Greenov teorem i primjene

Halgaš, Marina

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Marina Halgaš

Greenov teorem i primjene

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Marina Halgaš

Greenov teorem i primjene

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2023.

Sažetak

U okviru ovog završnog rada bavit ćemo se Greenovim teoremom i njegovim primjenama. Da bismo došli do samog teorema, ukratko smo naveli i ponovili osnovne pojmove. Najprije smo definirali krivuljne integrale. Nakon iskaza Greenovog teorema, proveli smo njegov dokaz za neke specijalne slučajeve. Zatim smo se dotaknuli najbitnijih pojmova o plohama. Uz Greenov teorem, predstavljen je i teorem o divergenciji te Stokesov teorem kao njegov općenitiji slučaj. Na kraju, u razmatranju primjena, govorili smo o Cauchyjevom teoremu i jednadžbi kontinuiteta.

Ključne riječi

Jordanov luk, orijentacija, krivulje i krivuljni integrali, Greenov teorem, plohe i plošni integrali, divergencija

Green's theorem and its applications

Summary

In this paper, we will deal with Green's theorem and its applications. In order to get to the theorem itself, we briefly stated and repeated the basic terms. First we have defined curve integrals. After stating Green's theorem, we implemented his proof for some special cases. Then we touched on the most important terms about surfaces. In addition to Green's theorem, the divergence theorem and Stokes' theorem were also presented as his more general case. Finally, in considering applications, we referred to Cauchy's theorem and continuity equation.

Keywords

Jordan arc, orientation, curves and line integrals, Green's theorem, surfaces and surface integrals, divergence

Sadržaj

Uvod

Ovaj rad dio je dobro poznate matematičke analize. U njemu je opisan Greenov teorem i neke njegove primjene. Rad sadrži mnogo opće teorije koja se koristi u samom iskazu Greenovog teorema. U četiri cjeline pokušano je povezati razne vrste integrala. U prvoj cjelini definirali smo krivuljne integrale prve i druge vrste, dok smo u drugoj cjelini detaljno razradili Greenov teorem u ravnini te Greenov teorem za višestruko povezano područje. U trećem poglavlju opisali smo varijante Greenovog teorema. Točnije, naveli smo teorem o divergenciji, a uz njega još i opći slučaj Greenovog teorema poznat kao Stokesov teorem. Radi lakšeg snalaženja, tome je prethodilo uvođenje pojma plohe i plošnih integrala. Primjena Greenovog teorema je široka, posebno u fizici, a na kraju rada navest ćemo neke od njih.

1 Osnovni pojmovi. Krivulje

Početak ovog poglavlja iskoristit ćemo kako bi se uveli u priču o funkcijama više varijabli. Ipak, u većem dijelu poglavlja naglasak stavljamo na upoznavanje pojmova vezanih za krivulje. Definirat ćemo Jordanov luk, krivuljne integrale i još mnoge druge pojmove.

1.1 Uvodni pojmovi

Pri susretu s funkcijama više varijabli, podsjetimo se jedne klase funkcija. Za početak definirajmo najširu takvu klasu:

Definicija 1. *Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je klase C na Ω i pišemo $f \in C(\Omega)$ ukoliko je ona neprekidna na Ω.*

U skladu s prethodnom definicijom skup svih neprekidnih (realnih ili kompleksnih) funkcija na Ω označavamo sa $C(\Omega)$.

Osim toga, funkcije koje će imati neka korisnija svojstva, pripadat će klasi C^m na svojoj domeni pa definiramo:

Definicija 2. *Neka je skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je klase C^m ukoliko ima sve parcijalne derivacije do (uključivo) reda m na Ω i one su sve neprekidne funkcije na Ω.*

Kao i maloprije zaključujemo da ćemo tada sa $C^m(\Omega)$ označavat sve funkcije klase C^m na Ω.

1.2 Jordanov luk

Sljedećih nekoliko definicija važno je dobro shvatiti i razlikovati jer će se sva daljnja teorija razvijati na temelju njih.

Definicija 3. *Za parametriziranu krivulju Γ sadržanu u ravnini ili prostoru kažemo da je Jordanov luk ili jednostavna glatka krivulja s rubom ukoliko ima barem jednu parametrizaciju $\vec{r}\colon [a,b] \to \Gamma$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *$\vec{r}$ je injektivno preslikavanje,*
2. *$\vec{r} \in C^1([a,b])$,*
3. *$\forall t \in [a,b]$ vrijedi $\vec{r'}(t) \neq 0$.*

U nastavku će nam važne biti rubne točke ili krajevi Jordanovog luka pri čemu točku $A = r(a)$ zovemo početnom, a $B = r(b)$ krajnjom točkom luka Γ.

Pobliže pojasnimo pojedina svojstva prethodne definicije: posljednje svojstvo osigurava nam postojanje tangente u svakoj točki krivulje. Nadalje, zahtjev da je derivacija $\vec{r'}$ neprekidna u svakoj točki $t \in [a,b]$ osigurava glatkoću krivulje dok bi prvo svojstvo geometrijski značilo da krivulja ne presijeca samu sebe.

