Weibullova distribucija

Marjanović, Matea

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Matea Marjanović

Weibullova distribucija

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Matea Marjanović

Weibullova distribucija

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2023.

Sažetak

U ovom radu cilj je bio opisati Weibullovu distribuciju. Opisana je povijest istraživanja distribucije. Opisani su i objašnjeni osnovni pojmovi vezani za Weibullovu distribuciju poput funkcije distribucije i funkcije gustoće. Ilustriran je utjecaj promjena parametara na distribuciju i izvedene su numeričke karakteristike, odnosno r-ti centralni moment, očekivanje i varijanca. U drugom dijelu rada definirani su osnovni pojmovi u teoriji pouzdanosti kako bi se mogle razumjeti primjene u stvarnim problemima, te su opisane primjene Weibullove distribucije u inženjerstvu pouzdanosti, određivanju brzine vjetra, farmakokinetici, šumarstvu i građevini.

Ključne riječi

Weibullova distribucija, funkcija gustoće, funkcija distribucije, numeričke karakteristike Weibullove distribucije, parametri Weibullove distribucije, teorija pouzdanosti, primjene Weibullove distribucije

Weibull distribution

Summary

In this paper main goal was to define and explain Weibull distribution. In the first part historical aspect is described. In the second part, the Weibull density function and distribution function are described. It is illustrated how changes in parameters affect the distribution, and the numerical characteristics of the distribution are calculated. In the last part, the main concepts of reliability theory are defined and the application of Weibull distribution in reliability engineering, determining wind speeds, pharmacokinetics, forestry and in civil engineering are shown.

Keywords

Weibull distribution, density function, distribution function, parameters of Weibull distribution, reliability theory, application of Weibull distribution

Sadržaj

Uvod

U teoriji vjerojatnosti i statistici, Weibullova distribucija je neprekidna distribucija kojom se modeliraju različiti fenomeni u prirodi. Koristi se u modeliranju vremena preživljavanja elemenata i vremena otkaza komponenata. Ima široku uporabu u teoriji pouzdanosti. U ovom radu opisat ćemo povijest Weibullove distribucije, tko je i kada definirao distribuciju i za što se koristila prije, a gdje se primjenjuje danas. Objasnit ćemo funkcije distribucije i gustoće, te izvesti numeričke karakteristike. Pokazat ćemo utjecaj parametara i kakvu ulogu parametri imaju u primjenama. Na kraju ću navesti primjene Weibullove distribucije s ilustracijama kroz primjere.

1 Osnovni pojmovi

Definicija 1. *Neka je $\Omega \neq \emptyset$. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω je* ***σ-algebra skupova na Ω*** *ukoliko vrijedi:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. *Ako je $A \in \mathcal{F}$, tada je i $A^C \in \mathcal{F}$*
3. *Ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_k, k \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, tada $\mathcal{F}$ sadrži i njihovu uniju, tj. $\bigcup_{k \in I} A_k \in \mathcal{F}$.*

Definicija 2. *Neka je $\Omega \neq \emptyset$ skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja na njemu. Funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je* ***vjerojatnost*** *na Ω ukoliko vrijedi:*

(1) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) *Ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_k, k \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ tada vrijedi $P\left(\bigcup_{k \in I} A_k\right) = \sum_{k \in I} P(A_k)$.*

Definicija 3. *Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ skupa $\Omega \neq \emptyset$, σ-algebre $\mathcal{F}$ na njemu i vjerojatnosti $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ nazivamo* ***vjerojatnosni prostor****.*

Definicija 4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-algebra na $\mathbb{R}$ generirana svim otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$ (tzv. Borelova σ-algebra).* ***Slučajna varijabla*** *je svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju je $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Definicija 5. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

1. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable f, takva da vrijedi* $P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Funkciju X nazivamo ***apsolutno neprekidna slučajna varijabla****. Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazivamo* ***funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable*** *X ili kraće funkcija gustoće slučajne varijable X.*

Definicija 6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Funkciju $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da dana slučajna varijabla poprimi realizaciju manju ili jednaku tom broju, tj. funkciju*

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)$$

nazivamo ***funkcija distribucije slučajne varijable*** *X.*

Definicija 7. *Skup vrijednosti koje slučajna varijabla X može poprimiti naziva se* ***slika slučajne varijable*** *i označava se s* $\mathcal{R}(X)$.

Definicija 8. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je konačan integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx,$$

onda kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje i broj

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

nazivamo ***matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable*** X.

Propozicija 1. *Neka je X slučajna varijabla koja ima očekivanje $E[X]$ i neka s u $a, b \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi $E[aX + b] = aE[X] + b$.* [[1], str. 87]

Definicija 9. *Neka je X slučajna varijabla koja ima očekivanje $E[X]$. Ako postoji $E[X^r]$, onda broj $\mu_r = E[X^r]$ nazivamo* ***moment r-tog reda*** *ili r-ti moment od X.*

Definicija 10. *Neka je X slučajna varijabla koja ima očekivanje $E[X]$. Ako postoji $E[(X - EX)^2]$, taj nenegativan broj nazivamo* ***varijanca slučajne varijable*** *X i označavamo ga s $VarX$.*

Propozicija 2. *Neka je X slučajna varijabla s varijancom $VarX = E[(X - EX)^2]$, tada se varijanca može računati primjenom formule $VarX = E[X^2] - (E[X])^2$.* [[1], str. 93]

Definicija 11. *Funkciju $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ zadanu formulom*

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} u^{x-1} e^{-u}\, du$$

nazivamo ***gama funkcija****.*

2 Povijest Weibullove distribucije

Weibullova distribucija ime je dobila po švedskom fizičaru i matematičaru Wallodiu Weibullu. Waloddi Weibull rodio se je 18. lipnja 1887. godine u Švedskoj, a preminuo je 12. listopada 1979. godine u Francuskoj.

