\ S_n &= a_n + (a_n - d) + ... + [a_n - (n-2)d] + [a_n - (n-1)d]. \end{aligned}$$

Zbrajanjem navedenih izraza, dobivamo:

$$2S_n = n(a_1 + a_n).$$

iz čega slijedi formula za broj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Primjer 22. *([10], str. 140) U aritmetičkom je nizu $a_4 = 9$, $a_{10} = 39$. Odredite zboj prvih deset članova niza.*
Najprije ćemo odrediti prvi član zadanog niza. Vrijedi:

$$a_4 = a_1 + 3d = 9$$
$$a_{10} = a_1 + 9d = 39$$

Rješavanjem dobivenog sustava, dobivamo $a_1 = -6$, $d = 5$.
Odredimo sada sumu prvih 10 članova:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(-6 + 39) = 165.$$

Osim zadataka u kojima se podatci iz zadatka uvrštavaju u formule, školski udžbenici sadrže i zadatke u kojima se od učenika zahtjeva da u situaciji iz svakodnevnog života, koja nije usko vezana za matematiku, prepoznaju aritmetički niz te riješe zadani problem. Takvi zadatci mogu biti različite težine, a njihova složenost za prepoznavanjem aritmetičkog niza ovise o odabranom nastavnom programu. U udžbenicima namijenjenim za manji broj sati matematike uglavnom se nalaze jednostavniji zadaci, dok udžbenici koji se koriste u programima s većim brojem sati matematike često sadrže složenije zadatke koji zahtijevaju od učenika dublje razmišljanje i bolje razumijevanje aritmetičkih nizova. Cilj ovakvog tipa zadatka je omogućiti učenicima da primijene svoje znanje o aritmetičkim nizovima na različite stvarne situacije te razviju sposobnost prepoznavanja i rješavanja problema izvan matematičkog konteksta.

Primjer 23. *([9], str. 135) Tijelo se giba tako da u prvoj sekundi prijeđe 5 m, a u svakoj sljedećoj sekundi za 4 m više nego u prethodnoj sekundi. Koliki put tijelo prijeđe u desetoj sekundi? Koliki put prijeđe nakon 12 sekundi?*
Gibanje tijela opisano u tekstu zadatka matematički možemo promatrati kao aritmetički niz. U prvoj sekundi prijeđe 5 m, u drugoj 4 m više, odnosno 9 m, u trećoj 13 m, itd. Dakle, dobivamo niz 5, 9, 13, 17, 21,..., što je aritmetički niz pri čemu je $a_1 = 5$ i $d = 4$. U ovom nizu a_n označava broj metara koje tijelo prođe u $n-$toj sekundi. Prema tome, u desetoj sekundi prijeđe $a_{10} = a_1 + 9d = 5 + 9 \cdot 4 = 41$ m.
Preostaje nam izračunati koliki put prijeđe nakon 12 sekundi. To rješenje ćemo dobiti kada izračunamo sumu prvih 12 članova niza, odnosno S_{12}. Najprije ćemo izračunati 12. član, $a_{12} = a_1 + 11 \cdot d = 5 + 11 \cdot 4 = 49$. Sada slijedi,

$$s_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12}) = 6(5 + 49) = 324.$$

Dakle, nakon 12 sekundi tijelo će prijeći 324 metra.

3.2.3 Geometrijski niz

Druga vrsta specijalnih nizova s kojima se učenici susreću je geometrijski niz.

Definicija 7. *Niz brojeva* (a_n) *u kojemu je kvocijent svaka dva susjedna člana konstantan, odnosno ako postoji broj* $q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *takav da je* $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$, $n \geq 2$ *nazivamo geometrijski niz. Broj* q *naziva se kvocijent (količnik) geometrijskog niza.*

Uočimo da za $q = 1$ dobivamo konstantan niz.
Prema prethodnoj definiciji vrijedi:

$$\begin{aligned}
&a_1\\
&a_2 = a_1 \cdot q\\
&a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2\\
&\vdots\\
&a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}$$

Dakle, za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, što je ujedno formula za opći član geometrijskog niza pri čemu je a_1 prvi član, a q kvocijent tog niza.

Primjer 24. *Odredi prvih pet članova geometrijskog niza ako je* $a_1 = 2$ *i* $q = -3$.
Primjenom formule za opći član geometrijskog niza, dobivamo:

$$2, \quad -6, \quad 18, \quad -54, \quad 162, ...$$

Kao i aritmetički niz, i geometrijski niz je naziv dobio prema svojstvu svojih članova. Ukoliko promotrimo tri uzastopna člana geomerijskog niza $a_{n-1}, \quad a_n, \quad a_{n+1}$, prema definiciji geometrijskog niza vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_n}{a_{n-1}} = q\\
&a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}\\
&\frac{a_{n+1}}{a_n} = q
\end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\\
&a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Možemo zaključiti kako je svaki član geometrijskog niza, osim prvoga, jednak geometrijskoj sredini svog prethodnika i sljedbenika.

Primjer 25. *([13], str. 101) Odredi realni broj* x *tako da* $\sin x$, $1+\sin x$ *i* 4 *čine tri uzastopna člana geometrijskog niza.*
Iskoristimo prethodno navedeno svojstvo:

$$\begin{aligned}
&(1 + \sin x)^2 = \sin x \cdot 4\\
&1 + 2\sin x + (\sin x)^2 = 4\sin x\\
&1 - 2\sin x + (\sin x)^2 = 0\\
&(1 - \sin x)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Iz dobivene jednadžbe slijedi $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Odredimo formulu za računanje sume prvih n članova geometrijskog niza. Vrijedi:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_1 + a_1q + ... + a_1 + q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

Ukoliko dobiveni izraz pomnožimo s q, dobivamo:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Ako oduzmemo gornje dvije jednakosti, slijedi:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n.$$

Iz toga, za $q \neq 1$ slijedi:

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

. Ukoliko je $q = 1$, onda vrijedi $S_n = na_1$.
Dakle, sumu prvih n članova geometrijskog niza čiji je prvi član a_1, a kvocijent $q \neq 1$, računamo po formuli:

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Primjer 26. *([13], str. 98) Zbroj prvih 12 članova geometrijskog niza s kvocijentom* $\sqrt[4]{3}$ *jest* $\frac{1}{146}$. *Koliki je zbroj prvih 48 članova toga niza?*
Iz formule za sumu prvih n članova geometrijskog niza, slijedi:

$$S_{12} = a_1\frac{1-q^{12}}{1-q}$$
$$a_1 = S_{12}\frac{1-q}{1-q^{12}}$$

Prema tome,

$$S_{48} = a_1\frac{1-q^{48}}{1-q} = S_{12} \cdot \frac{1-q}{1-q^{12}} \cdot \frac{1-q^{48}}{1-q}.$$

Uvrštavanjem zadanih podataka, dobivamo $S_{12} = 140$.

Geometrijski niz se, poput aritmetičkog, može primijeniti u svakodnevnim situacijama te ima široku primjenu na različitim područjima. Najčešće se koristi u financijama te prilikom modeliranja rasta populacije.

Primjer 27. *([9], str. 193) Automobil je kupljen početkom 2015. godine. Njegova se vrijednost stalno mijenja tako da je na kraju svake godine za osminu vrijednosti manja od vrijednosti koju je imao na početku te godine. Tijekom koje će godine vrijednost automobila biti prvi put manja od četvrtine kupovne cijene?*
Promjenu cijene koja je opisana u zadatku možemo promatrati kao geometrijski niz pri čemu je a_1 *početna vrijednost automobila,* $q = \frac{7}{8}$, *a n označava broj godina nakon 2015.godine.*

Želimo odrediti tijekom koje godine će vrijednost automobila biti manja od četvrtine početne cijene, odnosno tražimo n za koji vrijedi

$$a_1 \cdot q^n < \frac{1}{4}a_1$$
$$\left(\frac{7}{8}\right)^n < \frac{1}{4}$$
$$n > 10.38$$

Dakle, tijekom 11. godine će vrijednost automobila biti manja od četvrtine kupovne cijene, odnosno 2025. godine.