Definicija 4. *Krivulju koja se dobije kao niz konačno mnogo Jordanovih lukova koji se nadovezuju jedan na drugi nazivamo po dijelovima glatka krivulja.*

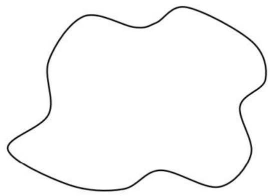
Primijetimo da je u slučaju po dijelovima glatke krivulje dopušteno presijecanje lukova, ali najviše konačno mnogo puta.

U ovom trenutku prirodno se zapitati što ako je $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ pa se iz tog razloga na prethodnu definiciju nadovezuje i sljedeći pojam:

Definicija 5. *Po dijelovima glatka krivulja je zatvorena ako joj se početna i krajnja točka podudaraju.*

Ovdje je pravi trenutak da damo još i definiciju konture iako će nam ona služiti tek u poglavlju 2.

Definicija 6. *Kontura je zatvorena po dijelovima glatka krivulja koja samu sebe ne presijeca.*



Slika 1: Kontura

1.3 Krivuljni integrali

Definicija 7. *Neka je* $\vec{r}\colon [a,b] \to \Gamma$ *parametrizacija Jordanovog luka* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ *(ili* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$*), a na krivulji* Γ *neka je dana* $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ *takva da je funkcija* $(f \circ \vec{r})\,|\vec{r'}|$ *Riemann integrabilna na segmentu* $[a,b]$. *Vrijednost integrala*

$$\int_a^b f(\vec{r}(t))\,|\vec{r'}(t)|\,dt$$

nazivamo krivuljni integral prve vrste od f *po krivulji* Γ *i označavamo sa* $\int_\Gamma f\,ds$.

Prije samog definiranja pojma krivuljnog integrala druge vrste, moramo uvesti dodatak na pojam Jordanovog luka. Radi se o orijentaciji Jordanovog luka.

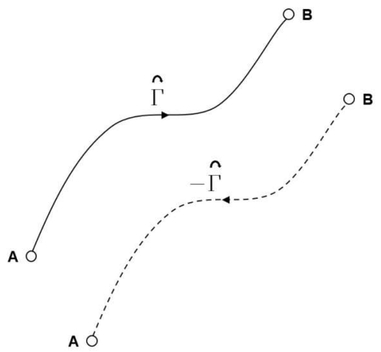
Ako su A i B rubovi krivulje, tada postoje dva načina njezine orijentacije: krivulja može biti orijentirana od točke A do točke B ili obrnuto, od točke B prema A, bez obzira nalazi li se krivulja u ravnini ili prostoru.

Za orijentirani Jordanov luk koristit ćemo simbol $\overset{\frown}{\Gamma}$.

Nadalje, ako imamo zatvorenu glatku krivulju, što bismo neprecizno mogli nazvati i zatvorenim Jordanovim lukom, uočimo da tada ne možemo govoriti kako krivulju obilazimo od točke A do točke B ili obrnuto jer je $A = B$. U tom slučaju moramo biti precizniji i govoriti o pojmu pozitivne i negativne orijentacije. Dogovorno se za pozitivnu orijentaciju uzima smjer suprotan kazaljci na satu (↺), dok je negativna orijentacija dana u smjeru kazaljke na satu (↻).

Važno je uočiti da o pojmu pozitivne, odnosno negativne orijentacije govorimo samo u ravnini ali ne i u prostoru.

Ako imamo orijentirani Jordanov luk $\overset{\frown}{\Gamma}$, tada isti luk, ali suprotne orijentacije označavamo sa $-\overset{\frown}{\Gamma}$ kao sto je prikazano na slici 2.



Slika 2: Orijentirani Jordanov luk

Definicija 8. *Neka je s $\vec{r}\colon [a,b] \to \overset{\frown}{\Gamma}$ dana parametrizacija krivulje $\overset{\frown}{\Gamma}$ pri čemu $\overset{\frown}{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^2$ (ili $\overset{\frown}{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^3$) označava orijentirani Jordanov luk. Ako je vektorsko polje $\vec{F} : \overset{\frown}{\Gamma} \to \mathbb{R}^3$ takvo da je funkcija $(\vec{F} \circ \vec{r}) \cdot \vec{r'}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabilna na segmentu $[a,b]$, onda vrijednost integrala*

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t)\, dt$$

nazivamo krivuljni integral druge vrste funkcije F duž krivulje $\overset{\frown}{\Gamma}$ i označavamo sa $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$.

Važno je naglasiti kako je iz prethodne definicije danom parametrizacijom $\vec{r}\colon [a,b] \to \overset{\frown}{\Gamma}$ automatski određena orijentacija Jordanovog luka $\overset{\frown}{\Gamma}$. U ovom slučaju vidljivo je kako Jordanov luk obilazimo od točke $\vec{r}\,(a) = A$ do točke $\vec{r}\,(b) = B$.

2 Greenov teorem

Dolazeći do ovog poglavlja, spremni smo dati važan rezultat matematičke analize.

2.1 Greenov teorem u $\mathbb{R}^2$

Prisjetimo se temeljne formule integralnog računa funkcija jedne varijable koju primjenjujemo pri računanju određenih integrala. Radi se o Newton-Leibnizovoj formuli koja glasi

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

pri čemu je $F'(x) = f(x)$.

Formulom (1) se Riemannov integral neprekidne funkcije f po segmentu $[a,b]$, $a < b$ poistovjećuje s vrijednostima primitivne funkcije F od f na rubovima tog segmenta.