Distribuciju danas poznatu pod njegovim imenom prvi puta je opisao u svom djelu *A statistical theory of the strength of material* objavljenom 1939. godine. Weibullova distribucija je među najpoznatijim distribucijama koja se primjenjuje u teoriji doživljenja te u analizi pouzdanosti i održavanja.

Weibull je distribuciju koristio za prikaz distribucije snage pucanja materijala. Impresivna podudarnost podataka pokazala se između rezultata predviđenih Weibullovim modelima i proučavanih podataka. Weibull je modelirao podatke o čvrstoći vlakana indijskoga pamuka, granici popuštanja čelika Bofors, zamoru materijala čelika ST-37, stasu odraslih muškaraca rođenih na britanskim otocima, širini graha *Phaseolus vulgaris.*

Kao i mnoge znanstvene metode, teoremi i formule, Weibullova distribucija ime ne nosi po prvoj osobi koja ju je proučavala i opisala. 1933. godine Rosen i Rammler koristili su sličnu distribuciju za opisivanje distribucije veličine čestica (vidi [9]), zbog toga se Weibullova distribucija ponekad naziva Rosin-Rammlerova. U ruskoj literaturi često se pronalazi pod imenom Weibull-Gnedenkova distribucija, jer pripada jednom od tri modela graničnih distribucija koje je Gnedenko utvrdio. Povremeno se naziva Frechetova distribucija zbog francuskog matematičara Frecheta jer je on prvi prepoznao tu distribuciju kao graničnu 1927. godine. 1928. godine Fisher i Tippet objavili su rad u kojem se pojavljuje Weibullova distribucija kao granična distribucija malih ekstrema u uzorku i to je prvi poznati rad u kojem je predstavljena Weibullova distribucija.

U današnje vrijeme Weibullova distribucija koristi se u tehničkom području za modeliranje životnog vijeka i stopa kvarova komponenata i sistema (otpornici, kondenzatori, žarulje), strojarstvu i građevini (modeliranje čvrstoće materijala, napuknuća u betonu, parametara rada vjetroagregata) u medicini za modeliranje vremena pojave pojedinih bolesti ili tumora, također ima široku primjenu u biologiji, kemiji, farmakologiji, šumarstvu.

3 O Weibullovoj distribuciji

Definicija 12. ***Troparametarska Weibullova slučajna varijabla*** *X sa slikom $\mathcal{R}(X) = \langle a, \infty \rangle$ definirana je s funkcijom gustoće*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} & , x > a \end{cases} \tag{1}$$

i funkcijom distribucije

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} & , x > a \end{cases}, \tag{2}$$

gdje $a \in \mathbb{R}$ ***parametar položaja****, $b \in \mathbb{R}, b > 0$* ***parametar skaliranja*** *i $c \in \mathbb{R}, c > 0$* ***parametar oblika****.*

Ako slučajna varijabla X ima Weibullovu distribuciju s parametrima a, b i c, označava se $X \sim W(a, b, c)$.

3.1 Funkcija distribucije i funkcija gustoće

Slučajna varijabla X je troparametarska Weibullova s parametrima distribucije $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $c > 0$ ukoliko je slučajna varijabla Y

$$Y = \left(\frac{X-a}{b}\right)^c \tag{3}$$

standardna eksponencijalna čija je funkcija gustoće:

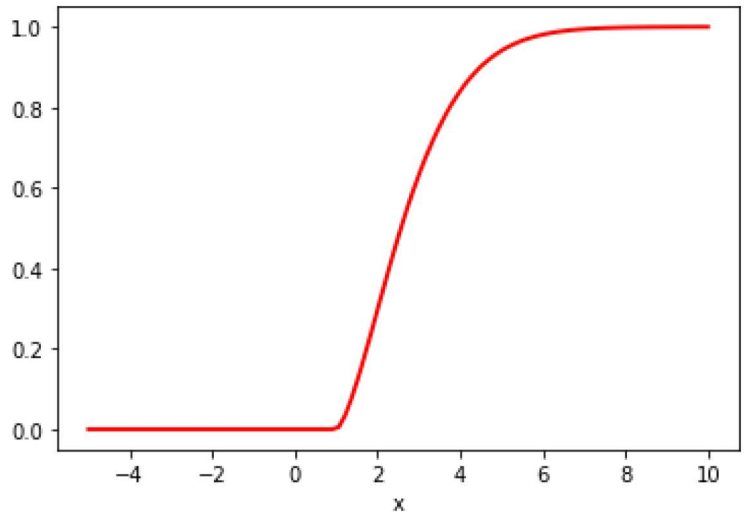
$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ e^{-y} & , y > 0 \end{cases}$$

i funkcija distribucije

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & , y > 0 \end{cases}.$$

Uvrštavanjem Y dobivamo funkciju distribucije troparametarske Weibullove slučajne varijable X:

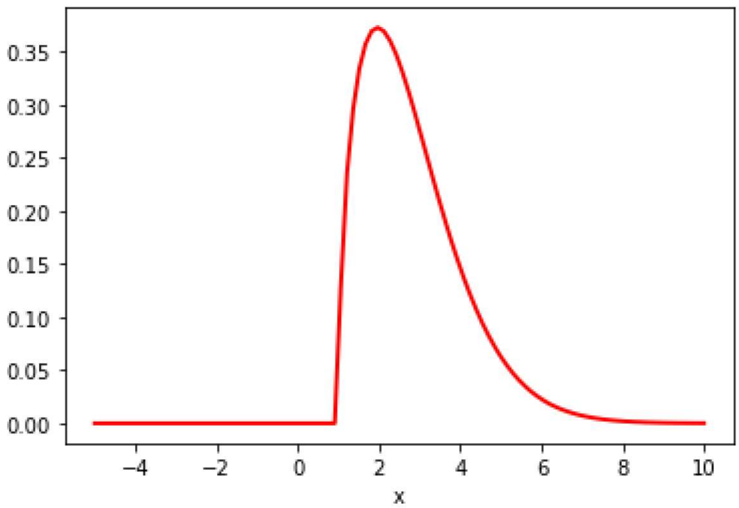
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} & , x > a \end{cases}.$$



Slika 1: graf funkcije distribucije Weibullove slučajne varijable X s parametrima $a = 1, b = 2, c = 1.5$

Funkcija gustoće troparametarske Weibullove slučajne varijable X izvede se deriviranjem funkcije distribucije:

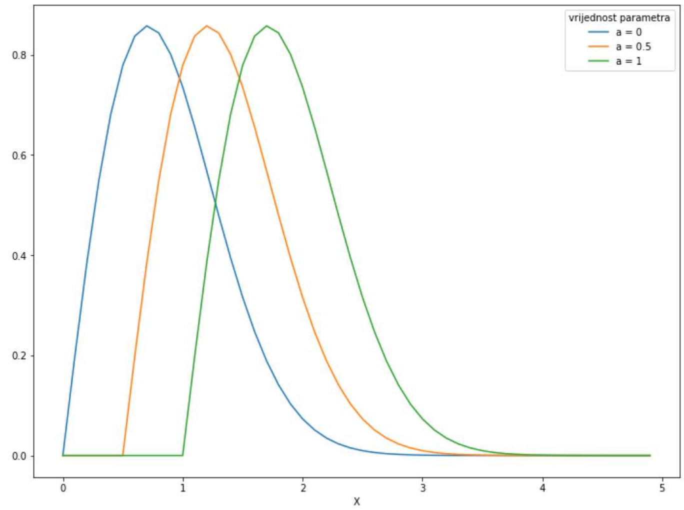
$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} \\
&= \frac{d\left(1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c}\right)}{dx} \\
&= -e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c}(-c)\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1}\frac{1}{b} \\
&= \frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c}.
\end{aligned}
$$



Slika 2: graf funkcije gustoće Weibullove slučajne varijable X s parametrima $a = 1, b = 2, c = 1.5$

3.2 Utjecaj parametara

Fiksiramo li parametre b i c, možemo vidjeti kako parametar položaja utječe na funkciju gustoće.



Slika 3: grafovi funkcije gustoće Weibullove slučajne varijable za različite vrijednosti parametra a i fiksirane $b = 1$ i c=2

Iz grafova je vidljivo kako povećanje parametra a uzrokuje pomicanje grafa udesno, parametar položaja u literaturi se naziva i parametar pomaka ili translacijski parametar.

Fiksiranjem parametra $a = 0$, dobiva se **dvoparametarska Weibullova distribucija**. Njena funkcija gustoće definirana je izrazom:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{c}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^c} & , x > 0 \end{cases}. \tag{4}$$

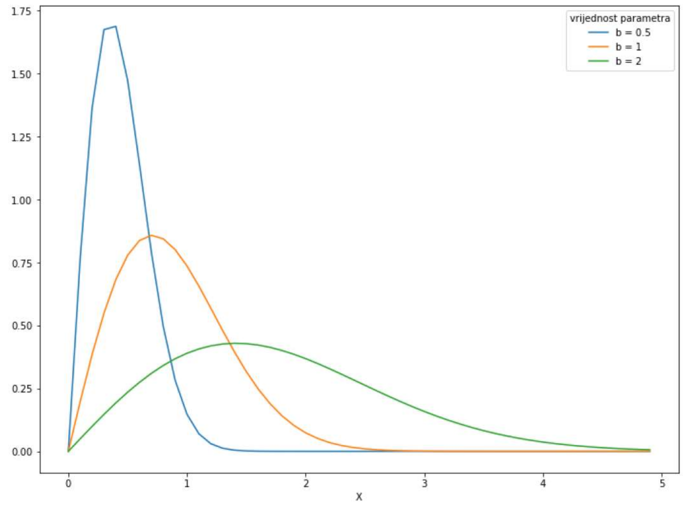
Povećanjem parametra skaliranja dolazi do kompresije gustoće, tj.povećanje parametra b utječe na povećanje koeficijenta varijacije(relativne standardne devijacije).