3.2.4 Limes niza

Ranije u ovome poglavlju smo spomenuli da razlikujemo beskonačne te konačne nizove. Može se postaviti pitanje što se događa s članovima beskonačnog niza kada n postaje sve veći. Kako bi učenici zaključili koje su moguće opcije, pružaju im se razni primjeri.

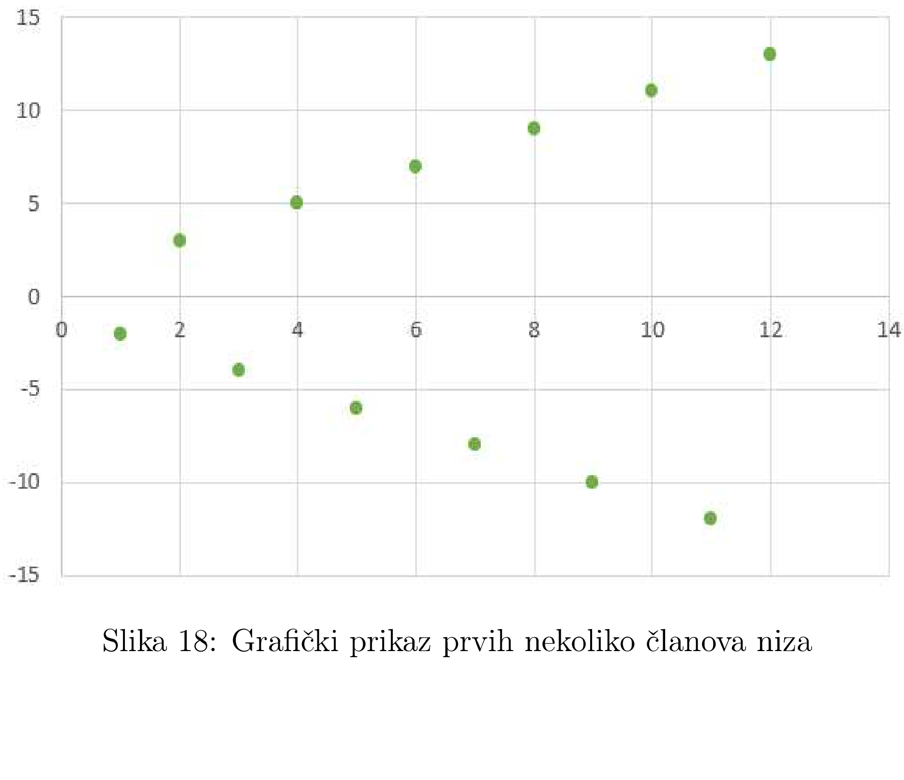
Primjer 28. *Odredimo što više članova nizova, prikažimo ih grafički i pokušajmo naslutiti što se događa s članovima niza kada n teži u beskonačno:*

a) ([13], str. 104) $a_n = (-1)^n \cdot (n+1)$

b) ([10], str. 157) $a_n = (\frac{1}{2})^n$

a) Odredimo prvih nekoliko članova niza:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	11	-12	13

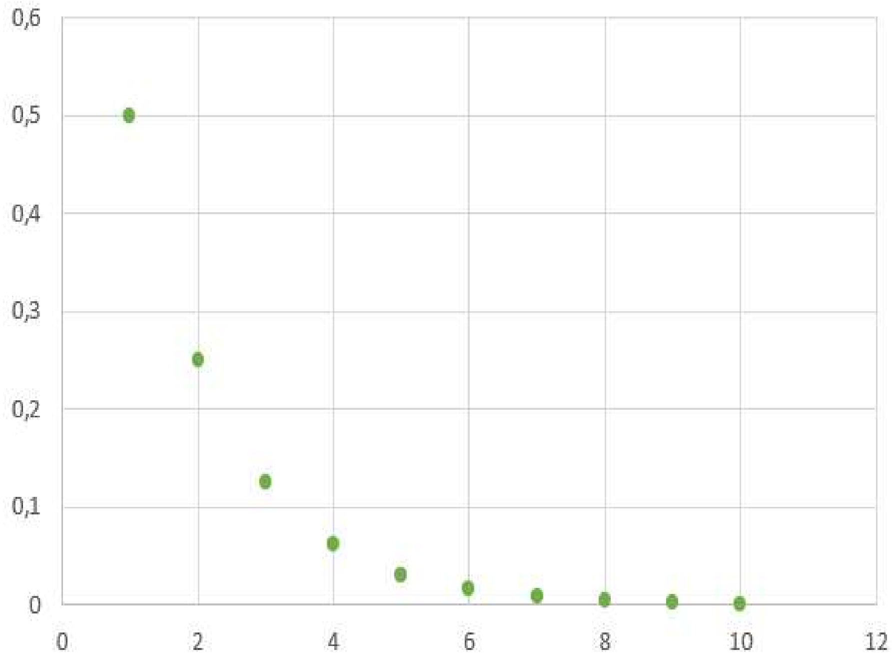


Slika 18: Grafički prikaz prvih nekoliko članova niza

Iz tabličnog i grafičkog prikaza možemo vidjeti kako su članovi koji imaju parni indeks sve veći i veći, dok članovi s neparnim indeksom postaju sve manji. Ne postoji jedinstveni broj kojemu svi članovi niza teže.

b) Odredimo prvih nekoliko članova niza:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.00195	0.00009



Slika 19: Grafički prikaz prvih nekoliko članova niza

Možemo zaključiti kako članovi niza postaju sve manji te se približavaju nuli.

U prethodnom primjeru smo zaključili da se vrijednosti članova niza, kako n raste, približavaju nuli. S druge strane, možemo zaključiti kako nijedan član toga niza nije jednak nuli. Tada kažemo da niz "teži" nuli.
Dakle, možemo zaključiti kako postoje beskonačni nizovi koji teže nekomu broju a. Broj a nazivamo limes ili granična vrijednost niza te pišemo: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Primjer 29. *([9], str. 153) Promotrimo niz $a_n = \frac{n+1}{n}$. Ispišemo li prvih nekoliko članova niza, dobivamo niz:* $2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad 65, ...$ *Možemo zaključiti kako se vrijednosti članova niza smanjuju i približavaju broju 1. Dakle, vrijedi* $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.
Promotrimo interval $\langle 0.95, 1.05 \rangle$*, simetrični interval oko broja 1. Provjerimo koliko se članova niza nalazi unutar tog intervala. 11. član niza je* $a_{11} = 1.091$ *te ne ulazi u zadani interval, kao ni prethodni članovi toga niza. Svi ostali članovi, od 12. člana nadalje su unutar tog intervala. Zaključujemo kako se unutar zadanog intervala nalazi beskonačno mnogo*

članova niza.
Promotrimo sada još manji simetrični interval oko broja 1, $\langle 0.999, 1.001\rangle$. *Vrijedi* $a_{1000} = 1.001$ *te* $a_{1001} = 1.000999$. *Dakle, 1000. član niza se, kao ni svi prethodni članovi, ne nalazi unutar zadanog intervala, dok se svi ostali, počevši od 1001. člana nalaze unutar zadanog intervala.*
Nastavimo li smanjivati intervale oko broja 1, uvijek ćemo doći do zaključka da se unutar zadanog intervala nalazi beskonačno mnogo članova niza, dok se izvan intervala nalazi konačan broj članova.

