

# Pseudo-euklidski prostori

---

**Bradić, Nensi**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:845212>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-01**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij  
Matematika

Nensi Bradić

## Pseudo-euklidski prostori

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij  
Matematika

Nensi Bradić

## Pseudo-euklidski prostori

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2023.

**Sažetak:** U ovom radu ćemo opisati pseudo-euklidske prostore. Navest ćemo osnovne rezultate vezane uz hermitske i bilinearne forme te prostore na kojima su takve forme definirane.

**Ključne riječi:** pseudo-euklidski prostori, pseudo-euklidska geometrija, hermitske forme, operatori, vektorski prostor.

# Pseudo-Euclidean spaces

## Summary:

In this paper we will describe pseudo-Euclidean spaces. We will list the basic results related to Hermitian and bilinear forms and the spaces on which such forms are defined.

**Key words:** pseudo-Euclidean spaces, pseudo-Euclidean geometry, Hermitian forms, operators, vector space.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Pseudo-euklidski prostori</b>	<b>2</b>
2.1	Geometrija nedefinitnih hermitskih formi . . . . .	2
2.1.1	Definicija hermitskih formi . . . . .	2
2.1.2	Jezgra 3. forme . . . . .	3
2.1.3	Preliminarne leme . . . . .	4
2.1.4	Klasifikacija hermitskih formi . . . . .	4
2.1.5	Nekoliko definicija . . . . .	8
2.1.6	Druga kanonska forma . . . . .	9
2.1.7	Linearni funkcionali . . . . .	10
2.1.8	Ortogonalni komplementi . . . . .	10
2.1.9	Izotropni potprostori . . . . .	11
2.1.10	Dualnost izotropnih potprostora . . . . .	12
	<b>Literatura</b>	<b>13</b>

# 1 Uvod

Euklidski prostori su temeljni prostori klasične geometrije koja se često koristi u matematici, kao i u teorijskoj fizici. Iako imaju slične karakteristike kao i pseudo-euklidski prostori, ipak se razlikuju u nekim karakteristikama. Pseudo-euklidski prostor je vektorski prostor definiran nad poljem realnih brojeva na kojem je zadana nedegenerirana kvadratna forma. U ovom radu opisat ćemo vektorske prostore kroz različite hermitske forme, odnosno različite uvjete zadane s vrijedećim svojstvima. Prikazat ćemo i razne ortogonalne komplemente unutar određenih ravnina te se dotaknuti raznih teorema i lema koji će biti potkrijepljeni svojim dokazima.

## 2 Pseudo-euklidski prostori

### 2.1 Geometrija nedefinitnih hermitskih formi

#### 2.1.1 Definicija hermitskih formi

**Definicija 2.1.** ([2], 1.1. Definition of Hermitian forms.) Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva. Seskvilinearna forma na  $V$  je preslikavanje  $B$  s  $V \times V$  u  $\mathbb{C}$  za koje vrijede iduća svojstva:

$$\begin{aligned} B(v_1 + v_2, w) &= B(v_1, w) + B(v_2, w), & B(v, w_1 + w_2) &= B(v, w_1) + B(v, w_2), \\ B(\lambda v, w) &= \lambda B(v, w), & B(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} B(v, w) \end{aligned}$$

za  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  i za svaki  $v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ .

Kažemo da je seskvilinearna forma hermitska ako za sve  $v, w$  iz  $V$  vrijedi

$$B(w, v) = \overline{B(v, w)}.$$

Posebno, za svaki  $v \in V$  je  $B(v, v) \in \mathbb{R}$ , jer vrijedi  $B(v, v) = \overline{B(v, v)}$ .

Dodavanjem uvjeta  $B(v, v) > 0$  za  $v \neq 0$  dobivamo definiciju skalarnog produkta u kompleksnom euklidskom prostoru.

Kažemo da je vektor  $v$  :

$B$  – pozitivan, ako  $B(v, v) > 0$ ,

$B$  – negativan, ako  $B(v, v) < 0$ ,

$B$  – izotropan, ako  $B(v, v) = 0$ .

Kažemo da su dva vektora  $v, w$  ortogonalni ako je  $B(v, w) = 0$ .

