

# Stabilizacija ruke humanoidnog robota

---

**Plačko, Leon**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:425249>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-02**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika i računarstvo

Leon Plačko

# Stabilizacija ruke humanoidnog robota

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika i računarstvo

Leon Plačko

# Stabilizacija ruke humanoidnog robota

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Zoran Tomljanović

Osijek, 2023.

**Sažetak:** U ovom ćemo radu stabilizirati model ruke humanoidnog robota. Definirat ćemo LTI sustav i opisati njegove karakteristike, stabilnost i stabilizabilnost, te pojasniti kako ih provjeriti za zadani LTI sustav. Zatim ćemo objasniti kako se stabilizira LTI sustav te ćemo onda definirati tri metode za stabilizaciju (direktna metoda, Ackermanova formula i Ljapunovljev test), te ih testirati primjerima. Opisat ćemo humanoidnog robota NAO, pojasniti kako funkcionira i koja su njegova obilježja. Nakon toga ćemo definirati model ruke humanoidnog robota NAO u obliku LTI sustava te provjeriti stabilnost i stabilizabilnost. U konačnici ćemo iskoristiti sve navedene metode za stabilizaciju LTI sustava da stabiliziramo model ruke humanoidnog robota NAO.

**Ključne riječi:** LTI sustav, humanoidni robot, stabiliziranje, stabilnost, stabilizabilnost, model ruke

## Hand stabilization of humanoid robot

**Abstract:** In this paper, we will stabilize the hand model of the humanoid robot. We will define the LTI system and describe its stability and stabilizability characteristics and how they are checked for a given LTI system. Then we will explain how the LTI system is stabilized and then we will define three methods for stabilization (direct method, Ackerman's formula and Lyapunov's test) and test them on examples. We will describe the humanoid robot NAO, how it works and what its features are. After that, we will define the model of the arm of the humanoid robot NAO in the form of an LTI system and check the stability and stabilizability. Ultimately, we will use all the above methods to stabilize the LTI system to stabilize the NAO humanoid robot arm model.

**Keywords:** LTI system, humanoid robot, stabilization, stabilizability, stability, hand model

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Osnovni pojmovi</b>	<b>2</b>
2.1	LTI sustav . . . . .	2
2.2	Stabilnost . . . . .	4
2.3	Stabilizabilnost i state feedback . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Metode stabilizacije</b>	<b>10</b>
3.1	Direktna metoda . . . . .	10
3.2	Ackermanova formula . . . . .	12
3.3	Ljapunovljev test i jednadžba . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Stabiliziranje ruke NAO robota</b>	<b>19</b>
4.1	NAO humanoidni robot . . . . .	19
4.2	Model ruke NAO robota . . . . .	20
4.3	Stabilnost i stabilizabilnost . . . . .	22
4.4	Stabiliziranje modela . . . . .	26
	<b>Literatura</b>	<b>33</b>

# 1 Uvod

Današnji se svijet sastoji od puno kompleksnih sustava. Sustavi se svakodnevno nadograđuju. Skoro svaki sustav, iz područja kemije i fizike pa do naprednih razvijenih tehnologija, vuče korijene iz matematike. Pomoću matematike moguće je prikazati jednostavne aritmetičke operacije, s kojima su napravljeni najmanji čipovi za računala, kao i složene jednadžbe i strukture koje opisuju neku fizikalnu pojavu. U knjizi [1] mogu se pronaći primjeri poput RLC strujnog kruga iz područja elektrotehnike, opružni sustav masa iz područja fizike, pa čak i sustav kretanja satelita u orbiti.

Svrha je ovoga rada načiniti prikaz nekog općenitog sustava iz područja tehnologije i znanosti u obliku matematičkih jednadžbi. Sustavi u stvarnosti nisu linearni, stoga je proces prevođenja nekog općenitog sustava u matematičku notaciju vrlo složen. Sustav se nakon prevođenja treba linearizirati da bi se došlo do završnog sustava o kojem govori ovaj tekst - LTI sustava. Naglasak rada je upravo na tom sustavu.

Glavna karakteristika, o kojoj se govori u radu, jest stabilnost i stabiliziranje sustava ako je on nestabilan. Kada se dobije adekvatan LTI sustav, koji opisuje ponašanje sustava u smislu ulaz-izlaz, definirat će se što znači stabilnost za LTI sustav, kako se provjerava, te kako se stabilizira ako je stabilizabilan.

Sustav koji će se promatrati i analizirati jest robotski sustav, točnije sustav pokreta ruke robota. Stabilnost bi u ovom sustavu predstavljala utjecaj položaja ruke na ravnotežu robota. Provjerit će se stabilnost i stabilizabilnost odgovarajućeg LTI sustava koji opisuje ponašanje ruke specifičnog robotskog sustava NAO. Ako on bude nestabilan i stabilizabilan, stabilizirat će ga se primjerenim metodama.

## 2 Osnovni pojmovi

### 2.1 LTI sustav

Kontinuirani state space linearni sustav definiran je dvjema jednadžbama:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (1a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (1b)$$

$$x : [0 \rightarrow \infty) \rightarrow R^n, \quad u : [0 \rightarrow \infty) \rightarrow R^k, \quad y : [0 \rightarrow \infty) \rightarrow R^m.$$

Funkcija  $u$  predstavlja ulaz, funkcija  $x$  stanje, a funkcija  $y$  izlaz. Jednadžba (1a) zove se jednadžba stanja, a (1b) jednadžba izlaza. Sustav preko ovih jednadžbi prikazuje odnos između ulaza i izlaza pomoću navedenih funkcija i četiriju matrica  $A, B, C$  i  $D$  s vremenskom varijablom  $t$  koja počinje od 0.

Sudeći po vrijednostima matrica, koje su ovisne o vremenu, razlikujemo dvije vrste linearnih kontinuiranih sustava: "linear time invariant" (LTI) i "linear time variant" (LTV). Ako su matrice  $A, B, C$  i  $D$  konstantne za  $\forall t \geq 0$ , taj sustav zovemo LTI, inače LTV.

Konstantnim matricama LTI sustav s jednadžbama definiran je kao:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (2)$$

gdje su matrice  $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times k}, C \in R^{m \times n}$  i  $D \in R^{m \times k}$ .

U ovom sustavu o vremenu ovise ulaz, stanje i izlaz. Opće funkcioniranje sustava možemo prikazati ovako: za neki ulaz  $u$  pohranit će se cjelokupno stanje sustava u  $x$ , dok će se pomoću druge jednadžbe uzeti dijelovi stanja s potencionalnim zbrajanjem od ulaza kao izlaz  $y$ . U većini slučajeva matrica  $D$  je nul-matrica, stoga se funkcija matrice  $C$  može smatrati kao filtriranje ili odabir informacija od stanja kao krajnji izlaz. Nadalje, u radu će se promatrati LTI sustav.

Istaknit ćemo 3 osnovna svojstva kontinuiranih linearnih sustava:

**Definicija** (Kauzalnost). Sustav (1) je kauzalan ako za bilo koja 2 ulaza  $u_1$  i  $u_2$  koja zadovoljavaju da  $u_1(t) = u_2(t), \forall t : 0 \leq t < T$  vrijedi da ako  $u_1 \rightsquigarrow y_1$  tada postoji izlaz  $y_2$  t.d.  $u_2 \rightsquigarrow y_2, y_1(t) = y_2(t), \forall t : 0 \leq t \leq T$ .

**Definicija** (Vremenska invarijantnost). Sustav (1) je vremenski invariantan ako za bilo koja 2 ulaza  $u_1$  i  $u_2$  koja zadovoljavaju da  $u_1(t) = u_2(t + T), \forall t : t \geq 0, T > 0$  vrijedi da ako  $u_1 \rightsquigarrow y_1$  tada postoji izlaz  $y_2$  t.d.  $y_2 \rightsquigarrow y_2, y_1(t) = y_2(t + T), \forall t : t \geq 0, T > 0$ .

**Definicija** (Linearnost). Sustav (1) je linearan ako za bilo koja 2 ulaza  $u_1$  i  $u_2$  i  $\alpha, \beta \in R$  vrijedi da  $u_1 \rightsquigarrow y_1, u_2 \rightsquigarrow y_2 \Rightarrow \alpha u_1 + \beta u_2 \rightsquigarrow \alpha y_1 + \beta y_2$ .

Kao što samo ime kaže, svaki "linear time invariant" sustav posjeduje svojstva vremenske invarijantnosti i linearnosti. Ova se svojstva, kao i da je neki LTI sustav kauzalan, mogu dokazati pomoću funkcije prijelaza koji je jedan od načina prikaza rada sustava preko ulaznog matričnog signala. Više o tome može se pronaći u radu [2].

Primjećujemo da, kako je izlaz  $y(t)$  zadan pomoću druge jednadžbe, prva jednadžba je obična diferencijalna jednadžba preko  $x'(t)$ . Prema tome, LTI sustav ima svoje rješenje koje će se prikazati u obliku teorema.

**Teorem 2.1** (Rješenje LTI sustava). *Rješenje LTI sustava (2) je dano s*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau, \\ y(t) &= Ce^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \end{aligned} \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Dokaz teorema se može naći u [2].

Rješenje LTI sustava je dano u nekom početnom vremenu  $t_0$  i stanju u tom vremenu, u većini situacija će biti da je  $t_0 = 0$ . Ovo će se rješenje koristiti pri tumačenju karakteristike stabilnosti sustava u kojem je ključan dio eksponencijalna matrična funkcija  $e^{tA}$ .