Jedan od teorema koji možemo shvatiti kao varijantu Newton-Leibnizove formule je Greenov[1] teorem.

Sljedeći teorem te formula koja se veže uz njega govore nam da se dvostruki integral po području D svodi na krivuljni integral po rubu ∂D kojim je to područje omeđeno. Ukratko rečeno, integral po cijelom području ovisi samo o vrijednostima funkcije na rubu toga područja.

Teorem 1 (Greenov teorem, [3, Teorem 42.]). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup te neka je kontura Γ zajedno sa svojim unutrašnjim područjem D sadržana u Ω. Tada za proizvoljne funkcije $P, Q \in C^1(\Omega)$ vrijedi*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} (P\,dx + Q\,dy). \tag{2}$$

Izraz (2) opće poznat je kao Greenova formula.

Potpuni dokaz Greenovog teorema popriličeno je složen, a ovisi o pretpostavkama na dani skup D. Stoga ćemo u nastavku navesti samo neke verzije ovog dokaza.

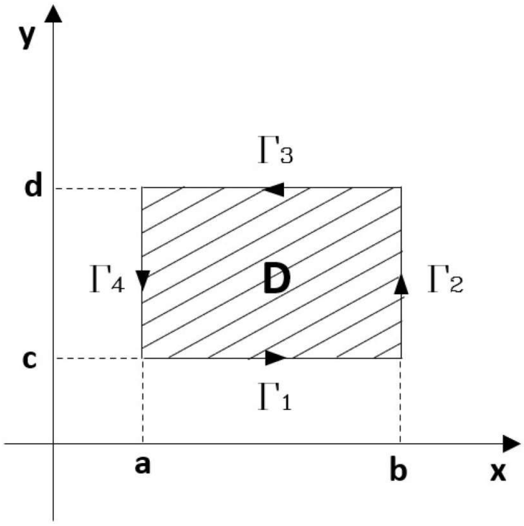
Dokaz:

1° Dokaz najprije provodimo u najjednostavnijoj varijanti, a to je kada za područje D uzmemo pravokutnik $[a,b] \times [c,d]$. Neka rub tog pravokutnika čini krivulja Γ koja se sastoji od krivulja $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ i Γ_4 kao što je prikazano na slici 3.

Krenimo od toga da izračunamo samo dio integrala lijeve strane formule (2):

$$\iint\limits_D -\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d -\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx \overset{(1)}{=} \int\limits_a^b -(P(x,d) - P(x,c))\,dx. \tag{3}$$

[1] George Green (1793.-1841.), engleski matematičar zaslužan za primjenu matematike u fizici.



Slika 3: Pravokutnik D

Sljedeći korak je izračunati desnu stranu formule (2), odnosno integral po Γ. Konkretno, zanima nas

$$\int_{\Gamma_1} (P\,dx + Q\,dy) \; + \; \int_{\Gamma_3} (P\,dx + Q\,dy), \tag{4}$$

stoga najprije parametrizirajmo krivulje Γ_1 i Γ_3 tako da uzmemo njihove jednostavne parametrizacije:

1. Γ_1: $x = x$, $y = c$ za $x \in [a, b]$,
2. Γ_3: $x = x$, $y = d$ za $x \in [b, a]$.

   Pripazimo ovdje kako je orijentirana krivulja Γ_3 te je $x \in [b, a]$ bez obzira što je $a < b$.

Vratimo se u (4) što sada postaje

$$\int_a^b (P(x,c)dx + Q(x,c)\cdot 0dy) + \int_b^a (P(x,d)dx + Q(x,d)\cdot 0dy) = \int_a^b P(x,c)\,dx + \int_b^a P(x,d)\,dx. \tag{5}$$

Uočimo da je (5) isto što i (3) jer raspisivanjem (3) imamo

$$\int_a^b -\left(P(x,d) - P(x,c)\right)\, dx = \int_a^b \left(-P(x,d) + P(x,c)\right)\, dx$$
$$= \int_a^b P(x,c)\, dx - \int_a^b P(x,d)\, dx$$
$$= \int_a^b P(x,c)\, dx + \int_b^a P(x,d)\, dx.$$

Time smo pokazali sljedeću jednakost

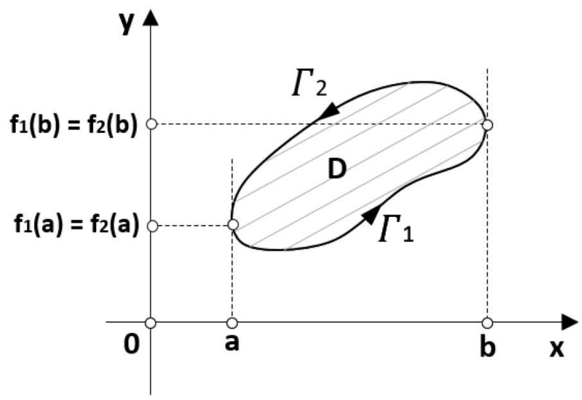
$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\Gamma_1} (P\, dx + Q\, dy) \; + \int_{\Gamma_3} (P\, dx + Q\, dy). \tag{6}$$

Analogno se pokaže da je

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\Gamma_2} (P\, dx + Q\, dy) \; + \int_{\Gamma_4} (P\, dx + Q\, dy). \tag{7}$$

Zaključni korak je zbrojiti (6) i (7) i time dolazimo do tražene formule.

