Kanonski oblik jednadžbe krivulja drugog reda

Jedlička, Marko

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Marko Jedlička

Kanonski oblik jednadžbe krivulja drugog reda

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Marko Jedlička

Kanonski oblik jednadžbe krivulja drugog reda

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović Ivičić

Osijek, 2023.

The canonical form of the second-order curve equation

Sažetak

U ovom završnom radu promatramo kanonski oblik jednadžbi krivulja drugog reda. U prvom poglavlju promatramo centralnu elipsu, kružnicu, hiperbolu i parabolu. Iz definicije i svojstava krivulja određujemo svakoj krivulji jednadžbu u kanonskom obliku s centrom u ishodištu koordinatnog sustava. U drugom poglavlju promatramo necentralne krivulje drugog reda. U prvom potpoglavlju promatramo kako translacija utječe na jednadžbu krivulje u kanonskom obliku, a zatim u drugom potpoglavlju promatramo kako rotacija utječe na kanonski oblik krivulja drugog reda. Na kraju poglavlja promatramo se opći oblik jednadžbe krivulje drugog reda svodi na kanoski oblik kroz primjere, koristeći rezultate iz prethodnih potpoglavlja.

Ključne riječi

Elipsa, kružnica, hiperbola, parabola, translacija, rotacija, kvadratna forma, centralne krivulje, necentralne krivulje.

Summary

In this final paper, we consider the canonical form of equations of second-order curves. In the first chapter, we look at the central ellipse, circle, hyperbola and parabola. From the definition and properties of curves, we determine for each curve an equation in canonical form with the center at the origin of the coordinate system. In the second chapter, we look at non-central curves of the second order. In the first sub chapter we observe how translation affects the equation of a curve in the canonical form, and then in the second sub chapter we observe how rotation affects the canonical form of second-order curves. At the end of the chapter, we observe the general form of the second-order curve equation reduced to the canonical form through examples, using the results from the previous sub chapters.

Keywords

Ellipse, circle, hyperbola, parabola, translation, rotation, square form, central curves, not central curves.

Sadržaj

Uvod

U ovom završnom radu promatramo krivulje drugog reda: elipsu, kružnicu, hiperbolu i parabolu. Prvo poglavlje započinjemo s centralnim krivuljama drugog reda. Navođenjem svojstva fokus-direktresa možemo pronaći kanonske oblike jednadžbi promatranih krivulja. Svaka jednadžba krivulje drugog reda može se svesti na kanonski oblik te pomoću njega možemo objasniti razna njihova svojstva. Zatim promatramo necentralne krivulje koje su najprije samo translatirane, a onda translatirane i rotirane. Za takve krivulje pokazujemo kako se promjenom koordinatnog sustava dođe do njihove jednadžbe u kanonskom obliku. Kategoriziramo krivulje drugog reda prema određenim svojstvima radi lakšeg prepoznavanja i skiciranja. Posljednje, pokazujemo teorijski opisane korake svođenja krivulja iz općeg u kanonski oblik na konkretnim primjerima.

1 Centralne krivulje drugog reda

Grčki astronom Apolonije iz Perge napisao je niz radova od kojih je jedino sačuvani rad *Konike* koji se sastoji od osam knjiga. Apolonije je promatrao ravninske presjeke kružnog stošca čiji se plašt prostire na obje strane od vrha i tako je dobio kružnicu, elipsu, hiperbolu i parbolu te je uveo njihove nazive i odredio im jednadžbe. On je ustanovio da su sve navedene krivulje povezane formulom

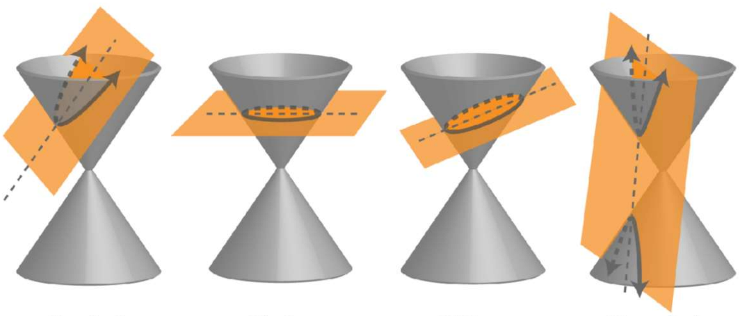
$$y^2 = 2px \pm \frac{p}{a}x^2.$$

Ukoliko je pred drugim članom desne strane jednadžbe predznak minus krivulja je eplisa, predznak plus hiperbola, te ako je taj cijeli član jednak nuli, krivulja je parabola.

Navedene krivulje drugog reda često se nazivaju konike jer ih možemo uočiti presjekom stošca (konusa) i ravnine. Konika je skup svih točaka u dvodimenzionalnom prostoru za koje je udaljenost od fiksne točke F jednaka konstanti pomnoženoj s udaljenosti od fiksnog pravca p.

Fiksna točka F naziva se fokus krivulje drugog reda, a pravac p naziva se diriktresa krivulje drugog reda. Konstanta s kojom množimo udaljenosti naziva se linearni eksentricitet i označava se s e. Za elipsu vrijedi $e < 1$, za hiperbolu $e > 1$ te za parabolu vrijedi $e = 1$.

Osim Apolonijeve karakterizacije poznata je Papo iz Aleksandrije i Ruđer Boškovićeva karaterizacija krivulja drugog reda u kojoj promatramo točku i pravac. Skup svih točaka za koje je omjer udaljenosti od točke i pravca manji od jedan je elipsa, ako je omjer veći od jedan skup točaka je hiperbola, te ako je omjer jedanak jedan onda je skup točaka parabola. U ovom poglavlju promatramo krivulje drugog reda sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.



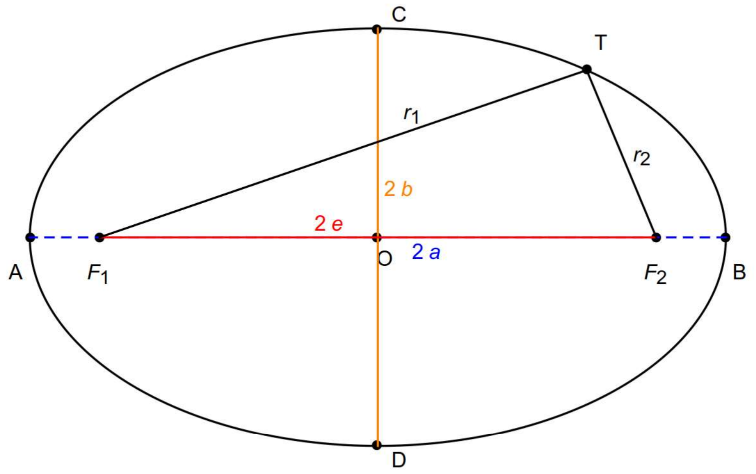
Slika 1: Presjek stošca ravninama

1.1 Elipsa

Definicija 1. Elipsa je skup svih točaka ravnine kojima je zbroj udaljenosti od dviju zadanih točaka isti.

Neka su zadane dvije točke F_1 i F_2 te njihovu udaljenost označimo s $2e$, tj. $|F_1F_2| = 2e$. Udaljenost proizvoljne točke T od točaka F_1 i F_2 označimo s r_1 i r_2, tj. $r_1 = |F_1T|, r_2 = |F_2T|$. Neka je a bilo koji realan broj veći od e. Tada elipsu možemo definirati kao skup točaka T

ravnine za koje vrijedi $r_1 + r_2 = 2a$.
Točke F_1 i F_2 se nazivaju žarišta ili fokusi elipse. Realan broj e nazivamo linearni eksentricitet i on prestavlja polovicu udaljenosti između žarišta. Pravac koji prolazi žarištima siječe elipsu u dvije točke. Ukoliko ih označimo sa A i B onda dužina $\overline{AB}$ predstavlja veliku os elipse duljine $2a$. Dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ nazivamo velike poluosi elipse, gdje je točka O središte elipse. Pravac okomit na veliku os koji prolazi središtem elipse siječe elipsu u točkama C i D, te dužninu $\overline{CD}$ nazivamo mala os duljine $2b$ i $\overline{OC}$ i $\overline{OD}$ su male poluosi elipse duljine jednake b. Točke A, B, C i D nazivamo tjemena elipse.