Za potrebu budućeg teorema definirat će se jedna ekvivalencija između dva različita LTI sustava.

**Definicija** (Algebarska ekvivalencija). Za 2 različita LTI sustava

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), & \bar{x}'(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & \bar{y}(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t), \end{aligned}$$

kažemo da su algebarski ekvivalentna ako postoji nesingularna matrica  $T$  t.d.

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D.$$



## 2.2 Stabilnost

Jedna od glavnih karakteristika LTI i LTV sustava je stabilnost. Tvrditi da je neki sustav danas stabilan znači da nema rizika od nepoželjnih događanja: raspada cijelog sustava ili preneglog mijenjanja vrijednosti. Potrebno je definirati što znači stabilnost za LTI i LTV sustave, te kako se oni provjeravaju.

Slijedi definicija stabilnosti koju nazivamo još i Ljapunovljeva stabilnost. Ona je specificirana za LTV sustave ali ekvivalentno vrijedi i za LTI sustave.

**Definicija** (Ljapunovljeva stabilnost). Za sustav (1a) (1b) kažemo da je

1. Rubno stabilan (u smislu Ljapunova) ako za  $\forall t_0 \quad x(t_0) = x_0 \in R^n$  homogeni odgovor stanja  $x(t)$  je uniformno ograničen. Odnosno

$$\exists C \Rightarrow \|x(t)\| \leq C, \forall t \geq t_0 > 0.$$

2. Asimptotski stabilan (u smislu Ljapunova) ako dodatno za svaki početni uvjet  $x(t_0) = x_0 \in R^n$  imamo da  $x(t) \rightarrow 0$  za  $t \rightarrow \infty$ .
3. Eksponencijalno stabilan (u smislu Ljapunova) ako dodatno postoje konstante  $C, \lambda > 0$  t.d. za svaki početni uvjet  $x(t_0) = x_0 \in R^n$  imamo da

$$\|x(t)\| \leq C e^{\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\|.$$

4. Nestabilan ako sustav nije rubno stabilan.

Prema ovoj definiciji ključ stabilnosti leži u funkciji  $x(t)$ , odnosno stanje. Budući da je sustav izražen preko derivacije stanja, mora se pronaći rješenje sustava i dobiti/izračunati točno što je funkcija  $x(t)$ . Rješenje dano u (3) prikazuje ovisnost stanja o eksponencijalnim matricnim funkcijama  $e^{(t-t_0)A}$ . Ako uzmemo da je  $t_0 = 0$ , konvergencija stanja  $x(t)$ , odnosno njegov limes za  $t \rightarrow \infty$  u ovoj jednadžbi ovisi isključivo o  $e^{tA}$ .

Prema Taylorovom redu  $e^t$  možemo zapisati na sljedeći način:

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Slično možemo zapisati i  $e^{tA}$  na sljedeći način:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Ovo je, dakle, formula za eksponencijalnu matricnu funkciju. Budući da je gornji indeks sumacije beskonačan, vrijednost ove funkcije se teško računa. Postoje razne metode za rješavanje matricne eksponencijalne funkcije kojima bi se dobilo točno rješenje, ali većina njih su numerički nestabilne. Jedna od tih metoda podrazumijeva Jordanovu formu matrice.

Prvo je potrebno definirati Jordanovu formu matrice.

**Teorem 2.2** (Jordanova normalna forma). Za  $\forall A \in C^{n \times n}$  postoji nesingularna matrica promjene baze  $P \in C^{n \times n}$  t.d.

$$J = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_n \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i},$$

gdje su  $J_i$  Jordanovi blokovi koji sadrže  $i$ -tu svojstvenu vrijednost ( $\lambda_i$ ) matrice  $A$  sa kratnosti  $n_i$ .

Više o samom obilježju, kao i dokazu postojanja Jordanove normalne forme, se može naći u [4].

Kada se Jordanova forma ubaci u eskponencijalnu matričnu funkciju, nakraju se dobije:

$$e^{tA} = P^{-1}e^{tJ}P.$$

Više detalja o svojstvu kako se došlo do krajnjeg rezultata se može naći u [5].

Problem eksponencijalne matrične funkcije sada je svedena na  $e^{tJ}$  jer matrice  $P$  i  $P^{-1}$  ne utječu na konvergenciju. Jedan od teorijskih razloga zašto se koristi Jordanova forma je jednostavnost računanja pomoću njegovih blokova. Naime, jedno od svojstava Jordanovih blokova jest kako funkcija  $f : R^{n_i \times n_i} \rightarrow R^{n_i \times n_i}$  djeluje na njih:

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \cdots & \frac{f^{n_i-1}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix}.$$

S tim nastaje sljedeći raspis eksponencijalne matrične funkcije s Jordanovom formom:

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{tJ_n} \end{bmatrix},$$

$$f(J_i) = e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za svojstvenu vrijednost  $\lambda_j = a_j + ib_j$  i  $e^{\lambda_j t} = e^{a_j t}(\cos(b_j t) + i \sin(b_j t))$  vidi se da je imaginarni dio već omeđen zbog sinusa i kosinusa. Sada se konvergencija svodi na realni dio svojstvene vrijednosti i razlikuju se 3 slučaja:

1. Ako je  $a_j > 0$  ili  $a_j = 0, n_i \neq 1$ , onda će  $e^{tJ_j}$  divergirati za  $t \rightarrow \infty$ .
2. Ako je  $a_j = 0, n_i = 1$ , onda će  $e^{tJ_j}$  ostati ograničen za  $t \rightarrow \infty$ .
3. Ako je  $a_j < 0$ , onda će  $e^{tJ_j} \rightarrow 0$  za  $t \rightarrow \infty$ .

Što znači da ako jedan blok sadrži svojstvenu vrijednost, koja ima pozitivan realan dio ili je jednak 0 veće kratnosti, cijela matična eksponencijalna funkcija će divergirati, a ako svi blokovi sadrže svojstvene vrijednosti s negativnim realnim dijelom ili 0 s kratnosti 1, onda će konvergirati.

Ako se ponovno promotri početni LTI sustav, može se ustanoviti da stabilnost LTI sustava ovisi isključivo o matrici  $A$  i njezinim svojstvenim vrijednostima. Prema tome, sada nastaje ažurirana verzija Ljapunovljeve stabilnosti koja se iskazuje u obliku teorema.

**Teorem 2.3** (Ljapunovljeva stabilnost). *Kažemo da sustav (2) je*

1. Rubno stabilan  $\Leftrightarrow$  sve svojstvene vrijednosti  $\lambda$  matrice  $A$  nemaju pozitivan realan dio  $Re(\lambda) \leq 0$ , a ukoliko je realan dio jednak 0 onda je kratnosti 1.
2. Asimptotski stabilan  $\Leftrightarrow$  sve svojstvene vrijednosti  $\lambda$  matrice  $A$  imaju negativan realan dio  $Re(\lambda) < 0$ .
3. Eksponencijalno stabilan  $\Leftrightarrow$  sve svojstvene vrijednosti  $\lambda$  matrice  $A$  imaju negativan realan dio  $Re(\lambda) < 0$  (isto kao i asimptotska).
4. Nestabilan  $\Leftrightarrow$  postoji svojstvena vrijednost  $\lambda$  matrice  $A$  koja ima pozitivan realan dio  $Re(\lambda) > 0$  ili postoje više od jedne svojstvene vrijednosti koja je jednaka 0.

Dokaz teorema je prikazan izvedbom rješenja LTI sustava sa Jordanovom normalnom formom.

Iz ovoga se može zaključiti da se postupak provjere stabilnosti nekog LTI sustava svodi na provjeru svojstvenih vrijednosti matrice  $A$ . Može se primijetiti da je stabilnost vrlo "osjetljiva" karakteristika u smislu da, ako samo jedna svojstvena vrijednost ima pozitivan realan dio, sustav je nestabilan bez obzira na svoju veličinu.

## 2.3 Stabilizabilnost i state feedback

Nestabilne je sustave moguće stabilizirati samo ako su oni stabilizabilni. Ako je sustav stabilizabilan, svojstvene vrijednosti možemo promijeniti.

Najprije se treba definirati što znači stabilizabilnost ako je sustav nestabilan.

**Definicija** (Stabilizabilnost). Kažemo da je LTI sustav (2) stabilizabilan ako za svaki početni uvjet  $x_0 \in R^n$  postoji upravljanje  $u$  t.d.  $x(t) \rightarrow 0$  za  $t \rightarrow \infty$ .

Za stabilizabilnost je sada potrebno jedno upravljanje  $u$  koje će zadovoljiti definiciju. Takvo upravljanje, kojim će u konačnici stabilizirati sustav, jest tzv. "State feedback".

$$u = -Kx, \quad K \in R^{k \times n}. \quad (4)$$

Budući da je za stabilnost važna matrica  $A$ , ovo će se upravljanje uvrstiti samo u prvu jednadžbu LTI sustava:

$$x'(t) = Ax(t) - BKx(t)$$

$$x'(t) = (A - BK)x(t)$$

Sada se stabilizabilnost može shvatiti kao mogućnost konstrukcije matrice  $K$  tako da se sustav može stabilizirati. Odnosno da je matrica  $A - BK$  stabilna matrica.