2° U ovom slučaju za područje D uzmimo sada nešto općenitije područje od onoga opisanog u prvome slučaju. Neka je D ograničeno i zatvoreno područje takvo da paralele s apscisom, odnosno ordinatom prolaze rubom $\Gamma = \partial D$ područja D u najviše dvije točke. Formirajmo prugu koju čine paralele s osi ordinata i koje prolaze kroz točke a i b. Neka je skup D sadržan u toj pruzi, tj. $D \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}$ kao što je prikazano na slici 4.



Slika 4

Neka postoje funkcije $f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ po dijelovima klase C^1 na $[a,b]$ takve da je skup D geometrijski smješten između grafova od f_1 i f_2, tj.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\,,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

Neka je rub Γ od D dan kao unija krivulja Γ_1 i Γ_2, gdje je Γ_1 graf funkcije f_1, a Γ_2 graf funkcije f_2. Krivulju Γ_1 orijentiramo tako da je $(a, f_1(a))$ početna, a $(b, f_1(b))$ njezina krajnja točka, dok krivulju Γ_2 orijentiramo od točke $(b, f_2(b))$ do točke $(a, f_2(a))$. Uz navedenu orijentaciju, označimo sada krivulje sa $\overset{\frown}{\Gamma_1}$ i $\overset{\frown}{\Gamma_2}$.

Neprekidnost funkcije $\frac{\partial P}{\partial y}$ na Ω osigurana je iz pretpostavke da je funkcija P klase C^1 na otvorenom skupu Ω koji sadrži skup D. Tada vrijedi

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dy \right) dx. \tag{8}$$

Primjenjujući Newton-Leibnizovu formulu imamo:

$$\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dy = P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x)). \tag{9}$$

Sukladno tome (8) postaje

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy &= \int\limits_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))]\, dx \\ &= \int\limits_a^b P(x, f_2(x))\, dx - \int\limits_a^b P(x, f_1(x))\, dx \\ &= \int\limits_a^b P(x, f_2(x))\, dx + \int\limits_b^a P(x, f_1(x))\, dx. \end{aligned} \tag{10}$$

Međutim,

$$\int\limits_a^b P(x, f_2(x))\, dx = \int\limits_{-\overset{\frown}{\Gamma_2}} P\, dx + 0\, dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma_2}} P\, dx,$$

$$\int\limits_b^a P(x, f_1(x))\, dx = \int\limits_{-\overset{\frown}{\Gamma_1}} P\, dx + 0\, dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} P\, dx.$$

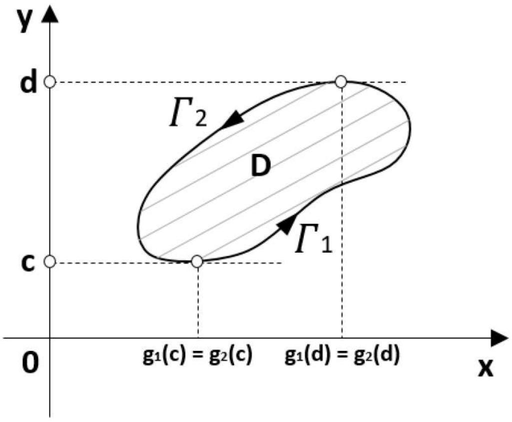
Sada za (10) imamo

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}_2} P\, dx - \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}_1} P\, dx.$$

Podijelimo li gornju jednakost s -1 i uzmemo li u obzir da je $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dobivamo

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{\partial D} P\, dx. \tag{11}$$

Formirajmo prugu koju čine paralele s osi apscisa i koje prolaze kroz točke c i d. Neka je skup D sadržan u toj pruzi, tj. $D \subseteq \mathbb{R} \times [c, d]$ kao što je prikazano na slici 5.



Slika 5

Neka postoje funkcije $g_1, g_2 \colon [c, d] \to \mathbb{R}$ po dijelovima klase C^1 na $[c, d]$ takve da je skup D geometrijski smješten između grafova od g_1 i g_2, tj.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\, ,\ c \leq y \leq d\}.$$

Sada za neprekidnu funkciju $\frac{\partial Q}{\partial x}$ na otvorenom skupu Ω vrijedi

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\, dx \right) dy. \tag{12}$$

Postupkom kao i maloprije dolazimo do toga da je

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{\partial D} Q\, dy. \tag{13}$$

Preostaje zbrojiti formule (11) i (13) i time smo pokazali traženu formulu.

$\square$

2.2 Greenov teorem za višestruko povezano područje

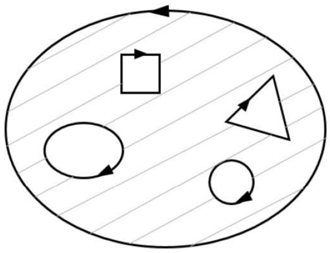
U prošlom potpoglavlju pokazali smo da vrijedi Greenova formula

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} (P\,dx + Q\,dy) \tag{14}$$

uz određene pretpostavke na skup D te na funkcije P i Q.

U nastavku ćemo pokazati za koje će područje još vrijediti Greenova formula. No, prije iskaza Greenovog teorema za višestruko povezano područje objasnimo o kakvom je području riječ.

