

Neodređeni integral i metode integracije

Stojaković, Diana

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:846677>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-15**



mathos

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Diana Stojaković

Neodređeni integral i metode integracije

Završni rad

Osijek, 2021.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
Fakultet primijenjene matematike i informatike Sveučilišni prijediplomski
studij Matematika

Diana Stojaković

Neodređeni integral i metode integracije

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2021.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Neodređeni integral	2
2.1	Primitivna funkcija	2
2.2	Pojam neodređenog integrala	3
2.3	Svojstva neodređenog integrala	3
2.4	Tablica neodređenih integrala	5
3	Metode integracije	6
3.1	Direktna metoda integracije	6
3.2	Metoda supstitucije	7
3.3	Metoda parcijalne integracije	8
4	Tehnike integriranja nekih funkcija	11
4.1	Integriranje racionalnih funkcija	11
4.2	Integriranje nekih iracionalnih funkcija	13
4.3	Integriranje trigonometrijskih funkcija	14
	Literatura	17

Sažetak

U ovom radu prezentiramo pojam primitivne funkcije ili antiderivacije funkcije f kojim uvodimo pojam neodređenog integrala. Opisat ćemo svojstva neodređenog integrala i dat ćemo tablicu osnovnih integrala koju ćemo koristiti u metodama integracije i tehnikama integriranja.

Ključne riječi: primitivna funkcija, neodređeni integral, metoda supstitucije, metoda parcijalne integracije

Indefinite integral and integration methods

Abstract

In this paper, we present the concept of a primitive function or antiderivation of the function f by which we introduce the concept of an indefinite integral. We will describe the properties of the indefinite integral and give a table of basic integrals that we will use in integration methods and integration techniques.

Keywords: primitive function, indefinite integral, substitution method, partial integration method

1 Uvod

Pojam integrala je ključan pojam u području matematičke analize, a naziv je dobio od latinske riječi *integralis* (cjelina) jer zbrajanjem beskonačnog broja malih dijelova dobivamo cjelinu. Isaac Newton (1642.-1727.) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.) su u kasnom sedamnaestom stoljeću otkrili vezu između tangente i površina, a Newton-Leibnitzova formula je danas osnova integralnog računa.

Teorem 1.1. (*Newton-Leibnitzova formula*)[1, *Newton-Leibnitzova formula*, str. 251.]
Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Ako je $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bilo koja primitivna funkcija od f , onda je:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Pojmom primitivne funkcije ili antiderivacije funkcije f uvodimo pojam neodređenog integrala koji označava skup svih primitivnih funkcija dane funkcije f . Sam postupak integriranja je vrlo složen jer integral elementarne funkcije ne daje uvijek elementarnu funkciju i zbog toga su danas mnogi integrali ostali neriješeni. U ovom radu baviti ćemo se neodređenim integralom. Najprije ćemo navesti definiciju i osnovna svojstva neodređenih integrala, a nakon toga ćemo nešto više reći o metodama integracije. Ovaj završni rad prati literaturu [1], M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 1994. i dijelovi teksta su preuzeti iz knjige.

2 Neodređeni integral

2.1 Primitivna funkcija

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ jedan od skupova: interval (a, b) , slijeva zatvoren interval $[a, b)$, zdesna zatvoren interval $(a, b]$ ili segment $[a, b]$. **Primitivnom funkcijom** funkcije $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ na skupu I nazivamo svaku funkciju F sa svojstvom:

$$F'(x) = f(x) \text{ za svaki } x \in I.$$

Primjer 2.1.

$F(x) = \ln x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $I = (0, \infty)$ jer je $F'(x) = f(x)$.

Napomena 2.1.

Ako je F na intervalu I primitivna funkcija funkcije f , onda je i $x \rightarrow F(x) + C$ primitivna funkcija funkcije f , gdje je C proizvoljna konstanta.

Teorem 2.1. [3, Teorem 5.9.]

Ako su F i G dvije primitivne funkcije funkcije f na intervalu I , onda se one razlikuju za konstantu, tj.

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \implies F(x) - G(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Prije nego što započnemo s dokazom teorema 2.1, iskazat ćemo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti koji ćemo koristiti u samom dokazu.