Obradit ćemo nekoliko metoda, koje govore kada je sustav stabilizabilan. Ove metode se temelje na još jednoj karakteristici LTI sustava - upravljivosti. U ovom se radu neće se opširnije objašnjavati pojam upravljivosti sustava, ali za potrebe stabilizabilnosti definirat će se osnovni pojmovi. Na početku će se definirati jedna od metoda provjere upravljivosti sustava.

**Definicija** (Upravljivost). LTI sustav (2) je upravljiv ako i samo ako je matrica

$$C_m = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

punog ranga ( $\text{rang}(C_m) = n$ ).

Ova se matrica još zove i matrica upravljivosti sustava. Koristit će se kasnije pri stabiliziranju sustava.

Zatim je potrebno definirati dekompoziciju LTI sustava koja će se koristiti služenju jednom od metoda provjere stabilizabilnosti, a veže se uz upravljivost.

**Definicija** (Dekompozicija neupravljivog sustava). Ako je matrica upravljivosti  $C_m$  LTI sustava (2) ranga  $k < n$  onda postoji regularna matrica  $T$  t.d.

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_u \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CT^{-1} = [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2], \quad \bar{D} = D.$$

Navest ćemo i objasniti četiri metode za stabilizabilnost preko teorema.

**Teorem 2.4** (Stabilizabilnost i neupravljiva dekompozicija). *LTI sustav (2) je stabilizabilan  $\Leftrightarrow$  sustav je algebarski ekvivalentan sa neupravljivom dekompozicijom gdje je matrica  $A_u$  stabilna matrica ili  $k = n$  (sustav je upravljiv).*

Dokaz teorema se može pronaći u [2].

Jedno od svojstava algebarske ekvivalencije, koje nije spomenuto, jest da dva sustava, koja su međusobno algebarski ekvivalentna, imaju istu odluku što se tiče upravljivosti i stabilnosti. Za upravljivost se može izlučiti matrica  $T$  slijeva od upravljive matrice  $C_m$  koja neće promijeniti rang matrice  $C_m$  jer je nesingularna. Kod stabilnosti se može primijetiti da su matrice  $A$  i  $\bar{A}$  slične matrice, te po jednom svojstvu sličnih matrica imaju iste svojstvene vrijednosti.

Za provjeru stabilizabilnosti preko neupravljive dekompozicije potrebna je matrica  $T$  koja pretvara neupravljiv LTI sustav u neupravljivu dekompoziciju. Ako je sustav upravljiv, onda je dekompozicija gotovo ista kao i početna, a  $A_u$  matrica tada ne postoji. Za pretvorbu u neupravljivu dekompoziciju koristi se matrica sljedećeg oblika:

$$T^{-1} = [q_1, q_2, \dots, q_k, e_1, e_2, \dots, e_{n-k}]$$

Gdje su  $q_i$  linearno nezavisni stupci matrice  $C_m$  a stupci  $e_i$  nadopuna do baze (linearno nezavisni stupci iz kanonske baze). Korištenjem ove matrice dolazi se do zadane dekompozicije s kojom se provjerava stabilizabilnost. Više detalja može se pronaći u [2].

Ovaj teorem više služi za garanciju da ako je sustav upravljiv, onda je i stabilizabilan, tako da se, uz prijašnje navedenu metodu za provjeru upravljivosti, može zaključiti stabilizabilnost sustava.

Sljedeća metoda je pomoću svojstvenih vektora.

**Teorem 2.5** (Stabilizabilnost i svojstveni vektori). *LTI sustav (2) je stabilizabilan  $\Leftrightarrow$  svaki svojstveni vektor matrice  $A^T$  koji odgovara svojstvenoj vrijednosti sa nenegativnim realnim dijelom nije u jezgri od  $B^T$ , odnosno  $B^T x \neq 0$ .*

Dokaz teorema se može pronaći u [2].

Kada se izračunaju svojstvene vrijednosti matrice  $A^T$ , treba izračunati i svojstvene vektore; uzeti one vektore koji su u paru sa svojstvenom vrijednošću koja ima pozitivan realni dio, zatim provjeriti  $B^T v \neq 0$  za svaki takav svojstveni vektor.

Sljedeća metoda jest Popov-Belevitch-Hautus test za stabilizabilnost.

**Teorem 2.6** (Stabilizabilnost i PBH test). *LTI sustav (2) je stabilizabilan  $\Leftrightarrow \text{rang}([A - \lambda I, B]) = n$  za  $\forall \lambda$  svojstvena vrijednost matrice  $A$  gdje  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ .*

Dokaz teorema se može pronaći u [2].

Ovdje se uzimaju samo "nestabilne" svojstvene vrijednosti i provjerava rang za zadanu matricu testa. Ako je rang pun za svaki, onda je stabilizabilan.

Zadnja metoda više predstavlja teorijski značaj stabilizabilnog sustava. Za samu se provjeru stabilizabilnosti rijetko koristi.

**Teorem 2.7** (Ljapunovljev test). *LTI sustav (2) je stabilizabilan  $\Leftrightarrow$  postoji pozitivno definitna i simetrična matrica  $P$  koja je rješenje matrične nejednakosti*

$$AP + PA^T - BB^T < 0.$$

Dokaz teorema se može pronaći u [2].

Pozitivno definitna matrica je matrica koja ima karakteristiku da sve svojstvene vrijednosti imaju pozitivan realni dio.

Do sada se prikazalo kako provjeriti stabilnost i stabilizabilnost. Ako se ustanovi da je sustav nestabilan i stabilizabilan, sljedeći proces je stabiliziranje samog sustava. Ove metode jamče mogućnost konstrukcije matrice  $K$  od "state feedbacka" (4) koja će stabilizirati LTI sustav.

### 3 Metode stabilizacije

Za stabiliziranje se koristi "state feedback"  $u = -Kx$ . To znači da trebamo konstruirati matricu  $K$  koja će stabilizirati matricu  $A - BK$ .

Prve dvije metode će se bazirati na preddefiniranim svojstvenim vrijednostima. Poznato još kao problem dodjeljivanja svojstvenih vrijednosti, ove metode će dati potrebnu matricu  $K$  koja će omogućiti da matrica  $A - BK$  ima te svojstvene vrijednosti s kojima će se riješiti problem.

Zadnja metoda će se bazirati na pomaku svojstvenih vrijednosti s pozitivnog realnog dijela u negativni.

#### 3.1 Direktna metoda

Označimo matricu  $K = [k_{ij}]$ ,  $i = 1 \dots k$ ,  $j = 1 \dots n$ . Promatranjem sustava

$$x'(t) = (A - BK)x(t)$$

želi se doći do toga da matrica  $A - BK$  ima iste postavljene svojstvene vrijednosti, odnosno:

$$\Delta_{A-BK}(s) = \det(sI - A + BK) = s^n + g_1(k_{ij})s^{n-1} + \dots + g_{n-1}(k_{ij}) + g_n(k_{ij}).$$

Svojstveni polinom označen preddefiniranim svojstvenim vrijednostima  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  izgleda ovako:

$$d(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + d_1s^{n-1} + \dots + d_{n-1}s + d_n.$$

Kada se ove jednačbe izjednačimo, dobija se sustav od  $n$  jednačbi sa  $k * n$  nepoznanica.

$$\begin{aligned} g_1(k_{ij}) &= d_1 \\ g_2(k_{ij}) &= d_2 \\ &\vdots \\ g_n(k_{ij}) &= d_n \end{aligned}$$

Kada riješimo ovaj sustav, dobiti ćemo vrijednosti  $k_{ij}$  koje predstavljaju matricu  $K$ .

Upotreba metode prikazana je na sljedećem primjeru:

**Primjer 1.**

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} u.$$

*Svojstvene vrijednosti matrice A su:*  $\lambda_1 = 3.811$ ,  $\lambda_2 = -4.905 + 2.308i$ ,  $\lambda_3 = -4.905 - 2.308i$ .

Sustav je nestabilan zbog pozitivne realne vrijednosti prve svojstvene vrijednosti. Provjerimo stabilizabilnost pomoću upravljivosti:

$$C_m = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 3 & 14 & -100 \\ 2 & 5 & 130 \\ -3 & 23 & -82 \end{bmatrix}.$$

Rang matrice upravljivosti sustava jest  $\text{rang}(C_m) = 3$  što znači da je matrica punog ranga i stime zaključujemo da je LTI sustav upravljiv i stabilizabilan.

Sljedeće ćemo izračunati svojstveni polinom  $\Delta_{A-BK}(s) = \det(sI - A + BK)$  gdje je  $K = [k_1, k_2, k_3]$ . Nakon sređivanja dobijemo sljedeće:

$$\Delta_{A-BK}(s) = s^3 + s^2(3k_1 + 2k_2 - 3k_3 + 6) + s(32k_1 + 17k_2 + 5k_3 - 8) - 40k_1 + 144k_2 + 80k_3 - 112.$$

Odabrali ćemo sljedeće 3 svojstvene vrijednosti  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$  te zapisati polinom gdje su te točke nultočke tog polinoma:

$$d(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6.$$

Sada za skup jednadžbi

$$\begin{aligned} 3k_1 + 2k_2 - 3k_3 + 6 &= 6 \\ 32k_1 + 17k_2 + 5k_3 - 8 &= 11 \\ -40k_1 + 144k_2 + 8k_3 - 112 &= 6 \end{aligned}$$

Tražimo rješenja  $k_1, k_2$  i  $k_3$ . Rješavanjem ovih jednadžbi dobivamo da su

$$k_1 = \frac{675}{3244}, k_2 = \frac{1803}{3244}, k_3 = \frac{1877}{3244}.$$

Prema ovim rezultatima, nova stabilizirana matrica  $(A - BK)$  sada izgleda:

$$\begin{bmatrix} -2.624229 & 2.332614 & -5.735819 \\ 3.583847 & -0.111590 & 1.842786 \\ 2.624229 & 2.667385 & -3.264180 \end{bmatrix}$$

Ako se provjere svojstvene vrijednosti novodobivene matrice, dobit će se one postavljene u zadatku ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ ). Sustav je uspješno stabiliziran korištenjem direktne metode.