Definicija 9. *Uzmimo n zatvorenih po dijelovima glatkih krivulja $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$ tako da krivulje $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$ leže jedna izvan druge te sve od njih leže unutar Γ_0. Za skup točaka unutar Γ_0, a izvan $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$ kažemo da je n-terostruko povezano područje D.*



Slika 6: Višestruko povezano područje

Teorem 2 (Greenov teorem za višestruko povezano područje, [3, Teorem 43.]). *Neka su $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ disjunktne konture tako da se krivulje Γ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ nalaze u unutarnjem području krivulje Γ_0. Istovremeno mora vrijediti da krivulja Γ_i leži izvan područja krivulje Γ_j, pri čemu je $i \neq j$ te $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Neka D čini krivulja Γ_0 i njezino unutrašnje područje iz kojeg su isključena unutrašnja područja krivulja Γ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Neka su funkcije $P, Q \in C^1(\Omega)$, $\Omega \supseteq D$ otvoren skup. Tada vrijedi*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}_0} (P\,dx + Q\,dy) - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}_k} (P\,dx + Q\,dy), \tag{15}$$

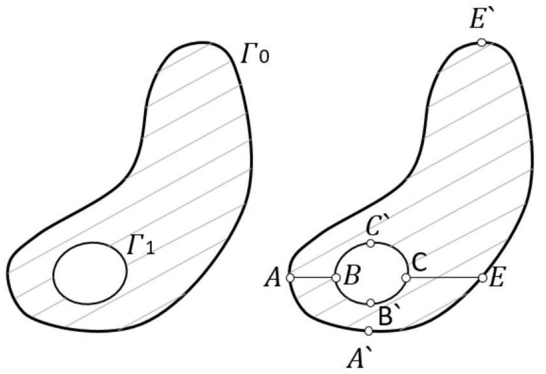
gdje $\overset{\frown}{\Gamma}_i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ predstavlja krivulju Γ_i koja je pozitivno orijentirana.

Dokaz ovog teorema provest ćemo za višestruko povezano područje koje ima najmanji mogući broj "rupa", a radi se o dvostruko povezanom području. Iz tog razloga uzmemo li $k = 1$ formula (15) tada glasi

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}_0} (P\,dx + Q\,dy) - \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}_1} (P\,dx + Q\,dy) \tag{16}$$

te ćemo ju pokazati.

Dokaz:
Neka je D dvostruko povezano područje koje dobijemo tako da iz unutarnjeg područja krivulje Γ_0 isključimo unutarnje područje krivulje Γ_1 te nju samu (vidi sliku 7 lijevo). U tom slučaju rub područja D dan je kao $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Nadalje, područje D podijelimo na područja D_1 i D_2 dužinama $\overline{AB}$ te $\overline{CE}$ koje pripadaju području D. Uvedimo još točke A', B', C' i E' kako je prikazano na slici 7 desno.



Slika 7

Uočimo da rub ∂D_1 područja D_1 čini po dijelovima glatka krivulja, a uzmemo li njezinu pozitivnu orijentaciju, bit će ispunjene pretpostavke Greenovog teorema (1) pa primjenjujući navedeni teorem vrijedi

$$\iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\partial D_1} (P\, dx + Q\, dy). \tag{17}$$

Istim zaključkom, vezano za područje D_2 vrijedi

$$\iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\partial D_2} (P\, dx + Q\, dy). \tag{18}$$

Zbrajanjem samo lijevih strana dobivenih formula (17) i (18) imamo

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy \tag{19}$$

čime smo dobili lijevu stranu Greenove formule (14).

Raspišemo li dodatno desnu stranu formula (17) i (18) te ih potom zbrojimo dobit ćemo sljedeće

$$\left(\int\limits_{AA'E} + \int\limits_{EC} + \int\limits_{CB'B} + \int\limits_{BA} \right) + \left(\int\limits_{AB} + \int\limits_{BC'C} + \int\limits_{CE} + \int\limits_{EE'A} \right), \tag{20}$$

gdje je podintegralna funkcija svakog od integrala jednaka $P\, dx + Q\, dy$.

Radi lakše preglednosti i u nastavku ćemo izostaviti pisanje navedene podintegralne funkcije.

U poglavlju 1.3 naučili smo da vrijedi

$$\int_{BA} = -\int_{AB} \quad i \quad \int_{EC} = -\int_{CE} \tag{21}$$

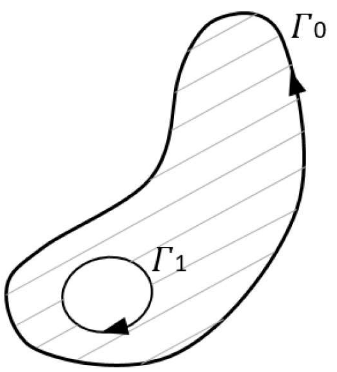
te prema načinu na koji smo zadali točke na rubovima krivulja znamo da je

$$\int_{AA'E} + \int_{EE'A} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma_0}} \quad i \quad \int_{CB'B} + \int_{BC'C} = \int_{-\overset{\frown}{\Gamma_1}} .$$

Ako to iskoristimo, tada će nam od izraza (20) preostati

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma_0}} (P\,dx + Q\,dy) + \int_{-\overset{\frown}{\Gamma_1}} (P\,dx + Q\,dy). \tag{22}$$

Uspoređujući desnu stranu Greeenove formule (14) i dobiveni izraz (22), lako je primijetiti da će se oni podudarati ukoliko uzmemo prikladnu orijentaciju danih krivulja. Naime, rub ∂D područja D treba orijentirati tako da vanjska krivulja Γ_0 bude orijentirana u pozitivnom smjeru, a unutarnja krivulja Γ_1 u negativnom smjeru kako je prikazano na slici 8.