Slika 2: Elipsa

Vrijedi $|F_1D| = |F_2D|$ i $|F_1D|+|F_2D| = 2a$ pa pomoću Pitagorinog teorema za pravokutni trokut $\triangle OF_2D$ dobivamo $a^2 - b^2 = e^2$.
Numerički eksentricitet elipse je realan broj definiran kao $\varepsilon = \frac{e}{a}$. On predstavlja spljoštenost elipse te vrijedi $r_1 = a + \varepsilon x, r_2 = a - \varepsilon x$. Kod elipse vrijedi $0 \leq \varepsilon < 1$.

1.1.1 Jednadžba elipse

Neka je središte elipse u ishodištu koordinatnog sustava i neka velika os leži na osi apscisa, a mala os na osi ordinata. Tada su tjemena elipse u točkama $A(-a, 0), B(a, 0), C(0, b), D(0, -b)$, a žarišta su u točkama $F_1(-e, 0)$ i $F_2(e, 0)$.
Ako izaberemo bilo koju točku $T(x, y)$ elipse, onda su udaljenosti od fokusa jednake

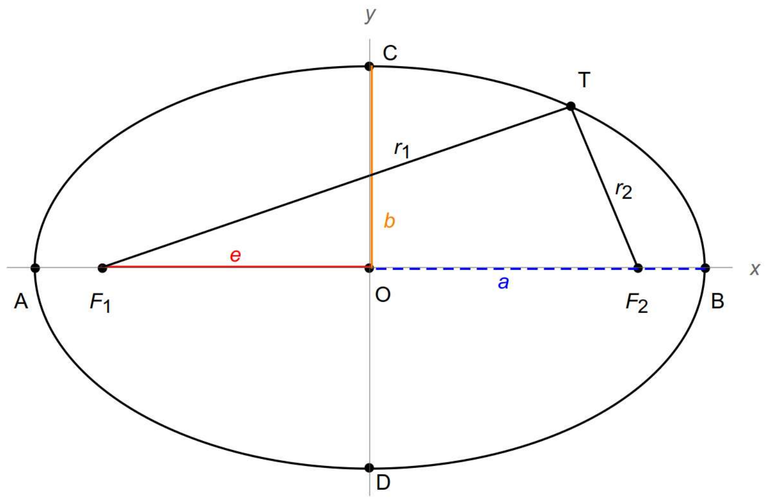
$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x-e)^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Za svaku točku elipse vrijedi $r_1 + r_2 = 2a$ pa dobivamo

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Prebacivanjem drugog pribrojnika s lijeve na desnu stranu dobivamo

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$



Slika 3: Elipsa u koordinatnom sustavu

odakle kvadriranjem slijedi

$$(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2.$$

Poništavanjem istih izraza i dijeljenjem brojem 4 dobivamo

$$a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2 - ex,$$

odakle kvadriranjem slijedi

$$a^2\big((x-e)^2 + y^2\big) = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2.$$

Koristeći $a^2 - b^2 = e^2$ dobivamo kanonski oblik jednadžbe elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{2}$$

Ako (2) podijelimo s a^2b^2, dobivamo segmentni oblik jednadže elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

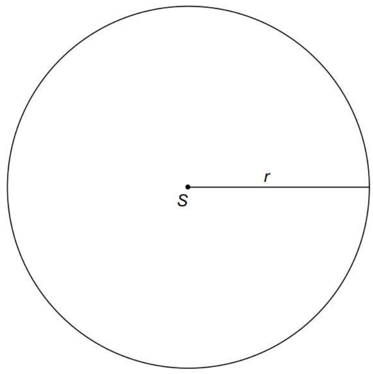
1.2 Kružnica

Skup svih točaka ravnine koji su jednako udaljene od jedne čvrste točke nazivamo kružnica. Zadanu čvrstu točku nazivamo središte kružnice i označavamo sa S, a udaljenost točke kružnice od središta nazivamo polumjer kružnice i označavamo ga s r.

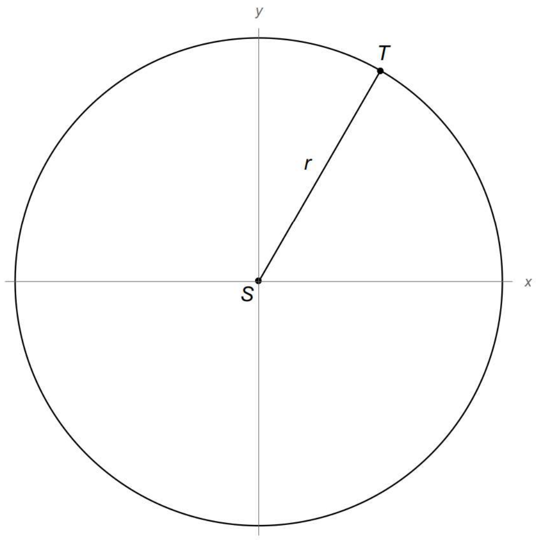
1.2.1 Jednadžba kružnice

Neka je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava $S = (0,0)$ te neka bilo koja točka kružnice ima koordinate $T = (x, y)$. Tada za polumjer vrijedi $r = |ST| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Kvadriranjem dobijamo jednadžbu kružnice sa središtem u ishodištu

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{4}$$



Slika 4: Kružnica sa središtem u točki S polumjera r



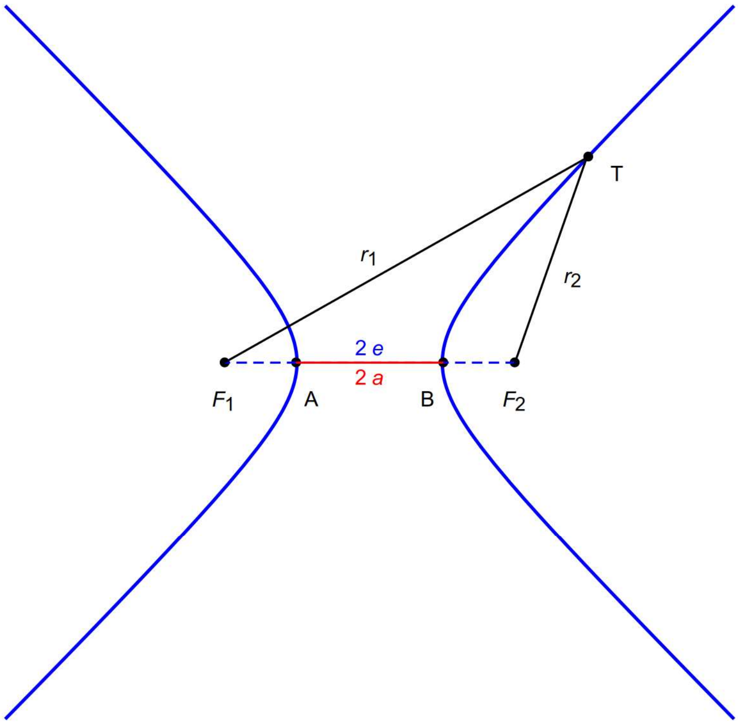
Slika 5: Kružnica sa središtem u točki S polumjera r u koordinatnom sustavu

Napomena 1. *Ukoliko u kanoskoj jednadžbi elipse izjednačimo duljine velike i male osi* $(a = b)$*, dobivena jednadžbe glasi* $x^2 + y^2 = a^2$*. Ova jednakost predstavlja jednadžbu kružnice sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Stoga, kružnicu možemo shvatiti kao poseban slučaj elipse kojoj su duljine osi jednake. Isto tako, kružnica je elipsa linearnog i numeričkog eksentriciteta jednakog nula.*

1.3 Hiperbola

Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke ravnine (žarišta hiperbole), čija udaljenost iznosi $2e$. Neka su r_1 i r_2 udaljenost proizvoljne točke T i žarišta te a bilo koji pozitivan realan broj manji od e. Tada je hiperbola skup svih točaka u ravnini za koje vrijedi $|r_1 - r_2| = 2a$.
Zahtjev da realan broj a bude strogo manji od realnog broja e proizlazi iz nejednakosti trokuta, tj. razlika duljina dviju stranica trokuta je uvijek manja od duljine treće stranice trokuta. Dakle, $|r_1 - r_2| < |F_1F_2| \iff 2a < 2e \iff a < e$.