Standardna Weibullova distribucija u literaturi se najčešće definira kao Weibullova distribucija s fiksnim parametrima $a = 0$ i $b = 1$, odnosno funkcijom gustoće:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ cx^{c-1}e^{-x^c} & , x > 0 \end{cases} \tag{5}$$

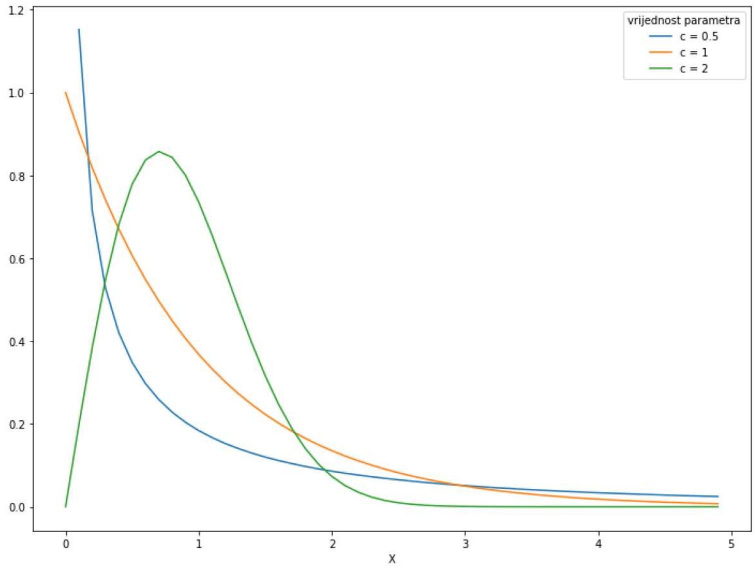
i funkcijom distribucije:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^c} & , x > 0 \end{cases}. \tag{6}$$



Slika 4: grafovi funkcije gustoće Weibullove slučajne varijable za različite vrijednosti parametra b i fiksirane $a = 0$ i $c = 2$

Standardna Weibullova distribucija je jednoparametarska, ovisi samo o parametru oblika c. Ukoliko je $c < 1$, dominantan je eksponencijalni dio funkcije gustoće i graf je J-oblika, za $c > 1$ više do izražaja dolazi polinomni dio funkcije gustoće.



Slika 5: grafovi funkcije gustoće Weibullove slučajne varijable za različite vrijednosti parametra c i fiksirane $a = 0$ i $b = 1$

3.3 Numeričke karakteristike

Teorem 1. *Neka je X standardna jednoparametarska Weibullova slučajna varijabla s parametrom $c > 0$. Tada su matematičko očekivanje, r-ti moment i varijanca dani sljedećim izrazima:*

(1) $E[X] = \Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)$

(2) $E[X^r] = \Gamma\left(1 + \frac{r}{c}\right)$

(3) $VarX = \Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right]^2.$

Dokaz.

(1) Matematičko očekivanje :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \\ &= \int_{0}^{\infty} x c x^{c-1} e^{-x^c}\, dx \\ &= \int_{0}^{\infty} c x^c e^{-x^c}\, dx. \end{aligned}$$

Koristeći supstituciju $u = x^c$, $du = cx^{c-1}\, dx$ tj. $x = u^{\frac{1}{c}}$, $dx = \frac{x^{1-c}}{c} du$ dobivamo

$$= \int_{0}^{\infty} u^{\frac{1}{c}} e^{-u}\, du.$$

Ovaj izraz sada možemo zapisati koristeći gama funkciju.

$$E[X] = \Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)$$

(2) r-ti moment :

$$\begin{aligned} E[X^r] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx \\ &= \int_{0}^{\infty} x^r c x^{c-1} e^{-x^c}\, dx \\ &= \int_{0}^{\infty} c x^{r+c-1} e^{-x^c}\, dx \end{aligned}$$

Koristeći supstituciju navedenu kod matematičkog očekivanja dobivamo

$$\begin{aligned} &= \int_{0}^{\infty} u^{\frac{r}{c}} e^{-u}\, du \\ &= \Gamma\left(1 + \frac{r}{c}\right). \end{aligned}$$

(3) Varijanca:

Koristeći propoziciju 2. dobivamo

$$\begin{aligned} VarX &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= \Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

Teorem 2. *Neka je X troparametarska Weibullova slučajna varijabla s parametrima $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $c > 0$. Tada su matematičko očekivanje, r-ti moment i varijanca dani sljedećim izrazima:*

(1) $E[X] = a + b\,\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$

(2) $E[X^r] = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} a^i b^{r-i} \Gamma\left(1+\frac{r-i}{c}\right)$

(3) $VarX = b^2 \left(\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2\right)$.

Dokaz.

Numeričke karakteristike za troparametarsku Weibullovu distribuciju lagano se izvedu iz numeričkih karakteristika navedenih u teoremu 1. koristeći transformaciju $X = a + bY$, gdje je Y standardna Weibullova slučajna varijabla.

Uvrštavanjem $Y = \frac{X-a}{b}$ u funkciju distribucije standardne Weibullove slučajne varijable Y dobivamo funkciju distribucije troparametarske Weibullove slučajne varijable X.

$$F_Y(y) = 1 - e^{-y^c} = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} = F_X(x)$$

(1) Matematičko očekivanje

Prema propoziciji 1. slijedi

$$E[X] = E[aY + b] = aE[Y] + b = EX = a + b\,\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

(2) r-ti moment :

$$E[X^r] \;=\; E[(a+bY)^r] = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} a^i b^{r-i} E[X^{r-i}] = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} a^i b^{r-i} \Gamma\left(1+\frac{r-i}{c}\right)$$

(3) Varijanca:

Koristeći propoziciju 2., te (1) i (2) dobivamo:

$$\begin{aligned} VarX &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= a^2 + 2ab\,\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) + b^2\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left(a + b\,\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)^2 \\ &= a^2 + 2ab\,\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) + b^2\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - a^2 - 2ab\,\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) - b^2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2 \\ &= b^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2\right). \end{aligned}$$

