

# Krivuljni integrali

---

Župarić, Katarina

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:002304>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-21**



**mathos**

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij matematike

Katarina Župarić

# **Krivuljni integrali**

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij matematike

Katarina Župarić

# **Krivuljni integrali**

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2023.

## Sažetak

U ovom završnom radu ćemo se baviti krivuljnim integralima i njihovim svojstvima. Najprije se bavimo krivuljnim integralom skalarnog polja koji se naziva krivuljni integral prve vrste. Navodimo definiciju tog integrala, računanje integrala i svojstva. Na kraju opisujemo neke primjere krivuljnog integrala prve vrste. Zatim u sljedećem poglavlju razmatramo krivuljni integral vektorskog polja odnosno krivuljni integral druge vrste. Za taj integral također navodimo definiciju, računanje integrala i svojstva. Na kraju rada navodimo neke primjere krivuljnog integrala druge vrste.

**Ključne riječi:** krivulja, Jordanov luk, krivuljni integral prve vrste, krivuljni integral druge vrste

## **Line integrals**

### **Abstract**

In this paper we will observe line integrals and their properties. First, we will observe scalar line integrals. We present the definition of that integral, the calculation of the integral and its properties. Finally, we describe some examples of scalar line integrals. Then in the next chapter we consider the vector line integrals. For that integral we also state the definition, calculation of the integral and some of his properties. At the end of the paper we give some exaples of the vector line integrals.

**Keywords:** curve, Jordan arc, scalar line integral, vector line integral

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Osnovni pojmovi</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Krivuljni integral prve vrste</b>	<b>4</b>
3.1	Računanje i svojstva krivuljnog integrala prve vrste . . . . .	5
3.2	Uporaba krivuljnih integrala prve vrste . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Krivuljni integral druge vrste</b>	<b>9</b>
4.1	Računanje i svojstva krivuljnog integrala druge vrste . . . . .	10
4.2	Potencijalna (konzervativna) polja . . . . .	14
4.3	Uporaba krivuljnih integrala druge vrste . . . . .	14
	<b>Literatura</b>	<b>16</b>

# 1 Uvod

Cilj ovog završnog rada jest usredotočiti se na krivuljne integrale i njihova svojstva. U prvom dijelu rada ćemo definirati neke osnovne pojmove koji se spominju u bitnim definicijama ovoga rada. Definiramo skalarno i vektorsko polje, krivulju u prostoru, Jordanov luk i orijentaciju Jordanovog luka. Prelazimo na drugi dio ovog rada što je krivuljni integral prve vrste. Uvodnom motivacijom precizno definiramo taj integral, opisujemo računanje krivuljnog integrala prve vrste i navodimo njegova svojstva. Zatim opisujemo neke primjere za krivuljni integral prve vrste od kojih smo naveli duljinu luka krivulje i površinu rotacijskih ploha.

U trećem dijelu rada razmatramo krivuljni integral druge vrste. Kao i kod krivuljnih integrala prve vrste, uvodnom motivacijom precizno iskazujemo definiciju, opisujemo računanje integrala i navodimo svojstva. Iskazujemo i dokazujemo Greenov teorem te definiramo potencijalno polje. Na samom kraju navodimo primjere izračunavanja rada sile i površine omeđene plohe pomoću krivuljnih integrala druge vrste.

## 2 Osnovni pojmovi

Najprije ćemo uvesti određene definicije radi lakšeg razumijevanja definicija i teorema u ovome radu. Definirajmo skalarno i vektorsko polje te krivulju u prostoru.

**Definicija 2.1** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Svaku funkciju  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazivmo **skalarno polje**, a svaku funkciju  $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazivmo **vektorsko polje**.

Kako bi kasnije mogli definirati određena preslikavanja, moramo definirati klase funkcija.

**Definicija 2.2** Funkcija  $f$  je klase  $C^0$  na  $\Omega$  ako je ona neprekidna na  $\Omega$ . Za funkciju  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je klase  $C^k$  na otvorenom skupu  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ako je ona klase  $C^{k-1}$  na  $\Omega$  i ako sve parcijalne derivacije  $k$ -tog reda funkcije  $f$  postoje na  $\Omega$  i one su neprekidne.

Neka je  $O$  točka u prostoru  $E$ . Definirajmo vektorski prostor  $X_0 = \{\vec{OP}: P \in E\}$  kao skup svih radijvektora u prostoru  $E$ .

**Definicija 2.3** Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval i  $r: I \rightarrow X_0$  neprekidna funkcija na  $I$ . Za skup

$$\Gamma = \{r(t) \in E : t \in I\} \quad (1)$$

kažemo da je **krivulja** u prostoru.