**Propozicija 2.1.** ([2], Proposition 1.1) a) Svaka se hermitska forma na  $\mathbb{C}^n$  može prikazati u obliku

$$B(v, w) = vQw^*,$$

gdje su  $v, w \in \mathbb{C}^n$ , dok je  $Q$  hermitska  $n \times n$  matrica.

b) Za linearno preslikavanje  $g$ , zamjena varijabli  $v \rightarrow vg$  inducira zamjenu

$$Q \rightarrow gQg^*.$$



**Dokaz:**

Označimo s  $\{e_1, \dots, e_n\}$  standardnu (ili kanonsku) bazu za  $\mathbb{C}^n$ . Tada imamo

$$B(v, w) = B\left(\sum v_j e_j, \sum w_k e_k\right) = \sum v_j \overline{w_k} B(e_j, e_k).$$

□

**2.1.2 Jezgra 3. forme**

Jezgra  $\ker B$  dane forme  $B$  je potprostor  $W \subset V$  koji se sastoji od vektora  $w$  takvih da je  $B(w, v) = 0$  za svaki  $v$ .

Rang forme  $B$  definiramo kao kodimenziju jezgre od  $B$  te označavamo s  $rkB$ . Dakle,  $rkB = \dim V - \dim(\ker B)$ . Kažemo da je forma nedegenerirana ako je njena jezgra jednaka nul-prostoru, tj.  $\ker B = \{0\}$ .

**Lema 2.1.** ([2], Lemma 1.2) *Forma  $B$  inducira nedegeneriranu hermitsku formu na kvocijentnom prostoru  $V/\ker B$ .*

**Dokaz:**

$V/\ker B$  prostor se sastoji od vektora definiranih kao klase ekvivalencije

$$v \sim v' \iff v - v' \in \ker B.$$

Neka je  $v' = v + \xi$ ,  $w' = w + \eta$ , gdje  $\xi, \eta \in \ker B$ . Tada je

$$B(v', w') = B(v + \xi, w + \eta) = B(v, w) + 0 + 0 + 0.$$

Stoga stvarno dobivamo formu na kvocijentnom prostoru. □

Napomenimo kako se može pokazati da je ovako definirana forma na kvocijentnom prostoru nedegenerirana.

Pseudo-euklidski prostor je kompleksni vektorski prostor snabdjeven nedegeneriranom hermitskom formom te u ovakvom slučaju formu obično označavamo s  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  i nazivamo ju skalarnim produktom.

### 2.1.3 Preliminarne leme

**Lema 2.2.** ([2], Lemma 1.3) Neka je  $h \in V$  izotropan vektor,  $v \notin \ker B$ . Tada postoji  $g \in V$  takav da je

$$\langle h, h \rangle = \langle g, g \rangle = 0, \quad \langle h, g \rangle = 1. \quad (2.1)$$

**Dokaz:**

Razmotrimo proizvoljan vektor  $r \in V$  takav da je  $B(h, r) = \sigma \neq 0$ . Stavimo li  $r' := \bar{\sigma}^{-1}r$ , dobivamo  $B(h, r') = 1$ . Kada stavimo da je  $g := r' + sh$ , gdje je  $s \in \mathbb{R}$ , tada dobivamo

$$B(h, g) = 1, \quad B(g, g) = B(r', r') + 2s.$$

Uzimamo  $s := -B(r', r')/2$  i dobivamo željeni  $g$ . □

**Lema 2.3.** ([2], Lemma 1.4) Neka je forma  $B$  nedegenerirana. Tada postoji vektor  $v$  takav da je  $B(v, v) = \pm 1$ .

**Dokaz:**

Uzmimo proizvoljni vektor  $h$ . Ako nije izotropan, onda zaključak vrijedi. Inače biramo vektor  $g$  koji zadovoljava (2.1) i dobivamo  $v := (h + g)/\sqrt{2}$ . □

**Lema 2.4.** ([2], Lemma 1.5) Ako se može pronaći pozitivan i negativan vektor, tada postoji izotropni vektor različit od nule.