Tjemena hiperbole su točke A i B dobivene kao sjecišta pravca na kojem leže žarišta hiperbole i same hiperbole. Dužinu $\overline{AB}$ nazivamo realna os hiperbole, te njena duljina iznosi $2a$. Linearni ekscentricitet hiperbole je, kao i kod elipse, udaljenost žarišta i središta te iznosi e. Numerički ekscentricitet hiperbole je realan broj $\varepsilon = \frac{e}{a}$ koji je strogo veći od jedan zbog uvijeta da je $a < e$.



Slika 6: Hiperbola

1.3.1 Jednadžba hiperbole

Neka je središte hiperbole u ishodištu koordinatnog sustava ravnine i neka realna os leži na osi apscisa. Tada je udaljenost proizvoljene točke $T = (x, y)$ hiperbole od žarišta F_1 i F_2 jednaka $r_1 = |F_1T| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$ i $r_2 = |F_2T| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$. Pošto točka T leži na hiperboli, vrijedi $|r_1 - r_2| = 2a$, odnosno

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Prebacivanjem drugog pribrojnika s lijeve na desnu stranu dobivamo

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$

odakle kvadriranjem slijedi

$$(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2.$$

Poništavanjem istih izraza i dijeljenjem brojem 4 dobivamo

$$\pm a\sqrt{(x-e)^2+y^2}=a^2-ex,$$

odakle kvadriranjem dobivamo

$$a^2\big((x-e)^2+y^2\big)=a^4-2a^2ex+e^2x^2.$$

Množenjem zagrada i faktorizacijom dobivamo

$$(e^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(e^2-a^2).$$

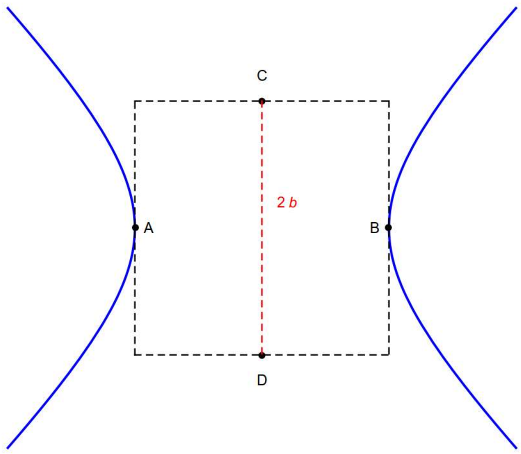
Označimo li $e^2-a^2=b^2$, dobivamo kanonsku jednadžbu hiperbole kojoj središte je u ishodištu i realna os leži na apscisi

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2. \tag{5}$$

Iz kanonske jednadžbe, dijeljenjem s desnom stranom dobivamo segmentni oblik jednadžbe hiperbole

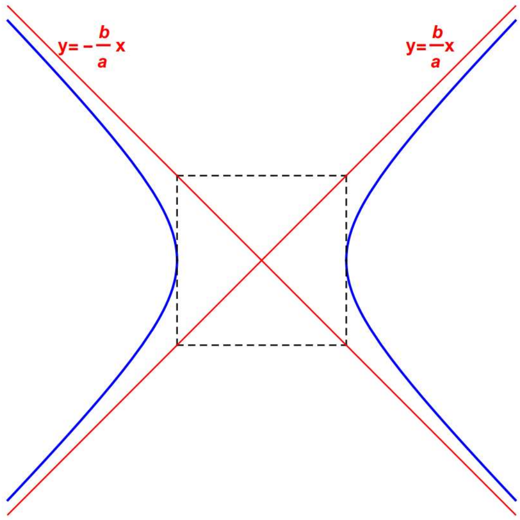
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6}$$

Napomena 2. *Ukoliko u jednadžbu hiperbole stavimo $x=0$, slijedi $y=\pm bi$. Označimo s $C=(0,b)$ i $D=(0,-b)$ imaginarna tjemena hiperbole. Tako dobivenu dužinu $\overline{CD}$ nazivamo imaginarna os hiperbole duljine $2b$.*



Slika 7: Hiperbola s označenim tjemenima i imaginarnom osi

Napomena 3. *Ukoliko jednadžbu hiperbole napišemo u obliku $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, uočavamo da povećavanjem vrijednosti apscise x izraz x^2-a^2 sve je bliže x^2 pa je $\sqrt{x^2-a^2}$ sve bliže x te $y\approx\frac{b}{a}x$. Stoga zaključujemo da se udaljene točke hiperbole približavaju pravcima $y=\pm\frac{b}{a}x$. Ti pravci su asimptote hiperbole.*



Slika 8: Asimptote hiperbole

Napomena 4. *Ukoliko se žarišta hiperbole nalaze na osi ordinata, tada je kanonska jednažba hiperbole dana jednadžbom* $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

1.4 Parabola

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od fiksnog pravca d i točke F koja ne leži na pravcu d. Pravac d nazivamo ravnalica ili direktrisa parabole. Točku F nazivamo žarište ili fokus parabole. Udaljenost ravnalice i žarišta nazivamo poluparametar parabole i označavamo ga s p. Pravac okomit na ravnalicu koji prolazi žarištem parabole nazivamo os parabole. Točku koja je najmanje udaljena od ravnalice nazivamo vrh ili tjeme parabole.

1.4.1 Jednadžba parabole

Neka je vrh parabole V u ishodištu koordinatnog sustava i neka on raspolavlja poluparametar parabole. Neka se fokus nalazi na pozitivnom dijelu osi apscisa. Tada fokus ima koordinate $F = (\frac{p}{2}, 0)$, a ravnalica ima jednadžbu $x = -\frac{p}{2}$. Ako izaberemo bilo koju točku parabole $T = (x, y)$, onda je udaljenost točke T do ravnalice i do žarišta jednaka, odnosno

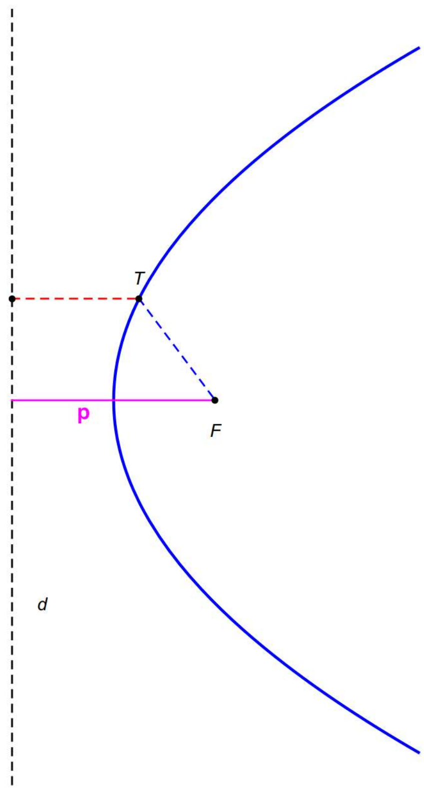
$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Kvadriranjem prethodnog izraza dobivamo

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x^2 - px + \frac{p^2}{4}\right) + y^2.$$

Sređivanjem prethodne jednadžbe dobivamo jednadžbu parabole kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscisa

$$y^2 = 2px. \tag{7}$$



Slika 9: Parabola

Ukoliko bi se žarište parabole nalazilo na negativnom dijelu osi apscisa, dobili bismo jednadžbu $y^2 = -2px$.

Napomena 5. *Analognim postupkom, ukoliko je tjeme parabole na osi ordinata, onda jednažba parabole glasi* $x^2 = \pm 2py$*. Predznak ovisi o položaju žarišta i ravnalice te žarište ima koordinate* $F = (0, \pm\frac{p}{2})$*, a ravnalica ima jednadžbu* $y = \mp\frac{p}{2}$*.*

2 Necentralne krivulje drugog reda

U ovom poglavlju promatramo krivulje drugog reda kojima središte nije u ishodištu koordinatnog sustava. Najprije promatramo krivulje koje su samo translatirane, a zatim one koje su translatirane i rotirane.

