

Pseudo-euklidski prostori

Bradić, Nensi

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:845212>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-02**



mathos

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij
Matematika

Nensi Bradić

Pseudo-euklidski prostori

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij
Matematika

Nensi Bradić

Pseudo-euklidski prostori

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2023.

Sažetak: U ovom radu ćemo opisati pseudo-euklidske prostore. Navest ćemo osnovne rezultate vezane uz hermitske i bilinearne forme te prostore na kojima su takve forme definirane.

Ključne riječi: pseudo-euklidski prostori, pseudo-euklidska geometrija, hermitske forme, operatori, vektorski prostor.

Pseudo-Euclidean spaces

Summary:

In this paper we will describe pseudo-Euclidean spaces. We will list the basic results related to Hermitian and bilinear forms and the spaces on which such forms are defined.

Key words: pseudo-Euclidean spaces, pseudo-Euclidean geometry, Hermitian forms, operators, vector space.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Pseudo-euklidski prostori	2
2.1	Geometrija nedefinitnih hermitskih formi	2
2.1.1	Definicija hermitskih formi	2
2.1.2	Jezgra 3. forme	3
2.1.3	Preliminarne leme	4
2.1.4	Klasifikacija hermitskih formi	4
2.1.5	Nekoliko definicija	8
2.1.6	Druga kanonska forma	9
2.1.7	Linearni funkcionali	10
2.1.8	Ortogonalni komplementi	10
2.1.9	Izotropni potprostori	11
2.1.10	Dualnost izotropnih potprostora	12
	Literatura	13

1 Uvod

Euklidski prostori su temeljni prostori klasične geometrije koja se često koristi u matematici, kao i u teorijskoj fizici. Iako imaju slične karakteristike kao i pseudo-euklidski prostori, ipak se razlikuju u nekim karakteristikama. Pseudo-euklidski prostor je vektorski prostor definiran nad poljem realnih brojeva na kojem je zadana nedegenerirana kvadratna forma. U ovom radu opisat ćemo vektorske prostore kroz različite hermitske forme, odnosno različite uvjete zadane s vrijedećim svojstvima. Prikazat ćemo i razne ortogonalne komplemente unutar određenih ravnina te se dotaknuti raznih teorema i lema koji će biti potkrijepljeni svojim dokazima.

2 Pseudo-euklidski prostori

2.1 Geometrija nedefinitnih hermitskih formi

2.1.1 Definicija hermitskih formi

Definicija 2.1. ([2], 1.1. Definition of Hermitian forms.) Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva. Seskvilinearna forma na V je preslikavanje B s $V \times V$ u \mathbb{C} za koje vrijede iduća svojstva:

$$\begin{aligned} B(v_1 + v_2, w) &= B(v_1, w) + B(v_2, w), & B(v, w_1 + w_2) &= B(v, w_1) + B(v, w_2), \\ B(\lambda v, w) &= \lambda B(v, w), & B(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} B(v, w) \end{aligned}$$

za $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ i za svaki $v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.

Kažemo da je seskvilinearna forma hermitska ako za sve v, w iz V vrijedi

$$B(w, v) = \overline{B(v, w)}.$$

Posebno, za svaki $v \in V$ je $B(v, v) \in \mathbb{R}$, jer vrijedi $B(v, v) = \overline{B(v, v)}$.

Dodavanjem uvjeta $B(v, v) > 0$ za $v \neq 0$ dobivamo definiciju skalarnog produkta u kompleksnom euklidskom prostoru.

Kažemo da je vektor v :

B – pozitivan, ako $B(v, v) > 0$,

B – negativan, ako $B(v, v) < 0$,

B – izotropan, ako $B(v, v) = 0$.

Kažemo da su dva vektora v, w ortogonalni ako je $B(v, w) = 0$.