Teorem 2.2. (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti)

[1, Lagrangeov teorem, str. 199.]

Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b) , onda postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Dokaz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti možete naći u [1].

Dokaz teorema 2.1. Ako su $F' = f$ i $G' = f$, onda je $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$, odnosno $H'(x) = 0$, $\forall x \in I$, gdje je $H = G - F$. Neka su x_1 i x_2 bilo koje dvije točke iz domene I , pri čemu je $x_1 < x_2$. Prema **Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti** postoji točka $c \in (x_1, x_2)$ takva da je:

$$H(x_2) - H(x_1) = H'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Kako je $H'(c) = 0$ dobivamo $H(x_2) = H(x_1)$. Dakle, $H(x) = C$, $\forall x \in I$, pa onda vrijedi $F(x) - G(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$. \square

2.2 Pojam neodređenog integrala

U prethodnom poglavlju smo definirali primitivnu funkciju i naveli neka njena osnovna svojstva, te sada možemo dati definiciju neodređenog integrala.

Definicija 2.1. *Neodređeni integral* funkcije $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu I je skup svih primitivnih funkcija funkcije f na intervalu I .

Koristimo oznaku

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

pri čemu je F neka **primitivna funkcija** funkcije f na intervalu I , x je **varijabla integracije**, f **podintegralna funkcija** i C **konstanta integracije**.

Napomena 2.2. *Postupak traženja neodređenog integrala nazivamo **integriranjem**.*

Da bismo pronašli neodređeni integral funkcije f na skupu I dovoljno je naći jednu njenu primitivnu funkciju.

Napomena 2.3. *Ako funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju na I , onda kažemo da je funkcija f **integrabilna** na I .*

Napomena 2.4. *Integriranje je inverzna operacija od deriviranja zato još neodređeni integral nazivamo i **antiderivacija**, te rezultat integriranja uvijek možemo provjeriti deriviranjem.*

2.3 Svojstva neodređenog integrala

Navedimo osnovna svojstva neodređenog integrala koja se lako mogu provjeriti koristeći definiciju neodređenog integrala i svojstva derivacije funkcije (*svojstva su preuzeta iz [1]*):

1. Ako funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna na I , onda je:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

2. Ako je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na I , onda je:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int f(x)dx \right) = f(x),$$

odnosno derivacija svake primitivne funkcije jednaka je funkciji f .

3. Ako je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na I i $\lambda \in \mathbb{R}$, onda je funkcija $\lambda \cdot f$ integrabilna na I i pri tome je :

$$\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

Ovo svojstvo nazivamo **homogenost** neodređenog integrala.

4. Ako su funkcija $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilne na I , onda je i funkcija $f + g$ integrabilna na I i vrijedi:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Ovo svojstvo nazivamo **aditivnost** neodređenog integrala.

Napomena 2.5. [1, *Primjedba 7.8*]

Možemo pokazati da su 3. i 4. ekvivalentna svojstvu linearnosti:

$$\int [\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)] dx = \alpha_1 \int f(x) dx + \alpha_2 \int g(x) dx, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

i time smo pokazali da je neodređeni integral "linearna operacija", tj. ima svojstvo linearne funkcije.

2.4 Tablica neodređenih integrala

Postupak integriranja sastoji se u tome da se podintegralna funkcija dovede u vezu s funkcijama za koje su primitivne funkcije navedene u sljedećoj tablici:

$\int c \, dx = c \cdot x + C$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ch} x + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$

Tablica 1: Tablica neodređenih integrala

3 Metode integracije

U nastavku ćemo navesti neke metode integriranja. Svaku metodu ćemo posebno opisati i navesti nekoliko primjera.

3.1 Direktna metoda integracije

Direktna metoda integracije se sastoji u tome da podintegralnu funkciju transformiramo tako da dobijemo elementarne funkcije i zatim koristimo svojstva integrala i formule iz tablice neodređenih integrala kako bismo dobili rezultat.

Primjer 3.1. U ovom primjeru prikazat ćemo računanje integrala nekih funkcija direktnom metodom integracije.