Za  $(I, r(t))$ , ako vrijedi (1), kažemo da daje parametrizaciju skupa  $\Gamma$ , a varijablu  $t$  nazivamo parametar.

Nakon što smo definirali vektorsko i skalarno polje te krivulju u prostoru, uvodimo pojam Jordanovog luka kako bismo mogli definirati krivuljni integral prve vrste i krivuljni integral druge vrste.

**Definicija 2.4** Parametriziranu krivulju  $\Gamma$  koja ima barem jednu parametrizaciju  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \Gamma$  sa svojstvima

- a)  $\vec{r}$  je injekcija,
- b)  $\vec{r} \in C^1([a, b], \Gamma)$ ,
- c)  $(\forall t \in [a, b]) \quad \vec{r}'(t) \neq 0$

nazivamo **Jordanov luk** ili jednostavna glatka krivulja s rubom.

Krajevi krivulje  $\Gamma$  ili rubne točke su točke  $A = \vec{r}(a)$  i  $B = \vec{r}(b)$ . Ako je  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ , tada je krivulja  $\Gamma$  zatvoren Jordanov luk.

**Definicija 2.5** Za krivulju  $\Gamma$  kažemo da je po dijelovima glatka krivulja ako se ona sastoji od konačno mnogo Jordanovih lukova  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \Gamma_k$  koji se nadovezuju jedan na drugi tako da je krajnja točka luka  $\Gamma_{k-1}$  ujedno i početna točka luka  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .





Slika 1: a) Jordanov luk, b) zatvoren Jordanov luk, c) po dijelovima glatka krivulja

Pretpostavimo da imamo Jordanov luk  $\Gamma$  u prostoru. U svakoj točki ove krivulje postoji tangenta. Orijehtacija krivulje podrazumijeva odabir jednog od dva moguća jedinična vektora u smjeru tangente u toj točki. To znači da postoji beskonačno mnogo načina za orijentirati krivulju. Nas najviše zanimaju orijentacije u kojima je povezivanje jediničnih vektora s točkama na krivulji neprekidno. S obzirom da krivulja ima početnu točku  $A$  i krajnju točku  $B$ , jedan način orijentacije je kretanje duž krivulje od  $A$  do  $B$ , dok je drugi način kretanje krivulje od  $B$  do  $A$ .

U slučaju da je  $\Gamma$  zatvoren Jordanov luk, tada možemo govoriti o pozitivnoj i negativnoj orijentaciji krivulje. Krivulja  $\Gamma$  se smatra pozitivno orijentiranom ako se kretanje po njoj odvija u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, dok se smatra negativno orijentiranom ako se kretanje odvija u smjeru kazaljke na satu.

### 3 Krivuljni integral prve vrste

U ovom poglavlju najprije uvodimo motivaciju za definiranje krivuljnog integrala prve vrste te samu definiciju. Zatim navodimo oblike računanja i svojstva krivuljnog integrala prve vrste te neke uporabe krivuljnog integrala prve vrste u matematici i fizici.

Pretpostavimo da je  $\Gamma$  Jordanov luk, a

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in [a, b] \quad (2)$$

njegova glatka parametrizacija. Neka je  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  skalarna funkcija. Želimo izračunati površinu plohe koja se nalazi ispod grafa funkcije  $f$ , a iznad krivulje  $\Gamma$ . Neka su dane sljedeće točke na krivulji  $\Gamma$

$$A = P_0, P_1, \dots, P_n = B.$$

Tada subdiviziji krivulje  $\Gamma$  odgovara subdivizija

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

segmenta  $[a, b]$ , takva da je  $P_k = \vec{r}(t_k)$ . S  $l(P_{k-1}, P_k)$  označimo duljinu luka krivulje  $\Gamma$ , a s  $Q_k$  označimo neku točku koja se nalazi na krivulji  $\Gamma$  između točaka  $P_{k-1}$  i  $P_k$ . Površina koju želimo izračunati približno je jednaka

$$\sum_{k=1}^n f(Q_k) l(P_{k-1}, P_k). \quad (3)$$

Tangenta na krivulji  $\Gamma$  u točki  $P_{k-1}$  dana je izrazom:

$$t \mapsto \vec{r}(t_{k-1}) + (t - t_{k-1}) \vec{r}'(t_{k-1}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Duljinu luka krivulje  $\widehat{P_{k-1}P_k}$  aproksimiramo s udaljenosti točaka  $P_{k-1}$  i  $P_k$  i