Općenito, simetrični interval oko broja a možemo zadati pomoću realnog broja $\epsilon > 0$ te promatrati interval $\langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$. Kako bi provjerili nalazi li se $n-$ti član niza unutar tog intervala, provjeravamo je li njegova udaljenost od broja a manja od ϵ, odnosno, provjeravamo vrijedi li $|a_n - a| < \epsilon$.

Definicija 8. *([9], str. 154) Realni broj a je limes ili granična vrijednost niza realnih brojeva* (a_n) *ako za svaki broj* $\epsilon < 0$ *postoji prirodni broj* n_0 *takav da za sve* $n > n_0$ *vrijedi* $|a_n - a| < \epsilon$.

Ako niz brojeva (a_n) ima limes, kažemo da je konvergentan. U suprotnom, za niz kažemo da je divergentan.
Limes konstantnog niza čiji su svi članovi jednaki realnom broju c jednak je $\lim_{n\to\infty} c = c$.

Primjer 30. *Je li niz zadan općim članom* $a_n = n + 1$ *konvergentan?*
Članovi tog niza su 2, 3, 4, 5, ... Možemo primijetiti kako su vrijednosti članova toga niza sve veće, odnosno da niz, kako se n povećava, teži u beskonačnost. Prema tome, zaključujemo kako zadani niz nije konvergentan.

Za niz (a_n) čije vrijednosti članova neograničeno rastu, odnosno neograničeno padaju kažemo da je divergentan i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, odnosno $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Vratimo li se na prethodni primjer i promotrimo niz $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n+1}$ možemo zaključiti kako ovaj niz konvergira prema nuli. Iz toga zaključujemo da ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, slijedi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Dokaz ove tvrdnje ćemo izostaviti te se može pronaći u [9].

Kako bi lakše odredili je li niz konvergentan ili divergentan bitno je da učenici razumiju sljedeći teorem:

Teorem 1. *Ako je niz realnih brojeva* (a_n) *omeđen i monoton, onda je konvergentan.([7])*

Dokaz: Tvrdnju ćemo dokazati za rastući niz. Dakle, pretpostavimo da je niz (a_n) omeđen te rastući. Prema definiciji omeđenog niza, postoje donja međa m te gornja međa M skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pokažimo da je gornja međa $M = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ limes zadanog niza. Prema definiciji supremuma skupa, slijedi da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $M - \epsilon < a_{n_0} \leq M$. Kako je niz rastući, za $n > n_0$ vrijedi $M - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq M$, iz čega slijedi $|a_n - M| < \epsilon$. Prema tome, niz (a_n) je konvergentan i limes toga niza je M.
Ukoliko je niz padajući, tada je limes niza jednak donjoj međi toga niza. Ova tvrdnja se dokazuje pomoću svojstva da ako je niz (a_n) padajući, onda je niz $(-a_n)$ rastući, a upravo samo dokazali da on kovergira. $\square$

Limese nizova računamo prema sljedećem teoremu:

Teorem 2. *Neka su* (a_n) *i* (b_n) *konvergentni nizovi takvi da vrijede* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Tada vrijedi:*

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a + b$

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *uz dodatni uvjet da je* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *te* $b \neq 0$

d) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = a^b$ *uz dodatni uvjet da je* $a \neq 0$

e) ako $\forall n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $a_n \leq b_n$ *ili* $a_n < b_n$, *onda vrijedi* $a \leq b$

Primjer 31. *([13], str. 111) Izračunajmo limese zadanih nizova:*

a) $a_n = \frac{5n^2-5n}{2n^2+1}$

b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}$

a) Najprije ćemo podijelit i brojnik i nazivnik s najvećom potencijom koja se pojavljuje u brojniku ili nazivniku, odnosno s n^2, *a zatim iskoristiti pravila za računanje s limesima:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-5n}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^2-5n}{n^2}}{\frac{2n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{5-0}{2+0} = \frac{5}{2}$$

b) Dobiveni niz ćemo tranfsormirati u razlomak tako što ćemo i brojnik i nazivnik pomnožiti s $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n+2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{n}}}} = \frac{0}{1+1} = 0$$

U prethodnom potpoglavlju smo definirali geometrijske nizove. Limes geometrijskog niza $a_n = q^n$ ovisi o kvocijentu q. Vrijedi sljedeće:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{za } q > 1, \\ 1 & \text{za } q = 1, \\ 0 & \text{za } -1 < q < 1, \\ \text{ne postoji} & \text{za } q \leq -1. \end{cases}$$

Primjer 32. *([9], str. 167) Izračunajmo limese zadanih nizova:*

a) $a_n = (\frac{e}{3})^n$

b) $a_n = \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{3^n+1}$

a) Primijetimo da je niz oblika q^n, *pri čemu je* $q = \frac{e}{3} < 1$. *Prema prethodno navedenom pravilu za limes geometrijskog niza slijedi da je* $\lim_{n\to\infty}(\frac{e}{3})^n = 0$.

b) Podijelit ćemo i brojnik i nazivnik s potencijom najveće baze, odnosno s 3^n :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{3^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n\cdot 2+3^n\cdot 3^{-1}}{3^n}}{\frac{3^n+1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(\frac{2}{3})^n+\frac{1}{3}}{1+(\frac{1}{3})^n} = \frac{2\cdot 0+\frac{1}{3}}{1+0} = \frac{1}{3}$$

U udžbenicima predviđenim za najveći godišnji broj sati matematike godišnje su, uz sve navedeno, istaknuti i još neki važni limesi:

- Ako je $a > 0$, tada je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
- Ako je $\lim_{n\to\infty a_n} = \infty$, tada za realni broj k vrijedi $lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{a_n})^{a_n} = e^k$.

Dokaze navedenih tvrdnji ćemo izostaviti u ovom radu te se mogu pronaći u [10].

Primjer 33. *([10], str. 173 i 179) Izračunajmo limese zadanih nizova:*

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-\sin 5n}{3n+\cos 5n}$

b) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})^{5n}$

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-\sin 5n}{3n+\cos 5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-\sin 5n}{n}}{\frac{3n+\cos 5n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{\sin 5n}{n}}{3+\frac{cos5n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{5\sin 5n}{5n}}{3+\frac{5\cos 5n}{5n}} =$$
$$= \frac{2-5\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 5n}{5n}}{3+5\lim_{n\to\infty}\frac{\cos 5n}{5n}} = \frac{2-5\cdot 0}{3+5\cdot 0} = \frac{2}{3}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})^{5n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})^{5n\cdot\frac{3}{3}} = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{3n})^{3n})^{\frac{5}{3}} = (\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})^{3n}))^{\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3}} = e^{\frac{5}{3}}$$

3.2.5 Geometrijski red

Uz niz realnih brojeva (a_n) vežemo i niz parcijalnih suma (S_n), pri čemu je

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Ako nastavimo zbrajati beskonačno mnogo članova niza, dobivamo beskonačni zbroj $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ Postavlja se pitanje je li ovaj zbroj može imati konačnu vrijednost?
Zbroj $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ nazivamo redom te zapisujemo pomoću simbola $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentan, odnosno ima konačnu vrijednost ako je odgovarajući niz parcijalnih suma (S_n) konvergentan te vrijedi:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

. U suprotnom, ako niz (S_n) nema limes, onda za red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kažemo da je divergentan.