3.4 Povezane distribucije

Vidjeli smo da troparametarska Weibullova distribucija poprima različite oblike ovisno o zadanim vrijednostima parametara. Zbog toga se može dovesti u vezu s drugim distribucijama. Prisjetimo se funkcije gustoće i funkcije distribucije za slučajnu varijablu X s troparametarskom Weibullovom distribucijom.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} & , x > a \end{cases},$$

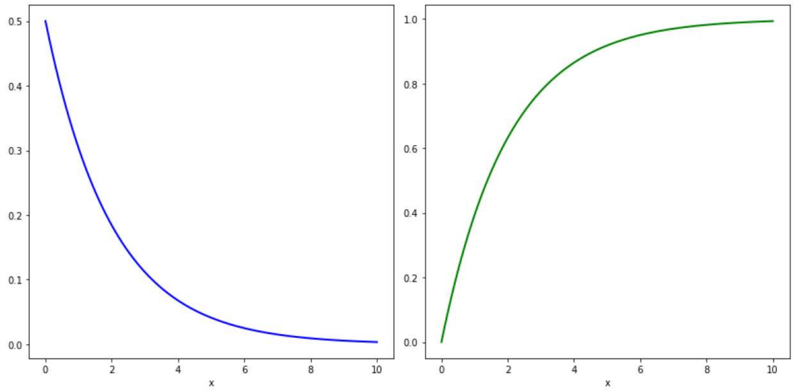
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} & , x > a \end{cases}.$$

3.4.1 Posebni slučajevi Weibullove distribucije

Uvrstimo li za parametar položaja $c = 1$, Weibullova distribucija poprima oblik **dvoparametarske eksponencijalne distribucije** s funkcijom gustoće i funkcijom distribucije dane s:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{1}{b} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} & , x > a \end{cases},$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} & , x > a \end{cases}.$$



Slika 6: grafovi funkcije gustoće i funkcije distribucije za dvoparametarsku eksponencijalnu distribuciju s parametrima $a = 0, b = 2$

Dvoparametarska ekponencijalna distribucija koristi se za modeliranje vremena između događaja u Poissonovom procesu, kao što je vrijeme između kvarova u sustavu s konstantnim stopama kvarova.

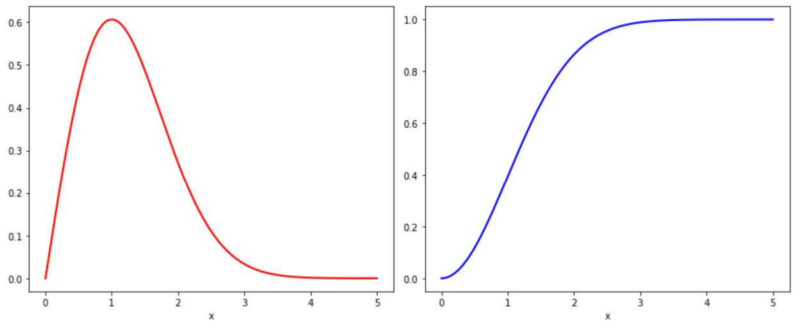
U slučaju kada je $1.5 < c < 3.6$ Weibullova distribucija poprima oblik **log-normalne distribucije**. Log-normalna distribucija je povezana s Weibullovom distribucijom kada se razmatra distribucija logaritama slučajnih varijabli s Weibullovom distribucijom.

Pogledajmo sada slučaj kada je $c = 2$, tada Weibullova distribucija postaje **Rayleighova distribucija**

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \le a \\ \frac{2}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} & , x > a \end{cases},$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \le a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} & , x > a \end{cases}.$$

Rayleighova distribucija obično se koristi za modeliranje distribucije veličina vektorskih komponenti.



Slika 7: grafovi funkcije gustoće i funkcije distribucije za Reyleighovu distribuciju s parametrima $a = 0, b = 1$

3.4.2 Generalizacija Weibullove distribucije - Weibullova distribucija kao poseban slučaj drugih distribucija

Genaralizirana gama distribucija s dva parametra oblika $p > 0$ i $d > 0$ i parametrom skaliranja $\alpha > 0$ zadana je funkcijom gustoće:

$$f_{X_g}(x; \alpha, d, p) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \frac{\left(\frac{p}{\alpha^d}\right)x^{d-1}e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p}}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)} & , x > 0 \end{cases}.$$

Ukoliko su parametri skaliranja jednaki, tj. $p = d$ generalizirana gama distribucija postaje Weibullova distribucija s parametrom pomaka 0, parametrom oblika p i parametrom skaliranja α.

$$
\begin{aligned}
f_{X_g}(x;\alpha,p,p) &= \frac{\left(\frac{p}{\alpha^p}\right) x^{p-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p}}{\Gamma(1)} \\
&= \frac{\frac{p}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{p-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p}}{1} \\
&= \frac{p}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{p-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p} \\
&= f_{X_W}(x;0,\alpha,p),
\end{aligned}
$$

gdje je $f_{X_W}(x;0,\alpha,p)$ funkcija gustoće Weibullove distribucije s parametrom pomaka 0, parametrom skaliranja α i parametrom oblika p.

