Kvantitativne mjere rizika i mjere performanse portfelja

Vidović, Robert

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Robert Vidović

Kvantitativne mjere rizika i mjere performanse portfelja

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Robert Vidović

Kvantitativne mjere rizika i mjere performanse portfelja

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2023.

Sadržaj

1 Uvod

Pojam rizika u velikoj je upotrebi tijekom svakodnevne komunikacije i prilikom donošenja svakodnevnih odluka. Na putu ka postizanju cilja postoje brojne prepreke koje imaju određeni stupanj neizvjesnosti koji možemo okarakterizirati uz pomoć vjerojatnosti. Sama mogućnost da se pri ostvarenju cilja isti cilj ne ostvari naziva se rizikom.
Ukoliko bismo ulazili u definiranje i karakteristike rizika naišli bismo na brojne rasprave u poslovnim i akademskim krugovima. Kako je pojam rizika poprilično općenit, posvetit ćemo se tome što rizik znači za ulagača. U svakoj ulagačkoj aktivnosti susrećemo se sa svojstvom rizika koji smatramo suprotnim od nagrade. Jako je bitna mogućnost upravljanja rizikom, no tome prethodi njegova identifikacija. Kao ulagači trudimo se biti u stalnom praćenju rizika i donositi odluke u skladu s našim „apetitom za rizikom".
Ako rizik provučemo kroz povijest, prvo moramo spomenuti drevne kulture. Prijenos robe i dobara u drevnim kulturama bio je izrazito opasan zbog čega su trgovci tražili jamčevine za transport. Navedena transakcija smatra se prvom procjenom rizika budući da je bilo potrebno odrediti iznos jamčevine. Nakon dugo godina stagniranja iskorak u procjeni rizika pojavio se u 17. stoljeću. Taj iskorak vezan je uz razvoj teorije vjerojatnosti i statistike, koja je omogućila metode kvantifikacije rizika. Ulazak mjerenja rizika u sektore poput bankarstva i financijskog tržišta omogućilo je veliku materijalnu dobit onima koji kvalitetno procjene rizik. Posljednji kvalitetan iskorak u mjerenju rizicima dogodio se razvojem računala koji, zbog mogućnosti velikog broja analiza, ulazi u sve grane gospodarstva.
Kako je rasprava o rizicima izrazito dinamična, odlučili smo kategorizirati rizike prema kategorizaciji Hrvatske narodne banke. Hrvatska narodna banka je u dokumentu „Rizici" [11] kategorizirala rizike u pet kategorija. Pod kreditnim rizikom smatra se rizik nepodmirivanja kreditnih obveza. Kamatni rizik jest rizik pada vrijednosti portfelja međunarodnih pričuva zbog mogućeg porasta kamatnih stopa. Navedeni rizik možemo kontrolirati primjenom referentnih portfelja. Pod referentni portfelj smatramo „imaginarni" portfelj koji se sastoji od instrumenata u koje se mogu ulagati sredstva međunarodnih pričuva. Valutni rizik proizlazi iz fluktuacije međuvalutnih odnosa. Likvidna sredstva obuhvaćaju svu imovinu koju je moguće unovčiti u roku od tri dana bez značajnog utjecaja na njezinu stvarnu vrijednost. Tako dolazimo do likvidnosti rizika koji se kontrolira ulaganjem u lako utržive instru-

mente. Operativni rizik jest rizik gubitka zbog neadekvatnih unutarnjih postupaka. Neadekvatni postupci mogu biti propusti zbog ljudskih grešaka i vanjskih događaja. U ovome radu, bavit ćemo se kvantitativnim mjerama rizika i mjerama performanse portfelja.
U poglavlju Kvantitativne mjere rizika, upoznati ćemo se s kvantitativnim mjerama rizika. Ponajprije ćemo definirati tradicionalne mjere rizika pa ćemo definirati vrijednost pod rizikom (engl. *Value at Risk* (VaR)) i njegova ograničenja. Za kraj poglavlja ćemo krenuti u definiranje varijacija mjere VaR-a poput prosječne vrijednosti pod rizikom (engl. *Average Value at Risk* (AVaR)), inkrementalne vrijednosti pod rizikom (IVaR) i sastavni dio vrijednosti pod rizikom (engl. *Component Value at Risk* (CVaR)). Naposljetku svakog poglavlja ćemo navesti primjer.
U poglavlju Mjere performanse portfelja bavit ćemo se mjerama performanse poput Sharpeovog i Treynorovog omjera. Nakon njih ćemo definirati Sorentinov omjer i mjeru alfa. Svaka mjera performanse biti će definirana i objašnjena uz pomoć primjera.

2 Kvantitativne mjere rizika

2.1 Mjere rizika prije VaR-a

Kako bismo lakše razumijeli modernije koncepte mjerenja rizika, potrebno je razumjeti tradicionalne alate za mjerenje rizika. Početkom prošlog stoljeća američka vojska uvela je analizu scenarija. Prva velika tvrtka koja je počela s primjenom ove metode je Shell Oil tijekom 1970. godine. Analiza scenarija korištena je kao odgovor na fluktuacije u globalnim zalihama nafte. Nagli razvoj računala raširio je ovu metodu u sve grane gospodarstva. Računalni doprinos očitovao se u brzini analize i smanjenju ručnog računalnog rada. Danas se analiza scenarija najviše koristi u tvrtkama koje pružaju financijske usluge za analizu rizika i donošenju odluka o ulaganju. Nakon kratkog povijesnog pregleda krenimo na definiranje analize scenarija. Proces procjene očekivane vrijednosti portfelja nakon određenog vremenskog razdoblja naziva se analiza scenarija. Pretpostavka koja je vezana uz definiranje analize scenarija je pojava specifične promjene u vrijednostima vrijednosnih papira i ostalim ključnim čimbenicima. Zbog racionalnog i strukturiranog načina analize scenarija budućnosti dobivamo uvid u više različitih potencijalnih ishoda. Najčešće se raspon kreće od najboljeg do najgoreg scenarija. Kako tvrtka dobije analizu različitih scenarija, tako se može pripremiti i razviti strategiju za boljim snalaženjem u budućnosti. Važno je napomenuti kako kvaliteta analize scenarija ovisi o kvaliteti podataka i o kvaliteti analitičara. Ukoliko bismo analizu scenarija raščlanili na nekoliko koraka, prvi korak bi bilo definiranje odluke, odnosno problema, kojega trebamo razriješiti. Zatim bismo krenuli u prikupljanje podataka i identifikaciju ključnih čimbenika koji utječu na naš problem. Nakon obrade podataka krenuli bismo u razvoj scenarija. U praksi se često susrećemo s potrebom razvoja tri scenarija: osnovni, najbolji i najlošiji scenarij. Razvoj više scenarija daje veći pregled mogućih događanja u budućnosti. Kada bismo razvili optimalni broj scenarija potrebno ih je ocijeniti što znači da procijenimo i analiziramo potencijalni učinak svakoga scenarija. Zadnji korak u analizi scenarija je planiranje. Planiranje uključuje donošenje odluka vezanih uz budućnost u skladu s provedenom analizom. Osnovni scenarij temeljen je na opće prihvaćenim pretpostavkama, dok najlošiji scenariji povlači niz negativnih pretpostavki. Najbolji scenariji nastaje u idealiziranoj situaciji.