Propozicija 2.1. ([2], Proposition 1.1) a) Svaka se hermitska forma na \mathbb{C}^n može prikazati u obliku

$$B(v, w) = vQw^*,$$

gdje su $v, w \in \mathbb{C}^n$, dok je Q hermitska $n \times n$ matrica.

b) Za linearno preslikavanje g , zamjena varijabli $v \rightarrow vg$ inducira zamjenu

$$Q \rightarrow gQg^*.$$

Dokaz:

Označimo s $\{e_1, \dots, e_n\}$ standardnu (ili kanonsku) bazu za \mathbb{C}^n . Tada imamo

$$B(v, w) = B\left(\sum v_j e_j, \sum w_k e_k\right) = \sum v_j \overline{w_k} B(e_j, e_k).$$

□

2.1.2 Jezgra 3. forme

Jezgra $\ker B$ dane forme B je potprostor $W \subset V$ koji se sastoji od vektora w takvih da je $B(w, v) = 0$ za svaki v .

Rang forme B definiramo kao kodimenziju jezgre od B te označavamo s rkB . Dakle, $rkB = \dim V - \dim(\ker B)$. Kažemo da je forma nedegenerirana ako je njena jezgra jednaka nul-prostoru, tj. $\ker B = \{0\}$.

Lema 2.1. ([2], Lemma 1.2) *Forma B inducira nedegeneriranu hermitsku formu na kvocijentnom prostoru $V/\ker B$.*

Dokaz:

$V/\ker B$ prostor se sastoji od vektora definiranih kao klase ekvivalencije

$$v \sim v' \iff v - v' \in \ker B.$$

Neka je $v' = v + \xi$, $w' = w + \eta$, gdje $\xi, \eta \in \ker B$. Tada je

$$B(v', w') = B(v + \xi, w + \eta) = B(v, w) + 0 + 0 + 0.$$

Stoga stvarno dobivamo formu na kvocijentnom prostoru. □

Napomenimo kako se može pokazati da je ovako definirana forma na kvocijentnom prostoru nedegenerirana.

Pseudo-euklidski prostor je kompleksni vektorski prostor snabdjeven nedegeneriranom hermitskom formom te u ovakvom slučaju formu obično označavamo s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i nazivamo ju skalarnim produktom.

2.1.3 Preliminarne leme

Lema 2.2. ([2], Lemma 1.3) *Neka je $h \in V$ izotropan vektor, $v \notin \ker B$. Tada postoji $g \in V$ takav da je*

$$\langle h, h \rangle = \langle g, g \rangle = 0, \quad \langle h, g \rangle = 1. \quad (2.1)$$

Dokaz:

Razmotrimo proizvoljan vektor $r \in V$ takav da je $B(h, r) = \sigma \neq 0$. Stavimo li $r' := \bar{\sigma}^{-1}r$, dobivamo $B(h, r') = 1$. Kada stavimo da je $g := r' + sh$, gdje je $s \in \mathbb{R}$, tada dobivamo

$$B(h, g) = 1, \quad B(g, g) = B(r', r') + 2s.$$

Uzimamo $s := -B(r', r')/2$ i dobivamo željeni g . □

Lema 2.3. ([2], Lemma 1.4) *Neka je forma B nedegenerirana. Tada postoji vektor v takav da je $B(v, v) = \pm 1$.*

Dokaz:

Uzmimo proizvoljni vektor h . Ako nije izotropan, onda zaključak vrijedi. Inače biramo vektor g koji zadovoljava (2.1) i dobivamo $v := (h + g)/\sqrt{2}$. □

Lema 2.4. ([2], Lemma 1.5) *Ako se može pronaći pozitivan i negativan vektor, tada postoji izotropni vektor različit od nule.*