$$P'_k = \vec{r}(t_{k-1}) + (t_k - t_{k-1}) \vec{r}'(t_{k-1}),$$

gdje je  $P'_k$  točka na tangenti za  $t = t_k$ . Tada je udaljenost točaka  $P_{k-1}$  i  $P_k$  približno jednaka  $(t_k - t_{k-1}) |\vec{r}'(t_{k-1})|$ . Zatim je izraz (3) približno jednak izrazu

$$\sum_{k=1}^n f(u_k) |\vec{r}'(t_{k-1})| (t_k - t_{k-1})$$

gdje je  $u_k$  broj za koji je  $\vec{r}(u_k) = Q_k$  i dobivamo integral

$$\int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt.$$

Prema uvodnoj motivaciji definiramo krivuljni integral prve vrste.

**Definicija 3.1** Neka je  $\Gamma$  Jordanov luk,  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \Gamma$  njegova parametrizacija te  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  takva da je funkcija  $(f \circ \vec{r}) \cdot |\vec{r}'|$  Riemann integrabilna na segmentu  $[a, b]$ . Broj

$$\int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

nazivamo **krivuljni integral prve vrste** funkcije  $f$  po krivulji  $\Gamma$  i označavamo ga s

$$\int_{\Gamma} f ds.$$

Pretpostavimo da je krivulja  $\Gamma$  po dijelovima glatka krivulja, koja se sastoji od konačnog broja Jordanovih lukova  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$ , gdje je početna točka  $\Gamma_{n+1}$  jednaka krajnjoj točki  $\Gamma_n$ . Tada se krivuljni integral prve vrste duž krivulje  $\Gamma$  može računati kao zbroj krivuljnih integrala duž svakog od tih glatkih dijelova  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ :

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\Gamma_1} f(x, y) ds + \int_{\Gamma_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{\Gamma_{n-1}} f(x, y) ds + \int_{\Gamma_n} f(x, y) ds.$$

### 3.1 Računanje i svojstva krivuljnog integrala prve vrste

Zanima nas kako izračunati krivuljni integral prve vrste. U ovisnosti kako je zadana krivulja  $\Gamma$ , krivuljni integral prve vrste se svede na odgovarajući određeni integral, što navodimo u nastavku.

- Neka je krivulja  $\Gamma$  zadana jednadžbom  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , a njena parametrizacija, za  $t := x$ , dana s

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \varphi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b].$$

Tada je integral oblika:

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(t, \varphi(t)) \sqrt{1 + (\varphi'(t))^2} dt.$$

- Polarne koordinate krivulje  $\Gamma$  su

$$r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

a njena parametrizacija

$$\vec{r}(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi \vec{i} + r(\varphi) \sin \varphi \vec{j}, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2.$$

Integral je u tom slučaju oblika:

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

- Ako je parametrizacija krivulje  $\Gamma$  dana s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

tada integral ima oblik:

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Istaknimo tri svojstva krivuljnog integrala:

a)

$$\int_{\Gamma} (\lambda f) ds = \lambda \int_{\Gamma} f ds \quad \lambda \text{ konstanta};$$

b)

$$\int_{\Gamma} (f + g) ds = \int_{\Gamma} f ds + \int_{\Gamma} g ds;$$

c)

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\Gamma_1} f ds + \int_{\Gamma_2} f ds.$$

**Primjer 3.2** Izračunajmo integral

$$\int_{\Gamma} 2x ds$$

pri čemu se krivulja  $\Gamma$  sastoji od krivulje  $\Gamma_1$  što je luk parabole  $y = x^2$  od točke  $(0, 0)$  do točke  $(1, 1)$  te krivulje  $\Gamma_2$  što je dio pravca paralelan s  $y$  osi od točke  $(1, 1)$  do točke  $(1, 2)$ .

Rješenje:

Gledajući krivulju  $\Gamma_1$ , za parametar uzimamo  $x$ :

$$x = x, \quad y = x^2, \quad x \in [0, 1].$$

Računamo integral:

$$\int_{\Gamma_1} 2x ds = \int_0^1 2x \sqrt{1 + ((x^2)')^2} dx = \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}.$$

Za krivulju  $\Gamma_2$  uzimamo  $y$  za parametar:

$$x = 1, \quad y = y, \quad y \in [1, 2].$$

Računamo integral:

$$\int_{\Gamma_2} 2x ds = \int_1^2 2 \cdot 1 \sqrt{0 + 1} dy = \int_1^2 2 dy = 2.$$