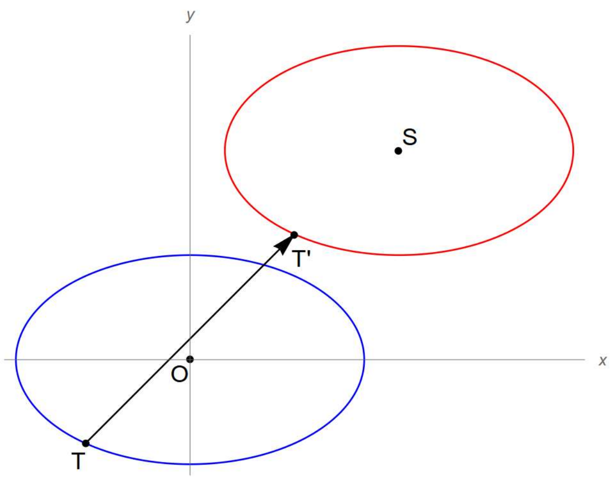
2.1 Translatirane krivulje drugog reda

2.1.1 Jednadžba translatirane elipse

Neka je središte elipse u točki $S = (p, q)$ i neka su mala i velika os elipse paralelne s koordinatnim osima. Svaka točka takve elipse dobivena je translacijom odgovarajuće točke centralne elipse za vektor $\overrightarrow{OS} = p\vec{i} + q\vec{j}$. Ako je bilo koja točka elipse $T(x, y)$ translatirana u točku $T' = (x', y')$, onda vrijedi $\overrightarrow{OT'} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OS}$. Tako dobivamo jednakost $x\vec{i} + y\vec{j} = (x' + p)\vec{i} + (y' + q)\vec{j}$, odakle slijedi da je veza između translatiranih i početnih koordinata dana relacijom $x' = x - p$ i $y' = y - q$. Uvrštavajući u kanonski oblik necentralne elipse slijedi

$$b^2(x - p)^2 + a^2(y - q)^2 = a^2b^2 \tag{8}$$

što je jednadžba translatirane elipse u početnom koordinatnom sustavu.

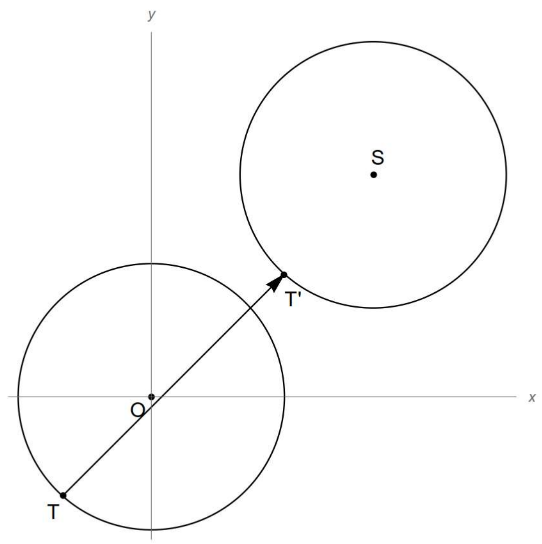


Slika 10: Centralna i translatirana elipsa

2.1.2 Jednadžba translatirane kružnice

Analognim postupkom kao kod necentralne elipse, ukoliko se središte kružnice nalazi u točki $S = (p, q)$, dobivamo jednadžbu kružnice u općem položaju

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \tag{9}$$

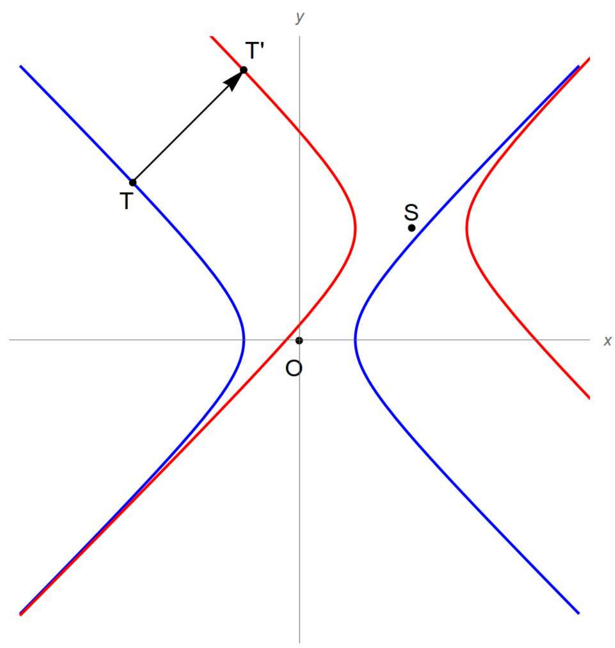


Slika 11: Centralna i translatirana kružnica

2.1.3 Jednadžba translatirane hiperbole

Slično kao kod elipse, translacijom središta hiperbole u novu točku $S = (p, q)$, hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ preslika se u hiperbolu

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$



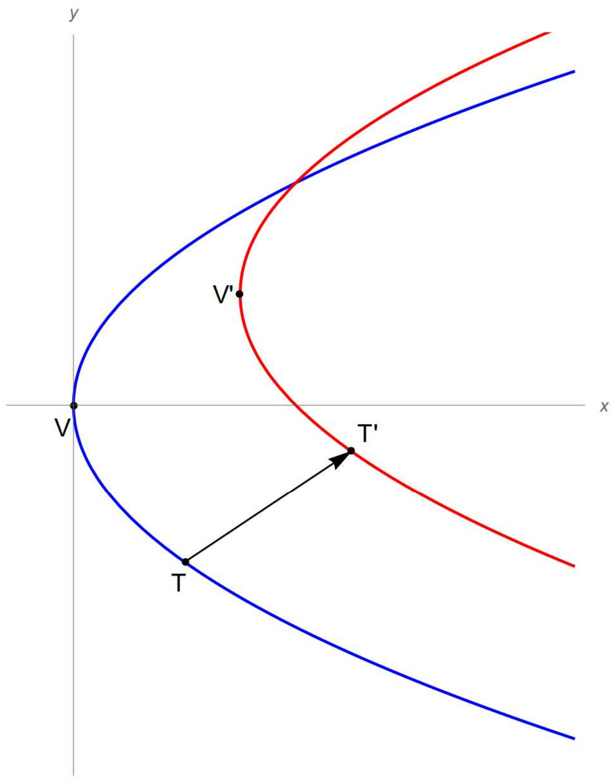
Slika 12: Centralna i translatirana hiperbola

2.1.4 Jednadžba translatirane parabole

Translacijom koja vrh $V = (0,0)$ preslika u vrh $V' = (x_0, y_0)$, parabola $y^2 = 2px$ preslika se u parabolu

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \tag{11}$$

Tada fokus ima koordinate $F = (\frac{b}{a} + x_0, y_0)$, a direktresa ima jednadžbu $y = x_0 - \frac{p}{2}$.



Slika 13: Centralna i translatirana parabola

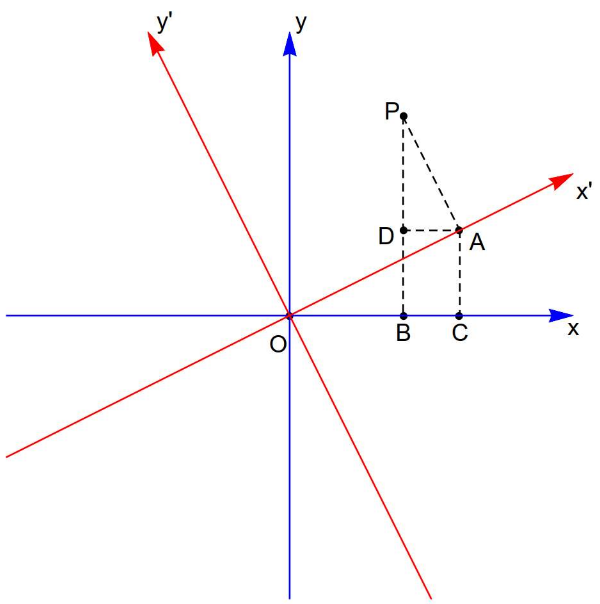
2.2 Rotirane i translatirane krivulje drugog reda

U prošlom poglavlju promatrali smo krivulje drugoga reda koje su dobivene translacijom centralne krivulje. Sada ćemo promatrati krivulje drugog reda koje su translatirane i rotirane.