Primjer 1. *Pretpostavimo da jedna poljoprivredna tvrtka dolazi na ideju sijanja*

nove poljoprivredne kulture. Kao i za ostale kulture, potrebna je godina dana da se proizvod plasira na tržište. U navedenome razdoblju imamo negativna gospodarska očekivanja koja su procijenili ekonomski analitičari. Kako su gospodarski uvjeti različiti, od kupca pa do cijene sirovine, tako tvrtka razmatra moguće scenarije koji se razlikuju po pretpostavkama.
Jedan primjer pretpostavki scenarija je rast prodaje od 30 % zbog globalnih poljoprivrednih uvjeta. Ovakav definiran scenarij vezan je i uz porast troškova repromaterijala i smanjenja konkurencije. Poticaji poljoprivrednicima mogu umanjiti troškove financiranja sadnje poljoprivredne kulture, tako da pri analizi scenarija stvaramo potrebu za razmatranjem svih čimbenika koji utječu na scenarije.
U najboljem scenariju prihodi će porasti zbog globalnih problema konkurencije što rezultira neto maržom od 15 %. U najlošijem scenariju potražnja pada dok troškovi repromaterijala nastavljaju rasti što rezultira neto maržom od 5 %. Osnovni slučaj nalaže nastavak istih trendova u budućnosti. Sva tri navedna scenarija različito utječu na dobit i prihode. Raspon scenarija je od 5 % do 15 % što pomaže pri daljnjoj odluci tvrtke o daljnjim ulaganjima. Svaka tvrtka može uz događaj navesti i procjenu vjerojatnosti koja olakšava donošenje budućih odluka. [12]

Primjer jasno ilustrira prednosti analize scenarija. Kao najveću prednost potrebno je istaknuti dubinsku analizu svih scenarija što rezultira razumijevanjem i prevencijom od potencijalnih rizika. Analiza scenarija pomaže tvrtkama u proaktivnijem upravljanju rizikom.
Među nedostacima analize scenarija potrebno je navesti kako nerealne pretpostavke mogu dovesti i do loše prediktivnosti modela. Kvaliteta podataka i analitičara također utječu na kvalitetu analize. Proces analize može biti izrazito dugotrajan što je zasigurno jedan od nedostataka ove analize.
Krenimo sada s još jednim tradicionalnim alatom za procjenu rizika. Analiza trajanja jaza svrstava se među alternativne metode za mjerenje kamatnog rizika. Ona ispituje osjetljivost tržišne neto vrijednosti financijske institucije na promjenu kamatne stope. Macaulayev koncept trajanja jaza ubraja se u temelj za analizu trajanja jaza. Macaulayev koncept, koji mjeri prosječni životni vijek toka plaćanja vrijednosnica, može se definirati kao ponderirani prosječni rok do dospijeća obveznice. Uočimo kako je trajanje jaza korisno svojstvo zato što daje dobru aproksimaciju, osobito kada su promjene kamatne stope male. Za osjetljivost tržišne vrijednosti financijske imovine na promjenu kamatne stope koristimo formulu:

$$\%\Delta P \approx -DUR \times \frac{\Delta i}{1+i},$$

gdje je $\%\Delta P = \frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$ postotna promjena tržišne vrijednosti vrijednosnice, DUR trajanje, i kamatna stopa i Δi promjena kamatne stope.

Primjer 2. *Pretpostavimo kako je prosječno trajanje imovine 3 godine, a prosječno trajanje obveza godinu dana. Direktor banke želi znati što se događa s neto vrijednosti banke kada kamatna stopa poraste s 5 % na 8 %. Ukupna vrijednost imovine je 20 mil €, a ukupna vrijednost obveza iznosi 15 mil €.*

$$\%\Delta P = -DUR \times \frac{\Delta i}{1+i} = -3 \times \frac{0.03}{1+0.05} = -0.085714,$$
$$20 \times \%\Delta P = 20 \times (-0.085714) = -1.71428.$$

Tržišna vrijednost imovine opadne za 1.71428 mil €. Kako je ukupna vrijednost obveza 15 mil € dobivamo sljedeći izračun:

$$\%\Delta P = -DUR \times \frac{\Delta i}{1+i} = -1 \times \frac{0.03}{1+0.05} = -0.028571,$$
$$15 \times \%\Delta P = 15 \times (-0.028571) = -0.42857.$$

Kao rezultat dobivamo da je neto vrijednost banke smanjena za 1.28571 mil €, što slijedi iz formule: -1.71428-(-0.42857)= -1.28571 mil €.
Ako direktora banke zanima izračun trajanja jaza, tada koristimo formulu:

$$DUR_{GAP} = DUR_{Imovina} \times \left(\frac{Obveze}{Imovina} \times DUR_{Obveze}\right) = 3 \times \left(\frac{15}{20} \times 1\right) = 2.5\,godine,$$

gdje obveze predstavljaju tržišnu neto vrijednost obveza, a Imovina je tržišna vrijednost imovine. Trajanje jaza banke iznosi 2.5 godine. [13]

Ovaj pristup u prošlosti se koristio zbog jednostavnosti izračuna. Trenutno jednostavnost izračuna nema veliki utjecaj budući da su računala preuzela kompleksnije kalkulacije. Ograničenja ove analize su u tome što se zanemaruju svi ostali rizici osim kamatnog rizika.

2.2 Vrijednost pod rizikom

Kako bismo razumjeli mjeru rizika poput vrijednost pod rizikom krenimo s njegovim povijesnim razvojem. Mjerenje rizika postajalo je sve važnije financijskim institucijama. Tako se u kasnim 1970-ima i 1980-ima započinje s razvojem modela kojega su financijske institucije koristile kao internu mjeru upravljanja rizikom. Slaba razvijenost metodologije otežavala je razvoj modela pa je bilo potrebno da se jedan model u svijetu istakne i riješi probleme vezane za upravljanje rizikom. Takav model nastao je uz pomoć tvrtke J.P. Morgan pod imenom RiskMetrics.
Tadašnji direktor banke zahtijevao je kratko dnevno izvješće koje bi ukazivalo na potencijalne gubitke i rizike sljedećih 24 sata. Kako se trgovanje zatvara u 16:00 sati, tako je izvješće trebalo biti gotovo u 16:15 sati te je po tome vremenskom trenutku dobilo ime „Izvješće 4:15“.
Zaposlenici J.P. Morgana morali su ispoštovati direktorovu želju pa su imali potrebu za razvojem sustava za mjerenjem rizika koji bi bio funkcionalan u cijeloj industriji. Sustav je trebao kombiniranjem brojnih rizika izbaciti jedinstvenu kvantitativnu mjeru rizika. Takva mjera rizika nazvana je vrijednost pod rizikom. Vrijednost pod rizikom je procjena maksimalnog gubitka s određenim stupnjem pouzdanosti ε. U početku je početno razdoblje bilo sljedeći dan trgovanja.
Kompleksnost ovoga sustava očitovala se u brojnim pitanjima koja su se nametala poput: kako konstruirati skupove podataka, kako procijeniti korelaciju, volatilnost i druge praktične probleme. Gospodin Till Guldimann je 1990. godine preuzeo odgovornost za nadgledanje istraživačkih aktivnosti u marketinškim institucijama.Godine 1993., gospodin Guldimann je održao uvodni govor i demonstraciju sustava za procjenu rizika na godišnjoj istraživačkoj konferenciji za svoje klijente. Prezentacija sustava za procjenu rizika izazvala je veliko zanimanje klijenata. Natjecanja financijskih institucija na tržištu potaknula su razvoj vlastitih internih modela. Financijske institucije su bile svjesne ograničenja svojih modela pa su brojne informacije o sustavu upravljanja rizikom tajile. J.P. Morgan se odlučio svoju metodologiju i podatke učinili dostupnima za sve. J.P. Morgan u listopadu 1994. godine besplatno na internetske stranice je postavio svoj sustav RiskMetrics i ostale potrebne podatke. Tako su mnoge institucije mogle poboljšati interni sustav upravljanja rizikom. Ovakav potez nije mogao proći neopaženo, a kao rezultat toga bilo je povećanje svijesti o korisnosti vrijednosti pod rizikom. Korištenje vrijednosti pod rizikom započelo je među investicijskim bankama. Proširilo se i na poslovne banke i mirovinske fondove

te je na kraju svoju primjenu pronašlo i u komercijalnim tvrtkama. Razvoj računala dodatno je potaknuo razvoj vrijednosti pod rizikom i njegovu primjenu pa je tako, osim tržišnog rizika, vrijednost pod rizikom je postala primjenjiva u kreditnim rizicima, rizicima likvidnosti i rizicima novčanoga tijeka.
Nakon kratkoga razvojnog puta vrijednosti pod rizikom, navedimo načine korištenja. Višestruka primjenjivost vrijednosti pod rizikom može se reflektirati pomoću apetita za rizikom koji se ponaša proporcionalno s vrijednosti pod rizikom. Vrijednost pod rizikom možemo koristiti za određivanje kapitalnih zahtjeva koji su također proporcionalni s vrijednosti pod rizikom, odnosno povećanjem rizične aktivnosti raste i vrijednost pod rizikom i kapitalni zahtjevi. Vrijednost pod rizikom možemo pronaći i u godišnjim izvještajima kao i strategijama zaštite od rizika. Najvažnija primjena vezana je uz donošenje odluke o ulaganju. Vrijednost pod rizikom je korisna za procjenu rizika i tako se ulagač može zaštiti od rizika ako je prevelik za njegov apetit.
Funkcija distribucije je jedan od osnovnih pojmova u teoriji vjerojatnosti. Njena primjena vidljiva je u samoj definiciji vrijednosti pod rizikom pa ju definiramo u nastavku.