Stoga, početni integral je jednak

$$\int_{\Gamma} 2x ds = \int_{\Gamma_1} 2x ds + \int_{\Gamma_2} 2x ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2 = \frac{5\sqrt{5} + 11}{6}.$$

**Primjer 3.3** Izračunajmo integral

$$\int_{\Gamma} xy ds$$

gdje je luk krivulje  $\Gamma$  zadan s  $y = -x + 1$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Rješenje:

$$\int_{\Gamma} xy ds = \int_0^1 x(-x + 1) \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \sqrt{2} \int_0^1 (-x^2 + x) dx = \sqrt{2} \left( -\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

### 3.2 Uporaba krivuljnih integrala prve vrste

U daljnjem tekstu navodimo nekoliko primjera korištenja krivuljnog integrala prve vrste.

**Primjer 3.4** Odredimo duljinu luka parabole  $y^2 = x$  od točke  $A = (0, 0)$  do točke  $B = (1, 1)$ .

Rješenje:

Duljina grafa po dijelovima glatke funkcije  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dana je s

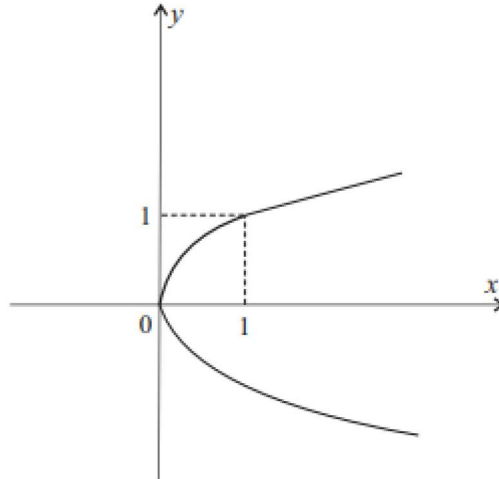
$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4)$$

Stoga, duljina luka dane parabole  $x = g(y) = y^2$ , gdje je promjena značenja varijabli  $x$  i  $y$ , prema (4) jednaka je integralu

$$l(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2} dy,$$

pa zamjenom varijabli  $y = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t$  (te formalnim deriviranjem  $dy = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t dt$ ) imamo

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_0^{\operatorname{arsh} 2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ch} t dt = \int_0^{\operatorname{arsh} 2} \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 t dt = \int_0^{\operatorname{arsh} 2} \frac{\operatorname{ch}(2t) + 1}{4} dt \\ &= \left( \frac{\operatorname{sh}(2t)}{8} + \frac{1}{4} t \right) \Big|_{t=0}^{\operatorname{arsh} 2} = \frac{1}{8} \operatorname{sh}(2 \operatorname{arsh} 2) + \frac{1}{4} \operatorname{arsh} 2 = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$



Slika 2: Parabola  $y^2 = x$

**Primjer 3.5** Izračunajmo površinu plohe koja je dobivena rotacijom dijela kružnice  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , oko osi  $x$ .

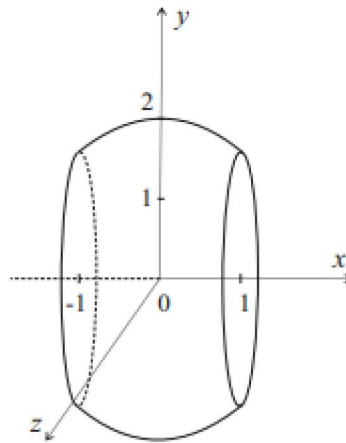
Rješenje:

Površinu plohe koja nastaje rotacijom oko osi  $x$  dijela luka krivulje  $y = f(x)$  za  $x \in [a, b]$ , može se dobiti sljedećom formulom:

$$P = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_{\Gamma} 2\pi f(x) ds. \quad (5)$$

Stoga, prema formuli (5) dobivamo:

$$P = \int_{-1}^1 2\pi \sqrt{4 - x^2} \left(1 + \frac{x^2}{4 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 8\pi.$$



Slika 3: Ploha dobivena rotacijom dijela kružnice  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , oko osi  $x$

## 4 Krivuljni integral druge vrste

U ovom poglavlju definiramo krivuljni integral druge vrste i izvodimo formulu za računanje integrala. Zatim navodimo svojstva integrala druge vrste te iskazujemo i dokazujemo Greenov teorem. Dolazimo do definiranja potencijalnog polja te završavamo s primjerima uporabe krivuljnog integrala druge vrste.