2.2.1 Rotacija koordinatnih osi

Promotrimo što se događa ako promijenimo smjer koordinatnih osi bez pomicanja ishodišta. Odnosno, razmotrit ćemo transformaciju koordinata kada se Kartezijev sustav rotira oko ishodišta za kut θ. Neka je koordinatni sustav XOY zakrenut za kut θ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu oko ishodišta. Tada su OX' i OY' nove osi. Neka je P točka s koordinatama (x, y) u XOY sustavu i (x', y') u sustavu $X'OY'$. Spustimo okomice PA i PB iz P do OX', odnosno OX. Konstruiramo $\overline{AC}$ okomito na OX i $\overline{AD}$ okomito na $\overline{PB}$. Tada je $x = |OB|$, $y = |PB|$, $x' = |OA|$, $y' = |PA|$. Također $\angle DAO = \angle AOC = \theta$. Prema tome, $\angle DPA = \theta$. Tada, $x = |OB| = |OC| - |AD| = |OA| \cos\theta - |PA| \sin\theta = x' \cos\theta - y' \sin\theta$ i $y = |PB| - |PD| + |AC| = x' \sin\theta + y' \cos\theta$. Ove jednakosti prikazuju koordinate x i y u terminima koordinata x' i y', odnosno

$$
\begin{aligned}
x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\
y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta. \qquad (12)
\end{aligned}
$$



Slika 14: Rotacija koordinatnih osi

Analognim postupkom, možemo prikazati x' i y' u terminima koordinata x i y kao

$$
\begin{aligned}
x' &= x \cos\theta + y \sin\theta \\
y' &= -x \sin\theta + y \cos\theta. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Opća jednadžba svih krivulja drugog reda glasi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{14}$$

Ako primjenimo formule za rotaciju koordinatnih osi na opću jednadžbu krivulja drugog reda (14), dobivamo

$$\begin{aligned} A(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2B(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + C(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 \\ + 2D(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + 2E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F = 0 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} &(A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta)x'^2 - 2[(A-C)\sin\theta\cos\theta - B(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]x'y' \\ &+(A\sin^2\theta - 2B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta)y'^2 + (2D\cos\theta + 2E\sin\theta)x' + (2E\cos\theta - 2D\sin\theta)y' + F = 0 \end{aligned}$$

Oblik $x'y'$ će nestati ukoliko vrijedi $(A-C)\sin\theta\cos\theta = B(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, odnosno $\frac{1}{2}(A - C)\sin 2\theta = B\cos 2\theta$. Riješimo li ovu jednadžbu po nepoznanici θ dobivamo $\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}(\frac{2B}{A-C})$. Dakle, ako rotiramo za navedeni θ, onda smo dobili ponovno krivulju drugog reda

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

Time smo dokazali da rotacijom krivulje drugog reda dobivamo krivulju drugog reda. Ova tvrdnja bit će nam potrebna za daljna razmatranja.

2.2.2 Opći oblik krivulja drugog reda

Ako opću jednadžbu krivulje drugog reda (14) zapišemo u obliku

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0, \tag{15}$$

onda krivulji možemo pridružiti simetričan linearan operator dan matricom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Svojstveni vektori navedenog operatora nazivamo glavnim vektorima krivulje, a smjerove određene glavnim vektorima nazivamo glavnim smjerovima krivulje.

Propozicija 1. *Neka je $X_0 = X_0(M)$ vektorski prostor nad skupom svih točaka ravnine M i neka je $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ simetrični linearni operator na danom vektorskom prostoru. Tada postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i ortonormirana baza (e_1', e_2') vektorskog prostora, tako da vrijedi $\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1'$ i $\mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2'$.*

Dokaz. Dokaz tvrdnje može se pronaći u [6]. □

To za posljedicu ima da za proizvoljni simetrični linearni operator možemo pronaći ortonormiranu bazu u kojoj linearnom operatoru pripada dijagonalna matrica s realnim elementima. Simetrični linearni operator ima realne svojstvene vrijednosti i odgovarajući svojstveni vektori su međusobno okomiti.

Propozicija 2. *Ako je krivulja u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ dana jednadžbom (15) te λ_1 i λ_2 svojstveni vektori linearnog operatora pridruženog krivulji, tada postoji koordinatni sustav $(O'; e_1', e_2')$ takav da krivulja ima jednadžbu*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0. \tag{17}$$

Dokaz. Operator pridružen krivulji je simetričan pa prema propoziciji 1 njegovi jedinični svojstveni vektori su okomiti. Ako su svojstvene vrijednosti jednake, onda za jedan od svojstvenih vektora možemo uzeti bilo koji jedinični vektor, a za drugi svojstveni vektor bilo koji vektor okomit na prvi svojstveni vektor. Tada u bazi (e_1, e_2) matrični zapis operatora je

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Neka se vektor e_1' dobije rotacijom vektora e_1 za pozitivni kut θ. Pošto je $e_2 \perp e_1$ i $e_2' \perp e_1'$, zaključujemo da se e_2' se dobiva iz e_2 rotacijom ili kompozicijom rotacije i translacije obzirom na ishodište O.
Sada možemo uvrstiti formule (12) i (13) u jednadžbu (15). Tako dobivamo jednadžbu (17). □

Jednadžbu (17) nazivamo jednadžba krivulje drugog reda svedena na glavne osi. Prethodne propozicije su ključne za dokaz sljedećeg teorema koji nam konstruktivno daje algoritam za određivanje kanonskog oblika krivulje kada je ona dana u općem obliku.

Teorem 1. *Neka je skup $S \subset M$ definiran jednadžbom $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1 x + a_2 y + a = 0$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ i neka je $\boldsymbol{A} \neq 0$ matrica pripadnog linearnog operatora krivulje. Tada razlikujemo sljedeće slučajeve:*

1. *Ako je* $\det \boldsymbol{A} > 0$, *onda je S elipsa, kružnica, skup koji sadržava samo jednu točku ili prazan skup.*

2. *Ako je* $\det \boldsymbol{A} < 0$, *onda je S hiperbola ili unija dvaju pravaca koji se sijeku.*

3. *Ako je* $\det \boldsymbol{A} = 0$, *onda je S parabola, unija dvaju paralelnih pravaca, jedan pravac ili prazan skup.*

Dokaz. Jednadžbu (15) možemo prikazati u obliku $\mathcal{A}x \cdot x + a \cdot x + a_0 = 0$, gdje su $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ i $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$ uvedeni vektori te $\mathcal{A}$ simetričan linearan operator koji u koordinatnom sustav $(O; e_1, e_2)$ ima matricu $\mathbf{A}$. Primjenom propozicija 1 i 2 možemo pronaći ortonormiranu bazu (e_1', e_2'), gdje je matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ dijagonalna, a elementi su joj realne svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 operatora $\mathcal{A}$. Vektori x i a tada imaju koordinate $x = y_1 e_1' + y_2 e_2'$ i $a = b_1 e_2' + b_2 e_2'$ te jednadžba (15) poprima oblik $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + a_0 = 0$, gdje nema mješovitog člana.