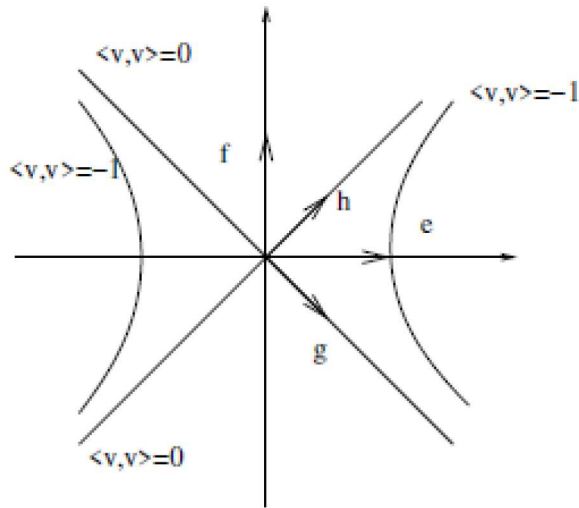
**Dokaz:**

Neka je  $B(e, e) = +1, B(f, f) = -1$ . Tada su ti vektori linearno neovisni. Prema teoremu srednje vrijednosti, jedna od točaka segmenta  $te + (1 - t)f$  je izotropna. □

### 2.1.4 Klasifikacija hermitskih formi

**Definicija 2.2.** ([2], 1.4. Classification of Hermitian forms.) Za potprostor  $S \subset V$ , definiramo njegov ortogonalni komplement  $S^\perp$  kao skup svih vektora  $v \in V$  takvih da je  $B(v, z) = 0$  za svaki  $z \in S$ .

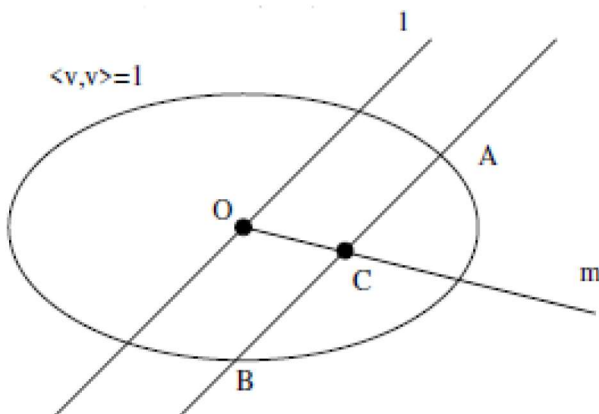
Ako je forma  $B$  degenerirana, onda je  $S^\perp \supset \ker B$  za svaki  $S$ .



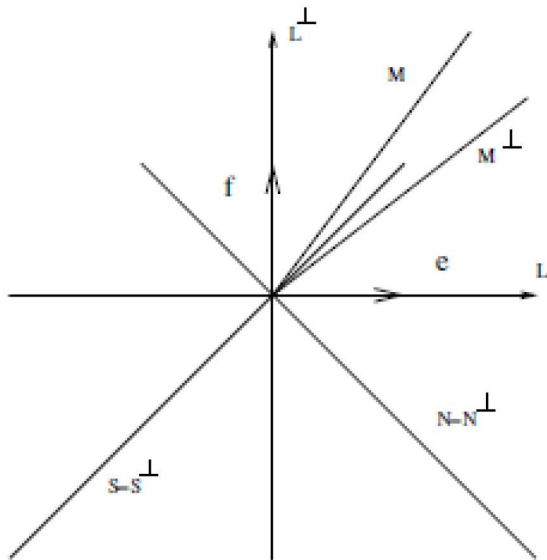
Slika 2.1.: Prostor  $\mathbb{R}^{1,1}$  sa skalarnim produktom

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = -v_1w_1 + v_2w_2.$$

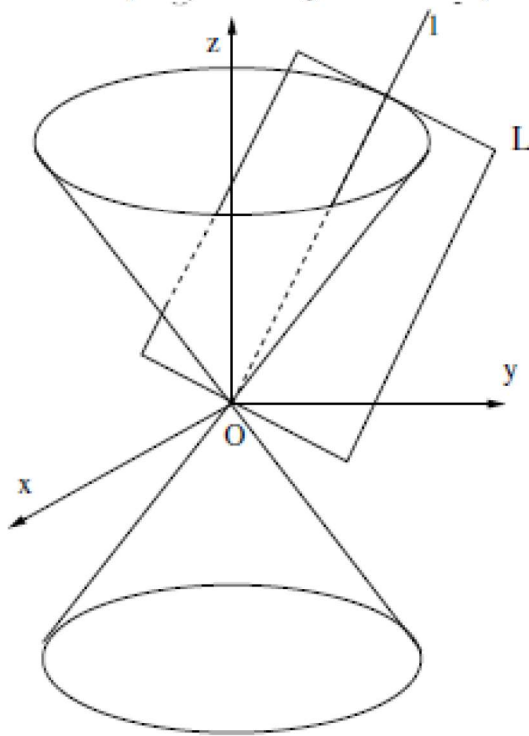
Nivo-krivulje  $\langle v, v \rangle = konst.$  su hiperbole; izotropni vektori  $v$  sadržani su u paru pravaca. Predstavljamo jednu od mogućih baza  $e, f$  i jednu od baza  $h, g$ .