Slika 8

Uzimajući to u obzir, izraz (22) prelazi u

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma_0}} (P\,dx + Q\,dy) - \int_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} (P\,dx + Q\,dy). \tag{23}$$

Nakon što izjednačimo izraze (19) i (23), time smo točno pokazali traženu formulu (16).
□

Napomena 1. *Naglasimo da smo u prethodnom dokazu osim dužina* $\overline{AB}$ *te* $\overline{CE}$ *mogli uzeti i neke općenitije krivulje ili npr. Jordanove lukove s početnom točkom* A*, odnosno* C *i krajnjom točkom* B*, odnosno* E*. Koje god krivulje izabrali, presudno je da one leže u području* D *te da za njih vrijedi* (21).

3 Plohe

3.1 Integracija na plohama

Pri uvođenju pojma plohe kreće se od pojma nivo plohe. Ukratko rečeno, nivo ploha jedan je od načina zadavanja ploha, a vodi nas do implicitno zadane plohe. Nadalje, nešto prirodniji način zadavanja ploha te one koje pripadaju implicitno zadanim plohama su eksplicitno zadane plohe. One su pak dane kao graf neke funkcije. Drugim riječima, graf glatke funkcije uvijek možemo shvatiti kao glatku plohu. Plohe se još mogu zadati i parametarski slično kao što smo parametarski zadavali krivulje.

Jednadžbe navedenih vrsta ploha glase :

1. Implicitna: $F(x, y, z) = 0$,
2. Eksplicitna: $z = f(x, y)$,
3. Parametarska: $\vec{r}(t, s) = (\varphi(t, s), \psi(t, s), \xi(t, s))$.

Postoje mnogi primjeri ploha zadanih na gore navedene načine, a može ih se naći u [1, Primjer 9.1. i Primjer 9.2.]

Definicija 10. *Neka je S po dijelovima glatka ploha. Rub plohe S je zatvorena krivulja C koja je sastavljena od Jordanovih lukova, a omeđuje plohu S.*

Kod krivulja smo promatrali njihovu orijentaciju, a isto napravimo i ovdje.

Na koji god način ploha bila zadana, dodatno je, u svakoj točki plohe zadan jedinični vektor normale na plohu, odnosno zadano je polje normala.

U ovom slučaju promatrat ćemo eksplicitno zadane plohe, tj. neka je $z = f(x, y)$.

$$\vec{n}(x, y, f(x, y)) = \pm\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, f(x, y))\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, f(x, y))\,\vec{j} - \vec{k}\right). \tag{24}$$

Ukoliko želimo da $\vec{n}$ bude neprekidna funkcija imamo dvije mogućnosti: u formuli (24) uvijek odabrati pozitivan predznak ili uvijek negativan predznak.

Time dobijemo dva polja normala koja su neprekidna. To koje smo od ta dva polja normala odabrali (+ ili -) određuje tzv. orijentaciju plohe.

Dakle, kada imamo zadanu plohu i jedno od polja normala to je onda orijentirana ploha.

Formalno:

Definicija 11. *Plohu S zajedno s njezinim neprekidnim poljem normala $\vec{n}$ nazivamo orijentirana ploha.*

Dolazimo do definiranja plošnih integrala koje ćemo radi jednostavnosti definirati za eksplicitno zadane plohe.

Još u osnovnoj školi naučili smo izračunavati razne površine, a ovdje dajemo dublji smisao tome pojmu.

Definicija 12. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i $f \in C^1(\Omega)$. Površina plohe S dane eksplicitnom jednadžbom $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, ukoliko postoji, izražava se brojem*

$$\iint_\Omega \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, dxdy}_{dS}.$$

U ovom poglavlju motivirani upravo izračunavanjem površine plohe uvest ćemo pojam plošnog integrala prve vrste.

Definicija 13. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i $f \in C^1(\Omega)$. Ukoliko je ploha S dana eksplicitnom jednadžbom $z = f(x, y)$ sadržana u otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^3$ te $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, onda broj*

$$\iint_\Omega \Phi(x, y, f(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2} dxdy$$

nazivamo plošni integral prve vrste funkcije Φ po plohi S i označavamo $\iint\limits_S \Phi\, dS$.

Definicija 14. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, $f \in C^1(\Omega)$, a orijentirana ploha S s poljem normala $\vec{n}$ eksplicitno zadana izrazom $z = f(x, y)$. Nadalje, neka je vektorsko polje $\vec{a} : U \to \mathbb{R}^3$ neprekidno i definirano na otvorenoj okolini plohe S, tj. na $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada broj*

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS$$

nazivamo plošni integral druge vrste vektorskog polja $\vec{a}$ (tok vektorskog polja $\vec{a}$) duž plohe S. Oznaka $\iint\limits_S \vec{a} \cdot \overrightarrow{dS}$.

