Gaussov veličanstveni teorem

Filipović, Janja

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Janja Filipović

Gaussov Veličanstveni teorem

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Janja Filipović

Gaussov Veličanstveni teorem

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

Sažetak

U ovom radu iskazat ćemo i dokazati Gaussov Veličanstveni teorem (Theorema Egregium), jedan od najznačajnijih rezultata diferencijalne geometrije koji ima veliku teorijsku vrijednost, kao i važnu praktičnu primjenu. Tim teoremom iskazana je ovisnost Gaussove zakrljivnosti plohe isključivo o fundamentalnim veličinama prvog reda. U radu su navedene definicije osnovnih pojmova lokalne teorije ploha, kao što su karta, prva i druga fundamentalna forma, Gaussova i srednja zakrivljenost te je proučavana lokalna izometrija ploha. Analiza takvog preslikavanja dovela je do Gaussovog Veličanstvenog teorema.

Ključne riječi: ploha, prva fundamentalna forma, lokalna izometrija, Gaussov Veličanstveni teorem

Gauss's Remarkable Theorem

Abstract

In this work we will consider Gauss's Remarkable Theorem (Theorema Egregium), one of the most significant results in differential geometry that has outstanding theoretical value, as well as important practical application. The Gauss's Theorema Egregium states the dependence of the Gaussian curvature of a surface entirely in terms of the first fundamental form. The work provides definitions of fundamental concepts in the local theory of surfaces, such as patch, first and second fundamental forms, Gaussian and mean curvature and observe the local isometry of surfaces. The analysis of that mappings led to Gauss's Remarkable Theorem.

Keywords: surface, first fundamental form, local isometry, Gauss's Theorema Egregium

Sadržaj

Uvod

Gaussova zakrivljenost jedna je od osnovnih veličina kojima možemo opisati plohu. Ukoliko je Gaussova zakrivljenost jednaka 0, govorimo o razvojnim plohama (npr. valjak, stožac), a u suprotnom govorimo o vitoperim plohama (npr. sfera).
Iako su još krajem 18. stoljeća neki matematičari, između ostalih i Leonhard Euler i Gaspard Monge, koristili pojam Gaussove zakrivljenosti definirajući ju samo kao produkt glavnih zakrivljenosti, tek je Gaussovo otkriće da produkt glavnih zakrivljenosti ovisi samo o intrinzičnoj geometriji plohe (intrinzična geometrija proučava veličine koje pri izometriji ostaju sačuvane) revolucioniralo diferencijalnu geometriju. Dok se bavio mjerenjem i izradom karata, došao je do zaključka da samo veličine plohe koje ovise o fundamentalnim veličinama prvog reda pripadaju intrinzičnoj geometriji. Zaključio je da ukupna (Gaussova) zakrivljenost ovisi samo o mjerenjima na površini karte, odnosno nijedno preslikavanje sa sfere na ravninu ne čuva metriku. To znači da se površina Zemlje ne može prikazati vjerodostojno na karti bez razvlačenja prikaza Zemlje.
U prvom poglavlju ovog završnog rada navedene su definicije i iskazane tvrdnje lokalne teorije ploha koje su nužne za ostatak rada. Između ostalog, navodimo formule za fundamentalne veličine prvog i drugog reda te formule za Gaussovu i srednju zakrivljenost. U drugom poglavlju uvodimo pojam lokalne izometrije ploha i iskazujemo teoreme koji vrijede za takva preslikavanja. U trećem poglavlju ćemo iskazati i dokazati Gaussov Veličanstveni teorem kojim je iskazana ovisnost Gaussove zakrivljenosti ploha o fundamentalnim veličinama prvog reda. Na samom kraju navest ćemo još dvije formule za računanje Gaussove zakrivljenost pomoću fundamentalnih veličina prvog reda.

1 Osnovni pojmovi lokalne teorije ploha

U ovom poglavlju uvest ćemo osnovne pojmove lokalne teorije ploha kao što su prva i druga fundamentalna forma, Gaussova i srednja zakrivljenost te ćemo iskazati važne rezultate iz lokalne teorije ploha. Sve definicije i propozicije koje su navedene u ovom poglavlju preuzete su iz [2].