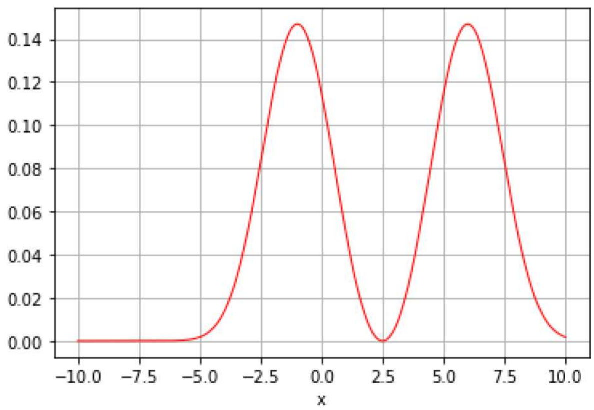
Iz troparametraske Weibullove distribucije može se izvesti **reflektirana Weibullova distribucija** za $x < a$ s funkcijom gustoće :

$$
f_{X_r}(x) = \begin{cases} \frac{c}{b}\left(\frac{a-x}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)^c} & , x < a \\ 0 & , x \geq a \end{cases}
$$

$$
F_{X_r}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)^c} & , x < a \\ 0 & , x \geq a \end{cases},
$$

Reflektiranjem funkcije gustoće troparametarske Weibullove distribucije ulijevo (zrcalno u odnosu na $x = a$) definirana je **dvostruka Weibullova distribucija** s funkcijom gustoće:

$$
f_X(x) = \frac{c}{2b}\left|\frac{a-x}{b}\right|^{c-1} e^{-\left|\frac{a-x}{b}\right|^c}, x \in \mathbb{R}.
$$



Slika 8: graf funkcije gustoće dvostruke Weibullove distribucije s parametrima $a = 2.5, b = 4, c = 3$

4 Primjene

Kao što je već spomenuto Weibullova distribucija je često korištena za modeliranje životnog vijeka sistema ili događaja. Zbog fleksibilnog oblika Weibullovom distribucijom moguće je opisati različite obrasce funkcija distribucija životnog vijeka.

4.1 Teorija pouzdanosti

Kako bi se bolje razumjele različite primjene Weibullove distribucije potrebno je poznavati osnovne pojmove teorije pouzdanosti. Pouzdanost sustava može se opisati kao vjerojatnost da sustav, bez otkazivanja, odradi namjenu koja mu je predviđena.
Neka je vrijeme pojave otkazivanja modelirano slučajnom varijablom T, s funkcijom gustoće $f_T(t)$ i funkcijom distribucije funkcijom distribucije $F_T(t)$.

U teoriji pouzdanosti funkcija $F_T(t)$ je **funkcija distribucije životnog vijeka** (eng. life distribution ili failure distribution) je vjerojatnost da će sustav otkazati do trenutka t :

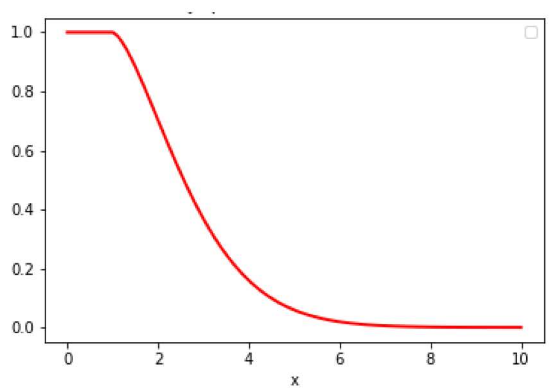
$$F_T(t) = P(T \leq t).$$

$R_T(t)$ je **funkcija pouzdanosti** ili funkcija doživljenja (eng. reliability function ili survival function). Funkcija pouzdanosti je vjerojatnost da sustav neće otkazati do trenutka t, tj. da će promatrani element raditi i poslije trenutka t:

$$R_T(t) = 1 - F_T(t) = P(T > t).$$

Za Weibullovu troparametarsku distribuciju, funkcija pouzdanosti je

$$R_T(t) = e^{-\left(\frac{t-a}{b}\right)^c}, t > a. \tag{7}$$



Slika 9: graf funkcije pouzdanosti korištenjem Weibullove distribucije s parametrima $a = 1, b = 2, c = 1.5$

Funkcija rizika (eng. hazard function) interpretira se kao vjerojatnost otkazivanja u nadolazećem trenutku ukoliko je sustav već doživio trenutak t. Definira se

$$h_T(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{P(t < T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t}.$$

Izrazom $P(t < T < t + \Delta t | T > t)$ definirana je vjerojatnost da je vrijednost slučajne varijable T iz intervala $\langle t, t + \Delta t\rangle$ uz uvjet da je njena vrijednost veća od t. Po definiciji uvjetne vjerojatnosti slijedi:

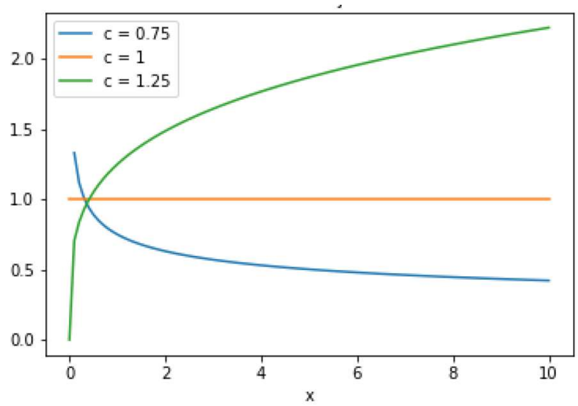
$$P(t < T < t + \Delta t | T > t) = \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{R_T(t)}$$

odnosno za $h_T(t)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} h_T(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{P(t < T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \lim_{t\to\infty} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{R_T(t)\Delta t} \\ &= \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}. \end{aligned}$$

Za Weibullovu troparametarsku distribuciju, funkcija rizika je

$$h_T(t) = \frac{c}{b}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{c-1}, x > a. \tag{8}$$



Slika 10: grafovi funkcija rizika za različite vrijednosti parametra c i fiksirane $a = 0$ i $b = 1$

Funkcija rizika je padajuća funkcija za $c < 1$, konstantna za $c = 1$ i rastuća funkcija za $c > 1$, odnosno prema parametru c možemo znati je li stopa otkaza elementa padajuća, konstantna ili rastuća.