Pretpostavimo da je  $\hat{\Gamma}$  orijentiran Jordanov luk čija je početna točka A i krajnja točka B,  $\vec{r}$  njegova parametrizacija i neka je  $\vec{F}$  sila koja djeluje na tijelo koje se giba po luku  $\hat{\Gamma}$ . Želimo izračunati rad te sile pri gibanju po  $\hat{\Gamma}$ . Neka su dane sljedeće točke na krivulji  $\hat{\Gamma}$ :

$$A = P_0, P_1, \dots, P_n = B \quad (6)$$

Razdioba segmenta  $[a, b]$

$$a = t_0, t_1, \dots, t_n = b$$

odgovara razdiobi (6) Jordanovog luka  $\hat{\Gamma}$  i vrijedi  $P_k = \vec{r}(t_k)$ . Na komadu  $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$  Jordanovog luka  $\hat{\Gamma}$  silu  $\vec{F}$  aproksimiramo njezinom vrijednosti u nekoj točki  $Q_k$  koja se nalazi na luku  $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ . Rad sile koji je potreban da se tijelo prenese iz točke  $P_{k-1}$  u točku  $P_k$  po luku  $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$  aproksimiramo s  $\vec{F}(Q_k) \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ , pa dobivamo sljedeće:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(Q_k) \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k}.$$

Neka je  $Q_k = P_{k-1} = \vec{r}(t_{k-1})$ , tada vrijedi

$$\vec{F}(Q_k) \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k} = \vec{F}(\vec{r}(t_{k-1})) \cdot [\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})] \approx \vec{F}(\vec{r}(t_{k-1})) \cdot \vec{r}'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})$$

pa se rad aproksimira s

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_{k-1})) \cdot \vec{r}'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}),$$

što se svodi na integral

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) dt.$$

**Definicija 4.1** Neka je  $\hat{\Gamma}$  orijentiran Jordanov luk od točke  $A = \vec{r}(a)$  do  $B = \vec{r}(b)$ , gdje je  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \hat{\Gamma}$  njegova parametrizacija. Ako je funkcija  $\vec{F}: \hat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^3$  takva da je funkcija  $t \mapsto \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$  Riemann integrabilna na segmentu  $[a, b]$ , onda broj

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

nazivamo **krivuljni integral druge vrste** funkcije  $\vec{F}$  po orijentiranom Jordanovom luku  $\hat{\Gamma}$  i označavamo ga s

$$\int_{\hat{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Za krivulju  $\hat{\Gamma}$  koja je zatvorena, krivuljni integral druge vrste se piše

$$\oint_{\hat{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

i naziva **cirkulacija** polja  $\vec{F}$  po krivulji  $\hat{\Gamma}$ .

## 4.1 Računanje i svojstva krivuljnog integrala druge vrste

Zanima nas kako izračunati krivuljni integral druge vrste, pa ćemo najprije izvesti formulu za računanje.

Označimo s  $\hat{\Gamma}$  glatku orijentiranu krivulju u prostoru čija je parametrizacija  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  u skladu s orijentacijom takva da je

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Na krivulji  $\hat{\Gamma}$  zadamo preslikavanje  $\vec{a}: \hat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^3$  takvo da je

$$\vec{a}(T) = a_x(T)\vec{i} + a_y(T)\vec{j} + a_z(T)\vec{k}.$$

Podijelimo segment  $[a, b]$  na podsegmente

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Ovaj rastav dijeli krivulju  $\hat{\Gamma}$  po točkama:  $A = P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ ,  $P_1(x(t_1), y(t_1), z(t_1)), \dots, B = (x(t_n), y(t_n), z(t_n))$ . Izaberimo točku  $T_i$  između točaka  $P_{i-1}$  i  $P_i$  takvu da je  $T_i = (x(c_i), y(c_i), z(c_i))$ , gdje je  $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Sada je

$$\sum_{i=1}^n \vec{a}(T_i) \cdot \overrightarrow{P_{i-1}P_i}, \quad (7)$$

pri čemu je  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = ((x(t_i) - x(t_{i-1}))\vec{i} + (y(t_i) - y(t_{i-1}))\vec{j} + (z(t_i) - z(t_{i-1}))\vec{k})$ , pa je izraz u (7) jednak izrazu:

$$\sum_{i=1}^k \vec{a}(T_i) \cdot ((x(t_i) - x(t_{i-1}))\vec{i} + (y(t_i) - y(t_{i-1}))\vec{j} + (z(t_i) - z(t_{i-1}))\vec{k}). \quad (8)$$

Koristeći Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, postoje  $d_i, e_i, f_i \in [t_{i-1}, t_i]$  takvi da je