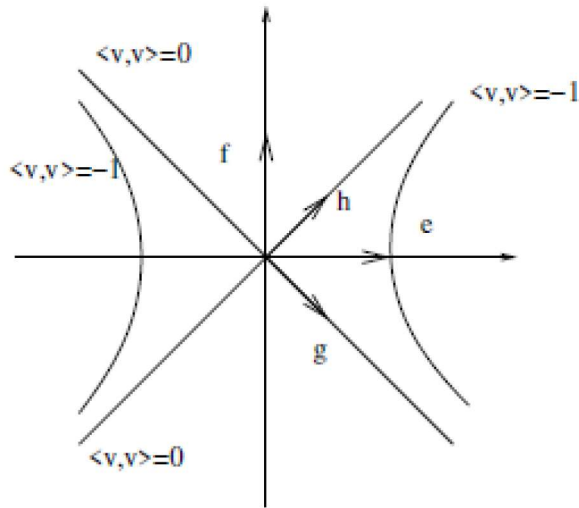
Dokaz:

Neka je $B(e, e) = +1, B(f, f) = -1$. Tada su ti vektori linearno neovisni. Prema teoremu srednje vrijednosti, jedna od točaka segmenta $te + (1 - t)f$ je izotropna. □

2.1.4 Klasifikacija hermitskih formi

Definicija 2.2. ([2], 1.4. Classification of Hermitian forms.) *Za potprostor $S \subset V$, definiramo njegov ortogonalni komplement S^\perp kao skup svih vektora $v \in V$ takvih da je $B(v, z) = 0$ za svaki $z \in S$.*

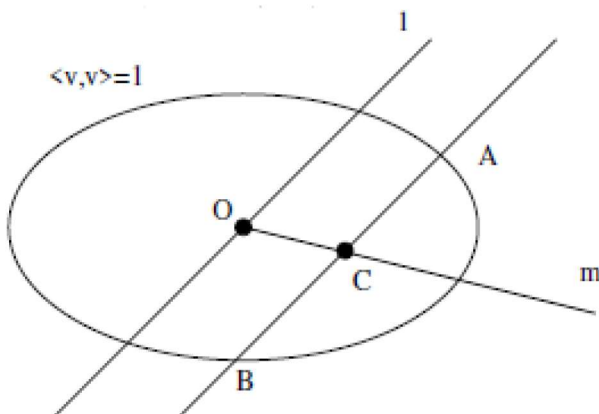
Ako je forma B degenerirana, onda je $S^\perp \supset \ker B$ za svaki S .



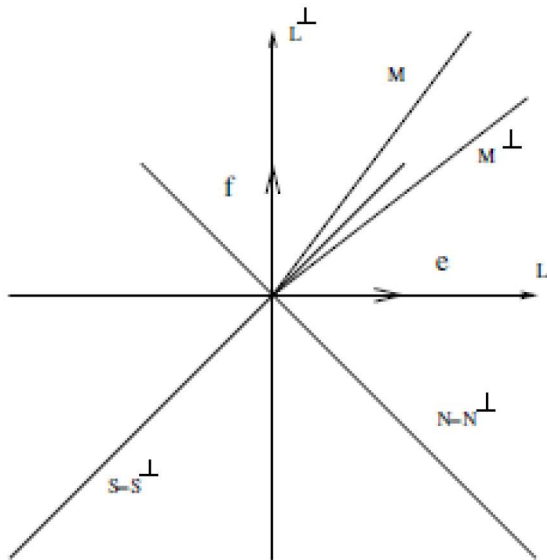
Slika 2.1.: Prostor $\mathbb{R}^{1,1}$ sa skalarnim produktom

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = -v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