Definicija 1. Za podskup $S \subset \mathbb{R}^3$ kažemo da je *ploha* ako za svaku točku $p \in S$ postoji otvorena okolina $V \subset \mathbb{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x}\colon U \to V \cap S$, $U \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup, koje je glatki homeomorfizam otvorenih skupova.
Ako je diferencijal preslikavanja $\mathbf{x}$ injektivan, za plohu kažemo da je *regularna*.

Napomena 1. Preslikavanje $\mathbf{x}$, dano sa $\mathbf{x} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, nazivamo *parametrizacijom* ili *kartom* (lokalnim koordinatama) okoline točke p plohe S.

Napomena 2. Ploha je *regularna* ako je diferencijal preslikavanja $\mathbf{x}$ injektivan, a može se pokazati da je taj uvjet ekvivalentan uvjetu da su vektori

$$\mathbf{x}_u := \frac{\partial x}{\partial u}, \mathbf{x}_v := \frac{\partial x}{\partial v}$$

linearno nezavisni.

Propozicija 1 (vidjeti [2], Propozicija 3.1.3). *Neka je S regularna ploha i $p \in S$ točka na S. Tada postoji okolina V točke p u S takva da je V graf neke glatke funkcije oblika $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ ili $x = h(y,z)$.*

Ukoliko je $\mathbf{x}$ parametrizacija regularne plohe S, sljedeća propozicija nam govori da je $\mathbf{x}^{-1}$ neprekidno preslikavanje:

Propozicija 2 (vidjeti [2], Propozicija 3.1.2). *Neka je p točka regularne plohe S. Neka je $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ glatko, injektivno preslikavanje takvo da je $p \in \mathbf{x}(U) \subset S$ i kojemu je diferencijal injektivan. Tada je $\mathbf{x}^{-1}$ neprekidno preslikavanje.*

1.1 Fundamentalne forme plohe

Kako bismo mogli definirati fundamentalne forme plohe, najprije moramo uvesti pojam tangencijalne ravnine plohe:

Definicija 2. Neka je S regularna ploha i $p \in S$. *Tangencijalni vektor* u točki p je vektor $v_p \in T_p\mathbb{R}$ za koji postoji krivulja $c\colon I \to S$, takva da je

$$c(o) = p, c'(0) = v_p.$$

Skup svih tangencijalnih vektora u p označavamo s T_pS.
Potprostor T_pS nazivamo *tangencijalna ravnina plohe* S u točki p.

Sada, nakon što smo uveli definiciju tangencijalne ravnine plohe, možemo definirati i preslikavanje na tangencijalnoj ravnini plohe koje će nam služiti za mjerenja na plohi.

Definicija 3. Simetričan, bilinearan funkcional $I\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ definiran s

$$I(v_p, w_p) = v_p \cdot w_p = v \cdot w. \tag{1.1}$$

naziva se *prva fundamentalna forma plohe S u točki $p \in S$.*

Napomena 3. Pridružena kvadratna forma $I\colon T_pS \to \mathbb{R}$, $I(v_p) = v_p \cdot v_p$ se također zove prva fundamentalna forma.

U nastavku ćemo pomoću karte plohe zapisati djelovanje prve fundamentalne forme na tangencijalni vektor te ćemo definirati fundamentalne veličine prvog reda.

Zapis prve fundamentalne forme u karti plohe

Neka je $\mathbf{x}\colon U \to \mathbf{x}(U) \subset S$ karta dijela plohe S, $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ i $v_p \in T_pS$. Prema definiciji tangencijalnog vektora plohe, postoji krivulja $c\colon I \to S$ za koju vrijedi $c(0) = p$, $c'(0) = v_p$, a u karti ju prikazujemo kao $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$.
Stoga tangencijalni vektor v_p možemo prikazati u karti kao:

$$v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0).$$

Tada prvu fundamentalnu formu možemo zapisati na idući način:

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p = \mathbf{x}_u^2(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \mathbf{x}_v^2(u_0, v_0)(v'(0))^2.$$

Definiramo funkcije $E, F, G\colon U \to R$ kao

$$E(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u^2(u_0, v_0), \qquad F(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0), \qquad G(u_0, v_0 = \mathbf{x}_v^2(u_0, v_0). \tag{1.2}$$

Funkcije E, F i G se nazivaju *fundamentalne veličine prvog reda* plohe S u karti $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$.