Definicija 1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je X slučajna varijabla na njemu. Funkciju $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da realizacija slučajne varijable bude manja ili jednaka tom broju, tj. funkciju definiranu s*

$$F(x) := P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\right) = P\left(\{X \leq x\}\right),$$

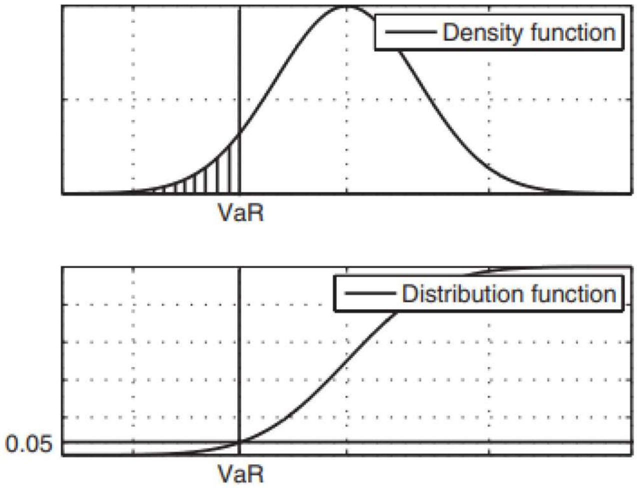
zovemo funkciju distribucije slučajne varijable X.

Sada smo stvorili preduvjete za definiranje vrijednosti pod rizikom.

Definicija 2. *Neka je X slučajna varijabla i F_X funkcija distribucije slučajne varijable X. Vrijednost pod rizikom, VaR, na razini značajnosti $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$, je najmanji broj y takav da je vjerojatnost da $Y := -X$ ne prelazi y je barem $1-\varepsilon$. Matematički, $VaR_\varepsilon(X)$ je $(1-\varepsilon)$-kvantil od Y, tj.*

$$VaR_\varepsilon(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \varepsilon\}.$$

Ova se formula ne može koristiti izravno za izračune osim ako ne pretpostavimo da X ima parametarsku distribuciju. Vrijednost pod rizikom je minimalna razina gubitka, na određenom intervalu, u unaprijed definiranom vremenskom roku. Tako možemo reći da se gubitci veći od vrijednosti pod rizikom pojavljuju s vjerojatnošću ε.



Slika 1: 95% Value at Risk prikazan na funkciji gustoće i funkciji distribucije [6]

Primjer 3. *Pretpostavimo da raspolažemo portfeljem s tjednom 95 postotnom vrijednosti pod rizikom u iznosu od milijun eura. To bi značilo kako ćemo u vremenskom intervalu od jednog tjedna izgubiti barem milijun eura s vjerojatnošću od 5%.*

2.3 Ograničenja vrijednosti pod rizikom

Tijekom povijesti brojni kritičari su ukazivali na greške vrijednosti pod rizikom i upozoravali su da za njegovo korištenje i učinkovito upravljanje rizikom moramo poznavati i ograničenja vrijednosti pod rizikom. Kako je vrijednost pod rizikom alat za upravljanje rizikom kod banaka i velikih financijskih institucija potrebno je detaljno provesti analizu njegovih ograničenja. Iako nam 99 postotna vrijednost pod rizikom znači da u 1 % slučajeva očekujemo gubitak veći od VaR-a, ne možemo ništa reći o potencijalnoj veličini gubitka unutar 1 % . Glavni problem ove mjere rizika je taj što nemamo informacije o maksimalnom mogućem gubitku. Maksimalan gubitak, koji se dogodi u najlošijem mogućem scenariju, može biti malo veći od VaR-a, ali može biti i značajno veći, primjerice dovesti do stečaja tvrtke. Kako se najlošiji scenariji na tržištu ne odvijaju često, dva ili tri dana u godini, teško možemo predvidjeti njihov utjecaj. Najveći mogući gubitak nije moguće odrediti, a ni VaR uzimati kao mjeru najlošijeg scenarija. Ovakav osjećaj lažne sigurnosti zasigurno pripada u najveće ograničenje vrijednosti pod rizikom.
Težina izračuna vrijednosti pod rizikom također se ubraja u ograničenja ove mjere rizika. Kada dođemo do izračuna rizičnosti portfelja, potrebno je još i procijeniti povrate i volatilnost. Naposljetku trebana je procjena korelacije među njima tako da težina izračuna ove mjere rizika raste eksponencijalno s brojem i raznovrsnošću pozicija u portfelju.
Još jedan od nedostataka ove mjere rizika je u tome što nije zadovoljeno svojstvo aditivnosti, već subaditivnosti, tj.

$$VaR_\varepsilon(X+Y) > VaR_\varepsilon(X) + VaR_\varepsilon(Y),$$

gdje su X i Y slučajne varijable kojima modeliramo isplatu dvaju instrumenata u portfelju.

Primjer 4. *Označimo s X obveznicu čija vrijednost opada s vjerojatnošću 4.5 % i u tom slučaju gubimo* 50 *ili ne pada što povlači da je gubitak jednak nuli. Neka obveznica Y ima identična svojstva, ali pretpostavimo kako su zadane obveznice nezavisne. Vrijednost pod rizikom, na razini pouzdanosti 95 %, ovih dviju obveznica iznosi nula, tj.*

$$VaR_{0.05}(X) = VaR_{0.05}(Y) = 0.$$

Možemo uočiti kako naša mjera rizika ne prepoznaje gubitake koji se javljaju s vjerojatnošću manjom od 5 %.
Portfelj dviju obveznica ima sljedeći profil isplate: gubi 100 *s vjerojatnošću* 0.2%, *gubi* 50 *s vjerojatnošću* 8.6%, *a gubitak je nula s vjerojatnošću* 91.2%. *Budući da je odgovarajući 95 % Value at Risk portfelja 50 €, dobivamo sljedeću nejednadnakost:*

$$50 = VaR_{\varepsilon}(X+Y) > VaR_{\varepsilon}(X) + VaR_{\varepsilon}(Y) = 0 + 0 = 0.$$

Korištenje ove mjere rizika sugerira krivu odluku ulagaču pa je ovakvo svojstvo za jednu mjeru rizika nepoželjno. [6]

Tipični problemi u izračunu mjera rizika nisu zaobišli ni VaR. VaR je kvalitetan onoliko koliko su kvalitetni i naši podaci. Pogrešna pretpostavka koja se često pojavljuje vezana je uz pretpostavku o normalnoj distribuciji povrata na imovinu. Korištenje krivih distribucija kao pretpostavki može dovesti do podcjenjivanja stvarnoga rizika s vrijednosti pod rizikom.

2.4 Prosječna vrijednost pod rizikom

Kao što smo u prethodnom potpoglavlju naveli, vrijednost pod rizikom ima mnogo nedostataka no takva mjera rizika se usvojila u financijskoj industriji. Zbog svojih nedostataka matematičari su krenuli u potragu za boljim mjerama rizika koje će zadovoljavati neka svojstva koja VaR nije uspio zadovoljiti. Tako je nastala nova mjera rizika pod imenom prosječna vrijednost pod rizikom. U ovome potpoglavlju upoznati ćemo se s definicijom, svojstvima i formulama za izračun koje će nam pomoći u razumijevanju ove mjere rizika. Prosječna vrijednost pod rizikom za vjerojatnost ε definirana je kao ponderirani prosjek vrijednosti pod rizikom koje su veće od vrijednosti pod rizikom na repnoj distribuciji ε i označavamo ju s AVaR. Možemo reći da je AVaR temeljen na gubitku većem od vrijednosti pod rizikom.