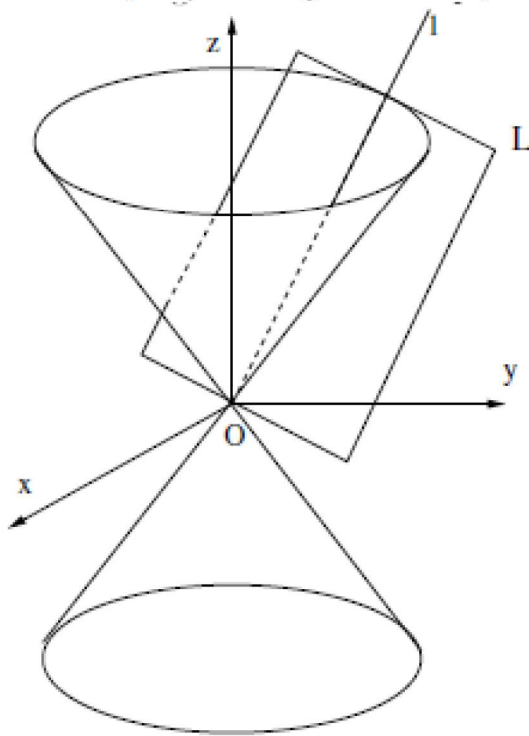
Nivo-krivulje $\langle v, v \rangle = konst.$ su hiperbole; izotropni vektori v sadržani su u paru pravaca. Predstavljamo jednu od mogućih baza e, f i jednu od baza h, g .



Slika 2.2. : Jedna od interpretacija ortogonalnih komplementata. Razmotrimo dvodimenzionalnu realnu ravninu s pozitivnim skalarnim produktom. Možemo primjetiti nivo-krivulje $\langle v, v \rangle = 1$. Neka l bude pravac. Razmotrimo pravac paralelan s l . Neka su A, B točke sjecišta pravca i elipse. Razmotrimo središte C segmenta $[A, B]$. Pravac OC je ortogonalni komplement od l .



Slika 2.3. Četiri primjera ortogonalnih komplementa u ravнини $\mathbb{R}^{1,1}$.



Slika 2.4. Primjer ortogonalnih komplementa u $\mathbb{R}^{2,1}$. Stožac je stožac izotropnih vektora. Ortogonalni komplement $L = l^\perp$ izotropnog pravca l je tangenta na stožac duž L .

Teorem 2.1. ([2], Theorem 1.6) a) Svaka hermitska forma na n -dimenzionalnom prostoru može se reducirati na zbroj kvadrata u nekoj bazi, točnije

$$B(x, y) = - \sum_{j \leq p}^n x_j \bar{y}_j + \sum_{p < j \leq p+q}^n x_j \bar{y}_j. \quad (2.2)$$

b) Brojevi p i q , koje nazivamo negativni i pozitivni indeksi tromosti su neovisni o odabiru baze.

c) $\text{rk} B = p + q$.

Na primjer, u n -dimenzionalnom pseudo-euklidskom prostoru može se odabrati baza $e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q$ (gdje je $p + q = n$) tako da je

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \dots = \langle e_p, e_p \rangle = -1 \quad \langle f_1, f_1 \rangle = \dots = \langle f_q, f_q \rangle = -1, \quad (2.3)$$

a svi ostali skalarni produkti elemenata baze su nula. S $\mathbb{C}^{p,q}$ označavamo pseudo-euklidski prostor opremljen takvom bazom.

Dokaz:

a) Razmotrimo proizvoljni komplementarni potprostor Y u odnosu na $\ker B$. Očito, forma je nedegenerirana na Y , stoga se tvrdnja svodi na slučaj nedegeneriranih formi. Stoga pretpostavljamo da je B nedegeneriran. Prema Lemi 2.3, može se pronaći vektor e_1 takav da je $B(e_1, e_1) = \pm 1$. \square

Lema 2.5. ([2], Lemma 1.7) $V = \mathbb{C}e_1 \oplus (\mathbb{C}e_1)^\perp$.

Dokaz:

Neka je ξ vektor koji nije kolinearan s e_1 . Tada je vektor

$$\eta := \xi - \frac{\langle \xi, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1$$

okomit na e_1 te je $\xi \in \mathbb{C}e_1 \oplus (\mathbb{C}e_1)^\perp$. \square

Zatim, uzimamo vektor $e_2 \in (\mathbb{C}e_1)^\perp$ tako da je $B(e_2, e_2) = \pm 1$ i razmotrimo njegov ortogonalni komplement u $(\mathbb{C}e_1)^\perp$, itd.