1. $\int (x^2 + 8)^2 dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 8)^2 dx &= \int (x^2 + 16x + 64) dx = \int x^2 dx + 16 \int x dx + 64 \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 16 \frac{x^2}{2} + 64x + C = \frac{x^3}{3} + 8x^2 + 64x + C.\end{aligned}$$

2. $\int \sqrt{x}(x - \sqrt[3]{x}) dx$

Rješenje:

$$\int \sqrt{x}(x - \sqrt[3]{x}) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{6}}) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int x^{\frac{5}{6}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + C.$$

3. $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{5 \sin^2 x} \right) dx$

Rješenje:

$$\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{5 \sin^2 x} \right) dx = 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \frac{2}{5} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3 \operatorname{tg} x + \frac{2}{5} \operatorname{ctg} x + C.$$

Deriviranjem desne strane jednakosti možemo provjeriti sljedeće pravilo koje nam olakšava računanje integrala:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Dakle, ako se u brojniku podintegralne funkcije nalazi derivacija nazivnika, tada je integral jednak prirodnom logaritmu apsolutne vrijednosti nazivnika.

Primjer 3.2. Pokazat ćemo primjere u kojima ćemo primijeniti navedeno pravilo:

1. $\int \frac{1}{x+4} dx$

Rješenje:

$$\int \frac{1}{x+4} dx = \ln |x+4| + C.$$

2. $\int \operatorname{ctg} x \, dx$.

Rješenje:

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

3.2 Metoda supstitucije

Metoda supstitucije je postupak kojim uvodimo novu varijablu, pri čemu se podintegralna funkcija dovodi u vezu s kompozicijom funkcija.

Teorem 3.1. [1, tvrdnja 7.15.]

Neka su $[A, B]$ i $[a, b]$ segmenti, ρ derivabilna funkcija na $[a, b]$, ρ' neprekidna funkcija na $[a, b]$ i f neprekidna funkcija na $[A, B]$. Ako je $\rho([a, b]) \subseteq [A, B]$ tako da je na $[a, b]$ definirana kompozicija $f \circ \rho$, onda vrijedi:

Funkcija $x \mapsto f[\rho(x)]\rho'(x)$ na segmentu $[a, b]$ ima primitivnu funkciju. Pri tome je

$$\int f[\rho(x)]\rho'(x) \, dx = F[\rho(x)] + C, \quad (1)$$

gdje je F primitivna funkcija od f .

Dokaz. Dokaz je preuzet iz [1].

Primijetimo da je $x \mapsto f[\rho(x)]\rho'(x)$ neprekidna, pa i integrabilna na $[a, b]$, a funkcija f integrabilna na $[A, B]$. Nadalje, neka je F primitivna funkcija od f na $[A, B]$. Kako je $\rho([a, b]) \subseteq [A, B]$, kompozicija $F \circ \rho$ je derivabilna na $[a, b]$. Primjenom pravila za deriviranje kompozicije funkcija dobivamo:

$$(F \circ \rho)'(x) = F'[\rho(x)]\rho'(x) = f[\rho(x)]\rho'(x).$$

Slijedi tvrdnja $\int f[\rho(x)]\rho'(x) \, dx = F[\rho(x)] + C$. □

Iz formule (1) dobivamo shemu za pronalaženje neodređenog integrala $\int f[\rho(x)]\rho'(x) \, dx$:

$$\int f[\rho(x)]\rho'(x) \, dx = \left| \begin{array}{l} \rho(x) = t \\ \rho'(x) \, dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) \, dt = F(t) + C = F[\rho(x)] + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta, a F primitivna funkcija od f .

Primjer 3.3. U sljedećim primjerima ćemo vidjeti primjenu metode supstitucije na neodređenom integralu.

1. $\int \sqrt{2-x} \, dx$

Rješenje:

$$\int \sqrt{2-x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 2-x \\ dt = -dx \end{array} \right| = - \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}} &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{3x}{5} \\ dt = \frac{3}{5} dx \end{array} \right| = \int \frac{5}{3\sqrt{25-25t^2}} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \frac{1}{3} \arcsin(t) + C = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{3x}{5}\right) + C. \end{aligned}$$

$$3. \int \sin^3 x \cos x dx$$

Rješenje:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

3.3 Metoda parcijalne integracije

Iz formule za deriviranje produkta dvije funkcije dobivamo formulu za parcijalnu integraciju.