Definicija 9. *Red oblika* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + ...$, $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$, *nazivamo geometrijski red.*

Ranije u ovom radu smo naveli da sumu prvih n članova geometrijskog reda kojemu je prvi član a_1 i kvocijent q računamo po formuli

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Konvergencija niza (S_n) ovist će o postojanju limesa niza q^n. U prethodnom potpoglavlju smo naveli vrijednost $\lim_{n\to\infty} q^n$, u ovisnosti o q. Prema tome vrijedi:

1. Ako je $|q| > 1$, limes niza q^n ne postoji pa iz čega slijedi i da limes niza (S_n) također ne postoji što povlači divergenciju pripadnog geometrijskog reda.

2. Ako je $q = 1$, radi se o konstantnom nizu te geometrijski red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_1 + a_1 + ...$ nema konačan broj, odnosno divergira.

3. Ako je $q = -1$ i $a_1 \neq 0$, pripadni geometrijski red je oblika $a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + ...$ Članovi pripadnog niza parcijalnih suma su samo vrijednosti a_1 te 0, pa prema tome taj niz nema limes, što povlači divergenciju geometrijskog reda.

4. Ako je $|q| < 1$, vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Primjenom pravila za računanje limesa dobivamo:
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 \frac{1-q^n}{1-q}) = a_1 \frac{\lim_{n\to\infty}(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$
Prema tome, za sumu geometrijskog reda vrijedi:
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Dakle, možemo zaključiti kako geometrijski red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + ...$ konvergira jedino u slučaju $|q| < 1$ te tada njegovu sumu računamo po formuli

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Primjer 34. *([4], str. 128) Odredi zbroj geometrijskog reda* $1 + \sin\frac{\pi}{6} + (\sin\frac{\pi}{6})^2 + ...$
U danom geometrijskom redu vrijedi da je $q = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. *Kako je* $|q| < 1$, *zaključujemo da dani red konvergira te prema formuli za sumu geometrijskog reda vrijedi*

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Pomoću geometrijskog reda možemo beskonačan decimalan prikaz racionalnog broja pretvoriti u standardni prikaz. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 35. *([10], str. 188) Zapišite u obliku razlomka pomoću formule za sumu geometrijskog reda broj* $0.\dot{3}\dot{5}$
Označimo zadani broj s x. *Prema tome vrijedi*

$$x = 0.\dot{3}\dot{5} = 0.353535... = 0.35 + 0.0035 + 0.000035 + ... = 35 \cdot 10^{-2} + 35 \cdot 10^{-4} + 35 \cdot 10^{-6} + ...$$

Uočimo da je ovo geometrijski red za koji vrijedi da je $a_1 = 35 \cdot 10^{-2}$ *te* $q = 10^{-2}$. *Koristeći formulu za sumu geoemtrijskog reda, dobivamo:*

$$x = \frac{35 \cdot 10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{35}{99}$$

3.2.6 Kamatni račun

Već smo spomenuli kako geometrijski niz ima široku primjenu u svakodnevnom životu. Jedna od glavnih primjena takvih nizova je u financijama. U poslijednjem dijelu ovog poglavlja ćemo se upoznati s osnovnim oblicima kamatnog računa u kojima koristimo geometrijski niz i njegova svojstva. Odgojno - obrazovni ishodi vezani uz kamatni račun nalaze se u svim programima neovisno o godišnjem broju sati matematike, što ukazuje na njegovu važnost. Radi lakšeg razumijevanja, na početku ćemo definirati nekoliko pojmova koje ćemo koristiti u nastavku:

- Glavnica (ulog, kapital) − početni iznos na koji se računaju kamate (oznaka C_0)
- Kamate (dobit)− novčani iznos koji se plaća ili dobiva kao naknada za korištenje novca (oznaka I)
- Kamatna stopa − postotna stopa koja se primijenjuje na glavnicu kako bi se odredila količina kamate koja se plaća ili dobiva tijekom određenog razdoblja

Razlikujemo dva načina obračuna kamata - jednostavno i složeno ukamaćivanje. U nastavku ćemo objasniti oba načina.

3.2.7 Jednostavni kamatni račun

U ovom obliku ukamaćivanja kamate se računaju na temelju glavnice i vremenskog razoblja. Iznos kamata računamo po formuli

$$I = \frac{C_0 \cdot p \cdot t}{100},$$

pri čemu je C_0 glavnica, p kamatna stopa te t vrijeme izraženo u godinama. Iznos s kojim ćemo raspolagati nakon isteka t godina, uz kamatnu stopu p iznosi:

$$C_t = C_0 + I = C_0 + \frac{C_0 \cdot p \cdot t}{100} = C_0 \left(1 + \frac{p \cdot t}{100}\right)$$

Primjer 36. *([9], str. 187) Ivan je posudio 3500 eura uz kamatnu stopu p=7 %. Koliki iznos mora vratiti ako je obračun kamata jednostavan, a vrijeme posudbe 40 mjeseci.*
Vrijedi C_0=3500, p =7 % i t=40 mjeseci=3.33 godine. Koristeći formule za jednostavni kamatni račun, dobivamo:

$$C_k = C_0 \left(1 + \frac{p \cdot t}{100}\right) = 3500 \left(1 + \frac{3.33 \cdot 7}{100}\right) = 4315.85.$$

Dakle, Ivan mora vratiti 4315.85 *eura.*

3.2.8 Složeni kamatni račun

Za razliku od jednostavnog kamatnog računa, kod složenog kamatnog računa se kamata računa na temelju akumulirane kamate. Odnosno, nakon što istekne jedan vremenski interval, kamate se dodaju glavnici te tako dobiveni iznos postaje osnova za obračun kamata u sljedećem vremenskom intervalu. Ovaj način puno češće susrećemo u praksi nego jednostavno ukamaćivanje.
Neka je C_0 glavnica, p kamatna stopa, te n razdoblje ukamaćivanja. S C_n označimo iznos glavnice nakon n godina. Tada vrijedi: Na kraju prve godine, iznos glavnice je:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Kako bi izračunali iznos glavnice nakon druge godine, na dobivenu glavnicu C_1 dodajemo kamate:

$$C_2 = C_1 + I = C_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Na kraju treće godine, iznos glavnice je:

$$C_3 = C_2 + I = C_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

Nastavljajući postupak, možemo zaključiti kako niz glavnica $C_0, C_1, C_2, C_3, ...$ je geometrijski niz, odnosno red s kvocijentom $1 + \frac{p}{100}$. Kvocijent $1 + \frac{p}{100}$ nazivamo kamatni faktor te označavamo s r. Prema tome, iznos glavnice nakon n godina računamo po formuli:

$$C_n = C_0 r^n$$

Primjer 37. *([13], str. 122) Ines je posudila 50 000 kuna. Koliko će novca vratiti uz godišnju kamatnu stopu od 4.6 % složenim ukamaćivanjem za 5 godina?*
Vrijedi $C_0 = 50000$ kn, p=4.6 %, $n = 5$. Koristeći navedene formule, slijedi:

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{4.6}{100} = 1.046$$
$$C_5 = C_0 \cdot r^5 = 50000 \cdot 1.046^5 = 62607.8.$$