Ova je metoda prikladnija za sustave manjih dimenzija pa se ne preporučava njezino korištenje za velike sustave.



### 3.2 Ackermanova formula

Označavanjem matrice  $A_{CL} = A - BK$  i ponovnim promatranjem njezinog svojstvenog polinoma, s tim da je zavisna varijabla upravo ta matrica, dobiva se:

$$\Delta_{A_{CL}}(A_{CL}) = (A_{CL})^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (A_{CL})^k,$$

$\alpha_k \in R$ .

Raspis umnožaka matrice  $A_{CL}$  izgleda:

$$\begin{aligned} A_{CL} &= A - BK \\ (A_{CL})^2 &= (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BKA + (BK)^2 \\ &= A^2 - ABK - BK(A - BK) = A^2 - ABK - BK A_{CL} \\ &\vdots \\ (A_{CL})^n &= A^n - A^{n-1}BK - A^{n-2}BK A_{CL} - \dots - ABK(A_{CL})^{n-2} - BK(A_{CL})^{n-1} \end{aligned}$$

Uvrsti li se ovaj rezultat u prijašnji svojstveni polinom i primijeni Hamilton-Cayley teorem koji kaže da je  $\Delta_A(A) = 0$  dobiva se:

$$\begin{aligned} 0 &= (A^n - A^{n-1}BK - \dots - BK(A_{CL})^{n-1}) + \dots + \alpha_1(A - BK) + \alpha_0 I \\ &= (A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_0 I) - (A^{n-1}BK + \dots + BK(A_{CL})^{n-1}) - \dots - \alpha_1(BK) \\ &= \Delta(A) - (A^{n-1}BK + \dots + BK(A_{CL})^{n-1}) - \dots - \alpha_1(BK). \end{aligned}$$

Zapisano u obliku matričnog množenja:

$$0 = \Delta(A) - [A \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ K \end{bmatrix},$$

gdje \* predstavlja ostale vrijednosti matrice koje nisu bitne za račun.

Kada se dođe do ovog koraka, može se analizirati nekoliko stvari. Svojtveni polinom  $\Delta(A)$  sadrži koeficijente koji su vezani za preddefinirane svojstvene vrijednosti, a kada se bolje promotri prva matrica, uočava se da je ona, zapravo, matrica upravljivosti sustava  $C_m$ . Sada je cilj izvući matricu  $K$  iz druge matrice i dobiti jedinstvenu formulu.

$$C_m \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = \Delta(A).$$

Ako pretpostavimo da je sustav upravljiv, matrica upravljivosti  $C_m$  od upravljivog sustava je punog ranga, a ako je matrica punog ranga, njezina determinanta nije jednaka nuli. Ako je matrica još i kvadratna (moguće samo uz "single input" ulaze), znači da postoji inverz te matrice  $C_m^{-1}$ . Množenjem inverza i matrice  $[0 \cdots 0 \ 1]$  s lijeve strane, izvući će se matrica  $K$ .

$$\begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = C_m^{-1} \Delta(A)$$

$$K = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] C_m^{-1} \Delta(A).$$

Na kraju se dolazi do Ackermanove formule za matricu  $K$  s preddefiniranim svojstvenim vrijednostima:

$$K = e_n^T C_m^{-1} \Delta(A).$$

Sada će se isti primjer, korišten za stabiliziranje pomoću direktne metode, stabilizirati pomoću Ackermanove formule.

## Primjer 2.

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} u.$$

*U primjeru 2. smo dobili matricu  $C_m$  tako da je sada potrebno izračunati njezin inverz.*

$$C_m^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{425}{2433} & \frac{48}{811} & \frac{-290}{2433} \\ \frac{113}{9732} & \frac{91}{3244} & \frac{295}{9732} \\ \frac{-61}{19464} & \frac{37}{6488} & \frac{13}{19464} \end{bmatrix}.$$

Sada je potrebno definirati  $\Delta(A)$ . uzeti ćemo ovaj put svojstvene vrijednosti  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -4$  pa imamo:

$$\Delta(A) = A^3 + 9A^2 + 26A + 24I.$$

Sada ćemo uvrstiti sve stavke u ackermanovu jednadžbu  $K = [0 \ 0 \ 1] C_m^{-1} \Delta(A)$  te ćemo dobiti da je

$$K = \begin{bmatrix} \frac{413}{811} & \frac{804}{811} & \frac{138}{811} \end{bmatrix}.$$

A nova stabilna matrica  $(A - BK)$  izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} -3.527743 & 1.025893 & -4.510480 \\ 2.981504 & -0.982737 & 2.659679 \\ 3.527743 & 3.974106 & -4.489519 \end{bmatrix}.$$

Opet se može pokazati da su svojstvene vrijednosti ove matrice upravo one koje smo definirali ( $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -4$ ) pa je prema tome sustav uspješno stabiliziran pomoću Ackermanove formule.

### 3.3 Ljapunovljev test i jednadžba

Prije nego što se definira metoda preko Ljapunovljeve jednadžbe, teorem Ljapunovljeve stabilnosti proširuju dodatne tvrdnje:

**Teorem 3.1** (Ljapunovljeva stabilnost). *Za LTI sustav sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *Sustav je asimptotski stabilan.*
2. *Sustav je eksponencijalno stabilan.*
3. *Sve svojstvene vrijednosti matrice  $A$  imaju negativan realan dio.*
4. *Za svaku simetričnu matricu  $Q > 0$  postoji jedinstveno rješenje  $P$  sljedeće jednadžbe:*

$$A^T P + P A = -Q.$$

5. *Postoji  $P > 0$  za koji vrijedi nejednakost:*

$$A^T P + P A < 0.$$

Dokaz ovog teorema se može naći u knjizi [2].

Kod provjere stabilizabilnosti iskazao se Ljapunovljev test koji je dao nejednakost koja vrijedi ako je sustav stabilizabilan. Jednadžba koja je dana s time ne može se upotrijebiti kao metoda za pronalazak matrice  $K$ , ali postoji sljedeći teorem Ljapunovljevog testa koji se veže za upravljivost.

**Teorem 3.2** (Ljapunovljev test za upravljivost). *Pretpostavimo da je  $A$  stabilna matrica u LTI sustavu, tada par  $(A, B)$  je upravljiv  $\Leftrightarrow$  postoji jedinstveno pozitivno definitno rješenje  $W$  koja zadovoljava Ljapunovljevu jednadžbu:*

$$A W + W A^T = -B B^T.$$

*Štoviše, jedinstveno rješenje jest  $W = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau} d\tau$ .*

Dokaz ovog teorema se može naći u knjizi [2].

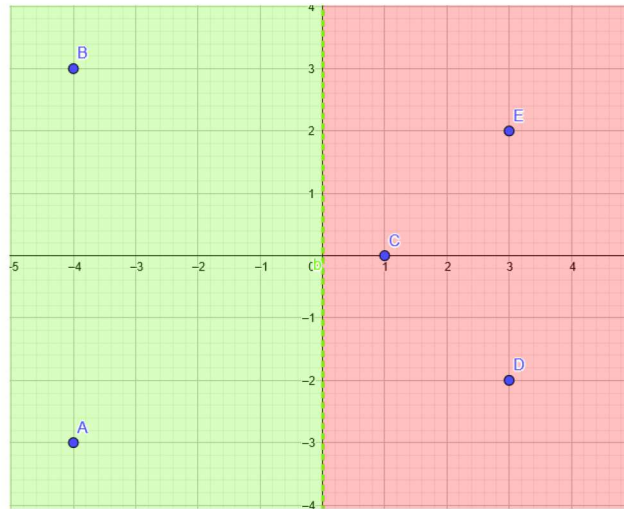
U teoremu je iskazana jedna nova vrsta jednadžbe preko matrica LTI sustava zvano Ljapunovljeva jednadžba. Njezin opći oblik bi izgledao ovako:

$$A P + P A^T = -Q.$$

Rješavanje ove jednadžbe jest traženje matrice  $P$  s preddefiniranim matricama  $A$  i  $Q$  koja zadovoljava tu jednadžbu.

Prema spomenutoj notaciji, matrica  $P = W$  i matrica  $Q = B B^T$ , matrica  $B B^T$  je simetrična, a matrica  $P$  po teoremu je pozitivno definitna.

Promotrimo primjer pet kompleksnih svojstvenih vrijednosti u kompleksnoj ravnini:



Slika 1: Prikaz 5 kompleksnih svojstvenih vrijednosti u kompleksnoj ravnini.

Prema ovoj slici, točke, odnosno svojstvene vrijednosti C, D i E su nestabilne dok su A i B stabilne sa negativnim realnim dijelom. Cilj ove metode bi bio pomaknuti sve nestabilne svojstvene vrijednosti, ili točke, na negativnu stranu realne osi (u ovom primjeru pomak bi bio veći od tri). Ako su svojstvene vrijednosti samo realni brojevi, onda se pomiču na negativnu stranu osi.