Neka matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ u bazi (e_1', e_2') ima oblik

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Tada joj determinanta iznosi $\det \mathbf{A}' = \lambda_1\lambda_2$.
Razlikujemo dva slučaja:
1. $\det \mathbf{A}' \neq 0$
U ovom slučaju jednadžbu (17) možemo zapisati u obliku

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + c = 0, \tag{19}$$

gdje je $c = b - \frac{b_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{b_2^2}{\lambda_2^2}$.
Uzmemo translaciju

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \\ y'' &= y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{aligned} \tag{20}$$

koja točku O prelikava u točku $O' = (-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2})$. Tada je jednadžba krivulje oblika

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0, \tag{21}$$

gdje su x'' i y'' koordinate u $(O; e_1', e_2')$. Sada razlikujemo dva podslučaja:

1. $\det \mathbf{A}' > 0$
   U ovom slučaju svojstvene vrijednosti su istog predzanaka, ali suprotnog predznaka od slobodnog člana c.
   Ako je $c \neq 0$, onda iz (21) slijedi
   $$\frac{x''^2}{-\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{c}{\lambda_2}} = 1 \tag{22}$$
   pa je krivulja S elipsa ili kružnica za jednake svojsteve vektore .
   Ako je $c = 0$, onda se skup S sastoji od točke $(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2})$.
   Ako je $c \neq 0$ i predznaci slobodnog člana su jednaki s predznakom svojstvenih vektora, onda je S prazan skup.

2. $\det \mathbf{A}' < 0$
   Ako je $c \neq 0$, onda iz (21) slijedi
   $$\frac{x''^2}{-\frac{c}{\lambda_1}} - \frac{y''^2}{-\frac{c}{\lambda_2}} = 1 \tag{23}$$
   pa je krivulja S hiperbola.
   Ako je $c = 0$, onda jednadžba (21) može prikazati u obliku produkta linearnih polinoma, pa je S unija dvaju pravaca koji se sijeku.

Dakle, u slučaju gdje $\det \mathbf{A}' \neq 0$ dobivamo da je S centralnosimetričan skup s centrom simetrije u točki $O' = \left(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$.

2. $\det \mathbf{A}' = 0$

Neka je dodatno $\lambda_2 \neq 0$. Tada jednadžba (17) ima oblik $\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0$. Za $b_1 \neq 0$ slijedi $\lambda_2\big(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\big)^2 + 2b_1\big(x' + \frac{b}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}\big)^2 = 0$.
Ako primjenimo translaciju

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{b}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1} \\ y'' &= y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{aligned} \tag{24}$$

koja točku O preslika u točku $O' = \Big(-\frac{b}{2b_1} + \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2}\Big)$, dobivamo

$$\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0, \tag{25}$$

pa je skup S parabola.
Za $b_1 = 0$, iz (21), slijedi $\lambda_2 \Big(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\Big)^2 + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$. Ako primjenimo na nju translaciju $x'' = x'$, $y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}$ koja točku O preslikava u točku $O' = \Big(0, -\frac{b_2}{\lambda_2}\Big)$ dobivamo krivulju $\lambda_2 y''^2 + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2}$. Pogodnije to možemo zapisati u obliku

$$\lambda_2 y''^2 + C = 0. \tag{26}$$

Ako je $C\lambda_2 < 0$, onda je skup S unija različitih paralelnih pravaca $y' + \frac{b_2}{\lambda_2} = \sqrt{C\lambda_2}$ i $y' + \frac{b_2}{\lambda_2} = -\sqrt{C\lambda_2}$.
Ako je $C\lambda_2 > 0$, onda je skup S prazan skup.
Ako je $C = 0$, onda je skup S jedan pravac $y' = -\frac{b_2}{\lambda_2}$.

□

Primjenom teorema 1 možemo krivulje drugog reda u općemo obliku (14) možemo svesti na pripadni centralni oblik krivulje.

2.3 Primjeri

U ovom poglavlju promotrit ćemo nekoliko primjera krivulja danih jednadžbom u općem obliku. Pomoću rezultata iz prethodnog poglavlja identificirat ćemo o kojoj krivulji se radi te ju skicirati u koordinatnom sustavu.

Primjer 1. *Odredimo krivulju koja je dana jednadžbom*

$$34x^2 - 12xy + 18y^2 + 24x - 72y - 504 = 0.$$

Rješenje. Koeficijenti jednadžbe su $a_{11} = 34, a_{12} = -6, a_{22} = 18, a_1 = 12, a_2 = -36, a_0 = -504$ i pripadna matrica kvadratne forme je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 34 & -6 \\ -6 & 18 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice $\mathbf{A}$ iznosi $\det \mathbf{A} = 576$, pa prema teoremu 1 skup S je elipsa, kružnica, jednočlan skup ili prazan skup. Odredimo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore. Vrijedi

$$k_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 34-\lambda & -6 \\ -6 & 18-\lambda \end{vmatrix}.$$

Iz jednadžbe $k_A(\lambda) = 0$ slijedi da su $\lambda_1 = 36$ i $\lambda_2 = 16$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 36$ rješavanjem jednadžbe $(\mathbf{A} - \lambda_1 I) \cdot v_1 = 0$ dobivamo svojstveni vektor $v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nakon sto normiramo vektor v_1 dobivamo jedinični svojstveni vektor $e_1' = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Analogno, za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 16$ dobivamo svojstveni vektor $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Nakon što normiramo vektor v_2 dobivamo jedinični svojstveni vektor $e_2' = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Sada je $\{e_1', e_2'\}$ ortonormirana baza te matricu $\mathbf{A}$ možemo dijagonalizirati. Definiramo matricu $S = \begin{bmatrix} e_1' & e_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, koja je ortogonalna te vrijedi

$$S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matricu Λ formiramo od svojstvenih vrijednosti onim redom kojim smo stavljali svojstvene vektore u matricu S. Svaka simetrična matrica je ortogonalno slična dijagonalnoj matrici, stoga je $\mathbf{A} = S \Lambda S^T$. Sada uvodimo nove varijable u bazi $(O; e_1', e_2')$ povezane formulom

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Navedenom transformacijom dobivamo jednadžbu bez mješovitog člana

$$36x'^2 + 16y'^2 - \frac{144}{\sqrt{10}} x' - \frac{192}{\sqrt{10}} y' - 504 = 0.$$

Sada jednadžbu svodimo na potpuni kvadrat

$$36\left(x'-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2-\frac{75}{5}+16\left(y'-\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2-\frac{288}{5}-504=0.$$

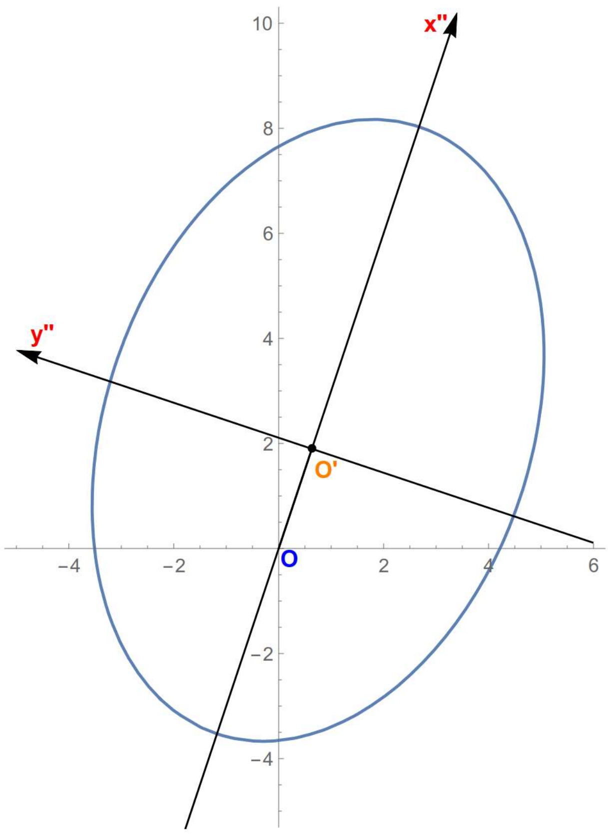
Supstitucijom $x''=x'-\frac{2}{\sqrt{10}}$ i $y''=y'-\frac{6}{\sqrt{10}}$ dobivamo $36x''+16y''=576$. Dijeljenjem jednadžbe brojem 576 dobivamo

$$\frac{x''^2}{16}+\frac{y''^2}{36}=1.$$

Uočavamo da je dana krivulja elipsa s poluosima 4 i 6 i centrom u točki $O'=(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{6}{\sqrt{10}})$. Kako bismo odredili kut rotacije θ, uvršavamo formule (12) u opću jednadžbu elipse :

$$\begin{aligned}34(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2&-12(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)\\&+18(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2+24(x'\cos\theta-y'\sin\theta)-72(x'\sin\theta+y'\cos\theta)-504=0.\end{aligned}$$