4.2 Primjena - inženjerstvo pouzdanosti

U inženjerstvu pouzdanosti Weibullova distribucija ima široku primjenu u modeliranju vremena otkazivanja elemenata ili sustava. Analizom podataka rade se predviđanja parametara i procjene pouzdanosti i stope otkaza tijekom vremena. Ključni aspekti za primjenu Weibullove distribucije su: prikupljanje podataka otkaza elemenata, procjena parametara distribucije, određivanje svojstava iz teorije pouzdanosti i predviđanje budućih ponašanja elemenata, tj. predviđanje vremenskog intervala u kojem dolazi do otkaza elementa ili preostalo životno vrijeme elementa. Ova primjena posebno je korisna za određivanje garancije uređaja, zakazivanje redovitih popravaka i pregleda te planiranja zamjena uređaja.

Primjer 1. *Proizvođač želi odrediti duljinu garancije novog proizvoda na tržištu. Testirao je 50 proizvoda i zabilježio njihovo vrijeme otkaza. Vremena otkaza (u mjesecima) iznose: 56, 8, 25, 24, 78, 29, 65, 66, 35, 30, 12, 15, 77, 42, 81, 68, 36, 52, 10, 73, 54, 49, 63, 3, 32, 48, 69, 40, 21, 71, 18, 9, 83, 33, 20, 58, 80, 85, 6, 47, 38, 61, 27, 45, 72, 49, 60, 41, 22, 75. Odredimo očekivano vrijeme trajanja proizvoda, procijenimo vjerojatnost funkcioniranja(preživljavanja) u različitim vremenskim periodima i prokomentirajmo predloženu duljinu garancije za pouzdanost 90%. (procijenjeni parametri su: parametar lokacije=0, parametar skaliranja=49.2 , parametar oblika=0.6) .*

Zadana je $T \sim W(0, 49.2, 0.6)$.

a) Očekivano vrijeme trajanja proizvoda

$$\begin{aligned} ET &= a + b\,\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) = 49.2\,\Gamma\left(1+\frac{1}{0,6}\right) \\ &= 49.2\int_0^\infty x^{\frac{1}{0,6}} e^{-\left(1+\frac{1}{0,6}\right)}\,dx = 49.2 \cdot 1.6908 \\ &= 83.24. \end{aligned}$$

Očekivano vrijeme trajanja proizvoda je 83 mjeseca, tj. malo kraće od 7 godina.

b) Odredimo vjerojatnost preživljavanja za $t = 12$, $t = 36$, $t = 72$, $t = 120$, $t = 240$

$$R_T(t) = e^{-\left(\frac{t}{49.2}\right)^{0.6}}$$

$$\begin{aligned} R_T(12) &= e^{-\left(\frac{12}{49.2}\right)^{0.6}} = 0.995 \\ R_T(36) &= e^{-\left(\frac{36}{49.2}\right)^{0.6}} = 0.950 \\ R_T(72) &= e^{-\left(\frac{72}{49.2}\right)^{0.6}} = 0.878 \\ R_T(120) &= e^{-\left(\frac{120}{49.2}\right)^{0.6}} = 0.737 \\ R_T(240) &= e^{-\left(\frac{240}{49.2}\right)^{0.6}} = 0.563. \end{aligned}$$

Vjerojatnost da će uređaj raditi nakon 3 godine je 95%,a nakon 7 godina 87.8%.

c) Ukoliko proizvođač želi osigurati pouzdanost od 90% potrebno je pronaći t takav da vrijedi $R_T(240) = 0.9$ *, tj.* $e^{-(\frac{t}{49.2})^{0.6}} = 0.9$.

Sada je $t = 49.2 \cdot (-\ln(0.9))^{\frac{1}{0.6}} = 49.2 \cdot 1.1122 = 54.7$.

Garancija bi trebala biti 55 ili više mjeseci, pa pretpostavimo da je proizvođač odlučio osigurati 5 godina garancije.

Usporedimo li to s očekivanim trajanjem uređaja možemo primijetiti da kada kupcu uređaj otkaže, vjerojatno ga neće moći zamijeniti ili popraviti kod proizvođača jer više neće biti pod garancijom.

4.3 Primjena - analiza brzine vjetra

Weibullova distribucija je obično korištena u polju obnovljivih izvora energije i vjetroenergije za modeliranje distribucije brzine vjetra. Ona daje statistički prikaz frekvencija i magnituda brzine vjetra na danoj lokaciji.

Weibullova funkcija distribucije u analizi brzine vjetra zadana je :

$$F(v) = 1 - e^{-\left(\frac{v}{A}\right)^k},$$

gdje v predstavlja brzinu vjetra, k je parametar oblika vjetra i A parametar odnosa veličine, $F(v)$ predstavlja frekvenciju određene brzine vjetra. Parametar oblika k je iz intervala [1,3] te manje vrijednosti označavaju da vjetar ima promjenjiv oblik, tj. veća odstupanja od srednje brzine vjetra, dok su vjetrovi s k bližim 3 konstantni. Parametar A je proporcionalan srednjoj brzini vjetra i mjeri se u m/s.