Ako se definira pomak  $\mu > 0$  onda treba odabrati dovoljno velik  $\mu$  da matrica  $-\mu I - A$  bude stabilna ovaj LTI sustav.

Može se pokazati da je par  $(-\mu I - A, B)$  upravljiv. Ako se pretpostavlja da je odabran dovoljno velik  $\mu$  takav da je matrica  $-\mu I - A$  stabilna, tada prema Ljapunovljevom testu  $\exists! W$  t.d.

$$(-\mu I - A)W + W(-\mu I - A)^T = -BB^T \quad (5)$$

$$AW + WA^T - BB^T = -2\mu W$$

Definirajmo matricu  $P = W^{-1}$  i pomnožimo jednadžbu zdesna i slijeva.

$$PA + A^T P - PBB^T P = -2\mu P$$

$$P(A - \frac{1}{2}BB^T P) + (A - \frac{1}{2}BB^T P)^T P = -2\mu P$$

Označimo matricu  $K = \frac{1}{2}B^T P$ :

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -2\mu P$$

Primjećuje se da je dobivena slična jednadžba kao kod proširenog teorema za Ljapunovljevu stabilnost pod tvrdnjama 4) i 5). Budući da je  $P > 0$  i  $\mu > 0$  to znači da je  $-2\mu P < 0$  i po tvrdnji 4) matrica  $(A - BK)$  je stabilna matrica za  $K = \frac{1}{2}B^T P$  a u LTI sustavu takva se matrica dobiva "state feedbackom"  $u = -Kx$ .

Dodatno se može zaključiti da se, zbog tvrdnje 4), može uzeti bilo koji  $\mu > 0$ , te će LTI sustav korištenjem "state feedbacka" biti stabiliziran. Na taj se način dobiva teorem koji se dokazuje prethodnom izvedbom:

**Teorem 3.3** (Stabiliziranje sa pomakom). *Neka je LTI sustav upravljiv, tada za svaki  $\mu > 0$  je moguće odrediti upravljanje  $u = -Kx$  koji smješta svojstvene vrijednosti sustava  $x' = (A - BK)x$  u kompleksni dio poluravnine t.d. je  $Re(\lambda) \leq -\mu, \forall \lambda$ .*

Proces stabilizacije sustava ovom metodom je sljedeći:

1. Odabрати  $\mu > 0$  tako da je  $-\mu I - A$  stabilna matrica.
2. Riješiti jednadžbu (5) i dobiti matricu  $W$ .
3. Izračunati  $P = W^{-1}$ .
4. Izračunati  $K = \frac{1}{2}B^T P$ .

### Primjer 3.

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} u.$$

Broj  $\mu$  se odabire tako da se uzme najmanja svojstvena vrijednost po realnom dijelu te se njezin realni dio zaokruži na manje te nakraju uzme apsolutna vrijednost. U ovom primjeru svojstvene vrijednosti  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  imaju najmanji realni dio  $-4.905$  pa ćemo definirati broj  $\mu = 5$ . Sada je sljedeća matrica:

$$-5I - A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

stabilna. Sada ćemo riješiti Ljapunovljevu jednadžbu  $AW + WA^T = -BB^T$ .

Rješenje jednadžbe jest

$$W = \begin{bmatrix} 119.031915 & -82.813829 & 5.335106 \\ -82.813829 & 58.627659 & -6.170212 \\ 5.335106 & -6.170213 & 38.893617 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo sada  $P = W^{-1}$ .

$$P = \begin{bmatrix} 0.569681 & 0.809997 & 0.050356 \\ 0.809997 & 1.16903368 & 0.074351 \\ 0.050356 & 0.074351 & 0.030599 \end{bmatrix}.$$

Nakraju matrica  $K$  sada izgleda:

$$K = \frac{1}{2}B^T P = [1.588985 \quad 2.272503 \quad 0.103987].$$

A konačan stabiliziran sustav  $(A - BK)$

$$\begin{bmatrix} -6.766954 & -2.817509 & -4.311961 \\ 0.822030 & -3.545006 & 2.792026 \\ 6.766954 & 7.817509 & -4.688039 \end{bmatrix}.$$

Koji ima nove stabilne svojstvene vrijednosti:

$$\lambda_1 = -5 + 2.64575131i, \quad \lambda_2 = -5 - 2.64575131i, \quad \lambda_3 = -5.$$

Na taj se način uspješno stabilizirao sustav. Može se pokazati da je  $\mu = 5$  najmanja vrijednost za koja je početna matrica  $-\mu - A$  stabilna te da se onda ovaj sustav može stabilizirati za  $\forall \mu, \mu \geq 5$ .

## 4 Stabiliziranje ruke NAO robota

### 4.1 NAO humanoidni robot

Robot koji se koristilo za stabiliziranje njegovog sustava pokreta ruke jest humanoidni robot NAO. Prvi NAO robot proizvela je tvrtka Aldebaran i u potpunosti je programibilan i humanoidan, što znači nalik čovjeku. Potpuna kontrola pokreta lijeve i desne ruke, lijeve i desne noge te glave, omogućava kretanje robota u tri dimenzije.



Slika 2: NAO humanoidni robot

Moguće je upravljati 25 spojnica ili zglobova, što podrazumijeva spojnice u obje noge, obje ruke i u glavi. Osim toga, u robot su ugrađena četiri direkcijska mikrofona sposobna za razumijevanje riječi, dva zvučnika osposobljena za govor, dvije kamere (kao oči), te sedam dodirnih senzora. Sve zajedno, sa softversko ugrađenim sigurnosnim sustavima za prevenciju pada i drugih štetnih nuspojava, ovaj je robot jedan ogroman programabilan sustav.

U ovom je radu naglasak na specifičnom podsustavu robota, a to je rad ruke. Moguće je konstruirati LTI sustav rada ruke, stoga će se, nakon konstrukcije, provjeriti stabilnost i stabilizabilnost. Na kraju će se stabilizirati cijeli sustav ako bude nestabilan i stabilizabilan.



## 4.2 Model ruke NAO robota

Prema radu [6] konstruiran je adekvatni LTI sustav koji opisuje ulazno-izlazni rad ruke humanoidnog robota NAO u horizontalnom i vertikalnom smjeru.

$$x' = \begin{bmatrix} -1.58 * 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.58 * 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.447 & 0.000918 & 0 & 1.07 & 0 & -8.44 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.000918 & 2.457 & 0 & -8.471 & 0 & -0.00316 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 729.927 & 0 \\ 0 & 729.927 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

Ovaj LTI sustav predstavlja cjelokupan model rada ruke robota. Sustav je, zapravo, spoj dvaju manjih sustava. Jedan predstavlja horizontalno, a drugi vertikalno kretanje. Dodatni detalji koji prikazuju kako se došlo do ovog sustava mogu se vidjeti u [6]

Na raspolaganju je LTI sustav koji prima ulaz  $u \in R^{2 \times 1}$  (dvostruki ulaz) i daje izlaz  $y \in R^{2 \times 1}$  (dvostruki izlaz) te drži šest stanja  $x \in R^{6 \times 1}$  sustava. U području linearnih sustava ovakav sustav se zove "multi input multi output" (MIMO) LTI sustav. Dimenzije matrica su  $A \in R^{6 \times 6}$ ,  $B \in R^{6 \times 2}$ ,  $C \in R^{2 \times 6}$ ,  $D \in R^{2 \times 2}$ . Budući da je matrica  $D$  nul-matrica, sustav radi na princip da se daje ulaz, izračuna stanje i uzima dijelove stanja kao izlaz.

U stvarnosti unosimo snage motora za vertikalno kretanje i motora za horizontalno kretanje kao ulaz, a na izlazu uzimamo 2 stanja koja predstavljaju kut, odnosno poziciju ruke (jedan kut za horizontalni smjer a drugi za vertikalni).

Podsustavi, vertikalno kretanje i horizontalno kretanje, imaju vrlo slične vrijednosti (razlika u jednoj vrijednosti) tako da ćemo promotriti još i podsustav vertikalnog kretanja.

$$x' = \begin{bmatrix} -15766.4 & -0.212 & 0 \\ 2.447 & 0 & 1.069 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 729.927 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \ 0 \ 1] x$$

Na raspolaganju je "single input single output" (SISO) LTI sustav s ulazom  $u \in R$ , stanjem  $x \in R^{3 \times 1}$  i izlazom  $y \in R$ . Dimenzija ovih matrica jest  $A \in R^{3 \times 3}$ ,  $B \in R^{3 \times 1}$ ,  $C \in R^{1 \times 3}$  dok je matrica  $D$  jednodimenzionalna i jednaka 0 (što se općenito ne piše u LTI zapisu sustava).

Kao ulaz unosimo snagu motora zaslužan za vertikalno kretanje ruke te kao izlaz uzimamo jedno stanje koji predstavlja kut, odnosno vertikalnu poziciju ruke.

Na ovakvim će se sustavima provesti testovi o stabilnosti i stabilizabilnosti, te na kraju stabilizirati sustave pomoću "state feedback" upravljanja i prikladnih metoda.