Teorem 3.2. [1, tvrdnja 7.18.]

Ako su $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno derivabilne funkcije na intervalu I , onda su funkcije $u'v$ i uv' integrabilne na I i pri tome vrijedi:

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx. \quad (2)$$

Dokaz. Dokaz je preuzet iz [1].

Kako su u i v prema pretpostavci neprekidno derivabilne funkcije na I , onda su i funkcije $u'v$ i uv' neprekidne i integrabilne na I . Prema pravilu derivacije produkta dvaju funkcija dobivamo $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, pa slijedi

$$u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x).$$

Integriranjem te jednakosti dobivamo:

$$\int u'(x)v(x) dx = (uv)(x) - \int u(x)v'(x) dx.$$

□

Integraciju primjenom formule (2) nazivamo **parcijalnom integracijom**.

Napomena 3.1. [1, Primjedba 7.10]

Kod metode parcijalne integracije treba pripaziti koju funkciju odabrati kao u' , a koju kao v . Za funkciju u' bismo trebali odabrati funkciju kojom bi lakše mogli odrediti primitivnu funkciju u od u' , a pri tome treba paziti da računanje integrala $\int u(x)v'(x) dx$ bude lakše od računanja integrala $\int u'(x)v(x) dx$.

Primjer 3.4. Ovim primjerom ćemo pojasniti Napomenu 3.1.

Izračunat ćemo $\int x \sin x \, dx$:

$$\int \underbrace{x}_v \underbrace{\sin x}_{u'} \, dx = \underbrace{-\cos x}_u \underbrace{x}_v - \int \underbrace{-\cos x}_u \underbrace{1}_{v'} \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Ako bi stavili za $u' = x$, a za $v = \sin x$, onda bi imali:

$$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\sin x}_v \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx.$$

Ovdje možemo uvidjeti da je rješavanje $\int x^2 \cos x \, dx$ složenije od rješavanja $\int x \sin x \, dx$ te da nas formula parcijalne integracije na ovaj način zadana vodi u pogrešnom smjeru.

Primjer 3.5. Riješit ćemo sljedeće integrale:

1. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_v \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{u'} \, dx &= \underbrace{\operatorname{tg} x}_u \underbrace{x}_v - \int \underbrace{\operatorname{tg} x}_u \underbrace{1}_{v'} \, dx = x \operatorname{tg} x - \underbrace{\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx}_{I_1} = \\ &= x \operatorname{tg} x - \ln(\cos(x)) + C. \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t} \, dt = -\ln(t) + C = -\ln(\cos(x)) + C.$$

2. $\int x^2 \sin(2x) \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_v \underbrace{\sin(2x)}_{u'} \, dx &= \underbrace{\frac{-\cos(2x)}{2}}_u \underbrace{x^2}_v - \int \underbrace{-\cos(2x)}_u \underbrace{x}_{v'} \, dx = \\ &= -\frac{\cos(2x)}{2} x^2 + \underbrace{\int \cos(2x)x \, dx}_{I_2} = \\ &= -\frac{\cos(2x)}{2} x^2 + \frac{\sin(2x)}{2} x - \frac{\cos(2x)}{4} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \underbrace{x}_v \underbrace{\cos(2x)}_{u'} \, dx = \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_u \underbrace{x}_v - \int \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_u \underbrace{1}_{v'} \, dx = \\ &= \frac{\sin(2x)}{2} x - \underbrace{\int \frac{\sin(2x)}{2} \, dx}_{I_3} = \frac{\sin(2x)}{2} x - \frac{\cos(2x)}{4} + C. \end{aligned}$$

$$I_3 = \int \frac{\sin(2x)}{2} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x \\ dt = 2 \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \sin t \, dt = -\frac{\cos(t)}{4} + C = -\frac{\cos(2x)}{4} + C.$$

Primjer 3.6. U ovom primjeru ćemo ilustrirati primjenu parcijalne integracije na neodređenom integralu čija podintegralna funkcija ovisi o cjelobrojnom parametru n .