Ines treba vratiti 62607.80 kn

Jedan od najčešćih oblik štednje je obročna štednja. Kod ovog načina štednje se uplate vrše u jednakim vremenskim intervalima te oročavaju na neki rok.
Pogledajmo s koliko novca ćemo raspolagati nakon n godina ukoliko odlučimo na početku svake godine uplaćivati iznos C_0 uz godišnju kamatnu stopu p.
Na početku prve godine uplatimo iznos C_0. Prema opisanom složenom ukamaćivanju, nakon n godina će početni iznos narasti na C_0r^n.
Isti iznos ćemo uplatiti na početku druge godine, ali će ovaj iznos biti oročen godinu manje pa će nakon n godina iznositi C_0r^{n-1}.
Iznos C_0 uplaćen početkom treće godine će nakon n godina iznositi C_0r^{n-2}.
Ponavljajući postupak, dobivamo niz C_0r^n, C_0r^{n-1}, C_0r^{n-2}, C_0r^{n-3},... Možemo uočiti kako se radi o geometrijskom nizu čiji je prvi član C_0r, a kvocijent r. Prema tome, ukoliko bi štedjeli na opisani način, nakon n godina bi raspolagali iznosom:

$$C_n = C_0r\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Primjer 38. *([13], str. 123) Vito je odlučio 5 godina štedjeti za automobil koji stoji 100 000 kn. Koliko mora uplatiti svake godine ako je godišnja kamatna stopa 6 %?*
Vrijedi $C_5 = 100000$ kn, $n = 5$, $p = 6$ %. Trebamo izračunati C_0.

$$\begin{aligned}
r &= 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6}{100} = 1.06\\
C_5 &= C_0r\frac{1-r^5}{1-r}\\
C_0 &= \frac{C_5(1-r)}{r(1-r^5)}\\
C_0 &= \frac{100000 \cdot (1-1.06)}{1.06(1-1.06^5)}\\
C_0 &= 16735.51
\end{aligned}$$

Vito, kako bi kroz 5 godina uštedio 100000 kn, treba svake godine uplatiti 16735.51 kn.

U praksi se nerijetko događa da je temeljno razdoblje za obračun kamata kraće od jedne godine. Primjerice, obračun kamata se može vršiti 4 puta godišnje, odnosno svaka 3 mjeseca. Odredimo iznos glavnice s kojom ćemo raspolagati na kraju $n-$te godine ako se ukamaćivanje vrši m puta godišnje.
Iznos glavnice na kraju prvog obračunskog razdoblja je:

$$C_{\frac{1}{m}} = C_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right)$$

na kraju drugog razdoblja:

$$C_{2/m} = C_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^2$$

na kraju $m-$tog razdoblja, odnosno na kraju godine:

$$C_1 = C_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^m$$

Ukoliko se razdoblje produži kroz više godina, na kraju $n-$te godine glavnica će iznositi:

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}$$

Primjer 39. *([10], str. 196) Koliki početni iznos treba oročiti uz godišnju kamatnu stopu od 7 % da bi se nakon šest godina raspolagalo iznosom od 15 000 kuna ako je ukamaćivanje složeno, a obračun kvartalni?*
Kako je obračun kvartalni, vrijedi $m = 4$. Također, prema tekstu zadatka, vrijedi $n = 6$, $p = 7$ % i $C_6 = 15000$ kn.

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$$
$$C_0 = \frac{15000}{\left(1 + \frac{7}{100 \cdot 4}\right)^{4 \cdot 6}}$$
$$C_0 = 9891.57$$

Dakle, treba oročiti 9891.57 kn.

3.2.9 Neprekidno ukamaćivanje

Ovaj način obračuna kamata namijenjen je za programe s najvećim brojem sati matematike godišnje. Kod ovog načina ukamaćivanja se kamata neprekidno dodaje na glavnicu u beskonačno malim vremenskim intervalima (m teži u beskonačnost). Neprekidno ukamaćivanje se ne primijenjuje u financijama, ali pomoću neprekidnog ukamaćivanja možemo modelirati primjerice prirast stanovništva.
Ukoliko uložimo iznos C_0 po kamatnoj stopi p te ako se ukamaćivanje vrši neprekidno, nakon n godina će glavnica iznositi:

$$C_n = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^m \cdot n = C_0(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{100m})\frac{n}{100} = C_0(e^p)^{\frac{n}{100}} = C_0 \cdot e^{\frac{pm}{100}}$$

Vrlo često vrijeme ne mora biti cijela godina, pa koristimo oznaku t. Prema tome, početna vrijednost C_0 primjenom neprekidnog ukamaćivanja uz kamatnu stopu p, nakon vremena t izraženog u godinama će postati $C_t = C_0 \cdot e^{p \cdot t}$.

Primjer 40. *([13], str. 129) U jednoj je državi 2001. godine bilo 4 750 320 stanovnika, a 2011. godine 4 900 200. Ako se broj stanovnika povećava eksponencijalno, odredi:*

a) koliki je prosječni godišnji prirast,

b) koliko će stanovnika biti 2041. godine,

c) nakon koliko će godina od 2001. godine biti 6 milijuna stanovnika?

a) Uzmemo li da je 2001. početna godina od koje se prati broj stanovnika, vrijedi: $C_0 = 4750320$ i $C_10 = 4900200$. Prema tome

$$C_t = C_0 \cdot e^{p \cdot t}$$
$$4900200 = 4750320 \cdot e^{10p}$$
$$1.03155 = e^{10p}$$
$$10p = 0.0310$$
$$p = 0.00310$$

Prosječni godišnji prirast je 0.31 %.

b) Vrijedi $t = 40$. *Slijedi:*

$$C_{40} = C_0 \cdot e^{p \cdot t} = 4750320 \cdot e^{0.003106 \cdot 40} = 5377437.63$$

2041. godine bit će 5377437 stanovnika.

c) Trebamo odrediti t *za koji je* $C_t = 6000000$.

$$\begin{aligned}
&C_t = C_0 \cdot e^{p \cdot t} \\
&6000000 = 4750320 \cdot e^{0.0031t} \\
&1.263 = e^{0.0031t} \\
&t = 75.32
\end{aligned}$$

Nakon 76 godina bit će 6 milijuna stanovnika.

4 Istraživanje

U posljednjem dijelu ovog diplomskog rada iznijet ćemo rezultate istraživanja provedenog među studentima završne godine Diplomskog studija - nastavnički smjer matematike i informatike u Osijeku. Cilj istraživanja bio je provjeriti koliko budući nastavnici matematike razumiju pojam niza i pojam limesa niza te samim time provjetiti koliko su kompetentni za podučavanje tog područja.

U istraživanju je sudjelovalo 11 studenata. Mjerni instrument u istraživanju bio je radni listić koji se sastojao od 17 pitanja. Tijekom rješavanja listića, studenti su na raspolaganju imali formule koje su dozvoljenje na državnoj maturi:

4.1 Radni listić i rezultati istraživanja

Zadatci na listiću su bili podijeljeni u 5 podtema - *pojam niza, aritmetički niz, geometrijski niz, geometrijski red te limes niza.* Zadatci su preuzeti iz školskih udžbenika te iz provedenih ispita državne mature. U nastavku ćemo prikazati sve zadatke s priloženim rješenjima koje su studenti rješavali, a zatim ćemo iznijeti rezultate samog istraživanja. Izrazi koji će biti korišteni prilikom prikazivanja rezultata za osobe u muškom rodu uporabljeni su neutralno i odnose se na muške i ženske osobe (npr. student/studentica).

U prvom zadatku studenti su trebali zaključiti po kojem pravilu su sličice slagane u niz te nastaviti započeti niz. Na ovo pitanje su gotovo svi studenti točno odgovorili te je samo 1 student netočno odgovorio.

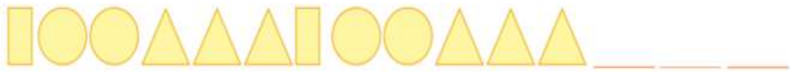
a)  b) 

Rješenje:

Iz navedenog niza može se zaključiti da idu prvo sličice dvije voćke, pa dva povrća, zatim ponovno dvije voćke itd. Prema upravo opisanom pravilu, u započetom nizu sljedeće treba biti sličica voćke što dovodi do zaključka da je pod a) točan odgovor.