Definicija 3. *Neka je X slučajna varijabla i $VaR_\varepsilon(X)$ vrijednost pod rizikom. Tada je prosječna vrijednost pod rizikom, na razini značajnosti ε, slučajne varijable X jednaka*

$$AVaR_\varepsilon(X) := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon VaR_p(X)dp.$$

Potrebno je naglasiti kako je AVaR dobro definiran za slučajne varijable koje zadovoljavaju $E|X| < \infty$, odnosno za slučajne varijable s konačnim prvim momentom. Navedena pretpostavka u praksi znači da AVaR ne vrijedi za dionice kojima je očekivani povrat beskonačan. Prosječna vrijednost pod rizikom se možemo definirati i uz pomoć formule

$$AVaR_\varepsilon(X) = \min_{\theta\in\mathbb{R}}(\theta + \frac{1}{\varepsilon}E(-X-\theta)_+),$$

gdje je $x_+ = max(x, 0)$ i X je slučajna varijabla koja opisuje distribuciju povrata portfelja. Ukoliko bismo AVaR pokušali definirati uz pomoć uvjetnog očekivanja dobili bismo sljedeću formulu

$$AVaR_\varepsilon(X) = -E(X|X < -VaR_\varepsilon(X)).$$

Prethodna formula sugerira da je AVaR jednak prosječnom gubitku pod uvjetom da je gubitak veći od vrijednosti pod rizikom. Sve navedene formule daju jednaki rezultat u slučaju da je funkcija distribucije neprekidna. Detaljniji izvod formula vezanih uz AVaR nalazi se u literaturi [6].
Navedimo formule za izračun prosječne vrijednosti pod rizikom za neprekidne distribucije. Navesti ćemo formule samo za normalnu i studentovu t-distribuciju.

Pretpostavimo da je slučajna varijabla X normalno distribuirana s očekivanjem EX i standardnom devijacijom σ_X. Prosječna vrijednost pod rizikom s vjerojatnosti ε definirana je formulom

$$AVaR_\varepsilon(X) = \frac{\sigma_x}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} exp\left\{ -\frac{(VaR_\varepsilon(Y))^2}{2} \right\} - EX,$$

gdje Y ima standardnu normalnu distribuciju, tj. $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ Kako je AVaR fokusiran na ekstremne gubitke, zbog ograničenja normalne distribucije slijedi da je AVaR simetričan.

Normalna distribucija je najčešće korištena distribucija u statistici i poznata je po svojoj simetričnosti i obliku zvona. Blisko povezana distribucija je studentova t-distribucija, koja je također simetrična i ima oblik zvona, ali razlikuje se u "težini" repova. Pretpostavimo da X ima Studentovu t-distribuciju s ν stupnjeva slobode. Prosječna vrijednost pod rizikom s repnom vjerojatnosti ε definirana je formulom

$$AVaR_\varepsilon(X) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})\sqrt{\nu}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu-1)\varepsilon\sqrt{\pi}}(1 + \frac{(VaR_\varepsilon(X))^2}{\nu})^{\frac{1-\nu}{2}}, & \text{ako je } \nu > 1 \\ \infty, & \text{ako je } \nu = 1 \end{cases},$$

gdje je $\Gamma(x)$ gamma funkcija. Poznato nam je kako je studentova distribucija s jednim stupnjem slobode zapravo Cauchyijeva distribucija. U Cauchyijevoj distribuciji očekivanje je beskonačno pa izračun AVaR-a nema smisla, odnosno AVaR nije definiran. Sve formule iz ovoga poglavlja moguće je pronaći u literaturi [6].

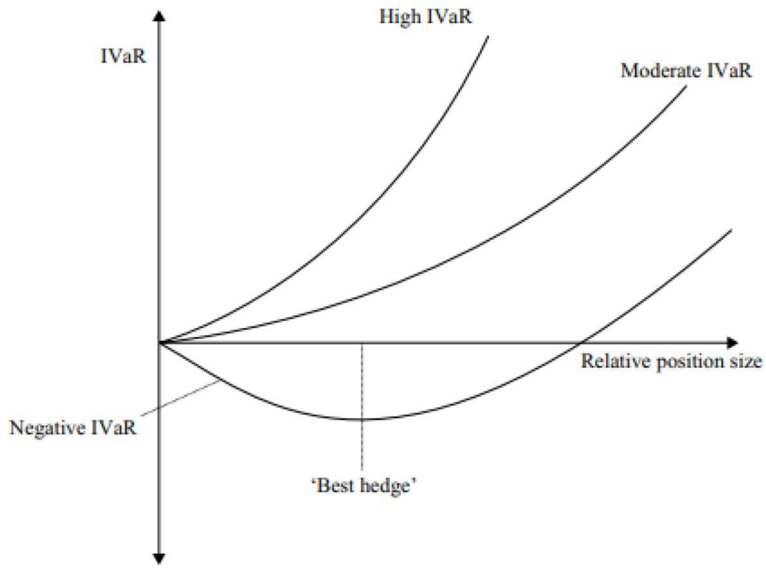
2.5 Inkrementalna vrijednost pod rizikom

Poznato nam je kako promjene samoga portfelja uzrokuju i promjenu rizika. U ovome dijelu rada pozabavit ćemo se upravo tim promjenama i njihovim utjecajima na rizik. Situacija koja se događa u praksi je da dodamo novu komponentu u naš portfelj.

Definicija 4. *Neka je p postojeći portfelj i neka je* $VaR_\varepsilon(p)$ *pripadna vrijednost pod rizikom tog portfelja. Neka je a komponenta koju dodajemo na naš portfelj. Tada je vrijednost pod rizikom našega portfelja jednaka* $VaR_\varepsilon(p+a)$*. Promjena vrijednosti pod rizikom koja nastane dodavanjem nove komponente u portfelj naziva se inkrementalna vrijednost pod rizikom i označava se s IVaR. Izračun* $IVaR(a)$ *dobiva se kao razlika navedenih vrijednosti pod rizikom, tj.*

$$IVaR(a) = VaR_\varepsilon(p+a) - VaR_\varepsilon(p).$$

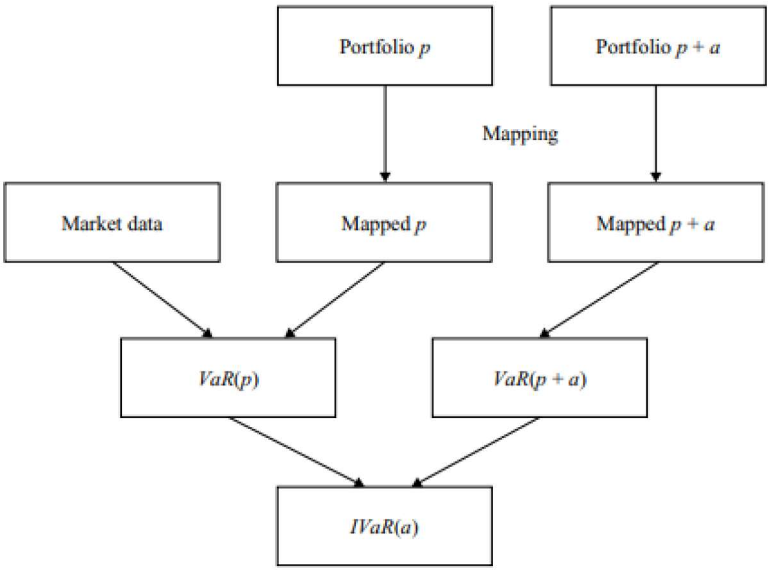
Upravo ova mjera korisna je prilikom donošenja odluka o riziku. Inkrementalna vrijednost pod rizikom sadrži brojne korisne informacije za ulagača. Razmotrimo tri glavna slučaja sa sljedeće slike.