### 4.3 Stabilnost i stabilizabilnost

Najprije će se provjeriti stabilnost ovog sustava promatranjem svojstvenih vrijednosti matrice  $A$ . Budući da je matrica  $6 \times 6$ , očekuje se šest svojstvenih vrijednosti. Sva daljnja računanja bit će provedena u programskom jeziku Python. Neke će vrijednosti zbog preglednosti biti automatski zaokružene na četiri decimale.

```
sys = ct.ss(A, B, C, D)
sys
```

$$\left( \begin{array}{cccccc|cc} -1.58 & \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 730 & 0 \\ 0 & & -1.58 & \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 730 \\ 2.45 & & 0.000918 & 0 & 1.07 & 0 & -8.44 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.000918 & & 2.46 & 0 & -8.47 & 0 & -0.00316 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Na ovaj smo način učitali sustav. Program zaokružuje neke vrijednosti, ali rezultati provjera i testova u internom računanju ne razlikuju se znatno od stvarnih. Sada se izračunavaju svojstvene vrijednosti.

```
eig_val, eig_vec = la.eig(A)
print(eig_val)
```

$$\lambda_1 = -3.0006, \quad \lambda_2 = 1.6653 * 10^{-16} + 2.8174i, \quad \lambda_3 = 1.6653 * 10^{-16} - 2.8174i, \\ \lambda_4 = 3.0006, \quad \lambda_5 = -15766, \quad \lambda_6 = -15766.$$

Prema ovim rezultatima tri svojstvene vrijednosti imaju pozitivan realan dio. Po tome se zaključuje da je prikazan LTI sustav nestabilan. Slijedi provjera stabilizabilnosti. Izračunat će se kontrolna matrica i provjeriti njezin rang.

```
CM = ct.ctrb(A, B)
np.linalg.matrix_rank(CM)
```

2

Rang matrice upravljivosti nije pun (rang 6). Možemo zaključiti da sustav nije upravljiv pa nemožemo zaključiti stabilizabilnost sa ovom metodom, stoga je stabilizabilnost potrebno provjeriti preko metoda svojstvenih vektora i PBH testom.

```

for i in range(eig_val.shape[0]):
    pbh_matrix = np.hstack((A - eig_val[i]*np.eye(A.shape[0]), B))
    print(la.matrix_rank(pbh_matrix))

```

6, 6, 6, 6, 6, 6

```

eig_val_T, eig_vec_T = la.eig(A.T)
for i in range(eig_vec_T.shape[0]):
    if(eig_val_T[i].real > 0):
        print(eig_val_T[i])
        print(B.T*eig_vec_T[:,i])

```

Za jedinu svojstvenu vrijednost sa pozitivnim realnim diom  $\lambda = 3.000647$ , umnožak prikladnog svojstvenog vektora sa matricom  $B^T$  je:

$$\begin{bmatrix} 0.02612706 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02457237 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

što nije jednako nuli.

Ovi rezultati pokazuju da je sustav stabilizabilan. Dakle, ovaj sustav je uistinu stabilizabilan te se može odrediti matrica  $K$  za "state feedback" upravljanje.

Nakon ovoga sustava, prešlo se na LTI sustav koji predstavlja vertikalno kretanje ruke robota. Provedene su iste provjere stabilnosti i stabilizabilnosti kao i kod glavnog LTI sustava.

```

sys = ct.ss(A1, B1, C1, D1)
sys

```

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -15810^4 & -0.212 & 0 & 730 \\ 245 & 0 & 107 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Sustav je sad učitani. Provjerimo svojstvene vrijednosti matrice  $A$ . Pošto je matrica  $3 \times 3$  očekuju se 3 svojstvene vrijednosti.

```
eig_val, eig_vec = la.eig(A1)
print(eig_val)
```

$$\lambda_1 = -15766.4, \quad \lambda_2 = -1.03394101, \quad \lambda_3 = 1.03390811.$$

Može se primijetiti da je sustav nestabilan zato što zadnja svojstvena vrijednost ima pozitivan realni dio. Zato će se provjeriti upravljivost sustava preko kontrolne matrice radi provjere stabilizabilnosti sustava.

```
CM = ct.ctrb(A1, B1)
np.linalg.matrix_rank(CM)
```

3

Matrica je punog ranga, što znači da je sustav stabilizabilan. Stabilizabilnost će se provjeriti i ostalim metodama.

```
for i in range(eig_val.shape[0]):
    pbh_matrix = np.hstack((A1 - eig_val[i]*np.eye(A1.shape[0]), B1))
    print(la.matrix_rank(pbh_matrix))
```

3, 3, 3

PBH test metoda, također, garantira stabilizabilnost zbog punog ranga PBH matrice nad svakim svojstvenim vektorom matrice  $A$ .

```
eig_val_T, eig_vec_T = la.eig(A1.T)
for i in range(eig_vec_T.shape[0]):
    if(eig_val_T[i].real > 0):
        print(eig_val_T[i])
        print(B1.T*eig_vec_T[:,i])
```

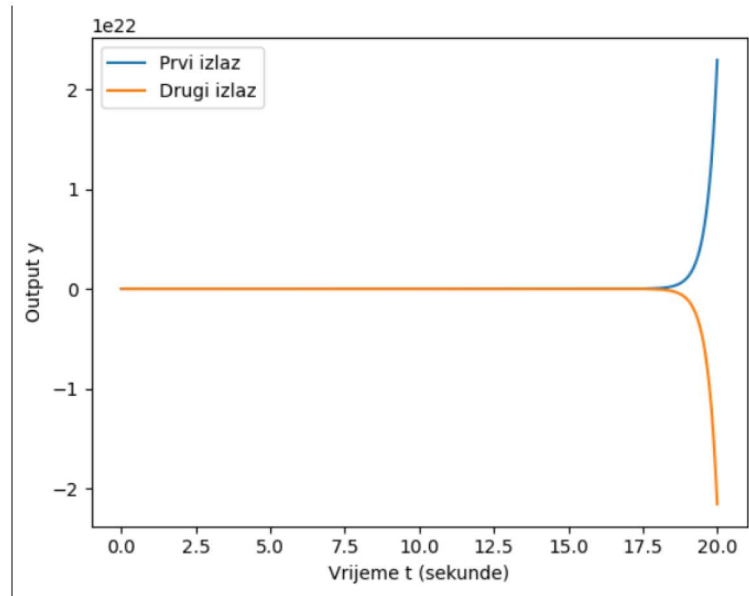
Za jedinu svojstvenu vrijednost sa pozitivnim realnim diom  $\lambda = 1.033908$ , umnožak prikladnog svojstvenog vektora sa matricom  $B^T$  je:

$$[0.07875326 \quad 0 \quad 0]$$

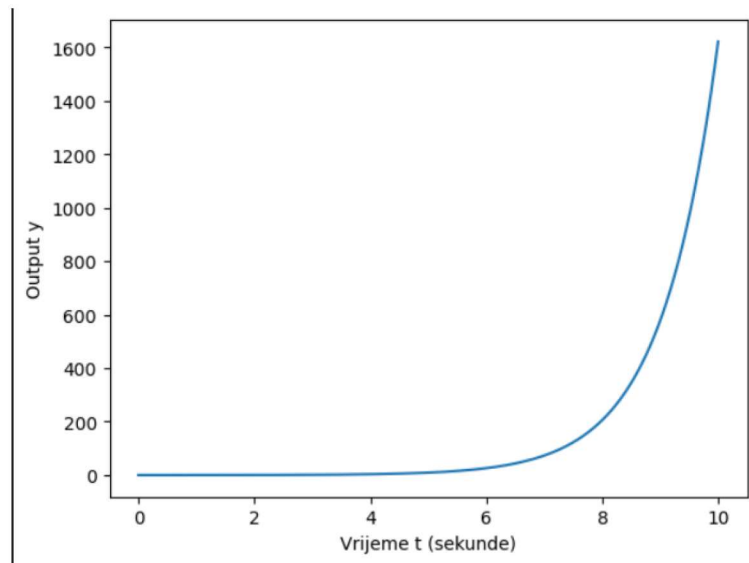
što nije jednako nuli.

Test sa svojstvenim vektorima garantira stabilizabilnost LTI podsustava koji predstavlja vertikalno kretanje robotske ruke. Zaključuje se da sustav može biti stabiliziran preko kontrole  $u = -Kx$  s pripadnim stabilizacijskim metodama koje se primjenjuju za SISO LTI sustave.

Može se provjeriti graf koji prikazuje izlaz nestabilnog sustava kroz vrijeme i potvrditi nestabilnost od oba sustava.



Slika 3: Izlaz nestabilnog velikog sustava kroz vrijeme



Slika 4: Izlaz nestabilnog podsustava kroz vrijeme

## 4.4 Stabiliziranje modela

Najprije će se LTI sustav stabilizirati pomoću metode Ljapunovljevog testa i jednadžbe.

U ranijem se primjeru, u kojem se primijenila metoda Ljapunovljevog testa i jednadžbe, navelo da odabir broja  $\mu$  ovisi o svojstvenim vrijednostima matrice  $A$ . Najmanje svojstvene vrijednosti su  $\lambda_5 = \lambda_6 = -15766$ . Prema tom rezultatu uzima se broj  $\mu = -15767$  za koji će matrica  $(-\mu I - A)$  biti stabilna.