U sljedeća dva zadatka studentima je bio zadatak da, slično kao i u prvom zadatku, prepoznaju pravilnost nizanja i nastave/nadopune niz. Ova dva zadatka su svi studenti točno riješili.

2. Objasnite pravilnost nizanja te nadopunite niz do kraja:



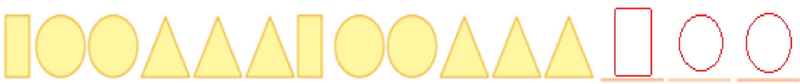
3. Nadopunite niz brojevima koji nedostaju:

7, 14, _____, 28, 35, ____, ______, 56, _____,70

Rješenje:

U drugom zadatku trebali su uočiti sljedeće pravilo: *1 pravokutnik, 2 kruga, 3 trokuta, 1 pravokutnik, 2 kruga, 3 trokuta, ...* iz čega slijedi da je točno rješenje:

2. Objasnite pravilnost nizanja te nadopunite niz do kraja:



U trećem zadatku se treba prepoznati da se u nizu nalaze višekratnici broja 7, čime dobivamo sljedeće rješenje:

3. Nadopunite niz brojevima koji nedostaju:

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63,70

U sljedećem zadatku studenti su trebali ispisati prvih 5 članova niza koji je zadan formulom za opći član:

$$a_n = \frac{3n+1}{2n-1}.$$

Rješenje:

Kako niz definiramo kao funkciju čija je domena skup prirodnih brojeva, u zadanu formulu je trebalo uvrstiti $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Nakon uvrštavanja, dobivamo sljedeće rješenje:

$$a_1 = 4,\ a_2 = \tfrac{7}{3},\ a_3 = 2,\ a_4 = \tfrac{13}{7},\ a_5 = \tfrac{16}{9}$$

Na ovo pitanje su svi osim 1 studenta točno odgovorili. Student koji je netočno odgovorio je za prvi član niza uvrstio $n = 0$ što potencijalno ukazuje na nerazumijevanje ideje niza kao funkcije čija je domena skup $\mathbb{N}$.

Petim zadatkom se provjeravalo razumijevanje definicije rekurzivnih nizova i sposobnost primjene te definicije. Studenti su trebali odrediti prvih 8 članova rekurzivno zadanog niza u kojemu vrijedi: $a_1 = 3$ i $a_n = 2a_{n-1} - 1$. Svi su studenti točno popunili danu tablicu.

Rješenje:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	5	9	17	33	65	129	257

Posljednji zadatak iz podteme *Pojam niza* bio je teorijski te se provjeravalo razumijevanje svojstva monotonosti nizova. Studenti su trebali objasniti kada za niz kažemo da je monotono rastući, a kada monotono padajući te navesti primjer monotono padajućeg niza. Ranije smo u ovom radu objasnili kada za niz kažemo da je monotono rastući, a kada da je monotono padajući. Na ovo pitanje samo je jedan ispitani student u potpunosti točno odgovorio. Osim njega, još dva studenta su napisali precizne definicije monotono rastućeg i monotono padajućeg niza, ali su naveli netočne/nepotpune primjere monotono padajućeg niza. Jedan student je kao primjer naveo rekurzivno zadani niz $a_n = a_{n-1} - 1$, ali nije zadao prvi član toga niza, pa je dani primjer nepotpun. Drugi student je za primjer monotono padajućeg niza naveo $a_n = n - 1$, a to je monotono rastući niz. Ostali studenti su napisali definiciju stroge monotonosti što ukazuje na to da studenti ne razlikuju ta dva svojstva. Neki od primjera padajućih nizova koje su studenti naveli su:

- $a_n = 100 - n$
- $a_n = -2n$
- $5, 4, 3, 2, ...$
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$

Druga podtema, *Aritmetički niz*, je sadržavala jedan teorijski te tri računska zadatka kojima se provjeravalo razumijevanje ove specijalne vrste nizova.

Prvi zadatak u tom dijelu listića je teorijski te se od studenata tražilo da objasne zašto se aritmetički niz naziva aritmetički. Ovim zadatkom htjelo se provjeriti koliko studenti razumiju koncept aritmetičkog niza te svojstva članova aritmetičkog niza. Na ovo pitanje su tri studenta točno odgovorila. Njihovi odgovori su sljedeći:

- "Zato što se svaki član toga niza, osim prvog, može dobiti kao aritmetička sredina svojeg prethodnika i svoga sljedbenika."
- "Zbog svojstva da je svaki član aritmetička sredina prethodnika i sljedbenika."
- Zato što je $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, tj.svaki član je aritmetička sredina prethodnog i sljedećeg člana niza."

U nastavku ćemo navesti neke od odgovora ostalih studenata na ovo pitanje:

- "Zato što je razlika između svaka dva susjedna člana jednaka."
- "Zato što se članovi niza ravnomjerno povećavaju, tj.razlika između člana niza i njemu susjednog člana je uvijek jednaka."

U sljedećem zadatku su studenti trebali odrediti prvih 6 članova niza kojemu su zadani prvi član $a_1 = 6$ i razlika $d = 4$. Svi osim jednog studenta, koji je taj zadatak ostavio neriješenim, su točno riješili ovaj zadatak.

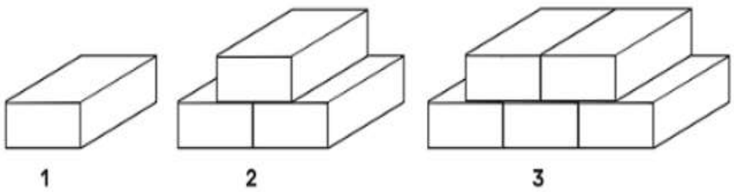
Rješenje:

Kako je razlika između svaka dva susjedna člana aritmetičkog niza konstantna i iznosi d, lako se dođe do točnog rješenja:

$$a_1{=}6,\ a_2 = a_1 + d = 6 + 4 = 10,\ a_3 = a_2 + d = 10 + 4 = 14,\ a_4 = 18,\ a_5 = 22,\ a_6 = 26$$

U 9. zadatku su studenti trebali u problemu iz svakodnevnog života prepoznati i primijeniti aritmetički niz. Ovaj zadatak je 8 studenata točno riješilo.

9. Helena slaže kvadre kao na slici. U 1. koraku upotrijebila je 1 kvadar, u 2. koraku 3 kvadra itd.



U 14. koraku Helena će iskoristiti ____________ kvadara. Ako želi iskoristiti 39 kvadara, Helena će to učiniti u _____koraka.

Rješenje:

Označimo s a_n broj kvadara iskorištenih u $n-$tom koraku. Iz teksta zadatka znamo sljedeće:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5$$

Možemo vidjeti kako je razlika između dva susjedna člana konstantna i iznosi 2, što ukazuje na to da se radi o aritmetičkom nizu kojemu je prvi član $a_1 = 1$, a razlika $d = 2$. Kako bi odredili koliko će Heleni biti potrebno kvadara u 14.koraku, trebamo odrediti a_{14}:

$$a_{14} = a_1 + (14 - 1) \cdot d = 1 + 13 \cdot 2 = 27$$

Preostaje nam odediti kada će Helena iskoristiti 39 kvadara. Vrijedi $a_n = 39$, prema tome vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ 39 &= 1 + (n-1) \cdot 2 \end{aligned}$$

Iz čega dobivamo $n = 20$. Dakle, U 14.koraku Helena će iskoristiti 27 kvadara, a 39 kvadara će iskoristiti u 20 koraka.