Slika 2: Inkrementalna vrijednost pod rizikom i relativna veličina pozicije [6]

Negativna inkrementalna vrijednost pod rizikom označava smanjenje vrijednosti pod rizikom ukupnog portfelja. Inkrementalni VaR prati kretanje kao što je navedeno na slici. U početku opada, zatim IVaR počinje rasti većom brzinom nego portfelj bez nove komponente. Točka minimuma u kojoj je učinak zaštite najveći poznata je kao "najbolji hedge" i korisna je prilikom donošenja odluka o upravljanju portfeljem. Umjereno pozitivan inkrementalni VaR znači da nova pozicija umjereno povećava rizik portfelja. Inkrementalni VaR u ovakvom scenariju raste sa sve većom brzinom kako se povećava i relativna veličina pozicije.

Visoki inkrementalni VaR označava da nova komponenta u portfelju značajno povećava rizik. Razlog tome je rast utjecaja komponente s njezinom veličinom u portfelju, što posljedično uzrokuje rast VaR-a i IVaR-a. Upravo ovakav scenarij sve više potiskuje učinke diverzifikacije. Sama procjena IVaR-a najbolje je prikazana uz pomoć slike. Takav način procjene IVaR-a naziva se pristup "prije i poslije".



Slika 3: Pristup "prije i poslije" procjeni IVaR-a [6]

Pristup "prije i poslije" također sadrži nedostatke. Ako odlučimo uvesti veliki broj novih komponenti u portfelj, tada će procjena inkrementalne vrijednosti pod rizikom biti poprilično komplicirana. U praksi većih financijskih institucija, koje imaju

poprilično velik broj novih komponenti u portfelju, ovakva procjena je teško izvediva u kratkom vremenu.
Novi pristup procjene IVaR-a nastao je 1996. godine uz pomoć matematičara Garmana [2] [3]. Predložio je korištenje Taylorovog niza temeljenoga na graničnim vrijednostima pod rizikom za procjenu IVaR-a. Pretpostavimo da imamo portfelj p i želimo procijeniti IVaR ako dodamo komponentu a u naš postojeći portfelj. Portfelj p tada ima vektor mapirane pozicije u ovim komponentama $[w_1, w_2, ..., w_n]$, gdje w_i predstavlja udio ili težinu pozicije i u portfelju. Novi portfelj ima odgovarajući vektor veličine položaja $[w_1 + \Delta w_1, w_2 + \Delta w_2, ..., w_n + \Delta w_n]$. Ako je nova komponenta a "mala" u odnosu na postojeći portfelj, možemo uz pomoć aproksimacije Taylorovog reda oko $VaR_\varepsilon(p)$ približno procijeniti VaR novoga portfelja, to jest

$$VaR_\varepsilon(p + a) \approx VaR_\varepsilon(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial VaR_\varepsilon(a)}{\partial \omega_i} d\omega_i,$$

gdje je $d\omega_i \approx \Delta\omega_i$. Tada je IVaR dobiven uz pomoć formule

$$IVaR(a) = VaR_\varepsilon(p + a) - VaR_\varepsilon(p) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial VaR_\varepsilon(a)}{\partial \omega_i} d\omega_i,$$

gdje nam parcijalne derivacije $\partial VaR_\varepsilon / \partial \omega_i$ daju granične promjene u VaR-u povezane s graničnim promjenama u elementima portfelja. Ovakav pristup nam omogućuje procjenu i korištenje IVaR-a u stvarnom vremenu za procjenu rizičnosti ulaganja. Navedeni pristup može se koristiti u svakodnevnom trgovanju na tržištu. Različite procjene IVaR-a tijekom trgovanja možemo dobiti uz pomoć formule

$$IVaR(a) \approx \nabla VaR_\varepsilon(p) dw,$$

gdje je dw transponirani vektor novih težina u portfelju $[dw_1, ..., dw_n]$ i $\nabla VaR(p)$ vektor parcijalnih derivacija od $VaR_\varepsilon(p)$ u odnosu na w_i. Iskustvo pokazuje kako je ovakva aproksimacija poprilično dobra, no sadrži i neke nedostatke. Ovakav pristup procjene dobar je onoliko koliko je dobra aproksimacija. Ako je naša nova komponenta u portfelju a mala u odnosu na veličinu portfelja, tada je ovakva procjena pouzdana. Tako da za velike komponente ne dobivamo dobru aproksimaciju i naš rezultat aproksimacije IVAR-a može biti poprilično loš.

2.6 Komponentalna vrijednost pod rizikom

Zanemarimo li dekompoziciju rizika, tada nailazimo na pojam komponentalne vrijednosti pod rizikom. Ovakve situacije su moguće ako imamo portfelj sastavljen od više komponenti i želimo njihove rizike raščlaniti. U tom slučaju potrebna nam je komponentalna vrijednosti pod rizikom, uz oznaku CVaR, koja predstavljaja doprinos svake komponente u ukupnom VaR-u portfelja. Poželjno je da CVaR ima svojstva poput inkrementalnosti i aditivnosti. Svojstvo inkrementalnosti znači da se dodavanjem ili uklanjanjem komponente iz portfelja promijeni i iznos vrijednosti pod rizikom. Aditivnosti bi predstavljala da zbroj komponenti VaR-a bude jednak VaR-u komponenti. Potrebno je VaR raščlaniti prema komponentama portfelja. Tada uz primjenu Eulerovog teorema dolazimo do formule

$$VaR_\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial VaR_\varepsilon}{\partial \omega_i} = \nabla VaR_\varepsilon(p) w.$$

Sada možemo definirati $CVAR_i$ za komponentu i

$$CVaR_i = \omega_i \frac{\partial VaR_\varepsilon}{\partial \omega_i}.$$

Ukoliko primijenimo prethodne dvije formule dolazimo do

$$VaR_\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{n} CVaR_i.$$

Navedena formula nam govori o raščlambi VaR-a na sastavne komponente. Tako definirana formula zadovoljava naša poželjna svojstva poput inkrementalnosti i aditivnosti. Ukoliko prethodnu jednadžbu podijelimo VaR-om dobivamo CVaR iskazan uz pomoć postotka, odnosno

$$1 = \frac{1}{VaR} \sum_{i=1}^{n} CVaR_i = \sum_{i=1}^{n} \%CVaR_i.$$

Postotni CVaR, oznaka $\%CVaR_i$, predstavlja komponentu VaR-a izraženu u postotku ukupnog VaR-a. Potrebno je napomenuti da CVaR-ovi odražavaju granične doprinose ukupnom riziku. Za procjenu CVaR-a potrebno je uzeti u obzir sve relevantne čimbenike, kao što je korelacija, volatilnost i veličina komponente u portfelju. CVaR možemo približno prikazati uz pomoć formule

$$CVaR_i \approx \omega_i \beta_i VaR_\varepsilon(p),$$

gdje je ω_i relativni udio instrumenta i u portfelju uz pretpostaku da je male veličine, a β_i je beta koeficijent komponente u portfelju. U poglavlju Treynorov omjer 3.2 ćemo se detaljnije pozabaviti definiranjem beta koeficijenta. Trenutno ćemo samo napomenuti kako je beta koeficijent mjera vjerojatnosti promjene cijene financijske imovine u odnosu na kretanje tržišne cijene. Možemo zaključiti kako su IVaR i CVaR korisne mjere prilikom donošenja odluke o upravljanju rizikom. Uz pomoć njih možemo identificirati izvor rizika i poboljšati raspodjelu komponenti u portfelju.