Koristeći prvu fundamentalnu formu možemo računati površinu dijela plohe, kut među krivuljama, ali i mjeriti duljinu luka krivulje na plohi S.
Duljina luka krivulje $c\colon I \to S$, $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$, definirana je s

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(t)\| dt,$$

što možemo zapisati kao

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I(c'(t))} dt.$$

Ako je $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, onda je

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2} dt. \tag{1.3}$$

Jednakost (1.3) možemo zapisati i kao

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2$$

što je također prva fundamentalna forma plohe S.

Prije nego što definiramo drugu fundamentalnu formu plohe, definirat ćemo pojmove koji su nam za to potrebni. Najprije definiramo vektor normale plohe.

Definicija 4. Neka je S regularna ploha i $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ karta koja pokriva područje $\mathbf{x}(U)$ plohe S. Jedinični vektor normale te ravnine je vektor

$$n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

kojeg nazivamo *standardnim jediničnim vektorom normale* karte $\mathbf{x}$.

Kada znamo kako je definiran jedinični vektor normale, možemo navesti definiciju za operator oblika plohe.

Definicija 5. Neka je D_{v_p} usmjerena derivacija jediničnog normalnog polja n u smjeru tangencijalnog vektora v_p. Preslikavanje $S_p\colon T_pS \to T_p\mathbb{R}^3$, definirano s $S_p(v_p) = -D_{v_p}n(p)$, naziva se *operator oblika plohe S u točki p.*

Sada možemo definirati i drugu fundamentalnu formu plohe koja nam govori kakvog je oblika ploha u okolini točke koja se nalazi na njenoj površini.

Definicija 6. Simetričan, bilinearan funkcional $II\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ definiran s

$$II(v_p, w_p) = S_p(v_p) \cdot w_p$$

naziva se *druga fundamentalna forma plohe S u točki $p \in S$.*

Napomena 4. Pridružna kvadratna forma $II\colon T_pS \to \mathbb{R}$, $II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p$ također se zove druga fundamentalna forma.

U nastavku ćemo pomoću karte plohe zapisati djelovanje druge fundamentalne forme na tangencijalni vektor te ćemo definirati fundamentalne veličine drugog reda.

Zapis druge fundamentalne forme u karti plohe

Slično kako smo došli do izraza za prvu fundamentalnu formu u karti plohe, možemo izvesti izraz za drugu fundamentalnu formu plohe. Za tangencijalni vektor $v_p \in T_pS$ vrijedi:

$$\begin{aligned} II(v_p) &= S_p(v_p) \cdot v_p \\ &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0)(u'(0))^2 + S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) \\ &+ \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0))u'(0)v'(0) + S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)(v'(0))^2. \end{aligned}$$

Definiramo funkcije $L, M, N\colon U \to \mathbb{R}$ kao

$$\begin{aligned} L(u_0, v_0) &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \\ M(u_0, v_0) &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)), \\ N(u_0, v_0) &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Funkcije L, M i N se nazivaju *fundamentalne veličine drugog reda* plohe S u karti $\mathbf{x}$.

1.2 Gaussova i srednja zakrivljenost plohe

U nastavku rada koristit ćemo definicije Gaussove i srednje zakrivljenosti plohe. Najprije ih definirajmo uz pomoć operatora oblika plohe.