Definirajmo još neke važnije pojmove skalarnih i vektorskih polja:

Definicija 15. *Neka je $S = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ desni pravokutni koordinatni sustav u prostoru $\mathbb{R}^3$. Diferencijalan operator definiran izrazom*

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{25}$$

naziva se Hamiltonov operator (nabla ili del).

Definicija 16. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ otvoren skup. Za svako skalarno polje $f : \Omega \to \mathbb{R}, f \in C^1(\Omega)$ definiramo gradijent toga polja formulom*

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Definicija 17. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ otvoren skup. Za svako vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \in C^1(\Omega)$, gdje je $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ definiramo divergenciju i rotaciju toga polja formulama*

$$div\ \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Uočimo kako su na ovaj način definirana vektorska polja $grad\, f$ i $rot\,\vec{a}$ dok je $div\,\vec{a}$ skalarno polje. Dodatno, navedena polja dobivena su djelovanjem operatora (25) pa vrijedi:

$$grad\, f = \nabla f,$$
$$div\,\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a},$$
$$rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a}.$$

3.2 Teorem o divergenciji

Teorem 3 (Teorem o divergenciji, [3, Teorem 47.]). *Neka je vektorsko polje $\vec{a} \in C^1(V;\mathbb{R}^3)$ definirano na području $V \subseteq \mathbb{R}^3$ koje je ograničeno s po dijelovima glatkom zatvorenom plohom S koja samu sebe ne presijeca i neka je $\vec{n}$ polje vanjskih normala na S. Tada za svako polje $\vec{a}$ vrijedi*

$$\iiint_V div\,\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{dS}. \tag{26}$$

Formula (26) naziva se Ostrogradski-Gauss-Greenova formula.

3.3 Stokesov teorem

Greenov teorem je dvodimenzionalni specijalni slučaj Stokesovog teorema koji glasi

Teorem 4 (Stokesov teorem, [3, Teorem 53']). *Neka je vektorsko polje $\vec{a} \in C^1(S;\mathbb{R}^3)$ definirano na orijentiranoj po dijelovima glatkoj plohi S s normalom $\vec{n}$ i neka je Γ rub te plohe orijentiran koherentno s plohom. Tada za svako polje $\vec{a}$ vrijedi*

$$\iint_S rot\,\vec{a}\,\overrightarrow{dS} = \int_\Gamma \vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}.$$

Pojasnimo pojam koherentne orijentacije: znamo kako rub svake plohe može biti orijentiran na dva moguća načina te su moguća dva smjera normale na tu plohu. Na taj način dobivamo četiri moguće kombinacije, odnosno četiri orijentacije. Kada je orijentacija koherentna određuje se pravilom desne ruke i to tako da palac pokazuje smjer normale, a prsti orijentaciju ruba.

4 Neke primjene Greenovog teorema

4.1 Cauchyjev teorem

Za početak podsjetimo se kompleksnih funkcija kompleksne varijable.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ dana s

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

pri čemu su $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to R$ definirane kao $u = Ref$, $v = Imf$. Funkcija u realni je dio od f, dok je v njezin imaginarni dio.

Definicija 18. *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$ i $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Za funkciju f kažemo da je analitička (holomorfna, regularna) na skupu Ω ukoliko je funkcija f' neprekidna na Ω.*

Za analitičku funkciju $f = u + iv$ definiranu na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ znamo da su funkcije $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ te da za njih vrijede Cauchy-Riemannove parcijalne diferencijalne jednadžbe, odnosno tzv. C-R uvjeti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{27}$$

Teorem 5 (Cauchyjev teorem, [2, Teorem 20.]). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup koji sadrži konturu Γ zajedno s njezinim unutarnjim područjem D. Ako je funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analitička na Ω, onda je*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Dokaz:

Ako za $z = x + iy$ označimo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ te $dz = dx + idy$, tada dobivamo da su realni i imaginarni dio kompleksnog integrala $\int_\Gamma f(z)\,dz$ krivuljni integrali druge vrste, tj. imamo

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_\Gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy)}_{I_1} + i\underbrace{\int_\Gamma (v(x,y)dx + u(x,y)dy)}_{I_2}.$$

Dovoljno je pokazati da su integrali I_1 i I_2 jednaki nuli.

Naime, na navedene integrale možemo primijeniti Greenovu formulu (2) tako da odaberemo odgovarajuće P i Q.

Iz tog razloga u integralu I_1 uz primjenu da je $P = u$, $Q = -v$ slijedi:

$$\int_\Gamma (udx - vdy) \overset{Green}{=} \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \overset{C-R\,uvjeti}{=} 0.$$

Sada isto postupamo za integral I_2 uzimajući da je $P = v$, $Q = u$:

$$\int_{\Gamma} (v\,dx + u\,dy) \overset{Green}{=} \iint_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy \overset{C-R\,uvjeti}{=} 0.$$

Time završava ovaj dokaz.

□

4.2 Jednadžba kontinuiteta

Razmatramo stacionaran tok fluida. Stacionaran bi značilo da se veličine koje opisuju fluid ne mijenjaju vremenom, nego jedino ovise o položaju u prostoru. Spomenute veličine su gustoća fluida što ćemo označiti s $\rho(P)$ te brzina fluida u oznaci $\vec{v}(P)$, gdje je P točka prostora.