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(d_i)(t_i - t_{i-1}) \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(e_i)(t_i - t_{i-1}) \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) &= z'(f_i)(t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

pa vrijedi:

$$(x(t_i) - x(t_{i-1}))\vec{i} + (y(t_i) - y(t_{i-1}))\vec{j} + (z(t_i) - z(t_{i-1}))\vec{k} = (x'(d_i)\vec{i} + y'(e_i)\vec{j} + z'(f_i)\vec{k})(t_i - t_{i-1})$$

Uvrstimo u (8):

$$\sum_{i=1}^n \vec{a}(T_i) \cdot (x'(d_i)\vec{i} + y'(e_i)\vec{j} + z'(f_i)\vec{k})(t_i - t_{i-1}).$$

Znamo da je  $\vec{a}(T) = a_x(T)\vec{i} + a_y(T)\vec{j} + a_z(T)\vec{k}$  te dobivamo da vrijedi

$$(a_x(T_i)\vec{i} + a_y(T_i)\vec{j} + a_z(T_i)\vec{k})(x'(d_i)\vec{i} + y'(e_i)\vec{j} + z'(f_i)\vec{k}) = a_x(T_i)x'(d_i) + a_y(T_i)y'(e_i) + a_z(T_i)z'(f_i),$$

odnosno dobivamo

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (a_x(T_i)x'(d_i) + a_y(T_i)y'(e_i) + a_z(T_i)z'(f_i))(t_i - t_{i-1}) = \\ &\sum_{i=1}^n (a_x(x(c_i), y(c_i), z(c_i))x'(d_i) + a_y(x(c_i), y(c_i), z(c_i))y'(e_i) \\ &+ a_z(x(c_i), y(c_i), z(c_i))z'(f_i)) \cdot (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$



Kada  $n \rightarrow \infty$  te  $d(P_{i-1}, P_i) \rightarrow 0$ , tada ovaj izraz prelazi u određeni integral odgovarajuće funkcije po varijabli  $t$ . Kako se točke  $P_{i-1}$  i  $P_i$  približavaju, tako i točke  $t_{i-1}$  i  $t_i$  postaju sve bliže, pa izraz  $t_i - t_{i-1}$  prelazi u  $dt$ , suma prelazi u integral i vrijedi:

$$\int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} d\vec{s} = \int_a^b (a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt,$$

a često se zapisuje u sljedećem obliku:

$$\int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} d\vec{s} = \int_{\hat{\Gamma}} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Svojstva krivuljnog integrala druge vrste:

a) linearnost: za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  i funkcije  $\vec{a}, \vec{b}$  na krivulji  $\hat{\Gamma}$  vrijedi

$$\int_{\hat{\Gamma}} (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) d\vec{s} = \alpha \int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} d\vec{s} + \beta \int_{\hat{\Gamma}} \vec{b} d\vec{s}$$

b) integriranje po dijelovima krivulje: ako je  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_2$ , onda je

$$\int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} d\vec{s} = \int_{\hat{\Gamma}_1} \vec{a} d\vec{s} + \int_{\hat{\Gamma}_2} \vec{a} d\vec{s}$$

c) ovisi o orijentaciji krivulje integracije:

$$\int_{-\hat{\Gamma}} \vec{a} d\vec{s} = - \int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} d\vec{s}$$

**Primjer 4.2** Izračunajmo integral

$$\int_{\hat{\Gamma}} [(xy + y^2 - xyz)dx + (x^2 - xy)dy]$$

od  $A = (-1, 1, 0)$  do  $B = (2, 4, 0)$ , pri čemu je  $\hat{\Gamma}$  luk parabole  $y = x^2, z = 0$ .

Rješenje:

Parametarska jednadžba luka  $\hat{\Gamma}$  je dana s

$$x = \alpha(t) = t, y = \beta(t) = t^2, z = \gamma(t) = 0, \quad t \in [-1, 2].$$

Uvrštavanjem u podintegralnu funkciju dobivamo

$$\begin{aligned} xy + y^2 - xyz &= t \cdot t^2 + (t^2)^2 - t \cdot t^2 \cdot 0 = t^3 + t^4, \\ x^2 + xy &= t^2 - t^3, \\ dx = dt, dy &= 2t dt, dz = 0. \end{aligned}$$