Iskoristit će se ta vrijednost i provesti cijeli postupak stabiliziranja sustava preko Ljapunovljevog testa i jednadžbe.

```
mu = 15767
Q = B.dot(B.transpose())
newA = -mu * np.identity(A.shape[0]) - A
W = ct.lyap(newA, Q)
P = la.inv(W)
K = 1/2 * (B.transpose()).dot(P)
stableA = (A - B.dot(K))
eig_val1, eig_vec1 = la.eig(stableA)
eig_val1
```

Rješenje Ljapunovljeve jednadžbe i matrica  $P$  izgledaju ovako:

$$W = \begin{bmatrix} 266396 & 0 & -41.3414 & 0.0026 & -0.0155 & 9.8351 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 266396 & -0.0155 & 9.8351 \cdot 10^{-7} & -41.5104 & 0.0026 \\ -41.3414 & -0.0155 & 0.0064 & -4.0691 \cdot 10^{-7} & 4.8234 \cdot 10^{-6} & -3.0591 \cdot 10^{-10} \\ 0.0026 & 9.8351 \cdot 10^{-7} & -4.0691 \cdot 10^{-7} & 2.5808 \cdot 10^{-11} & -3.0591 \cdot 10^{-10} & 1.9402 \cdot 10^{-14} \\ -0.0155 & -41.5104 & 4.8234 \cdot 10^{-6} & -3.0591 \cdot 10^{-10} & 0.0064 & -4.1025 \cdot 10^{-7} \\ 9.8351 \cdot 10^{-7} & 0.0026 & -3.0591 \cdot 10^{-10} & 1.9402 \cdot 10^{-14} & -4.1025 \cdot 10^{-7} & 2.6019 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.1838 \cdot 10^{-1} & -1.2908 \cdot 10^{-5} & 1.5257 \cdot 10^3 & 1.2029 \cdot 10^7 & -8.1856 \cdot 10^{-1} & -7.1071 \cdot 10^3 \\ -1.1010 \cdot 10^{-5} & 1.1838 \cdot 10^{-1} & -7.8287 \cdot 10^{-1} & -6.7318 \cdot 10^3 & 1.5194 \cdot 10^3 & 1.1979 \cdot 10^7 \\ 1.5257 \cdot 10^3 & -8.1956 \cdot 10^{-1} & 2.4578 \cdot 10^7 & 2.3253 \cdot 10^{11} & -2.3132 \cdot 10^4 & -2.2390 \cdot 10^8 \\ 1.2029 \cdot 10^7 & -7.1176 \cdot 10^3 & 2.3253 \cdot 10^{11} & 2.4443 \cdot 10^{15} & -2.2390 \cdot 10^8 & -2.3536 \cdot 10^{12} \\ -7.8204 \cdot 10^{-1} & 1.5194 \cdot 10^3 & -2.2426 \cdot 10^4 & -2.1647 \cdot 10^8 & 2.4378 \cdot 10^7 & 2.3063 \cdot 10^{11} \\ -6.7232 \cdot 10^3 & 1.1979 \cdot 10^7 & -2.1647 \cdot 10^8 & -2.2755 \cdot 10^{12} & 2.3063 \cdot 10^{11} & 2.4243 \cdot 10^{15} \end{bmatrix}.$$

$K$  matrica koja je dobivena ovom metodom jest:

$$K = \begin{bmatrix} 4.3207 \cdot 10^1 & -4.7110 \cdot 10^{-3} & 5.5684 \cdot 10^5 & 4.3902 \cdot 10^9 & -2.9874 \cdot 10^2 & -2.5938 \cdot 10^6 \\ -4.0185 \cdot 10^{-3} & 4.3206 \cdot 10^1 & -2.8571 \cdot 10^2 & -2.4568 \cdot 10^6 & 5.5455 \cdot 10^5 & 4.3721 \cdot 10^9 \end{bmatrix}.$$

Nakraju, nova stabilna matrica  $(A - BK)$  izgleda:

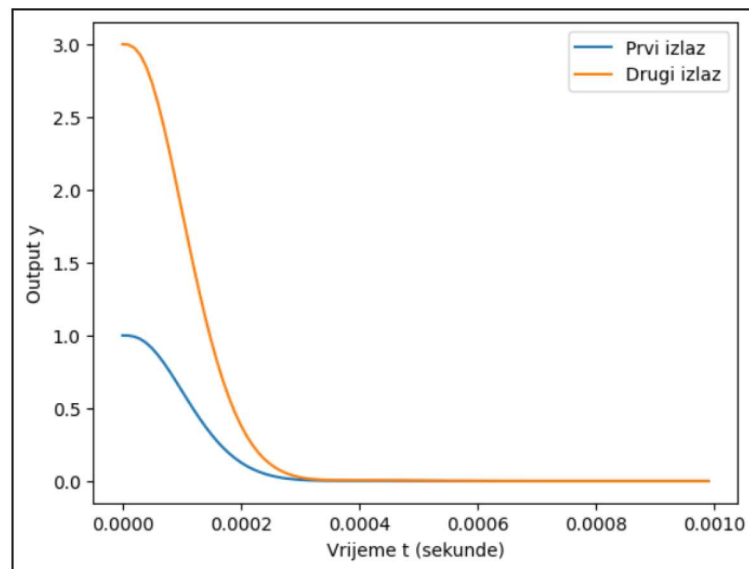
$$(A - BK) = \begin{bmatrix} -4.7304 \cdot 10^4 & 3.4387 & -4.0645 \cdot 10^8 & -3.2045 \cdot 10^{12} & 2.1806 \cdot 10^5 & 1.8933 \cdot 10^9 \\ 2.9332 & -4.7303 \cdot 10^4 & 2.0855 \cdot 10^5 & 1.7933 \cdot 10^9 & -4.0478 \cdot 10^8 & -3.1913 \cdot 10^{12} \\ 2.4470 & 9.1800 \cdot 10^{-4} & 0 & 1 & 0 & -8.4370 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9.1800 \cdot 10^{-4} & 2.4570 & 0 & -8.4710 & 0 & -3.1600 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potrebno je provjeriti svojstvene vrijednosti nove matrice  $(A - BK)$  da bi se moglo zaključiti je li sustav stabiliziran.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -15770.2113 + 15771.2103i, & \lambda_2 &= -15770.2113 - 15771.2103i, \\ \lambda_3 &= -15767.0025 + 15768.0028i, & \lambda_4 &= -15767.0025 - 15768.0028i, \\ \lambda_5 &= -15767.0004, & \lambda_6 &= -15767.0000006. \end{aligned}$$

Sve svojstvene vrijednosti imaju negativan realan dio, a to znači da se uspješno stabilizirao LTI sustav modela ruke humanoidnog robota NAO pomoću metode Ljapunovljevog testa i jednadžbe.

Graf koji predstavlja izlaz novog stabilnog sustava uz početni uvjet  $x_0 = [1, 2, 3, 1, 2, 3]$  kroz vrijeme izgleda ovako:



Slika 5: Izlaz LTI sustava modela ruke kroz vrijeme stabiliziran sa Ljapunovljevom testom

Kako je ranije navedeno, direktna metoda nije prikladna za velike sustave zbog nestabilnosti same metode, zato se neće upotrebljavati navedena metoda za stabiliziranje. Ackermanova formula također nije primjenjiva za ovaj sustav jer je sustav "multi input", a formula zahtijeva "single input" sustav ( $B \in R^{k \times 1}$ ).



Preostale će se dvije metode, zajedno s metodom Ljapunovljevog testa, iskoristiti za stabiliziranje podsustava modela ruke koji predstavlja njezino vertikalno kretanje.

Najprije će se koristiti direktna metoda za stabiliziranje sustava. Uzet će se svojstvene vrijednosti  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -4$  i konstruirati matricu  $K = [k_1, k_2, k_3]$  tako da matrica  $(A - BK)$  bude stabilna i ima navedene svojstvene vrijednosti.

```
k1, k2, k3, s = symbols('k1, k2, k3, s')
K2 = Matrix([[k1, k2, k3]])
(s * eye(3) - A2 + B2*K2).det()
```

Prvo je potrebno izračunati karakteristični polinom  $\Delta_{A-BK}(s)$  i vidjeti nepoznanice.

$$729.927k_1s^2 - 780.291963k_1 + 1786.131369k_2s + 1786.131369k_3 + s^3 + 15766.4s^2 - 0.550236s - 16854.2816.$$

Zatim se treba konstruirati polinom kojem su nultočke naše svojstvene vrijednosti.

$$d(s) = (s + 2)(s + 3)(s + 4) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24.$$

Izjednačavaju se koeficijenti dobiveni uz varijablu  $s$ . Dobiva se sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 729.927k_1 - 15760.4 &= 9 \\ 1786.131369k_2 - 0.550236 &= 26 \\ -780.291963k_1 + 1786.13169k_3 - 16054.2816 &= 24 \end{aligned}$$

Nakon što se riješi ovaj sustav jednadžbi, matrica  $K$  ima sljedeći oblik:

$$K = \begin{bmatrix} -21.5876382 & 0.0148646603 & 0.0188233635 \end{bmatrix}.$$

Nakon konačne konstrukcije matrice  $K$ , može se konstruirati stabilna matrica  $(A - BK)$ , te provjeriti njezine svojstvene vrijednosti.

```
K2 = Matrix([[ -21.5876382, 0.0148646603, 0.0188233635]])
newA2 = (A2 - B2*K2)
print(newA2)
newA2.eigenvals()
```

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} -9 & -11.0621168778096 & -13.7396812423376 \\ 2.447 & 0 & 1.069 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -4.$$

S ovim rezultatima uspješno će se stabilizirati sustav pomoću direktne metode.