U posljednjem zadatku ove podteme od studenata se tražilo da odrede opći član aritmetičkog niza ako je poznato:

$$\begin{aligned} a_5 + a_{10} &= -40 \\ a_7 - a_3 &= -16 \end{aligned}$$

Rješenje:

U aritmetičkom nizu za $n-$ti član niza vrijedi:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Prema tome, dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} a_1 + 4d + a_1 + 9d &= -40 \\ a_1 + 6d - a_1 - 2d &= -16 \end{aligned}$$

Odnosno:

$$\begin{aligned} 2a_1 + 13d &= -40 \\ 4d &= -16 \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo $a_1 = 6$, $d = -4$. Prema tome, opći član traženog aritmetičkog niza je: $a_n = 6 - 4(n-1)$.

Sljedeća podtema je *Geometrijski niz*. Zadatcima iz ovog dijela listića se, kao i kod aritmetičkog niza, htjelo provjeriti razumijevanje specijalnih vrsta nizova. U prvom zadatku su morali objasniti zašto se geometrijski niz naziva geometrijski. Rezultati istraživanja na ovo pitanje su slični kao i kod aritmetičkog niza. Samo je tri studenta dalo točan odgovor na ovo pitanje. Njihovi odgovori su:

- "Zato što se svaki član tog niza, osim prvog, može dobiti kao geometrijska sredina svoga sljedbenika i svoga prethodnika."
- "Zato što je $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, $a_n \neq a_1$."
- "Zbog svojstva da je svaki član geometrijska sredina prethodnika i sljedbenika."

Osim ovih troje studenata, na ovo pitanje su odgovorili još samo dva studenta, napisali su sljedeće:

- "Jer je količnik svaka dva susjedna člana jednak."

- "Jer je kvocijent dva člana geometrijskog niza konstantan."

U sljedećem zadatku, su studenti trebali odrediti sumu prvih 6 članova niza geometrijskog niza ako je poznato da je prvi član jednak 0.5, a drugi -3. Ovaj zadatak je 8 studenata točno riješilo.

Rješenje:

U geometrijskom nizu vrijedi:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Kako vrijedi: $a_1 = 0.5$, $a_2 = -3$ te $a_2 = a_1 \cdot q$, lako možemo izračunati da je $q = -6$. Sada preostaje izračunati sumu prvih 6 članova ovog geometrijskog niza. Uvrštavanjem u formulu za sumu prvih 6 članova niza, dobivamo:

$$S_6 = a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 0.5 \cdot \frac{(-6)^5 - 1}{-6 - 1} = -\frac{6665}{2}$$

Predzadnji zadatak u ovoj podtemi bio je odrediti kvocijent geometrijskog niza s pozitivnim članovima u kojemu je prvi član za 4 manji od drugoga, a treći član je za 5 veći od drugoga. Uspješnost rješenosti ovog zadatka je jednaka kao i kod prethodnog zadatka - 8 studenata je točno riješilo zadatak.

Rješenje:

Najprije si zapišimo uvjete iz zadatka:

$$a_1 = a_2 - 4$$
$$a_3 = a_2 + 5$$

U geometrijskom nizu vrijedi $a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$, iz čega dobivamo:

$$a_2 = \sqrt{(a_2 - 4)(a_2 + 5)}$$

Rješavanjem dobivene jednadžbe dobivamo: $a_2 = 20$.
Iz $a_1 = a_2 - 4$ slijedi $a_1 = 16$. Kako je $a_2 = a_1 \cdot q$, konačno dobivamo

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{4}$$

U posljednjem zadatku ove podteme studenti su trebali primijeniti geometrijski niz. Ovaj zadatak je samo jedan student u potpunosti točno riješio. Zadatak se bio pojavio na višoj razini državne mature iz matematike 2017. i glasi:
Broj stanovnika u nekome gradu svake godine se povećao za isti postotak u odnosu na prethodnu godinu. Za šest se godina broj stanovnika povećao s 1 635 000 na 2 010 000 stanovnika. Koliko posto iznosi godišnje povećanje broja stanovnika toga grada?

Rješenje:

Označimo s $a_1 = 1635000$ te s $a_7 = 2010000$ (jer je na kraju šeste, odnosno na početku sedme godine, broj stanovnika 2010000). Neka je p traženi postotak za koji se godišnje povećava broj stanovnika u tom gradu. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + p \cdot a_1 = (1+p) \cdot a_1 \\ a_3 &= a_2 + p \cdot a_2 = (1+p) \cdot a_2 = (1+p)^2 \cdot a_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nastavljajući isti postupak, dolazimo do zaključka da vrijedi $a_n = (1+p)^{n-1} \cdot a_1$, tj. da se radi o geometrijskom nizu gdje je $a_1 = 1635000$, a $q = 1 + p$. Slijedi:

$$\begin{aligned} a_7 &= (1+p)^6 \cdot a_1 \\ 2010000 &= (1+p)^6 \cdot 1635000 \end{aligned}$$

Iz čega dobivamo: $1 + p = 1.035$, odnosno $p = 0.035$. Dakle, traženi postotak iznosi 3.5%

Unutar podteme *Geometrijski red* bio je samo jedan zadatak u kojemu su studenti trebali iskoristiti formulu za sumu geometrijskog reda. U zadatku se od njih tražilo da izračunaju kvocijent geometrijskog reda u kojemu prvi član iznosi 0.5, a suma 1.25. Ovaj zadatak je 9 studenata točno riješilo.

Rješenje:

Za sumu geometrijskog reda vrijedi:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Uvrštavanjem podataka iz zadatka, dobivamo:

$$1.25 = \frac{0.5}{1-q}$$

Rješavanjem dobivene jednadžbe slijedi $q = 0.6$.

U posljednjem dijelu listića, cilj je bio provjeriti razumijevanje studenata koncepta limesa i njegovih svojstva. Ovaj dio je sadržavao dva zadatka. U prvom zadatku su studenti trebali prepoznati koji od navedenih nizova teže prema beskonačnosti:

a) $1, 2, 3, 4, ..., n, ...$

b) $3, 8, 13, 18, ..., 5n-2, ...$

c) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, ..., \frac{1}{2n-1}, ...$

d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$

Rješenje:

Trebalo je prepoznati nizove koji nisu omeđeni odozgo te čija vrijednost konstantno raste. Prema tome, točni odgovori su pod *a*) i *b*). Preostala dva niza teže prema 0. U ovom zadatku su svi studenti zaokružili točne odgovore.

Posljednji zadatak je bio teorijski. U ovom zadatku, studentima su bile napisane četiri tvrdnje povezane s konceptom limesa. Njihov zadatak je odabrati jednu od mogućnosti - *uvijek/ponekad/nikad*, koja najbolje opisuje valjanost pojedine tvrdnje. Zatim su trebali obrazložiti svoj odgovor. Ovakava vrsta zadatka je od studenata zahtjevala da primijene svoje znanje o konceptu limesa niza na konkretnim tvrdnjama te ih je potaknula na kritičko razmišljanje jer su studenti morali pažljivo razmotriti svaku od navedenih tvrdnji.
U nastavku navest ćemo svaku tvrdnju iz navedenog zadatka, obrazložiti točan odgoor, a zatim iznijeti rezultate istraživanja koji se odnose na način na koji su studenti riješili ovaj zadatak.

Prva tvrdnja glasi *Limes niza je jedinstven.* Prema teoremu koji tvrdi da je svaki konvergentan niz ima samo jedan limes (Jukić i Scitovski, 1998., str.84), možemo zaključiti da je ova tvrdnja uvijek točna. Na ovo pitanje je 6 studenata zaokružilo točan odgovor te dalo ispravan odgovor. 2 studenta su zaokružila *ponekad* uz obrazloženje "Samo ukoliko on postoji.", dok su 3 studenta zaokružila također *ponekad* uz obrzloženje "Postoje nizovi koji imaju više gomilišta." što ukazuje na nerazlikovanje pojmova limes niza i gomilište niza.