Definicija 7. Neka je S ploha i $S_p\colon T_pS \to T_pS$ operator oblika plohe S.
Funkcija $K\colon S \to \mathbb{R}$ definirana s

$$K(p) = det S_p$$

naziva se *Gaussova zakrivljenost plohe S u točki p.*
Funkcija $H\colon S \to \mathbb{R}$ definirana s

$$H(p) = \frac{1}{2} tr S_p$$

naziva se *srednja zakrivljenost plohe S u točki p.*

Koristeći fundamentalne veličine prvog i drugog reda koje smo prethodno definirali, Gaussovu i srednju zakrivljenost možemo računati i na sljedeći način:

Propozicija 3 (vidjeti [2], Propozicija 3.5.1). *Neka je* $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ *karta za plohu* S, E, F, G, L, M, N *fundamentalne veličine prvog i drugog reda s obzirom na kartu* $\mathbf{x}$. *Tada su Gaussova i srednja zakrivljenost dane formulama*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{1.4}$$

Kako bismo lakše računali Gaussovu i srednju zakrivljenost koje su dane s (1.4), sljedeća propozicija nam daje jednostavniji način računanja fundamentalnih veličina drugog reda.

Propozicija 4 (vidjeti [2], Propozicija 3.5.2). *Neka je* $\mathbf{x}\colon U \to S$ *karta. Tada vrijedi*

$$L = n \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{W} det(\mathbf{x}_{uu}, x_u, x_v)$$
$$M = n \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{W} det(\mathbf{x}_{uv}, x_u, x_v)$$
$$N = n \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{1}{W} det(\mathbf{x}_{vv}, x_u, x_v)$$

gdje je n *standardno jedinično normalno polje od* S, $n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$, *a funkciju*

$$W^2 := EG - F^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{vmatrix}$$

nazivamo Weingartenova funkcija.

2 Lokalna izometrija ploha

U ovom poglavlju definirat ćemo preslikavanje koje čuva metriku na plohi, tj. preslikavanje koje nazivamo lokalna izometrija. Sve definicije i teoremi preuzeti su iz [2].

Neka su M, N plohe u $\mathbb{R}^3$ i neka je preslikavanje $F_*|_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N$ diferencijal glatkog preslikavanja $F\colon M \to N$. Neka je $v_p \in T_pM$ tangencijalni vektor plohe M i neka su oko točaka $p \in M$ i $F(p) \in N$ dane karte $\mathbf{x}\colon U \to M$, $\bar{\mathbf{x}}\colon \bar{U} \to N$. Tada postoji krivulja $c\colon I \to M$, $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$ za koju vrijedi $c(0) = p, c'(0) = v_p$ i koju prikazujemo u karti $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Diferencijal $F_*|_p$ pridružuje tangencijalnom vektoru v_p tangencijalni vektor w_p plohe N, pri čemu je w_p tangencijalni vektor krivulje $F \circ c\colon I \to N$, $F(c(I)) \subset \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$. Tada vrijedi:

$$F_*|_p(v_p) = (F(p), \frac{\partial(F \circ c)}{\partial t}|_{t=0}) = (F(p), (F \circ c)'(0)). \tag{2.1}$$

Propozicija 5 (vidjeti [2], Propozicija 3.8.1.)**.** *Vektor $(F \circ c)'(0)$ ne ovisi o izboru krivulje c. Preslikavanje $F_*|_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N$ definirano s (2.1) je linearni operator.*

Dokaz. Neka je $\phi\colon U \to \bar{U}, U, \bar{U} \subset \mathbb{R}^2$, $\phi = \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ F \circ \mathbf{x}$ koordinatni prikaz preslikavanja F. Vrijedi:

$$\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) = (\bar{u}, \bar{v})$$

iz čega slijedi

$$(F \circ c)(t) = (\bar{\mathbf{x}} \circ \phi)(u(t), v(t)).$$

Parcijalnom derivacijom, za $t = 0$, dobivamo sljedeću jednakost:

$$(F \circ c)'(0) = \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}|_{t=0}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}u'(0) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}v'(0), \\
\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}u'(0) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}v'(0).
\end{aligned}$$