Sljedeća metoda, koja će se iskoristiti, je Ackermanova formula. Za ovu metodu uzet će se iste svojstvene vrijednosti  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = -4$  i konstruirati stabilna matrica  $(A - BK)$  koja će imati te svojstvene vrijednosti. Rezultati bi trebali biti isti kao i kod direktne metode.

Polinom, kojem su nultočke naše svojstvene vrijednosti, izgleda ovako:

$$\Delta(s) = (s + 2)(s + 3)(s + 4) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24.$$

Uvrštavanjem matrice  $A$  sustava u polinom, izračunava se inverz matrice  $C_m$  koja će množiti polinom s lijeva, te će se pomnožiti s  $e_3 = [0 \ 0 \ 1]$  s lijeva.

```
CM_inv = la.inv(CM)
e3 = np.array([[0, 0, 1]])
pol_mat = A1.dot(A1.dot(A1)) + 9*A1.dot(A2) + 26*A1 + 24 * np.identity(3)
K1 = e3.dot(CM_inv.dot(pol_mat))
print(K1)
```

Dobit ćemo matricu:

$$K = [-21.5876382158764 \ 0.0148646602712457 \ 0.0188233634902361].$$

Sada se može konstruirati matrica  $(A - BK)$ .

```
newA1 = (A1 - B1.dot(K1))
print(newA1)
```

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} -9 & -11.0621168778096 & -13.7396812423376 \\ 2.447 & 0 & 1.069 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na kraju će se provjeriti svojstvene vrijednosti nove matrice:

```
eig_val, eig_vec = la.eig(newA1.astype(float))
print(eig_val)
```

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -4.$$

Dobile su se precizne svojstvene vrijednosti koje su preddefinirane za ovu metodu. Tako se uspješno stabilizirao LTI podsustav pomoću Ackermanove formule.

Zadnja metoda koja će se koristiti je ponovno Ljapunovljev test. Najmanja svojstvena vrijednost po realnom dijelu jest  $\lambda_1 = -15766.4$ , stoga se uzima da je vrijednost  $\mu = -15767$ . Stabilizacija sustava slijedi:

```
mu = 15767
Q = B1.dot(B1.transpose())
newA = -mu * np.identity(A1.shape[0]) - A1
W = ct.lyap(newA, Q)
P = la.inv(W)
K3 = 1/2 * (B1.transpose()).dot(P)
stableA = (A1 - B1.dot(K3))
eig_val1, eig_vec1 = la.eig(stableA)
print(eig_val1)
```

Rješenje Ljapunovljeve jednadžbe i matrica  $P$  izgledaju ovako:

$$W = \begin{bmatrix} 443970.176 & -68.9004 & 4.3697 \cdot 10^{-03} \\ -68.9004 & 1.0693 \cdot 10^{-2} & -6.7818 \cdot 10^{-7} \\ 4.3697 \cdot 10^{-3} & -6.7818 \cdot 10^{-7} & 4.3013 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.1837 \cdot 10^{-1} & 1525.4695 & 1.2026 \cdot 10^7 \\ 1525.4695 \cdot 10^3 & 2.4573 \cdot 10^7 & 2.3247 \cdot 10^{11} \\ 1.2026 \cdot 10^7 & 2.3247 \cdot 10^{11} & 2.4436 \cdot 10^{15} \end{bmatrix}.$$

$K$  matrica koja je dobivena ovom metodom jest:

$$K = [43.2024 \quad 556740.704 \quad 4.3891 \cdot 10^9].$$

Nakraju, naša nova stabilna matrica  $(A - BK)$  izgleda:

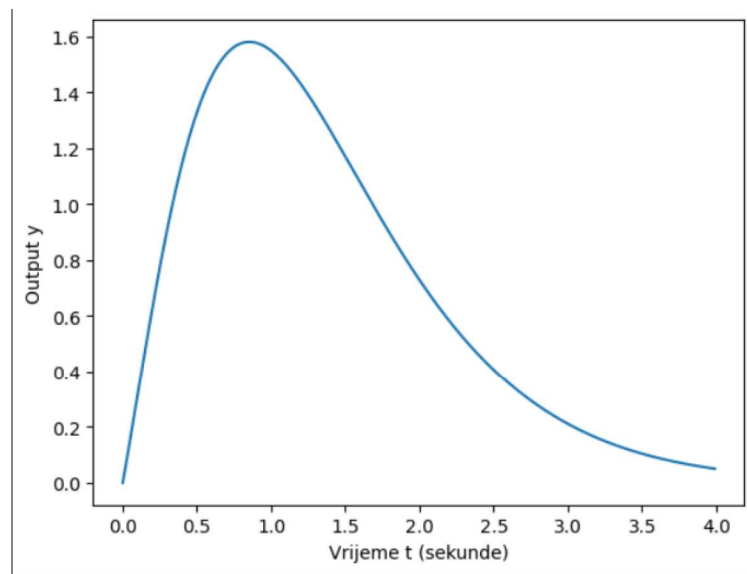
$$(A - BK) = \begin{bmatrix} -47300.9991 & -4.0638 \cdot 10^8 & -3.2037 \cdot 10^{12} \\ 2.4470 & 0 & 1.069 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Provjeravaju se svojstvene vrijednosti nove matrice  $(A - BK)$  da bi se provjerilo je li sustav stabiliziran.

$$\lambda_1 = -15766.9995 + 15767.5995i, \quad \lambda_2 = -15766.9995 - 15767.5995i, \quad \lambda_3 = -15766.9999.$$

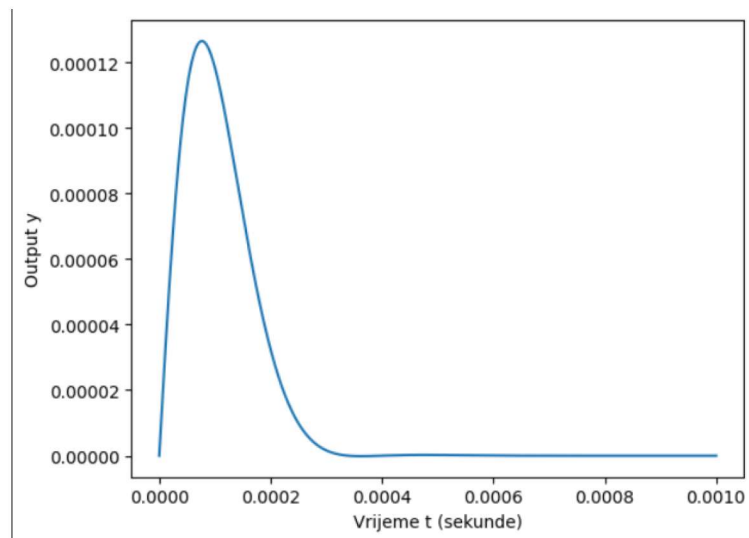
Zbog numeričke nestabilnosti s decimalama, realni dijelovi svojstvenih vrijednosti nisu  $\leq -\mu$  (povećavanjem broja  $\mu$  bismo, eventualno, trebali zadovoljiti nejednakost). Bez obzira na to, dobivene su dobre i stabilne svojstvene vrijednosti te se, pomoću metode Ljapunovljevog testa i jednadžbe, uspješno stabilizirao podsustav.

Graf izlaza novonastalog stabiliziranog sustava pomoću Ackemanove formule i direktne metode izgleda:



Slika 6: Izlaz stabiliziranog LTI podsustava vertikalnog kretanja kroz vrijeme stabiliziran Ackermanovom formulom i direktnom metodom

Graf izlaza novonastalog stabiliziranog sustava pomoću Ljapunovljevog testa:



Slika 7: Izlaz stabiliziranog LTI podsustava vertikalnog kretanja kroz vrijeme stabiliziran Ljapunovljevom metodom

Za ove grafove je korišteno početno stanje  $x_0 = [2, 3, 0]$ . Novodobivene svojstvene vrijednosti od Ljapunovljeve metode su puno manji od svojstvenih vrijednosti koje smo predefinirali kod ostalih metoda. Oba grafa prikazuju da će sustav, odnosno izlaz, s vremenom doći u nulu. Stabilizirani sustav od Ljapunovljeve metode jako brzo stabilizira sustav zbog vrlo malih svojstvenih vrijednosti za razliku od stabiliziranih sustava od Ackermanove formule i direktne metode.

## Literatura

- [1] B.N. DATTA, *Numerical methods for linear control systems design and analysis*, Elsevier academic press, Illinois, 2003. 135-167
- [2] J.P. HESPANHA, *Linear systems Theory*, Princeton University Press, New Jersey, 2009. 3-129
- [3] N. KOFINAS, *Forward and Inverse Kinematics for the NAO Humanoid Robot*, Technical University Of Crete, Chania, 2012. 5-10
- [4] H. KRALJEVIĆ, *Vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Osijek, 2008. 61-69
- [5] P. PETKOV, "Jordan-Schur Algorithms for Computing the Matrix Exponential", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, volumen 2023, 2023.
- [6] E.J. VAZQUEZ, J.A. RODRIGUEZ, D.N. DURAN, E.L. CAUDANA, *Model approximation of an arm of the NAO robot using system identification*, Second International Symposium on Instrumentation, Control, Artificial Intelligence, and Robotics, 2021.
- [7] [https://www.wikiwand.com/en/Ackermann's\\_formula](https://www.wikiwand.com/en/Ackermann's_formula)