Druga tvrdnja bila je *Ako je niz monoton, tada ima limes.* Ova tvrdnja, prema teoremu koji kaže da svaki monoton i omeđen niz ima limes (Jukić i Scitovski, 1998., str.88), vrijedi ponekad. Primjerice, niz $a_n = n + 1$ je monoton, ali nema limes obzirom da nije omeđen, dok niz $a_n = \frac{1}{n}$, koji je također monoton, ima limes. Na ovo pitanje je 6 studenata zaokružilo točan odgovor, ali od njih 6 samo je njih 4 napisalo ispravno obrazloženje. Preostalih 5 studenata je navelo da tvrdnja uvijek vrijedi uz obrazloženje da svaki monoton niz ima limes.

Treća tvrdnja glasi *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, *tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Ova trvdnja vrijedi samo u slučaju za niz s pozitivnim članovima. Pogledajmo niz $1, -2, 3, -8, 16, \dots$. Za taj niz vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, ali niz a_n nije konvergentan jer parni članovi teže u $-\infty$, dok neparni članovi teže u ∞. Potpuno ispravna trvrdnja bi glasila: Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Ovu tvrdnju je samo jedan student ispravno obrazložio. Još četiri studenta su zaokružili *ponekad*, od kojih 3 studenta nisu naveli obrazloženje, a jedan student je napisao "Ovisi o a_n.", ali nije objasnio na koji način. Ostalih 6 studenata je navelo da tvrdnja uvijek vrijedi te su neki od njih naveli obrazloženje: "$\frac{1}{\infty} = 0$."

Posljednja tvrdnja bila je *Geometrijski niz s kvocijentom q ima limes ako je* $q < 1$. Ova tvrdnja ponekad vrijedi. Geometrijski niz s kvocijentom q ima limes samo ako je $|q| < 1$.. Na ovo pitanje je 10 studenata zaokružilo *ponekad*, ali su obrazloženje svoga odgovora napisala samo 4 studenta. Jedan student je naveo da navedena tvrdnja nikad ne vrijedi.

4.2 Zaključak istraživanja

Na temelju provedenog istraživanja među studentima o nizovima i limesu niza, mogu se donijeti određeni zaključci o njihovom razumijevanju ove matematičke teme. Istraživanje je pokazalo da studenti relativno dobro svladavaju računske zadatke u kojima koriste formule i izvode računske operacije vezane uz nizove. Međutim, pokazalo se da studenti imaju poteškoće sa zadatcima u kojima trebaju primijeniti te formule na konkretni problem koji nije vezan uz matematiku. Također, rezultati teorijskih zadataka su izrazito loši, što ukazuje na poteškoće u razumijevanju temeljnih koncepata povezanih s nizovima i limesom niza. Nedostatak razmijevanja temeljnih koncepata može se negativno odraziti na njihovu buduću ulogu nastavnika matematike, budući da bi ono trebali prenositi svoje znanje i razumijevanje učenicima.

Literatura

[1] A. Boras Mandić, L. Lončar i sur., *Nina i Tino 1, udžbenik matematike za prvi razred osnovne škole, 1.dio*, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[2] A. Boras Mandić, L. Lončar i sur., *Nina i Tino 2, udžbenik matematike za drugi razred osnovne škole, 1.dio*, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[3] M. Cindrić, I. Mišurac, S. Špika, *Matematička mreža 1*, radna bilježnica za matematiku u prvom razredu osnovne škole, 4. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2022.

[4] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4* , udžbenik i zbirka zadataka za 4.razred gimnazije, 1.dio, Element, Zagreb, 2013.

[5] G. Greefrath, R. Oldenburg i sur., *Didaktik der Analysis, Aspekte ung Grundvorstellungen zentraler Begriffe*, Springer Spektrum, 2016.

[6] S. Jakovljević Rogić, D. Miklec, G. Prtajin, *Moj sretni broj 1, udžbenik matematike u prvom razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2022.

[7] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Gradska tiskara, Osijek, 1998.

[8] *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika,* dostupno na `https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MATkurikulum171.pdf, 01. srpnja 2023.`

[9] I. Matić, Lj. Jukić Matić i sur., *Matematika 4* , udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 3 i 4 sati tjedno, 1.dio, Školska knjiga, Zagreb, 2023.

[10] I. Matić, Lj. Jukić Matić i sur., *Matematika 4,* udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 5,6, i 7 sati tjedno, 1.dio, Školska knjiga, Zagreb, 2023.

[11] I. Siladić, *Matematika antičke Grčke*, završni rad, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2019.

[12] M. Stepić, S. Antoliš i sur., *Nizovi,* dostupno na `https://tinyurl.com/2p8rybzd, 02.veljače 2023.`

[13] Z. Šikić, S. Antoliš i sur., *Matematika 4*, udžbenik za četvrti razred gimnazije i srednje strukovne škole, 1.svezak, Profil Klett.

[14] I. Šulaj, *Nizovi u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2020.

Sažetak

Glavni cilj ovog diplomskog rada bio je istražiti i naglasiti važnost proučavanja nizova u osnovnoj i srednjoj školi te naglasiti pedagoške strategije koje mogu pomoći učenicima da potpuno razumiju koncept niza i limesa niza. U okviru ovog rada su detaljno objašnjeni i ilustrirani primjerima različiti aspekti i osnovne ideje povezane s pojmom niza i limesom niza. Također, u radu su istaknuti odgojno - obrazovni ishodi iz kurikuluma vezani uz navedene pojmove te je prikazano na koji način je koncept niza prikazan u školskim udžbenicima. Na samome kraju ovog rada predstavljeni su rezultati istraživanja provedenog među studentima završne godine diplomskog studija nastavničkog smjera matematike i informatike.

Ključne riječi

niz, limes niza, aritmetički niz, geometrijski niz

Sequences in mathematics classes and checking the competence of future mathematics teacher to teach that area

Summary

The main goal of this graduation thesis was to explore and emphasize the importance of studying sequences in elementary and high school and to point out pedagogical strategies that can help students to fully understand a concept of sequences and the limit of a sequence. Within the scope of this work, different aspects and basic ideas associated with the term of sequence and the limit of a sequence are explained in detail and illustrated by the example. Also, in this work, educational outcomes from curriculum associated with mentioned terms are pointed out and it is shown how is the concept of a sequence being shown in school textbooks. At the very end of this work, results of a research conducted among students of a final year of graduate study of mathematics and informatics education are presented.

Keywords

sequence, limit of a sequence, arithmetic sequence, geometric sequence

Životopis

Rođena sam 9. ožujka 1998. godine u Požegi. Osnovnu školu završila sam u OŠ Mladost u Jakšiću 2012. godine. Srednjoškolsko obrazovanje stekla sam u Prirodoslovno - matematičkoj gimnaziji u Požegi, koju sam završila 2016. godine. Nakon završetka srednje škole, upisala sam Sveučilišni preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku te ga završavam 2020. pod mentorstvom doc. dr. sc. Ivana Solde završnim radom na temu *Prosti brojevi i testovi prostosti.* 2021. godine upisala sam Diplomski nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studiranja, radila sam razne studentske poslove, među kojima je i posao instruktorice matematike na online platformi za davanje instrukcija te u centru za instrukcije iz matematike. Osim studentskih poslova, imala sam priliku nekoliko mjeseci raditi kao zamjena nastavnice matematike u Obrtničkoj školi Osijek te u Elektrotehničkoj i promjetnoj školi Osijek. Tijekom svog studiranja sam dobila dvije nagrade za uspjeh na studiju - nagradu Lions kluba u Osijeku te Pročelnikovu nagradu.