Slika 2.2. : Jedna od interpretacija ortogonalnih komplementata. Razmotrimo dvodimenzionalnu realnu ravninu s pozitivnim skalarnim produktom. Možemo primjetiti nivo-krivulje  $\langle v, v \rangle = 1$ . Neka  $l$  bude pravac. Razmotrimo pravac paralelan s  $l$ . Neka su  $A, B$  točke sjecišta pravca i elipse. Razmotrimo središte  $C$  segmenta  $[A, B]$ . Pravac  $OC$  je ortogonalni komplement od  $l$ .



Slika 2.3. Četiri primjera ortogonalnih komplementa u ravнини  $\mathbb{R}^{1,1}$ .



Slika 2.4. Primjer ortogonalnih komplementa u  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Stožac je stožac izotropnih vektora. Ortogonalni komplement  $L = l^\perp$  izotropnog pravca  $l$  je tangenta na stožac duž  $L$ .

**Teorem 2.1.** ([2], Theorem 1.6) a) Svaka hermitska forma na  $n$ -dimenzionalnom prostoru može se reducirati na zbroj kvadrata u nekoj bazi, točnije

$$B(x, y) = - \sum_{j \leq p}^n x_j \bar{y}_j + \sum_{p < j \leq p+q}^n x_j \bar{y}_j. \quad (2.2)$$

b) Brojevi  $p$  i  $q$ , koje nazivamo negativni i pozitivni indeksi tromosti su neovisni o odabiru baze.

c)  $\text{rk} B = p + q$ .

Na primjer, u  $n$ -dimenzionalnom pseudo-euklidskom prostoru može se odabrati baza  $e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q$  (gdje je  $p + q = n$ ) tako da je

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \dots = \langle e_p, e_p \rangle = -1 \quad \langle f_1, f_1 \rangle = \dots = \langle f_q, f_q \rangle = -1, \quad (2.3)$$

a svi ostali skalarni produkti elemenata baze su nula. S  $\mathbb{C}^{p,q}$  označavamo pseudo-euklidski prostor opremljen takvom bazom.

**Dokaz:**

a) Razmotrimo proizvoljni komplementarni potprostor  $Y$  u odnosu na  $\ker B$ . Očito, forma je nedegenerirana na  $Y$ , stoga se tvrdnja svodi na slučaj nedegeneriranih formi. Stoga pretpostavljamo da je  $B$  nedegeneriran. Prema Lemi 2.3, može se pronaći vektor  $e_1$  takav da je  $B(e_1, e_1) = \pm 1$ .  $\square$

**Lema 2.5.** ([2], Lemma 1.7)  $V = \mathbb{C}e_1 \oplus (\mathbb{C}e_1)^\perp$ .

**Dokaz:**

Neka je  $\xi$  vektor koji nije kolinearan s  $e_1$ . Tada je vektor

$$\eta := \xi - \frac{\langle \xi, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1$$

okomit na  $e_1$  te je  $\xi \in \mathbb{C}e_1 \oplus (\mathbb{C}e_1)^\perp$ .  $\square$

Zatim, uzimamo vektor  $e_2 \in (\mathbb{C}e_1)^\perp$  tako da je  $B(e_2, e_2) = \pm 1$  i razmotrimo njegov ortogonalni komplement u  $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ , itd.