3 Mjere performanse portfelja

U dosadašnjem dijelu rada naveli smo važnosti mjerenja rizika portfelja. U nastavku ćemo se fokusirati na mjere performanse portfelja koje igraju važnu ulogu u financijskim institucijama.
Svaki investitor želi kontinuirano pratiti performanse svoga portfelja kako bi imao uvid u učinkovitost ulaganja. Upravo ovakva želja investitora dovela je do potrebe za razvojem brojnih mjera za mjerenje performanse portfelja. Razvoj mjerenja performanse portfelja započeo je s razvojem teorije portfelja i konceptom ravnoteže povrata i rizika. Objavivši knjigu [4], Markowitz je napravio iskorak u tom području sredinom prošlog stoljeća. Sljedeći veliki iskorak dogodio se petnaestak godina kasnije kada je W.F. Sharpe predstavio Sharpeov omjer o kojem ćemo govoriti u nastavku. U vrijeme predstavljanja Sharpeovog omjera paralelno se predstavio Treynorov omjer kojeg je predstavio američki ekonomist J. L. Treynor. Aktivnost znanstvenika na području mjerenja performanse portfelja rezultirala je brojim dodatnim mjerama kao što je Sortino omjer koji ćemo kasnije detaljnije objasniti. Dodatno ćemo istaknuti jednu od učestalih mjera performanse portfelja koja se naziva alfa.
Mjere performanse portfelja su u uporabi kod investitora, a u investitore ubrajamo širok spektar institucija i organizacija koji prate razvoj i ocjenjuju učinkovitost svojih portfelja. Najpoznatiji korisnici ovih mjera su svakako investicijske banke koje egzistiraju pomoću pravilnog upravljanja i donošenja odluka o svojim trenutnim i budućim ulaganjima. Potrebno je navesti kako i osiguravajuća društva također imaju potrebu za praćenjem učinkovitosti svojih ulaganja. Osiguravajuća društva su pod velikim pritiskom svojih osiguravajućih obveza te je pravilno praćenje i upravljanje portfeljem ključno za održavanje adekvatnih sredstava. Mirovinski fondovi su jedni od najvećih investitora na burzama vrijednosnica i kao takvi ubrajaju se u velike korisnike mjera performansi portfelja. Potreba za isplatom mirovina i dugoročna održivost fonda stvara veliki pritisak na pravilno upravljanje portfeljem i praćenje njegovih performansi.
Građanstvo koje na burzi ulaže vlastita sredstva također su korisnici mjera performanse portfelja. Razvojem brojnih online platformi za trgovanje na burzi, udio građanstva u trgovanju na burzi se znatno povećao. Trenutno postoje brojne aplikacije koje prate performanse portfelja i na taj način olakšavaju upravljanje i donošenje odluka o portfelju.

U nastavku ovoga poglavlja pozabavit ćemo se s pet najkorištenijih omjera u svrhu mjerenja performanse portfelja. Prvo ćemo krenuti s analizom Sharpeovog i Treynovog omjera, koji su i povijesno bili začetnici skupine mjera performansi portfelja, pa ćemo se pozabaviti sa Sorentino omjerom, a za kraj ćemo objasniti mjere alfa i beta. Svaka mjera će biti potkrijepljena primjerom kako bi olakšali razumijevanje navedene mjere.

3.1 Sharpeov omjer

Kao što smo već naveli ekonomist William F. Sharpe je 1966. godine izdao rad o modelu određivanja cijena kapitalne imovine (CAPM) [8].

Rezultat rada bio je omjer povrata ulaganja i varijabilnosti koji je naposljetku doveo i do Nobelove nagrade za ekonomiju W. F. Sharpe-u.
Sharpeov omjer u financijama predstavlja mjeru performanse portfelja nakon prilagodbe na njezin rizik. Definiramo ga kao očekivanu razliku povrata ulaganja i povrata bez rizika podijeljeno sa standardnom devijacijom povrata ulaganja, tj. interpretiramo ju kao dodatni očekivani iznos povrata koji investitor dobiva po jedinici povećanja rizika. Navedimo i formalnu definiciju.

Definicija 5. *Sharpeov omjer* S_a *se definira kao*

$$S_a = \frac{E[R_a - R_b]}{\sigma_a},$$

gdje je R_a *povrat imovine,* R_b *povrat bez rizika i* σ_a *je standardna devijacija povrata viška imovine. Tada je* $E[R_a - R_b]$ *očekivana vrijednost viška povrata imovine nad referentnim povratom.*

Stopa bez rizika isprva je korištena u formuli za označavanje hipotetskih minimalnih troškova posudbe ulagača. Općenito, predstavlja premiju rizika ulaganja u odnosu na sigurnu imovinu kao što su trezorski zapisi ili obveznice.
Rezultat Sharpeovog omjera je koristan ako želimo odrediti u kojoj je mjeri višak prinosa popraćen s viškom volatilnosti. Sharpeov omjer može pomoći u odgovoru na sljedeće pitanje: može li se višak povrata portfelja pripisati pametnim odlukama o ulaganju ili jednostavno sreći i riziku?
Iz definicije Sharpeovog omjera možemo uočiti da što je veći Sharpeov omjer, to je ulaganje bolje prilagođeno riziku. Negativan Sharpeov omjer znači da je povrat portfelja negativan, tj. da je profitabilnost bezrizične imovine veća od profitabilnosti našeg ulaganja.

Primjer 5. *Pretpostavimo kako investitor ima dvije moguće investicije, A i B. Investicija A ima očekivani prinos od* 10% *godišnje, a investicija B ima očekivani prinos od* 13% *godišnje. Pretpostavimo da je povrat bez rizika* 3%. *Neka je standardna devijacija prinosa na investiciju A* 15%, *a standardna devijacija prinosa na investiciju B iznosi* 12%. *Tada za investiciju A vrijedi sljedeće:*

$$S_A = \frac{10\% - 3\%}{15\%} = 0.4667.$$

Za investiciju B vrijedi:

$$S_B = \frac{13\% - 3\%}{12\%} = 0.8333.$$

Možemo uočiti kako je Sharpeov omjer za investiciju B veći nego za investiciju A, što znači da investicija B pruža bolji odnos između prinosa i rizika nego investicija A. U ovome slučaju investitor se odlučuje za investiciju B. [14]

Sharpeov omjer koji je veći od jediničnog smatra se "dobrim", tj. nudi veći prinos u odnosu na volatilnost. Ako imamo dvije investicije kao u prethodnom primjeru tada se odlučujemo na investiciju s većim Sharpe omjerom.

Nakon što smo definirali Sharpeov omjer i uz pomoć primjera shvatili svrhu, potrebno je navesti i mane ovoga omjera. Kako u nazivniku Sharpeovog omjera imamo standardnu devijaciju, produljenjem vremenskog intervala možemo smanjiti standardnu devijaciju i tako manipulirati ovim omjerom. U praksi financijskih analitičara je upotreba mjesečnih povrata u Sharpeovom omjeru.

U Sharpeovom omjeru se za izračun rizika portfelja koristi standardna devijacija na temelju normalne distribucije.Upravo tu leži najveća slabost ovoga omjera. Na financijskom tržištu povrati imovine nisu normalno distribuirani, tj. repne vrijednosti se mogu postizati češće nego što sugerira normalna distribucija. Kao posljedica navedenog, Sharpeov omjer može podcijeniti repni rizik.

3.2 Treynorov omjer

Američki ekonomist i profesor izveo je financijski omjer za mjerenje performanse portfelja na osnovu efikasnosti u odnosu na rizik. Takav omjer nazvan je po njemu. Treynorov omjer koji je prvi puta predstavljen 1965. godine. Vrlo brzo nakon predstavljanja investitori i financijski analitičari počeli su zanimati oko ovoga omjera. Razvojem financijskog tržišta i sam omjer je morao napredovati pa su u razvoj omjera počele ulaziti i nove stavke financijskog tržišta kako bi se omjer prilagodio realnim uvjetima na tržištu. Treynorov omjer mjeri razliku u povratu koji portfelj postiže preko bezrizične imovine po jedinici rizika, uzimajući u obzir rizik prema beta koeficijentu. Kako bismo razumjeli Treynorov omjer, definirati ćemo koeficijent beta i obrazložiti ga primjerom.
Beta koeficijent mjeri vjerojatnost promjene cijene financijske imovine u odnosu na kretanje tržišne cijene. Koeficijent beta predstavlja nagib karakterističnog pravca financijske imovine, tj. smjer pravca koji pokazuje odnos između stope povrata na financijsku imovinu i povrata s tržišta. Tumačenje koeficijenta beta vezano je uz usporedbu s jediničnom vrijednosti. Ako je koeficijent manji od jedan, tada je povrat financijske imovine manje vjerojatan da će odgovoriti na kretanje na tržištu. Ako je beta jednaka jedinici, tada se financijska imovina kreće u skladu s tržištem. Ako je beta veća od jedan tada je veća vjerojatnost da će prinosi od financijske imovine odgovoriti na kretanje na tržištu, što ga čini nestabilnim.