2.1.5 Nekoliko definicija

Forma B je *pozitivno-definitna* ako i samo ako je $B(v, v) > 0$ za svaki $v \in V$ koji je različit od nule. Ako je forma pozitivno-definitna, kažemo da je prostor *euklidski*. U tom slučaju se jednakost (2.2) svodi na

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j.$$

Kažemo da je forma:

negativno definitna ako i samo ako je $B(v, v) < 0$ za svaki $v \neq 0$

ne-negativno definitna (ili *pozitivno semi-definitna*) ako i samo ako je $B(v, v) \geq 0$

ne-pozitivno definitna (ili *negativno semi-definitna*) ako i samo ako je $B(v, v) \leq 0$

indefinitna ako ima vrijednosti različitih predznaka.

Neka je B proizvoljna hermitska forma unutar V . Kažemo da je potprostor $W \subset V$ *pozitivan* ako je forma B pozitivno definitna na W te na sličan način definiramo prostore koji nisu negativni, negativne prostore itd.

Za potprostor W kažemo da je *regularan* ako je B nedegeneriran na W . Inače je W *singularan*.

Lema 2.6. ([2], Lemma 1.8) *Indeks negativne (odnosno pozitivne) tromosti forme B podudara se s maksimalnom dimenzijom negativnog (odnosno pozitivnog) potprostora.*

Dokaz:

Promotrimo li formu B koja je zadana jednakošću (2.2), možemo pretpostaviti da postoji negativan potprostor X čija je dimenzija veća od p . Označimo li sa S linearnu ljusku vektora $e_{p+1}, e_{p+2} \dots$ tada vrijedi $\dim(X) + \dim(S) > \dim(S)$ te stoga X i S imaju sjecište različito od nule, ali X je negativan, a S ne-negativan. \square

2.1.6 Druga kanonska forma

Teorem 2.2. ([2], Theorem 1.9) Neka je B hermitska forma s indeksom tromosti $p \leq q$, $\dim \ker B = k$. Tada se njegova matrica može svesti na

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p & 0 & 0 \\ 1_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{q-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_p & 0 \\ 0 & 1_{q-p} & 0 & 0 \\ 1_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je B nedegeneriran.

Dokaz:

Neka su baze e_i, f_k kao u (2.3).

$$h_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + f_j), \quad g_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j - f_j), \quad \text{za } j \leq p, \quad f_k, \quad \text{za } k > p.$$

Time se dobiva željena kanonska forma. □

2.1.7 Linearni funkcionali

Neka je V pseudo-euklidski prostor. Prostor svih linearnih funkcionala na V označavamo s V° . Za vektor $v \in V$, definiramo linearni funkcional l_v na V pomoću

$$l_v(w) = \langle w, v \rangle.$$

Propozicija 2.2. ([2], Proposition 1.10) Preslikavanje $i: v \mapsto l_v$ je antilinearna bijekcija iz V na V° .

Dokaz:

Budući da su dimenzije V i V° iste, preslikavanje je bijektivno. \square

2.1.8 Ortogonalni komplementi

Teorem 2.3. ([2], Theorem 1.11) Za bilo koji potprostor S u pseudo-euklidskom prostoru V vrijedi:

a) $(S^\perp)^\perp = S$

b) $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$.

Lema 2.7. ([2], Lemma 1.12) Neka je W konačno-dimenzionalni vektorski prostor i neka su l_1, \dots, l_k linearno nezavisni funkcionali na W . Tada potprostor

$$(\ker l_1) \cap \dots \cap (\ker l_k) \tag{2.5}$$

ima kodimenziju k u W .

Dokaz:

Proširujemo l_j na bazu unutar dualnog prostora. Promotrimo dualnu bazu $e_1, \dots, e_n \in W$,

$$l_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Potprostor (2.6) je razapet vektorima e_{k+1}, \dots, e_n . \square

Sada možemo dokazati i prethodni teorem.