### 2.1.5 Nekoliko definicija

Forma  $B$  je *pozitivno-definitna* ako i samo ako je  $B(v, v) > 0$  za svaki  $v \in V$  koji je različit od nule. Ako je forma pozitivno-definitna, kažemo da je prostor *euklidski*. U tom slučaju se jednakost (2.2) svodi na

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j.$$

Kažemo da je forma:

*negativno definitna* ako i samo ako je  $B(v, v) < 0$  za svaki  $v \neq 0$

*ne-negativno definitna* (ili *pozitivno semi-definitna*) ako i samo ako je  $B(v, v) \geq 0$

*ne-pozitivno definitna* (ili *negativno semi-definitna*) ako i samo ako je  $B(v, v) \leq 0$

*indefinitna* ako ima vrijednosti različitih predznaka.

Neka je  $B$  proizvoljna hermitska forma unutar  $V$ . Kažemo da je potprostor  $W \subset V$  *pozitivan* ako je forma  $B$  pozitivno definitna na  $W$  te na sličan način definiramo prostore koji nisu negativni, negativne prostore itd.

Za potprostor  $W$  kažemo da je *regularan* ako je  $B$  nedegeneriran na  $W$ . Inače je  $W$  *singularan*.

**Lema 2.6.** ([2], Lemma 1.8) *Indeks negativne (odnosno pozitivne) tromosti forme  $B$  podudara se s maksimalnom dimenzijom negativnog (odnosno pozitivnog) potprostora.*

**Dokaz:**

Promotrimo li formu  $B$  koja je zadana jednakošću (2.2), možemo pretpostaviti da postoji negativan potprostor  $X$  čija je dimenzija veća od  $p$ . Označimo li sa  $S$  linearnu ljusku vektora  $e_{p+1}, e_{p+2} \dots$  tada vrijedi  $\dim(X) + \dim(S) > \dim(S)$  te stoga  $X$  i  $S$  imaju sjecište različito od nule, ali  $X$  je negativan, a  $S$  ne-negativan.  $\square$

### 2.1.6 Druga kanonska forma

**Teorem 2.2.** ([2], Theorem 1.9) Neka je  $B$  hermitska forma s indeksom tromosti  $p \leq q$ ,  $\dim \ker B = k$ . Tada se njegova matrica može svesti na

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p & 0 & 0 \\ 1_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{q-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_p & 0 \\ 0 & 1_{q-p} & 0 & 0 \\ 1_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je  $B$  nedegeneriran.

**Dokaz:**

Neka su baze  $e_i, f_k$  kao u (2.3).

$$h_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + f_j), \quad g_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j - f_j), \quad \text{za } j \leq p, \quad f_k, \quad \text{za } k > p.$$

Time se dobiva željena kanonska forma. □

### 2.1.7 Linearni funkcionali

Neka je  $V$  pseudo-euklidski prostor. Prostor svih linearnih funkcionala na  $V$  označavamo s  $V^\circ$ . Za vektor  $v \in V$ , definiramo linearni funkcional  $l_v$  na  $V$  pomoću

$$l_v(w) = \langle w, v \rangle.$$

**Propozicija 2.2.** ([2], Proposition 1.10) Preslikavanje  $i: v \mapsto l_v$  je antilinearna bijekcija iz  $V$  na  $V^\circ$ .

**Dokaz:**

Budući da su dimenzije  $V$  i  $V^\circ$  iste, preslikavanje je bijektivno. □

### 2.1.8 Ortogonalni komplementi

**Teorem 2.3.** ([2], Theorem 1.11) Za bilo koji potprostor  $S$  u pseudo-euklidskom prostoru  $V$  vrijedi:

a)  $(S^\perp)^\perp = S$

b)  $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$ .

**Lema 2.7.** ([2], Lemma 1.12) Neka je  $W$  konačno-dimenzionalni vektorski prostor i neka su  $l_1, \dots, l_k$  linearno nezavisni funkcionali na  $W$ . Tada potprostor

$$(\ker l_1) \cap \dots \cap (\ker l_k) \tag{2.5}$$

ima kodimenziju  $k$  u  $W$ .

**Dokaz:**

Proširujemo  $l_j$  na bazu unutar dualnog prostora. Promotrimo dualnu bazu  $e_1, \dots, e_n \in W$ ,

$$l_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Potprostor (2.6) je razapet vektorima  $e_{k+1}, \dots, e_n$ . □



Sada možemo dokazati i prethodni teorem.