Dakle, djelovanje od $F_*|_p$ ovisi o "početnim uvjetima" $c(0) = p, c'(0) = v_p$, a ne ovisi o izboru krivulje. Prethodni zapis također povlači i da je $F_*|_p$ linearno preslikavanje. Budući da vektor $v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)$ u bazi $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ ima prikaz $\begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}$, onda je matrični prikaz preslikavanja $F_*|_p$ u paru baza $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ od T_pM i $\{\bar{\mathbf{x}}_u, \bar{\mathbf{x}}_v\}$ od $T_{F(p)}N$ Jacobijeva matrica preslikavanja ϕ:

$$F_*|_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{bmatrix}_p . \tag{2.2}$$

□

Sada ćemo definirati preslikavanje čijim se djelovanjem na plohu ona savija, a udaljenost između točaka na plohi ostaje nepromijenjena.

Definicija 8. *Lokalna izometrija $F\colon M \to N$ ploha* glatko je preslikavanje čiji diferencijal $F_*|_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N$ čuva skalarni produkt tangencijalnih vektora iz T_pM za svaki p, tj. vrijedi

$$v_p \cdot w_p = F_*|_p(v_p) \cdot F_*|_p(w_p). \tag{2.3}$$

Budući da lokalna izometrija čuva skalarni produkt tangencijalnih vektora, lokalna izometrija čuva i normu tangencijalnih vektora, a po (1.1) onda znamo da čuva i prvu fundamentalnu formu plohe. Drugim riječima, lokalnu izometriju zamišljamo kao preslikavanje kojim se plohe savijaju, ali se unutrašnja udaljenost među točkama ne mijenja.

Lema 6. *Lokalna izometrija ploha glatki je lokalni difeomorfizam.*

Dokaz. $F_*|_p$ je regularan operator jer iz (2.3) slijedi da $F_*|_p$ čuva skalarni produkt, a po Teoremu o inverznim funkcijama preslikavanje F je lokalni difeomorfizam. □

Kako bi provjerili je li neko preslikavanje F lokalna izometrija, pokažimo najprije da je F lokalna izometrija ako i samo ako vrijedi

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{x}} \circ \phi)}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{x}} \circ \phi)}{\partial u_j}, i, j = 1, 2. \tag{2.4}$$

Definirajmo na S kartu $\mathbf{x}\colon U \to S$. Zbog $F \circ \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \circ \phi\colon U \to \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$ i $(F \circ c)(t) = (F \circ \mathbf{x})(u_1(t), u_2(t))$, za parametarske krivulje $u_1 = (u_1)_0$ i $u_2 = (u_2)_0$ u točki $p = \mathbf{x}((u_1)_0, (u_2)_0)$ vrijedi jednakost

$$F_*|_p(\mathbf{x_{u_1}}) = \frac{\partial (F \circ \mathbf{x})(u_1, (u_2)_0)}{\partial u_1} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{x}} \circ \phi)(u_1, (u_2)_0)}{\partial u_1} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{x}} \circ \phi)(u_1, u_2)}{\partial u_1}. \tag{2.5}$$

Na isti način se pokaže

$$F_*|_p(\mathbf{x_{u_2}}) = \frac{\partial (\bar{\mathbf{x}} \circ \phi)((u_1)_0, (u_2)_0)}{\partial u_2}. \tag{2.6}$$

Tada (2.4) slijedi iz (2.5) i (2.6).

Za $E = \mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_1}$ uvjet (2.4) glasi:

$$E = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})}{\partial \bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right)^2,$$

što znači da ako su domene dviju karata isti skupovi, $U = \bar{U}$, a preslikavanje ϕ je identiteta, dobivamo teorem kojim lako provjerimo je li preslikavanje ploha lokalna izometrija:

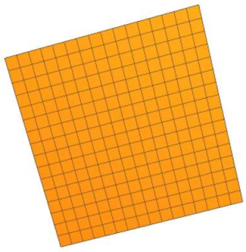
Teorem 7 (vidjeti [2], Teorem 3.8.3.). *Glatko preslikavanje F je lokalna izometrija ako i samo ako*

$$E = \bar{E}, F = \bar{F}, G = \bar{G},$$

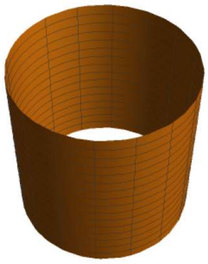
pri čemu su funkcije E, F, G, odnosno $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ fundamentalne veličine prvog reda s obzirom na karte $\mathbf{x}$, odnosno $\bar{\mathbf{x}}$ definirane na istom otvorenom skupu U.