Dokaz:

- a) Budući da vrijedi $S \subset (S^\perp)^\perp$, navedeni prostori imaju istu dimenziju.
 b) Neka je e_1, \dots, e_k baza unutar S . Uzimajući funkcionalne $l_j(v) := \langle v, e_j \rangle$, po definiciji vrijedi $S^\perp = \bigcap \ker l_j$ te slijedi $\text{kodim} S^\perp = \dim S$. \square

Propozicija 2.3. ([2], Proposition 1.13) U pseudo-euklidskom prostoru vrijede sljedeće tvrdnje:

- a) presjek $S \cap S^\perp$ jednak je jezgri restrikcije forme na (S) i jezgri restrikcije forme na (S^\perp) ,
 b) ako je S regularan, onda vrijedi $V = S \oplus S^\perp$,
 c) $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$,
 d) $(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$,
 e) ako je $S \subset T$, onda vrijedi $S^\perp \supset T^\perp$.

2.1.9 Izotropni potprostori

Razmotrimo pseudo-euklidski prostor V snabdjeven formom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potprostor $W \subset V$ je

$$\text{izotropan ako je} \quad \langle v, w \rangle = 0 \quad \text{za svaki } v, w \in W.$$

Ekvivalentno tome, W je izotropan ako je $W \subset W^\perp$.

Teorem 2.4. ([2], Theorem 1.14)

- a) Najveća moguća dimenzija izotropnog potprostora je $\min(p, q)$, gdje su (p, q) indeksi tromosti.
 b) Svaki izotropni potprostor sadržan je u izotropnom potprostoru najveće moguće dimenzije.

Dokaz:

- a) Pretpostavimo da je $p \leq q$. Druga kanonska forma (Teorem 2.2) podrazumijeva postojanje p -dimenzionalnog izotropnog potprostora. Dovoljno je uzeti u obzir linearnu ljusku prvih p vektora baze.

Pretpostavimo da postoji izotropni potprostor dimenzije veće od p . Tada je njegovo sjecište s q -dimenzionalnim pozitivnim potprostorom različito od nule, što nas dovodi do kontradikcije.

b) Neka je T m -dimenzionalni izotropni potprostor. Imajući u vidu $T^\perp \supset T$ i $(T^\perp)^\perp$, uočavamo da je T jednak jezgri restrikcije forme na T^\perp . Označimo sa S komplementarni potprostor od T unutar T^\perp ; tada je $\dim S = \dim V - 2m$ i $V = S \oplus S^\perp$.

Razmotrimo dva slučaja.

1. Neka je S indefinitna, $h \in S$ izotropni vektor. Tada je $T \oplus \mathbb{C}h$ izotropni potprostor dimenzije $m + 1$.
2. Neka je S pozitivno ili negativno definitna. Onda vrijedi da je $\dim(S^\perp) = 2m, T \subset S^\perp$ izotropan potprostor, dok je $\dim(S) = m$. Stoga su indeksi inercije forme S^\perp zapravo (m, m) . A shodno tome su indeksi inercije forme V zapravo $m, m + \dim(S)$ ili $(m + \dim(S), m)$ prema predznaku S . Drugim riječima, T ima najveću moguću dimenziju. \square

2.1.10 Dualnost izotropnih potprostora

Dualnost izotropnih potprostora možemo pokazati na primjeru $p = q$, pri čemu su W_1, W_2 komplementarni izotropni potprostori. Za vektor $h \in W_1$ definiramo linearni funkcional na W_2 s $l_h(v) = \langle v, h \rangle$. Tada je $h \mapsto l_h$ bijekcija od W_1 na prostor linearnih funkcionala na W_2 .

Literatura

- [1] C. M. Fulton, A Pseudo-Euclidean Geometry, Proceedings of the American Mathematical Society, 10 (1959), 304-306
- [2] Y. A. Neretin, Lectures on Gaussian Integral Operators and Classical Groups, European Mathematical Society, 2011.