Imamo plohu S kroz koju protječe fluid. Radi lakše predodžbe zamislimo cilindričnu cijev kroz koju protječe fluid, a poprečni presjek tog cilindra predstavlja ploha S. Želimo utvrditi koliko fluida proteče kroz danu plohu S u jedinici vremena. Iz tog razloga razdijelimo plohu S na male dijelove $S_1, S_2, \ldots, S_m$ i računamo masu fluida koja proteče kroz neki komadić S_k, $k = 1, \ldots, m$. Volumen fluida koji proteče kroz plohu S_k tijekom vremenskog perioda t približno je određen volumenom cilindra (valjka) kome je S_k baza, a duljina izvodnice jednaka $|\vec{v}\,t|$. Neka je $\vec{n}$ jedinični vektor normale na plohu S_k. Tada je komponenta vektora $\vec{v}\,t$ u smjeru jediničnog vektora $\vec{n}$ dana s $(\vec{v}\,t)\cdot\vec{n}$. Iz toga slijedi da je visina izmjerenog fluida jednaka $\vec{n}\,|\vec{v}\,t|$ pa je volumen jednak $\vec{v}\cdot\vec{n}\,t\,P(S_k)$, gdje je $P(S_k)$ površina od S_k. Podsjetimo se kako masu dobijemo kao produkt volumena i gustoće. Prema tome dobivamo približnu masu fluida: $t\,\vec{n}(Q_k)\cdot\vec{v}(Q_k)\,P(S_k)\,\rho(Q_k)$, gdje je $Q_k \in S_k$ proizvoljna točka. Nadalje, da bismo približno dobili ukupnu masu fluida koja u jedinici vremena proteče plohom S prosumirajmo

$$\sum_{k=1}^{m} \rho(Q_k)\,\vec{v}(Q_k)\cdot\vec{n}(Q_k)\,P(S_k). \tag{28}$$

Tada

$$\iint_{S} \rho\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS \tag{29}$$

daje traženu količinu fluida koja u jedinici vremena proteče plohom S.

U nastavku ćemo povezati to s fizikalnom interpretacijom divergencije.

Integral (29) ukazuje na količinu tekućine koja u jedinici vremena prođe kuglom $V(r)$ radijusa r. Ako se u jedinici vremena iz kugle $V(r)$ izlije više tekućine, nego se ulije, tada je (29) strogo pozitivna veličina. Jasno možemo zaključiti da se u tom dijelu prostora kugle kriju izvori tekućine, a njihova srednja gustoća jakosti opisana je izrazom

$$\frac{1}{\mu(V(r))}\iint_{S} \rho\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS, \tag{30}$$

pri čemu smo s $\mu(V(r))$ označili volumen kugle V(r).

Nadalje, prijeđemo li u (30) na limes po $r \to 0$ i primijenimo formulu

$$div\,\vec{a}(P) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(V(r))} \iint\limits_{S} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS,$$

možemo zaključiti da $div\,\rho\,\vec{v}(P)$ daje intenzitet izvora tekućine u točki P. Stoga, $div\,\vec{a}\,(P) > 0$ znači da se u točki P nalazi izvor polja $\vec{a}$. Slično, kada je $div\,\vec{a}\,(P) < 0$, tada polje $\vec{a}$ u točki P ima ponor. Ako je $div\,\vec{a} = 0$ na V, onda to znači da V nema ni izvora ni ponora i to možemo shvatiti kao "koliko tekućine uđe, toliko i izađe".

Uzmimo sada da se unutar volumena V nalazi tekućina gustoće ρ, pri čemu ρ ovisi o položaju i o vremenu, tj. $\rho(x, y, z, t)$. Masa tekućine koja se nalazi u V jednaka je

$$m(t) = \iiint\limits_{V} \rho(x, y, z, t)\,dV,$$

a sa

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \iint\limits_{\partial V} \rho\,\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}$$

dana je količina tekućine koja u jedinici vremena izađe iz V. Prvo dolazi do promjene gustoće u vremenu t koja doprinosi da se masa

$$-\iiint\limits_{V} \frac{\partial\rho}{\partial t}dV \tag{31}$$

tekućine izlije iz područja V. Osim toga, izvori ili ponori jačine τ koji se nalaze u V doprinose da se iz V izlije tekućina mase

$$4\pi \iiint\limits_{V} \rho\,\tau\,dV. \tag{32}$$

Prema Ostrogradski-Gauss-Greenovoj formuli slijedi

$$\iint\limits_{\partial V} \rho\,\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint\limits_{V} div(\rho\,\vec{v})\,dV. \tag{33}$$

Ukupna masa koja se u jedinici vremena izlije iz V jednaka je zbroju (31) i (32), a to je ekvivalentno s (33). Iz toga proizlazi

$$\iiint\limits_{V} (div(\rho\,\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} - 4\pi\rho\,\tau)\,dV = 0.$$

Kako je podintegralna funkcija prethodnog integrala neprekidna te je područje V proizvoljno odabrano vrijedi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\,\vec{v}) = 4\pi\,\rho\,\tau. \tag{34}$$

Jednadžba (34) znana je kao jednadžba kontinuiteta i ima važnu ulogu u području hidrodinamike.

Literatura

[1] P. Javor, *Matematička analiza 2*, Element, Zagreb, 2000.

[2] H. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza 4/I: Funkcije kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza 3: Funkcije više varijabli*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.