Dokaz. Slijedi iz $U = \bar{U}, \phi = Id$ i (2.4). □

Primjer 1. Karta $\mathbf{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definirana sa $\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ je glatko preslikavanje između ravnine i kružnog cilindra. Lako se provjeri da i za ravninu i za cilindar vrijedi $E = G = 1$ i $F = 0$. Stoga je $\mathbf{x}$ lokalna izometrija. Drugim riječima, ravnina se može saviti u cilindar bez razvlačenja ili kidanja.



Slika 1: Ravnina



Slika 2: Kružni cilindar

3 Gaussov Veličanstveni teorem

U ovom poglavlju iskazat ćemo rezultat kojega je 1827. godine dokazao Gauss i koji je zbog svog značaja za diferencijalnu geometriju nazvan Veličanstveni teorem, lat. Theorema Egregium. Teorem i propozicije u ovom poglavlju preuzeti su iz [2].

Teorem 8 (vidjeti [2], Teorem 3.8.4.). *Zakrivljenost K je invarijanta pri lokalnim izometrijama, tj. ako je $F\colon M \to N$ lokalna izometrija, tada je*

$$K(p) = K(F(p)), p \in M.$$

Dokaz. Neka je M ploha, a $\mathbf{x}$ dio plohe paramtriziran sa $\mathbf{x}\colon U \to M$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ kojem možemo pridružiti bazu $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, n\}$ prostora $T_p\mathbb{R}$, $p \in M$, pri čemu je n normalno, jedinično, glatko polje na M. Vektore $\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}$ u toj bazi možemo prikazati kao

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + Ln \\
\mathbf{x}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + Mn \\
\mathbf{x}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + Nn
\end{aligned}$$

gdje su $\Gamma^k_{ij}, i, j, k = 1, 2$ funkcije koje nazivamo Chrisoffelovi simboli 2. vrste. U nastavku ćemo izvesti prikaz Christoffelovih simbola preko koeficijenata prve fundamentalne forme i njihovih derivacija. Iz (1.2), parcijalnim deriviranjem po u i v dobivamo

$$\begin{aligned}
E_u &= 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu} \\
F_u &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} \\
G_u &= 2\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv} \\
E_v &= 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} \\
F_v &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} \\
G_v &= 2\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv}
\end{aligned}$$

iz čega dalje slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u &= \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \frac{1}{2}E_u \\
\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v &= \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{12}G = F_u - \frac{1}{2}E_v \\
\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u &= \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F = \frac{1}{2}E_v \\
\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v &= \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{22}G = \frac{1}{2}G_u \\
\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u &= \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F = F_v - \frac{1}{2}G_u \\
\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v &= \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{11}G = \frac{1}{2}G_v.
\end{aligned}$$

Očito je da vrijedi:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2W^2} \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2W^2} \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2W^2} \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2W^2} \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2W^2} \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2W^2}.
\end{aligned}$$

Želimo da vrijede i uvjeti integrabilnosti:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u &= 0 \\
(\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v &= 0 \\
n_{uv} - n_{vu} &= 0.
\end{aligned}$$

Kako je $n_u = -S_p(\mathbf{x_u}) \in T_pM$, vrijedi

$$-n_u = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v, -n_v = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v, \tag{3.1}$$

pri čemu su a, b, c, d određeni Weingartenovim formulama (vidjeti [2], Propozicija 3.7.2.). Ako uvrstimo izraze za derivacije od $\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}, n_u, n_v$, dobivamo slijedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
A_1\mathbf{x}_u + B_1\mathbf{x}_v + C_1 n &= 0, \\
A_2\mathbf{x}_u + B_2\mathbf{x}_v + C_2 n &= 0, \\
A_3\mathbf{x}_u + B_3\mathbf{x}_v + C_3 n &= 0,
\end{aligned}$$