Zatim računamo početni integral

$$\int_{-1}^2 [(t^3 + t^4) + (t^2 - t^3) \cdot 2t] dt = \frac{93}{20}.$$

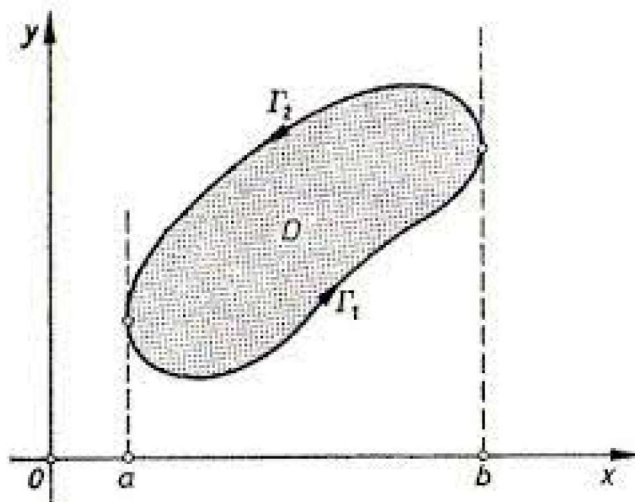
Krivuljni integral druge vrste po konturi  $\hat{\Gamma}$  se može pretvoriti u dvostruki integral po području koje je omeđeno tom konturom. O tome nam govori idući teorem.

**Teorem 4.3** (Greenov teorem) (vidi [3]). Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren skup koji sadrži pozitivno orijentiranu konturu  $\hat{\Gamma} = \partial D$  zajedno s njenim unutrašnjim područjem  $D$ . Tada za proizvoljne  $M, N \in C^1(\Omega)$  vrijedi

$$\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} M dx + N dy$$

*Dokaz:* (vidi [3]). Dokaz teorema provodimo za poseban slučaj.

- 1) Neka su  $M$  i  $N$  neprekidne funkcije s neprekidnim prvim derivacijama definirane na otvorenom skupu  $\Omega$  koje sadrži skup  $D$ . Područje  $D$  je zatvoreno i ograničeno područje koje ispunjava uvjet da svaka horizontalna linija paralelna s  $y$  osi i svaka vertikalna linija paralelna s  $x$  osi sijeku rub područja  $D$ , što je označeno kao  $\hat{\Gamma} = \partial D$ , u najviše dvije točke.



Slika 4: Područje  $D$  - apscise  $a$  i  $b$

Područje  $D$  se nalazi unutar pruge između paralelnih linija koje prolaze točkama  $a$  i  $b$  na  $y$ -osi, kao što je prikazano na Slici 4. Neka su funkcije  $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  po dijelovima klase  $C^1$  na intervalu  $[a, b]$  za koje vrijedi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x) \leq y \leq f_2(x); x \in [a, b]\}.$$

Neka je s  $\Gamma_1$  označen graf funkcije  $f_1$ , a s  $\Gamma_2$  graf funkcije  $f_2$ . Tada je  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Krivulju  $\Gamma_1$  ćemo orijentirati od točke  $(a, f_1(a))$  do točke  $(b, f_1(b))$  i označiti ju s  $\hat{\Gamma}_1$ . Slično, krivulju  $\Gamma_2$  ćemo orijentirati od točke  $(b, f_2(b))$  do točke  $(a, f_2(a))$  i označiti ju s  $\hat{\Gamma}_2$ .

Prema pretpostavci da je  $M$  funkcija klase  $C^1$  na otvorenom skupu  $\Omega$  koji uključuje skup  $D$ , možemo zaključiti da je funkcija  $\Phi = \frac{\partial M}{\partial y}$  neprekidna na skupu  $\Omega$ , pa vrijedi

$$\iint_D \Phi dx dy = \int_a^b \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \Phi(x, y) dy \right) dx. \quad (9)$$

Primjenom Newton-Leibnizove formule imamo sljedeće:

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)),$$

zatim (9) postaje

$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y} dx dy = \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx = \int_a^b M(x, f_2(x)) dx + \int_b^a M(x, f_1(x)) dx.$$

Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \int_a^b M(x, f_2(x)) dx &= \int_{-\hat{\Gamma}_2} M(x, y) dx + 0 \cdot dy = - \int_{\Gamma_2} M(x, y) dx; \\ \int_b^a M(x, f_1(x)) dx &= \int_{-\hat{\Gamma}_1} M(x, y) dx + 0 \cdot dy = - \int_{\Gamma_1} M(x, y) dx. \end{aligned}$$

Prema tome je

$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y} dx dy = - \int_{\hat{\Gamma}_1} M(x, y) dx - \int_{\hat{\Gamma}_2} M(x, y) dx = - \int_{\partial D} M(x, y) dx.$$

2) Dokaz da za funkciju  $N(x, y)$  vrijedi

$$\iint_D \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} N(x, y) dy$$

provodi se analogno kao prethodni dokaz izraza za funkciju  $M(x, y)$ . Stoga, zbrajanjem ta dva izraza dobiva se Greenova formula.