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}}_v \cdot \underbrace{1}_{u'} dx = \underbrace{x}_u \underbrace{\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}}_v - \int \underbrace{x}_u \underbrace{\frac{-n \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^{n+1}}}_{v'} dx = \\
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}}_I
 \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = I_n - a^2 I_{n+1}$$

Napomena 3.2. [1, Primjedba 7.11]

Integral oblika

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx,$$

gdje su $p, q \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, možemo supstitucijom svesti na jedan od dva oblika:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad \text{ili} \quad J_n = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n}.$$

Primjer 3.7. Integral

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$$

riješiti ćemo koristeći Napomenu 3.2.

Najprije ćemo nazivnik svesti na potpun kvadrat:

$$x^2 - 6x + 13 = 1 \cdot (x^2 - 6x) + 13 = 1 \cdot ((x - 3)^2 - 9) + 13 = (x - 3)^2 + 4$$

Stoga,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} &= \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} t = x - 3 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x - 3}{2} + C.
 \end{aligned}$$

4 Tehnike integriranja nekih funkcija

U nastavku ćemo prikazati kako integrirati neke funkcije (npr. racionalne, iracionalne, trigonometrijske) koristeći određene tehnike integriranja.

4.1 Integriranje racionalnih funkcija

Prisjetimo se, racionalne funkcije su funkcije oblika:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n},$$

gdje su P_m i Q_n polinomi stupnja m i n , redom. Domena takve funkcije je skup realnih brojeva bez nultočke nazivnika, tj. $\{x \in \mathbb{R} : Q_n(x) \neq 0\}$. Ukoliko je stupanj nazivnika veći od stupnja brojnika ($n > m$), onda takvu racionalnu funkciju nazivamo pravom racionalnom funkcijom. Svaku racionalnu funkciju možemo prikazati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije, a pravu racionalnu funkciju možemo prikazati kao zbroj parcijalnih razlomka. Integriranje racionalnih funkcija svodimo na četiri tipa integrala.

Integral 1. tipa

$$\int \frac{A}{x-a} dx = \left| \frac{t = x-a}{dt = dx} \right| = A \int \frac{dt}{t} = A \ln |t| + C = A \ln |x-a| + C.$$

Integral 2. tipa

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = \left| \frac{t = x-a}{dt = dx} \right| = A \int t^{-m} dt = A \frac{t^{-m+1}}{(-m+1)} + C = \frac{-A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C.$$

Integral 3. tipa

Integral 3. tipa je oblika: $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$. Nazivnik $x^2 + px + q$ ćemo dopuniti do potpunog kvadrata

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)}_{\phi^2}.$$

Uvodimo supstituciju $t = x + \frac{p}{2}$ i dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + \phi^2)^n} dt = \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 + \phi^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \phi^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + \phi^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{\phi} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\phi}\right) + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \end{aligned}$$

Integral 4. tipa

Iskoristit ćemo prethodnu supstituciju $t = x + \frac{p}{2}$ uz oznaku $\phi = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ i onda dobivamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + \phi^2)^n} dt = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + \phi^2)}{(t^2 + \phi^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + \phi^2)^n} = \\ &= \frac{-M}{2(n-1)(t^2 + \phi^2)^{n-1}} + \underbrace{\left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + \phi^2)^n}}_{I_n}.\end{aligned}$$

Integral I_n smo izračunali u Primjeru 3.6 pa slijedi da je polazni integral oblika

$$I_n = \frac{t}{(t^2 + \phi^2)^n} + 2n(I_n - \phi^2 I_{n+1})$$

odnosno

$$I_n = \frac{x + \frac{p}{2}}{\left(x + \frac{p}{2} + \phi^2\right)^n} + 2n(I_n - \phi^2 I_{n+1}).$$

Napomena 4.1. [1, *Primjedba 7.12*]

Integrali 1. i 3. tipa su transcendentne funkcije, dok je integral 2. tipa prava racionalna funkcija kod koje stupanj polinoma u nazivniku iznosi $(m-1)$. Integral 4. tipa sastoji se od prave racionalne funkcije kod koje je polinom u nazivniku stupnja $2(n-1)$ i od transcendentnog dijela koji sadrži funkciju arctan. Dakle, integral prave racionalne funkcije je elementarna funkcija koja se može prikazati kao zbroj transcendentnog i pravog racionalnog dijela.