gdje su $A_1, ..., C_3$ glatke funkcije na U .
Budući da polja $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, n$ čine bazu, ona su linearno nezavisna pa vrijedi $A_1 = B_1 = C_1 = A_2 = ... = C_3 = 0$.
Iz $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ sljedi:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^1\mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_{vv} + L_{nv} + (\Gamma_{11}^1)_v\mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v\mathbf{x}_v + L_v n = \\
&= \Gamma_{12}^1\mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_{vu} + M_{nu} + (\Gamma_{12}^1)_u\mathbf{x}_u + (\Gamma_{12}^2)_u\mathbf{x}_v + M_u n.
\end{aligned}$$

Iskoristimo li izraze za definiciju Christoffelovih simbola i ako član uz $\mathbf{x}_v$ izjednačimo sa 0, dobivamo iduću jednakost

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + L\frac{FM - EN}{EG - F^2} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + M\frac{FL - EM}{EG - F^2} + (\Gamma_{12}^2)_u. \tag{3.2}$$

Uvrstimo li 3.1 u 3.2, dobivamo:

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + L\frac{FM - EN}{EG - F^2} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + M\frac{FL - EM}{EG - F^2} + (\Gamma_{12}^2)_u,$$

odnosno:

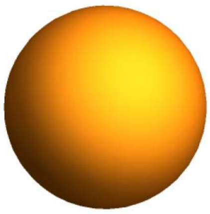
$$(\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} =$$
$$\frac{L(FM-EN)-M(FL-EM)}{EG-F^2} = \frac{-E(LN-M^2}{EG-F^2} = -EK,$$

iz čega dobivamo izraz za K

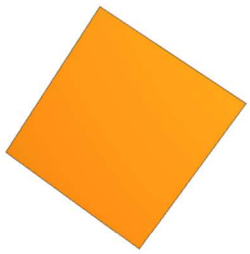
$$K = \frac{1}{E}((\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22})$$

koji ovisi samo o fundamentalnim veličinama prvog reda i naziva se *Gaussova formula.* □

Primjer 2. Sfera i ravnina nisu lokalno izometrične jer je Gaussova zakrivljenost sfere različita od 0, dok je Gaussova zakrivljenost ravnine jednaka 0.



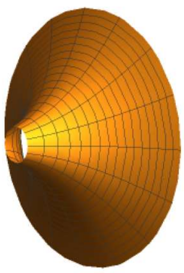
Slika 3: Sfera



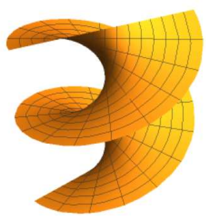
Slika 4: Ravnina

Napomena 5. Obrat Gaussovog Veličanstvenog teorema ne vrijedi.

Primjer 3. Rotacijska ploha zadana parametrizacijom $\mathbf{x}(u,v) = (\cos v \cdot u, \log u, \sin v \cdot u)$ i helikoid nisu izometrične iako imaju jednaku Gaussovu zakrivljenost.



Slika 5: Ploha zadana parametrizacijom $\mathbf{x}(u,v) = (\cos v \cdot u, \log u, \sin v \cdot u)$



Slika 6: Helikoid

Osim Gaussovog Veličanstvenog teorema, navest ćemo još dvije formule za računanje Gaussove zakrivljenosti. Koristit ćemo fundamentalne veličine prvog reda i njihove derivacije. Prva je tzv. *Brioschi-jeva formula*:

Propozicija 9 (vidjeti [2], Propozicija 3.8.2).

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv}+F_{uv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right)$$

Druga formula nam daje izraz za K u ortogonalnoj parametarskoj mreži $F=0$:

Propozicija 10 (vidjeti [2], Propozicija 3.8.3).

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Literatura

[1] A. GRAY, E. ABBENA, S. SALAMON, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC Press, 2006.

[2] Ž. MILIN ŠIPUŠ, S. VIDAK, Uvod u diferencijalnu geometriju, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.