Primjer 6. *Neka beta koeficijent Podravka d.d. iznosi 1.35, to znači da je dionica vrlo nestabilna i da je za* 35% *vjerojatnije da će odgovoriti na kretanje na tržištu. Neka je beta koeficijent HT d.d. 0.60, tada je* 40% *manja vjerojatnost da će odgovoriti na kretanje na tržištu.*

Koeficijent beta ima svoje prednosti u jednostavnom izračunu i koristan je za procjenu troškova kapitala u modelima vrednovanja. Svakako da beta koeficijent ima i nedostatke koje možemo pripisati oslanjanju na prošle povrate i ne uzimanju u obzir čimbenike koji mogu utjecati na povrate u budućnosti. Sada možemo beta koeficijent uvesti u definiciju Treynorovog omjera.

Definicija 6. *Neka je T_a Treynorov omjer imovine a koji se definira kao*

$$T_a = \frac{r_a - r_f}{\beta_a},$$

gdje je r_a povrat portfelja, r_f stopa bez rizika i β_a beta koeficijent.

Iz definicije Treynorovog omjera uočavamo koliki se povrat ostvari u odnosu na rizik kojega je investitor preuzeo. Uočimo kako postoji mogućnost da je beta koeficijent negativan i tada rezultat omjera nije značajan. Što je omjer veći, to je određeni portfelj prikladniji za ulaganje.
Možemo uočiti kako su Sharpeov i Treynov omjer vrlo slični budući da su oba omjera temeljena na kvocijentu povrata i rizika. Oba omjera mogu nam pomoći u odluci u koje ulaganje ćemo investirati. Razlika je u nazivniku gdje je u Treynorovom omjeru kao predstavnik rizika beta koeficijent, tj. sustavni rizik za mjerenje volatilnosti, u odnosu na Sharpeov omjer u kojem je nazivnik omjera standardna devijacija.
Kao i svaki omjer tako i Treynorov ima svoja ograničenja. Glavna slabost Treynorovg omjera je temeljenje na prošlosti. Točnost omjera uvelike ovisi o beta koeficijentu. Kao što smo već naveli, što je veći Treynorov omjer, to je ulaganje bolje za investitora. Ovaj omjer nam ne govori koliko je ulaganje bolje od ostalih ulaganja.

Primjer 7. *Pretpostavimo da imamo investicijski fond A koji je ostvario povrat od* 12%*, dok je investicijski fond B ostvario povrat od* 8% *tijekom iste godine. Na prvu možemo zaključiti kako je investitor investicijskog fonda A učinkovitije upravljao imovinom budući da je postigao veći prinos, no pogledajmo Traynerov omjer. Da bismo koristili Traynerov omjer potrebno je pretpostaviti stopu bez rizika, za koju uzimamo njemačku desetogodišnju obveznicu s prosječnim prinosom od* 1.4%*. Investicijski fond A ima koeficijent beta koji iznosi 1.5 dok je koeficijent beta za investicijski fond B* 0.8*.*

$$T_A = \frac{r_A - r_f}{\beta_A} = \frac{12\% - 1.4\%}{1.5\%} = 7.07,$$

$$T_B = \frac{r_B - r_f}{\beta_B} = \frac{8\% - 1.4\%}{0.8\%} = 8.25.$$

Treynorov omjer nam govori suprotno od našeg prvobitnog zaključka. Zaključujemo kako je investitor investicijskog fonda B postigao veću profitabilnost u odnosu na preuzeti rizik od investicijskog fonda A. [15]

3.3 Sortino omjer

Američki financijski analitičar Frank Sortino bio je poznat po radovima na temu upravljanja rizikom i razvojem metoda za procjenu ulaganja i portfelja. Tako je uz pomoć znanstvenika Davida van der Harta predstavio jedan financijski omjer koji je i danas u upotrebi. Omjer je poznat pod nazivom Sortino omjer. Predstavljen je kao alternativa Sharpeovog omjera za procjenu performanse portfelja. Iako je Sortino omjer predstavljen 1980. godine još uvijek je u upotrebi posebno u području investicijskog menadžmenta i portfeljske analize.

Definicija 7. *Sortino omjer SO_A je omjer stvarnog ili očekivanog povrat portfelja, koji je umanjen za stopu bez rizika, i silazne volatilnosti portfelja, tj.*

$$SO_A = \frac{r_A - r_{br}}{\sigma_d},$$

gdje je r_A stvarni ili očekivani povrat portfelja, r_{br} stopa bez rizika i σ_d standardna devijacija negativnih povrata.

Možemo uočiti kako se u nazivniku Sortino omjera nalazi standardna devijacija negativnih povrata koja predstavlja mjeru rizika, a računa standardno odstupanje samo negativnih odstupanja od ciljane stope povrata. Upravo ovakva mjera rizika pomaže u boljoj procjeni rizika i rješava navedene probleme Sharpeovog omjera.

Primjer 8. *Pretpostavimo da imamo investicijski fond C i investicijski fond D koji imaju redom godišnje povrate 10% i 8%. Stope bez rizika su im redom 8% i 7%, a standardna devijacija negativnih povrata iznosi 3%. Tada je Sortino omjer za investicijski fond C:*

$$SO_C = \frac{r_C - r_{br}}{\sigma_d} = \frac{10\% - 8\%}{3\%} = 0.6667,$$

a Sortino omjer za investicijski fond D:

$$SO_D = \frac{r_D - r_{br}}{\sigma_d} = \frac{8\% - 7\%}{3\%} = 0.3333.$$

Kao i u svim dosadašnjim omjerima uvijek je veći omjer predstavljao bolju investiciju za ulagača. Prema Sortino omjeru ulagač će preferirati investicijski fond C zbog većeg povrata po jedinici lošeg rizika koji preuzima.
Kao što smo već naveli u Primjer 7, jedan investicijski fond imao je veći godišnji prinos, a on ne zarađuje taj povrat jednako učinkovito. [16]

Možemo uočiti veliku sličnost Sortino i Sharpeovog omjera. Sortino omjer je poboljšanje Sharpeovog omjera budući da izolira negativnu volatilnost od ukupne volatilnosti. Sharpeov omjer je više primjenjiv na portfelje s niskom volatilnošću, dok je Sortinov omjer praktičniji za portfelje s visokom volatilnosti. Mali ulagači poput građanstva često imaju želju za većim povratima pa se češće koriste s Sortinovim omjerom.

3.4 Mjera alfa

Spomenimo još jednu mjeru rizika koja je nastala kao produkt istraživanja moderne teorije portfelja i modela CAPM (Capital Asset Pricing Model). Navedena istraživanja bila su razvijana sredinom prethodnog stoljeća od strane analitičara H. Markowitza i W. Sharpe-a. Stručni rad [4] analitičara Markowitza bio je temelj za optimizaciju portfelja. Kreirao je modele u kojima se koriste očekivani prinosi i rizici. Upravo na toj ideji se i danas kreiraju matematički modeli kojima se maksimizira očekivani prinos ulagača. Analitičar William Sharpe napravio je idući iskorak u mjerenju performanse portfelja. Predložio je mjeru alfa kao mjeru performanse portfelja u odnosu na rizik.
Alfa je mjera performanse koja pokazuje kada je ulagač uspio nadmašiti tržišni prinos ili neki željeni prinos. Alfa mjeri performansu portfelja u odnosu na tržišni indeks ili neku drugu vrijednost koju smatramo referentnim predstavnikom kretanja tržišta. Definirajmo sada formalno alfu i navedimo formulu za izračun.

Definicija 8. *Višak povrata ulaganja u odnosu na referentnu vrijednost kretanja tržišta nazivamo alfa. Mjera alfa definira se kao:*

$$\alpha = R - R_f - \beta \times (R_m - R_f),$$

gdje R predstavlja povrat portfelja, R_f predstavlja stopu povrata bez rizika, β predstavlja koeficijent beta, odnosno sustavni rizik portfelja i R_m predstavlja tržišni povrat.