Primjer 4.1. Riješit ćemo sljedeći integral $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \frac{x^2 - 5x + 6 + 3}{x^2 - 5x + 6} dx = \int 1 dx + \int \frac{3}{x^2 - 5x + 6} dx = \\ &= x + 3 \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx.\end{aligned}$$

Kako je stupanj nazivnika veći od stupnja brojnika, zaključujemo da je riječ o pravoj racionalnoj funkciji. Stoga rastavljamo razlomak na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \Big/ \cdot (x-3)(x-2) \\ 1 &= A(x-2) + B(x-3) \\ 1 &= (A+B)x - 2A - 3B \\ \Rightarrow A+B &= 0 \quad i \quad -2A - 3B = 1 \\ \Rightarrow A &= 1 \quad i \quad B = -1\end{aligned}$$

Na taj način dobivamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx &= x + 3 \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = x + 3 \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \\ &= x + 3 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2| + C = x + 3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C.\end{aligned}$$

4.2 Integriranje nekih iracionalnih funkcija

1. Integral oblika

$$\int R(x, x^{q_1}, x^{q_2}, \dots, x^{q_n}) dx,$$

gdje je R racionalna funkcija svojih argumenata i $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$. Takav integral rješavamo uvođenjem supstitucije $x = t^k$, gdje je k najmanji zajednički višekratnik od nazivnika brojeva q_1, q_2, \dots, q_n . Tim ćemo postupkom integral iracionalne funkcije, uz odgovarajuću supstituciju, svesti na rješavanje integrala racionalne funkcije.

Primjer 4.2.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x}}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5}{\sqrt[3]{t^{12} - \sqrt{t^6}}} dt = 6 \int \frac{t^5}{t^3(t-1)} dt = 6 \int \frac{t^2}{t-1} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t-1 \\ du = dt \end{array} \right| = 6 \int \frac{(u+1)^2}{u} du = 6 \int \frac{u^2 + 2u + 1}{u} du = \\ &= 6 \int u du + 6 \int 2 du + 6 \int \frac{1}{u} du = 3u^2 + 12u + 6 \ln |u| + C = \\ &= 3(t-1)^2 + 12(t-1) + 6 \ln |t-1| = \\ &= 3(\sqrt[6]{x} - 1)^2 + 12(\sqrt[6]{x} - 1) + 6 \ln |\sqrt[6]{x} - 1| + C. \end{aligned}$$

2. Integral oblika:

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$$

pri čemu je R racionalna funkcija od x i $\frac{ax+b}{cx+d}$. Supstitucijom $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ ovaj integral svodimo na integral racionalne funkcije.

Primjer 4.3.

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x} = t^2 \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| = \int \frac{2}{\left(\frac{2t^2}{1+t^2}\right)^2} \cdot t \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt = \\ &= -2 \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{t} + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \end{aligned}$$

3. Integral oblika

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

gdje je R racionalna funkcija od x i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Koristeći Eulerove supstitucije integral ćemo svesti na racionalnu funkciju.

Eulerove supstitucije:

(a) Za $a > 0$ uzmimo supstituciju: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}$. Kada kvadriramo dobijemo $bx + c = t^2 + 2\sqrt{a}tx$, odakle slijedi:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}, \quad dx = \frac{-2\sqrt{a}t^2 + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(b - 2\sqrt{a}t)^2} dt.$$

Tim postupkom integral iracionalne funkcije svedemo na integral racionalne funkcije.

- (b) Za $a < 0$ prvo odredimo nultočke x_1 i x_2 kvadratne funkcije $x \rightarrow ax^2 + bx + c$. Neka je $x_1 < x_2$ i onda uvodimo supstituciju:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1).$$

Kvadriranjem dobivamo $a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2$, odakle je:

$$x = \frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a}, \quad dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2} dt.$$

Kako je x funkcija od t onda polazni integral svodimo na integral racionalne funkcije.