Nakon što sredimo prethodni izraz, moramo izjednačiti s nulom izraz uz $x'y'$ kao u potpoglavlju rotacija koordinatnih osi. Dobivamo homogenu trigonometrijsku jednadžbu $12\sin^2\theta-32\sin\theta\cos\theta-12\cos^2\theta=0$, čije je rješenje $\theta=71°33'54''+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. U koordinatnom sustavu $(O;e_1,e_2)$ elipsa je translatirana za vektor $\overrightarrow{OO'}=\frac{2}{\sqrt{10}}e_1+\frac{6}{\sqrt{10}}e_2$ te zatim rotirana za kut $\theta=71°33'54''+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Dakle, glavne osi u koordinatnom sustavu $(O;e_1,e_2)$ su pravci $y=3x$ i $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{10}}{3}$. Sada imamo sve informacije potrebne za prikaz elipse u koordinatnom sustavu $(O;e_1,e_2)$.



Slika 15: Elipsa $34x^2-12xy+18y^2+24x-72y-504=0$

$\square$

Primjer 2. *Odredimo krivulju koja je dana jednadžbom*

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

Rješenje. Koeficijenti jednadžbe su $a_{11} = 5, a_{12} = 6, a_{22} = 0, a_1 = -11, a_2 = -6, a_0 = -19$ i pripadna matrica kvadratne forme je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice $\mathbf{A}$ iznosi $\det \mathbf{A} = -36$, pa prema teoremu 1 skup S je hiperbola ili unija dvaju pravaca koji se sijeku. Odredimo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore. Vrijedi

$$k_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix},$$

odakle slijedi da su $\lambda_1 = 9$ i $\lambda_2 = -4$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 9$ rješavanjem jednadžbe $(\mathbf{A} - \lambda_1 I) \cdot v_1 = 0$ dobivamo svojstveni vektor $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Nakon sto normiramo vektor v_1 dobivamo vektor $e_1' = \frac{2}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ Analogno, za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = -4$ dobivamo svojstveni vektor $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$. Nakon što normiramo vektor v_2 dobivamo vektor $e_2' = \frac{2}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Sada je $\{e_1', e_2'\}$ ortonormirana baza te matricu $\mathbf{A}$ možemo dijagonalizirati. Definiramo matricu $S = \begin{bmatrix} e_1' & e_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, koja je ortogonalna, pa vrijedi

$$S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sada uvodimo nove varijable u bazi $(O; e_1', e_2')$ povezane formulom

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Množenjem dobivamo jednadžbu bez mješovitog člana

$$9x'^2 - 4y'^2 - \frac{90}{\sqrt{13}}x' - \frac{8}{\sqrt{13}}y' - 19 = 0.$$

Sada jednadžbu svodimo na potpuni kvadrat

$$9\left(x' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{225}{13} - 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + \frac{4}{13} - 19 = 0.$$

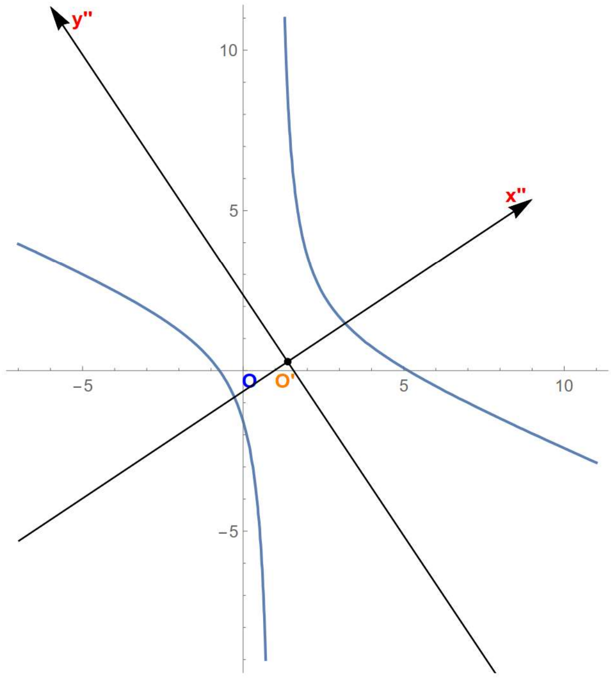
Supstitucijom $x'' = x' - \frac{5}{\sqrt{13}}$ i $y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{13}}$ dobivamo $9x'' - 4y'' = 36$. Dijeljenjem jednadžbe brojem 36 dobivamo

$$\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Uočavamo da je dana krivulja hiperbola s poluosima 2 i 3 i centrom u točki $O' = (\frac{5}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}})$. Kako bismo odredili kut rotacije θ, uvršavamo formule (12) u opću jednadžbu hiperbole :

$$\begin{aligned}5(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 12(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta)\\ - 22(x'\cos\theta - y'\sin\theta) - 12(x'\sin\theta + y'\cos\theta) - 19 = 0.\end{aligned}$$

Nakon što sredimo prethodni izraz, moramo izjednačiti s nulom izraz uz $x'y'$. Dobivamo homogenu trigonometrijsku jednadžbu $-12\sin^2\theta - 10\sin\theta\cos\theta + 12\cos^2\theta = 0$, čije je rješenje $\theta = 33°41'24'' + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. U koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ hiperbola je translatirana za vektor $\overrightarrow{OO'} = \frac{5}{\sqrt{13}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{13}}e_2$ te zatim rotirana za kut $\theta = 33°41'24'' + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dakle, glavne osi u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ su pravci $y = -\frac{3}{2}x + \frac{17\sqrt{13}}{26}$ i $y = \frac{2}{3}x - \frac{7\sqrt{13}}{39}$. Sada imamo sve informacije potrebne za prikaz hiperbole u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.



Slika 16: Hiperbola $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$

□

Primjer 3. *Odredimo krivulju koja je dana jednadžbom*

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 1 = 0.$$

Rješenje. Koeficijenti jednadžbe su $a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{22} = 1, a_1 = -5, a_2 = -3, a_0 = 1$ i pripadna matrica kvadratne forme je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice $\mathbf{A}$ iznosi $\det \mathbf{A} = 0$, pa prema teoremu 1 skup S je parabola, unija dvaju paralelnih pravaca, jedan pravac ili prazan skup. Odredimo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore. Vrijedi

$$k_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

odakle slijedi da su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 0$ riješavanjem jednadžbe $(\mathbf{A} - \lambda_1 I) \cdot v_1 = 0$ dobivamo svojstveni vektor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nakon sto normiramo vektor v_1 dobivamo vektor $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Analogno, za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 2$ dobivamo svojstveni vektor $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Nakon što normiramo vektor v_2 dobivamo vektor $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Sada je $\{e_1', e_2'\}$ ortonormirana baza te matricu $\mathbf{A}$ možemo dijagonalizirati. Definiramo matricu $S = \begin{bmatrix} e_1' & e_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, koja je ortogonalna, pa vrijedi $S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Sada uvodimo nove varijable u bazi $(O; e_1', e_2')$ povezane formulom

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Prethodnom transformacijom dobvamo jednadžbu bez mješovitog člana

$$2y'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' - \frac{8}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0.$$

Sada jednadžbu svodimo na potpuni kvadrat

$$2\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 - \frac{8}{\sqrt{2}}x' + 1 = 0.$$

Supstitucijom $y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{2}}$ dobivamo $2y'' = \frac{16}{\sqrt{2}}$. Dijeljenjem jednadžbe brojem 2 dobivamo

$$y''^2 = 4\sqrt{2}x'.$$

Uočavamo da je dana krivulja parabola.