Uočimo kako je alfa povrat ulaganja koji nije rezultat općeg kretanja na tržištu. Alfa može biti pozitivna, negativna ili nula. Kada je alfa nula tada kretanje portfelja u potpunosti prati kretanje tržišta i ulagač nije dobio niti izgubio nikakvu dodatnu vrijednost. Pozitivna vrijednost alfe predstavlja dobit ulagača u odnosu na tržište, dok je negativna alfa pokazatelj neuspješnog ulaganja u odnosu na tržište kada se prilagodi na rizik.
Kako svaka mjera performanse ima neka ograničenja tako ih ima i alfa te bi ulagač trebao biti upoznat s njima. Ako želimo koristiti alfu u različitim vrstama portfelja, tj. različitim klasama imovine, tada moramo biti oprezni da upotrijebimo i referentne vrijednosti za svaku vrstu imovine. Obratimo pažnju i na odabir referentne vrijednosti kako bismo što bolje procijenili kretanje tržišta. U tu svrhu najčešće se koristi S&P 500 burzovni indeks. S&P 500 indeks objedinjuje petsto najvrijedni-

jih dioničkih društava čijim se dionicama aktivno trguje u Sjedinjenim Američkim Državama.

Primjer 9. *Pretpostavimo da ulagač ima portfelj koji je ostvario godišnji povrat od* 13%. *Pretpostavimo da je referentni tržišni indeks ostvario povrat od* 5%, *neka je stopa povrata bez rizika* 2% *i neka je beta* 1.1.

$$\alpha = R - R_f - \beta \times (R_m - R_f) = 13\% - 2\% - 1.1 \times (5\% - 2\%) = 7.7\%.$$

Ulagač je ostvario 7.7% *dodatne vrijednosti u odnosu na referentni indeks. Pozitivna alfa ukazuje na to da ulagač ima isplativ portfelj i dobru performansu portfelja. [17]*

Literatura

[1] K. Dowd, *An Introduction to market risk measurement*, John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, 2002.

[2] M. Garman, *Improving on VaR, Risk, 9 (5)*, (1996), 61-63 .

[3] M. Garman, *Taking VaR to pieces, Risk, 10 (10)*, (1997), 70-7l.

[4] H. Markowitz, *Portfolio Selection, The Journal of Finance*, London 7(1), 1952.

[5] A. O. Petters, X. Dong, *An Introduction to Mathematical Finance with Applications*, Springer , 2016.

[6] T. S. Rachev, S. V. Stoyanov, F. J. Fabozzi, *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment and Portfolio Optimization*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2008.

[7] S. M. Ross, *An Elementary Introductions to Mathematical Finance*, Cambridge University Press, 2011.

[8] W. F. Sharpe, *The Sharpe Ratio, Journal of Portfolio Management*, London Vol.21, Iss. 1, (Fall 1994): 49.

[9] Scenario Analysis Explained.
URL: `www.netsuite.com/portal/resource/articles/financial-management`
(Pristupljeno: 2022-07-9)

[10] Scenario analysis
`www.investopedia.com/terms/s/scenario_analysis.asp`
(Pristupljeno 2022-07-9)

[11] HNB rizici
`www.hnb.hr/temeljne-funkcije/medunarodne-pricuve/rizici`
(Pristupljeno 2022-04-3)

[12] Analiza scenarija
`hr.pharoskc.com/2287-what-is-scenario-analysis-vs-sensitivity-analysis`
(Pristupljeno 2022-07-9)

[13] Duration gap analysis
www.pearsoned.ca/highered/divisions/text/mishkin_2/data/appendices
(Pristupljeno 2022-07-9)

[14] Investopedia Sharpe ratio
www.investopedia.com/terms/s/sharperatio.asp
(Pristupljeno 2022-05-19)

[15] Wall Streat Prep: Treynor Ratio
www.wallstreetprep.com/knowledge/treynor-ratio/
(Pristupljeno 2022-05-25)

[16] Investopedia Sortino ratio
www.investopedia.com/terms/s/sortinoratio.asp
(Pristupljeno 2022-05-28)

[17] Ig alpha definition
www.ig.com/en/glossary-trading-terms/alpha-definition
(Pristupljeno 2022-06-12)

Sažetak

Razvojem brojnih online platformi za trgovanje na burzama razvila se i potreba za praćenjem mjera rizika i mjera performansi portfelja. U financijskom svijetu važno je znati kvantificirati rizik i odrediti performanse svoga portfelja što je upravo i ideja ovoga rada. Kako bismo razumjeli suvremene mjere rizika potrebno je upoznati se i sa starijim mjerama. Upoznavanje mjera performansi i mjera rizika uvelike nam olakšava donošenje odluka vezanih uz ulaganje, ali pri tumačenju mjera moramo biti izrazito oprezni i poznavati ograničenja koja nam se nameću sa svakom od navedenih mjera. Kako je trenutno u praksi najzastupljenija mjera rizika vrijednost pod rizikom (VaR) tako smo se najviše fokusirali na definiranje i primjere vezane uz navedenu mjeru rizika. Kako vrijednost pod rizikom ima svoja ograničenja tako se u povijesti razvila potreba za varijacijom vrijednosti pod rizikom i te su na taj način nastale mjere rizika poput prosječne vrijednosti pod rizikom, inkrementalne vrijednosti pod rizikom i komponente vrijednosti pod rizikom koje smo definirali i uz pomoć primjera objasnili.
Mjerama performanse portfelja također se pridaje velika važnost kod ulagača. Među mjerama performanse portfelja prvo smo naveli Sharpeov i Treynorov omjer koji su i povijesno bili preteča novim mjerama performanse portfelja. Naposljetku smo se pozabavili Sortino omjerom i alfom koji su trenutno u uporabi u brojim financijskim institucijama.

Ključne riječi

Mjera rizika, vrijednost pod rizikom, prosječna vrijednost pod rizikom, inkrementalna vrijednost pod rizikom, komponenta vrijednost pod rizikom, mjere performanse portfelja, Sharpeov omjer, Treynorov omjer, Sortino omjer, alfa.

Quantitative risk measures and portfolio performance measures

Summary

With the development of numerous online trading platforms, the need has also developed for monitoring risk measures and portfolio performance measures. In the financial world it is important to know how to quantify risk and determine the performance of your portfolio which is the idea of this work. To understand modern risk measures it is necessary to become familiar with the older measures. Getting to know performance measures and risk measures makes it much easier for us to make investment-related decisions, but we have to be very careful when interpreting the measures and know the limitations that are imposed on us with each of the mentioned measures. As the Value at Risk (VaR) is currently the most common measure of risk in practice, we focused mostly on defining and examples related to the specified risk measure. As Value at risk has its limitations, thus the need for variation has developed. This is how risk measures such as the average values at risk, incremental values at risk and components value at risk were created. Portfolio performance measures are also highly valued by investors. Among the portfolio performance measures, we first listed the Sharpe and Treynor ratios, which historically were the forerunners of new portfolio performance measures. Finally, we tackled the Sortino ratio and the alpha that are currently in use in many financial institutions.

Keywords

Risk measure, Value at Risk, Average Value at Risk, Incremental Value at Risk, Component of Value at Risk, portfolio performance measures, Sharpe ratio, Treynor ratio, Sortino ratio, alpha.

Životopis

Rođen sam 04.11.1997. godine u Osijeku. Osnovnu školu sam pohađao u Osnovnoj školi "Retfala", Osijek, sve do 2012. godine. Nakon osnovne škole upisao sam III. gimnaziju Osijek, koju sam završio 2016. godine. Nakon prirodoslovno - matematičke gimazije upisujem se na Odjel za matematiku u Osijeku. Sveučilišni prvostupnik matematike postajem 2020. godine s položenim završnim radom na temu "Betrandov paradoks". Zatim upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku u Osijeku. Uz studiranje obavljao sam i dvije stručne prakse. Prva stručna praksa bila je u Upravnom odjelu za urbanizam grada Osijeka, gdje sam došao na poziciju organizatora baza podataka. Druga stručna praksa bila je u Hrvatskoj agenciji za poljoprivredu i hranu, gdje sam izradio statistički program za mjere rizika hrane. Trenutno, od 01.12.2022. godine, sam zaposlenik Erste banke na poziciji mlađi kvantitativni analitičar - pripravnik.