Primjer 4.4. Riješimo integral $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

Kako je $a = 1 > 0$ koristimo prvu Eulerovu supstituciju $\sqrt{x^2 - x + 1} = t + x$. Kvadriranjem dobivamo $-x + 1 = t^2 + 2tx$, odakle slijedi da je $x = \frac{1-t^2}{1+2t}$, odnosno $dx = \frac{-2t^2 - 2t - 2}{(2t+1)^2} dt$. Prema tome, imamo:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = t + \frac{1 - t^2}{1 + 2t} = \frac{t^2 + t + 1}{1 + 2t}.$$

Konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int \frac{\frac{-2t^2 - 2t - 2}{(1+2t)^2} dt}{\frac{2+t}{1+2t}} = \int \frac{-2t^2 - 2t - 2}{(1+2t)(2+t)} dt = \\ &= \int \frac{-2(t^2 + t + 1)}{(1+2t)(2+t)} dt = \int \left(-1 + \frac{3t}{(t+2)(2t+1)} \right) dt = \\ &= - \int dt + \int \frac{-1}{2t+1} dt + \frac{2}{t+2} dt = -x - \frac{1}{2} \ln |2x+1| \\ &+ 2 \ln |x+2| + C = \sqrt{x^2 - x + 1} - x \\ &- \frac{1}{2} \ln |2(\sqrt{x^2 - x + 1} - x) + 1| + 2 \ln |\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2| + C. \end{aligned}$$

4. Integral oblika:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

gdje je P_m polinom m -tog stupnja ($m \geq 1$).

4.3 Integriranje trigonometrijskih funkcija

1. Integral oblika

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

riješavamo na sljedeći način:

- (a) Ako je $n = 2k + 1$ neparan broj, onda uvođenjem supstitucije $t = \sin x$ dobivamo:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^m (1-t^2)^k dt.$$

Ako je m neparan, onda supstitucijom $t = \cos x$ polazni integral prelazi u integral polinoma.

(b) Brojevi $m = 2k$ i $n = 2l$ su parni. Koristeći trigonometrijske formule:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad i \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

podintegralnu funkciju zapišemo u obliku:

$$\sin^m x \sin^n x = (\sin^2)^k (\cos^2 x)^l = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^l,$$

nakon potenciranja, transformiramo sve dok ne dobijemo samo neparne potencije funkcije \cos .

Primjer 4.5. *Riješimo integral $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$:*

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cos^2 x dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2(2x)) dx = \frac{1}{4} \int \sin^2(2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos(4x) dx = \\ &= \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C. \end{aligned}$$

2. Integrale oblika

$$\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx, \quad \int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx \quad i \quad \int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

rješavamo pomoću trigonometrijskih formula:

$$\sin(\alpha x) \sin(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\sin(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x].$$

Pri tome koristimo sljedeće integrale:

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C \quad (a \neq 0), \quad \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C \quad (a \neq 0),$$

koji se rješavaju supstitucijom $t = ax$.

Primjer 4.6. *Riješimo integral $\int \sin(4x) \cos(10x) dx$.*

$$\begin{aligned} \int \sin(4x) \cos(10x) dx &= \frac{1}{2} \int (-\sin(6x) + \sin(14x)) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sin(6x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(14x) dx = \\ &= \frac{1}{12} \cos(6x) - \frac{1}{28} \cos(14x) + C. \end{aligned}$$

3. Integral oblika

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

gdje je R racionalne funkcija danih argumenata i takav integral riješavamo supstitucijom $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Kad izrazimo x i deriviramo izraz dobivamo:

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Prema trigonometrijskim formulama imamo:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Odnosno, dobivamo da je integral oblika:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Primjer 4.7. *Izračunajmo sljedeći integral* $\int \frac{dx}{5 \cos x + 5 \sin x + 1}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 \cos x + 5 \sin x + 1} &= \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 \frac{2t}{1+t^2} + 1} = \int \frac{-2dt}{4t^2 - 10t - 6} = \\ &= \int \frac{-dt}{(t-3)(2t+1)} = \int \frac{-1}{7(t-3)} dt - \int \frac{-2}{7(2t+1)} dt = \\ &= \frac{-1}{7} \ln |t-3| + \frac{1}{7} \ln |2t+1| = \ln \left| \frac{2t+1}{t-3} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C. \end{aligned}$$

Literatura

- [1] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 1994.
- [2] P. Javor, Matematička analiza 1, Element, Zagreb, 2003.
- [3] B. Guljaš, Matematička analiza I i II, predavanja, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf>, (pristupljeno 1.10.2021.)