Kako bismo odredili kut rotacije θ, uvršavamo formule (12) u opću jednadžbu parabole:

$$\begin{aligned}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 - 2(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 \\ - 10(x'\cos\theta - y'\sin\theta) - 6(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + 1 = 0.\end{aligned}$$

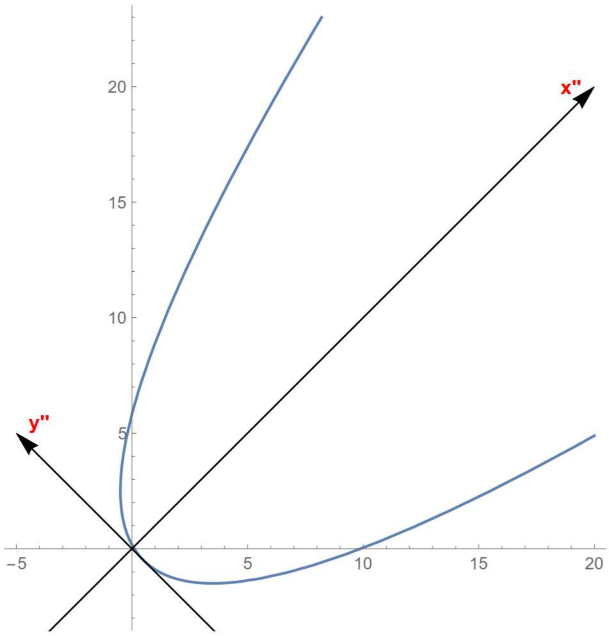
Nakon što sredimo prethodni izraz, moramo izjednačiti s nulom izraz uz $x'y'$. Dobivamo trigonometrijsku jednadžbu $6\sin^2\theta - 6\cos^2\theta = 0$, čije je rješenje $\theta = 45° + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ i $\theta = 135° + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Dakle, glavne osi u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ su pravci $y = -x + \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sada imamo sve informacije potrebne za prikaz parabole u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

□

Primjer 4. *Odredimo krivulju koja je dana jednadžbom*

$$5x^2 + 24xy - 5y^2 + 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y + 13 = 0.$$



Slika 17: Parabola $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 1 = 0$.

Rješenje. Koeficijenti jednadžbe su $a_{11} = 5, a_{12} = 12, a_{22} = -5, a_1 = 3\sqrt{13}, a_2 = 2\sqrt{13}, a_0 =$ 13 i pripadna matrica kvadratne forme je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Determinanta matrice kvadratne forme je $\det \mathbf{A} = -169 < 0$, pa prema teoremu 1 skup S je hiperbola ili unija dvaju pravaca koji se sijeku. Faktoriziramo li danu krivulju, dobivamo

$$-5y^2 + \left(24x + 4\sqrt{13}\right) y + 5x^2 + 6\sqrt{13}x + 13 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-24x - 4\sqrt{13} \pm \sqrt{576x^2 + 192\sqrt{13}x + 208 + 100x^2 + 120\sqrt{13}x + 260}}{-10}$$

$$y_{1,2} = \frac{-24x - 4\sqrt{13} \pm (26x + 6\sqrt{13})}{-10}.$$

Iz ove jednadžbe uočavamo da je krivulja dva pravca $y = 5x + \sqrt{13}$ i $y = -\frac{1}{5}(x + \sqrt{13})$ koji se sijeku u točki

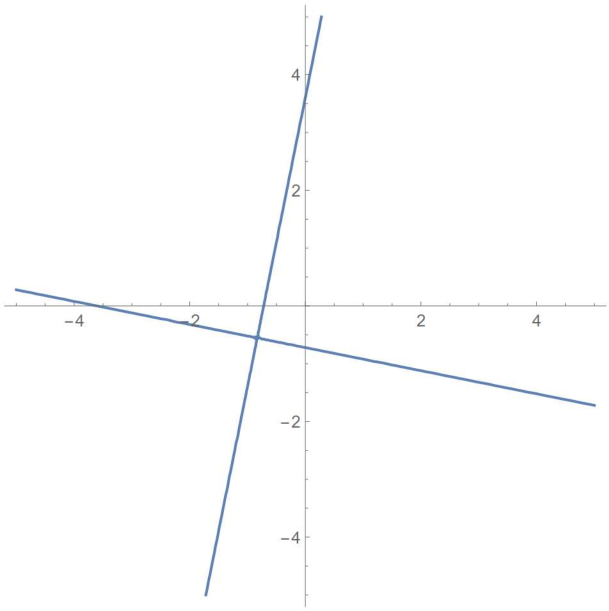
$$O = \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$$

.

□

Primjer 5. *Odredimo krivulju koja je dana jednadžbom*

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$$



Slika 18: Krivulja $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y + 13 = 0$.

Rješenje. Koeficijenti jednadžbe su $a_{11} = 4, a_{12} = -2, a_{22} = 1, a_1 = -3, a_2 = -\frac{3}{2}, a_0 = -4$ i pripadna matrica kvadratne forme je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice $\mathbf{A}$ je $\det \mathbf{A} = 0$, pa prema teoremu 1 skup S je parabola, pravac, unija paralelnih pravaca ili prazan skup. Faktoriziramo li danu jednadžbu, dobivamo

$$y^2 + (-4x + 3)y + 4x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{4x - 3 \pm \sqrt{(3 - 4x)^2 - 4(4x^2 - 6x - 4)}}{2} = 2x - \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2},$$

pa jednadžba krivulje glasi

$$(-2x + y - 1)(-2x + y + 4) = 0,$$

što je unija paralelnih pravaca $y = 2x + 1$ i $y = 2x - 4$.

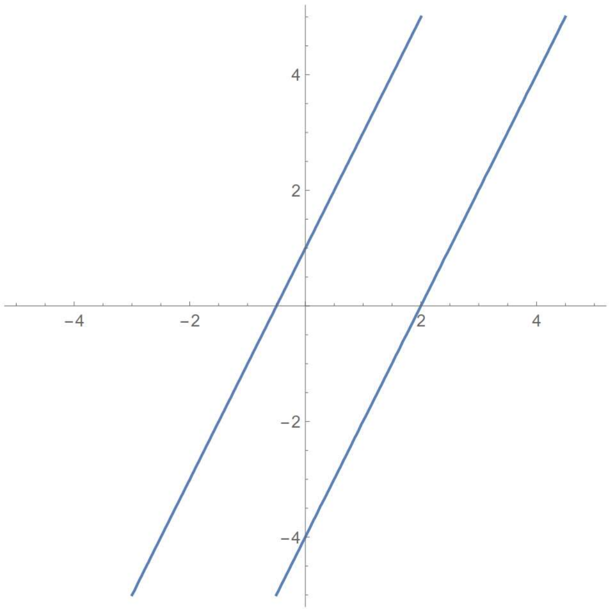
□

Primjer 6. *Odredimo krivulju koja je dana jednadžbom*

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0.$$

Rješenje. Koeficijenti jednadžbe su $a_{11} = 3, a_{12} = -1, a_{22} = 3, a_1 = 1, a_2 = -2, a = 5$ i pripadna matrica kvadratne forme je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$



Slika 19: Krivulja $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$

Determinanta matrice kvadratne forme je $\det \mathbf{A} = 8 > 0$, pa prema teoremu 1 skup S je elipsa, kružnica, prazan skup ili jedna točka.

Odredimo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore linearnog operatora krivulje. Iz

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

slijedi da su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 4$ svojstvene vrijednosti sa svojstvenim vektorima $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Normiranjem svojstvenih vektora i primjenom na danu jednadžbu krivulje dobivamo

$$2x'^2 + 4y'^2 = -\frac{35}{16}.$$

Desna strana jednadžbe je negativa, a na lijevoj strani je zbroj pozitivnih članova. Dakle, zaključujemo da je rješenje prazan skup. $\square$

Literatura

[1] L. ČAKLOVIĆ, Zbirka zadataka iz linearne algebre, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[2] N. ELEZOVIĆ, Linearna algebra, Element, Zagreb, 2016.

[3] K. HORVATIĆ, Linearna algebra, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[4] S. KUREPA, Uvod u linearnu algebru, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

[5] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN, Elementarna matematika 2, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[6] R. SCITOVSKI, Geometrija ravnine i prostora, recenzirani nastavni materijali dostupni na web stranici odjela za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2011.