□

**Primjer 4.4** *Izračunajmo integral*

$$\int_{\hat{\Gamma}} (x + y) dx + (y - x) dy,$$

pri čemu je  $\hat{\Gamma}$  kružnica  $x^2 + y^2 = 1$  pozitivne orijentacije.

Rješenje:

Vidimo da je  $M = x + y$ ,  $N = y - x$  i vrijedi

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -1 - 1 = -2.$$

Prelaskom na polarne koordinate dobivamo

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Primjenimo Greenov teorem pa imamo

$$\int_{\hat{\Gamma}} M dx + N dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2) dr d\varphi = -2 \int_0^{2\pi} (r|_0^1) d\varphi = -2 \int_0^{2\pi} d\varphi = -2 (\varphi|_0^{2\pi}) d\varphi = -4\pi.$$

## 4.2 Potencijalna (konzervativna) polja

Krivuljni integral druge vrste potencijalnog polja ima svojstvo da integral ne ovisi o putu integracije, što iskazujemo u teoremu u nastavku, a najprije definiramo potencijalno polje.

**Definicija 4.5** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  otvoren i  $\vec{F} \in C(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Za vektorsko polje  $\vec{F}$  kažemo da je **potencijalno (konzervativno)** ako postoji skalarno polje  $\Phi \in C^1(\Omega)$  takvo da je

$$(\forall P \in \Omega) \quad \vec{F}(P) = -\text{grad}\Phi(P). \quad (10)$$

Tada se  $\Phi$  naziva **potencijal** polja  $\vec{F}$ .

**Teorem 4.6** Neka je  $\vec{F} \in C(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  otvoren. Krivuljni integral druge vrste polja  $\vec{F}$  ne ovisi o putu integracije ako i samo ako je polje  $\vec{F}$  potencijalno polje.

*Dokaz:* može se vidjeti u [3].  $\square$

## 4.3 Uporaba krivuljnih integrala druge vrste

U daljnjem tekstu navodimo nekoliko primjera korištenja krivuljnog integrala druge vrste.

**Primjer 4.7** Odredimo rad sile koji je potreban da se jedinična masa pomakne po spojnici (tj. dijelu pravca) od točke  $A = (a, b, c)$  do točke  $B = (2a, 2b, 2c)$  usmjerenu prema ishodištu ako je njezin iznos u točki spojnice obrnuto proporcionalan udaljenosti točke od ravnine  $XOY$ .

*Rješenje:*

Rad sile  $\vec{F}$  po krivulji  $\hat{\Gamma}$  računa se po formuli:

$$W = \int_{\hat{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Jednadžba spojnice je

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c},$$

odnosno

$$x = at + a, \quad y = bt + b, \quad z = ct + c, \quad t \in [0, 1].$$

Radi se o sili

$$\vec{F} = k \cdot \frac{1}{z} \cdot r_0 = \frac{k(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Zatim računamo rad sile

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= k \int_{\overline{AB}} \frac{x dx + y dy + z dz}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = k \int_0^1 \frac{[(at+a)a + (bt+b)b + (ct+c)c]}{(ct+c)\sqrt{(at+a)^2 + (bt+b)^2 + (ct+c)^2}} dt \\ &= \frac{k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{c} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{c} \ln 2. \end{aligned}$$

**Primjer 4.8** Odredimo površinu područja unutar kružnice  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Rješenje:

Površina područja  $D$  unutar zatvorene krivulje  $\hat{\Gamma}$  računa se po formuli:

$$P(D) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Gamma}} x dy - y dx,$$

što slijedi iz Greenove formule.

Parametrizacija ove kružnice je dana s

$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

pa je

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos t, & y(t) &= R \sin t \\ dx &= -R \sin t dt, & dy &= R \cos t dt \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u formulu za površinu područja  $D$  unutar kružnice dobivamo

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R \cos t \cdot R \cos t + R \sin t \cdot R \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 dt = R^2 \pi. \end{aligned}$$

Krivuljni integrali druge vrste koriste se u fizici, elektrotehnici i mnogim drugim područjima.

## Literatura

- [1] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2017.
- [2] P. Javor, Matematička analiza 2, Element, Zagreb, 2002
- [3] S. Kurepa, Matematička analiza 3, Funkcije više varijabli, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- [4] J. Stewart, Calculus: Early Transcendentals, Thomson Learning, 2008.