**Dokaz:**

- a) Budući da vrijedi  $S \subset (S^\perp)^\perp$ , navedeni prostori imaju istu dimenziju.  
 b) Neka je  $e_1, \dots, e_k$  baza unutar  $S$ . Uzimajući funkcionalne  $l_j(v) := \langle v, e_j \rangle$ , po definiciji vrijedi  $S^\perp = \cap \ker l_j$  te slijedi  $\text{kodim} S^\perp = \dim S$ .  $\square$

**Propozicija 2.3.** ([2], Proposition 1.13) U pseudo-euklidskom prostoru vrijede sljedeće tvrdnje:

- a) presjek  $S \cap S^\perp$  jednak je jezgri restrikcije forme na  $(S)$  i jezgri restrikcije forme na  $(S^\perp)$ ,  
 b) ako je  $S$  regularan, onda vrijedi  $V = S \oplus S^\perp$ ,  
 c)  $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$ ,  
 d)  $(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$ ,  
 e) ako je  $S \subset T$ , onda vrijedi  $S^\perp \supset T^\perp$ .

### 2.1.9 Izotropni potprostori

Razmotrimo pseudo-euklidski prostor  $V$  snabdjeven formom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Potprostor  $W \subset V$  je

$$\text{izotropan ako je} \quad \langle v, w \rangle = 0 \quad \text{za svaki } v, w \in W.$$

Ekvivalentno tome,  $W$  je izotropan ako je  $W \subset W^\perp$ .

**Teorem 2.4.** ([2], Theorem 1.14)

- a) Najveća moguća dimenzija izotropnog potprostora je  $\min(p, q)$ , gdje su  $(p, q)$  indeksi tromosti.  
 b) Svaki izotropni potprostor sadržan je u izotropnom potprostoru najveće moguće dimenzije.

**Dokaz:**

- a) Pretpostavimo da je  $p \leq q$ . Druga kanonska forma (Teorem 2.2) podrazumijeva postojanje  $p$ -dimenzionalnog izotropnog potprostora. Dovoljno je uzeti u obzir linearnu ljusku prvih  $p$  vektora baze.

Pretpostavimo da postoji izotropni potprostor dimenzije veće od  $p$ . Tada je njegovo sjecište s  $q$ -dimenzionalnim pozitivnim potprostorom različito od nule, što nas dovodi do kontradikcije.

b) Neka je  $T$   $m$ -dimenzionalni izotropni potprostor. Imajući u vidu  $T^\perp \supset T$  i  $(T^\perp)^\perp$ , uočavamo da je  $T$  jednak jezgri restrikcije forme na  $T^\perp$ . Označimo sa  $S$  komplementarni potprostor od  $T$  unutar  $T^\perp$ ; tada je  $\dim S = \dim V - 2m$  i  $V = S \oplus S^\perp$ .

Razmotrimo dva slučaja.

1. Neka je  $S$  indefinitna,  $h \in S$  izotropni vektor. Tada je  $T \oplus \mathbb{C}h$  izotropni potprostor dimenzije  $m + 1$ .
2. Neka je  $S$  pozitivno ili negativno definitna. Onda vrijedi da je  $\dim(S^\perp) = 2m, T \subset S^\perp$  izotropan potprostor, dok je  $\dim(S) = m$ . Stoga su indeksi inercije forme  $S^\perp$  zapravo  $(m, m)$ . A shodno tome su indeksi inercije forme  $V$  zapravo  $m, m + \dim(S)$  ili  $(m + \dim(S), m)$  prema predznaku  $S$ . Drugim riječima,  $T$  ima najveću moguću dimenziju. □

### 2.1.10 Dualnost izotropnih potprostora

Dualnost izotropnih potprostora možemo pokazati na primjeru  $p = q$ , pri čemu su  $W_1, W_2$  komplementarni izotropni potprostori. Za vektor  $h \in W_1$  definiramo linearni funkcional na  $W_2$  s  $l_h(v) = \langle v, h \rangle$ . Tada je  $h \mapsto l_h$  bijekcija od  $W_1$  na prostor linearnih funkcionala na  $W_2$ .

## Literatura

- [1] C. M. Fulton, A Pseudo-Euclidean Geometry, Proceedings of the American Mathematical Society, 10 (1959), 304-306
- [2] Y. A. Neretin, Lectures on Gaussian Integral Operators and Classical Groups, European Mathematical Society, 2011.