Ovi podatci značajni su pri planiranju i izgradnji vjetroelektrana i proizvodnji električne energije putem njih. Procjene pomažu pri dizajniranju turbina, određivanju kapacitete turbina, optimizaciji oblika, što sve utječe na procjenu ekonomske isplativosti projekata vjetroelektrana. Više o ovome može se pronaću u [8].

4.4 Primjena - farmakokinetika

Farmakokinetika grana je farmacije koja opisuje promjene koncentracije lijeka u plazmi tokom vremena. Weibullova distribucija koristi se za procjene vremena potrebnog za potpunu razgradnju lijeka u tijelu, te za procjene vremena potrebnog za čišćenje (eng. clearance) odnosno sposobnost tijela da u potpunosti eliminira lijek . Podatci se prikupljanju tako da se grupi ispitanika, nakon konzumacije određene količine lijeka mjeri prisutnost lijeka u tijelu kroz vremenski interval. Vrijeme potrebno za otapanje lijeka u tijelu procjenjuje se koristeći Weibullovu distribuciju

$$M(t) = M_0(1 - e^{-\left(\frac{1-t}{\lambda}\right)^k}),$$

gdje $t > 0$ predstavlja vrijeme nakon korištenja lijeka, $M(t)$ količinu lijeka otpuštenog u tijelo u danom trenutku, M_0 je ukupna količina otpuštenog lijeka, λ je parametar skaliranja koji opisuje vremensku ovisnost, a k parametar koji opisuje oblika krivulje topljivosti.
Ove procjene značajne su za pravilno određivanje distribuiranja i doziranja lijekova, kako bi liječnici i farmaceuti mogli pretpostaviti i prilagoditi doze lijekova pacijentima ovisno o vremenu djelovanja tj. čišćenja. [7]

4.5 Primjena - šumarstvo

Weibullova distribucija u šumarstvu se primjenjuje za modeliranje distribucije promjera stabala što šumarima omogućava bolje donošenje odluka vezanih uz gospodarenje šumama, obrezivanje i sječu stabala.

Odgovarajuća dvoparametarska Weibullova distribucija za procjenu distribucije promjera stabala dana je funkcijom gustoće :

$$f(d) = \frac{c}{b}\left(\frac{d}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{d}{b}\right)^{c}}, x > a,$$

gdje je $d > 0$ promjer stabla na prsnoj visini(na visini 1.37 m), b je parametar skaliranja na kojeg utječe karakterističan promjer pojedinih vrsta stabala u šumi i c parametar oblika. Razvijeni i implementirani modeli Weibullove distribucije za procjene prsnog promjera koriste podatke o dominantnoj visini, baznoj površni i broju stabala po jedinici površine tla za precizno određene parametre. Više o ovome može se pronaći u [10].

4.6 Primjena - građevina

U građevini Weibullova statistika koristi se u analizi krhkog loma (eng. brittle material failure). Korištenjem eksperimentalnih rezultata čvrstoće materijala utvrđeno je da se dvoparametarska i troparametarska Weibullova distribucija efikasno primjenjuju u analizi vjerojatnosti loma stijena. Beton je primjer tipičnog krhkog materijala, čija čvrstoća nije konstantna, ona ovisi o temperaturi, vlazi, oplati, raspodjeli čestica i dr. Slično kao i stijena, distribucija čvrstoće betona, tj. vlačna i tlačna čvrstoća kao i zamor materijala mogu se opisati Weibullovom distribucijom. Više o ovome može se pročitati u [4].

U [4] pokazano je da je zbog nasumičnog položaja čestica u cementu Weibullova distribucija korištena za vršno opterećenje P_{max} i koeficijent disperzije β. Rezultati čvrstoće f_t i vlačne čvrstoće K_{IC} ispitani metodom Weibullove distribucije bili su gotovo identični onima ispitanim grafičkim metodama.

Popis slika

Literatura

[1] M. BENŠIĆ, N. ŠUVAK: *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] R. HORST: *The Weibull Distribution: A Handbook*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2009.

[3] N. L. JOHNSON, S. KOTZ, N. BALAKRISHMAN: *Continuous Univariate Distributions, Volume 1, Second edition*, A Wiley-Interscience, New York, 1994.

[4] L. LI, J. GUAN, P. YUAN, Y. YIN, Y. LI: *A Weibull distribution-based method for the analysis of concrete fracture* , Engineering Fracture Mechanics, China, 2021.

[5] D. MARKOVIĆ: *Problem procjene parametara u Weibullovom modelu*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2009.

[6] J. I. MCCOOL: *Using the Weibull Distribution, Reliability, Modeling, and Inference*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2012.

[7] A. MILIČEVIĆ: *Kinetički modeli u farmaceutskoj industriji* , Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.

[8] S. PEŠUT: *Utjecaj parametara Weibullove distribucije na radne parametre vjetroagregata*, Sveučilište u Splitu, Split, 2021.

[9] P. ROSIN, E. RAMMLER: *The law governing the fineness of powdered coal*, Journal Inst. Fuel, 1933.

[10] Q. SA, X. JIN, T. PUKKALA: *Developing Weibull-based diameter distributions for the major coniferous species in Heilongjiang Province, China.*, 2023., https://doi.org/10.1007/s11676-023-01610-9, pristupljeno 17.9.2023

[11] E. W. STACY: *A Generalization of the Gamma Distribution*,Institute of Mathematical Statistics, 1962.

[12] W. WEIBULL: *A statistical distribution function of wide applicability*,Journal of Applied Mechanics, Stockholm, 1951.