Razlomci

Martić, Kristina

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Kristina Martić

Razlomci

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Kristina Martić

Razlomci

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2023.

Sadržaj

Uvod

U razgovoru s učenicima često možemo čuti da ne vole matematiku, sadržaj im je jako težak za naučiti i puno toga ne razumiju na nastavi matematike. Ove izjave najčešće dolaze od učenika petog i viših razreda. Razlog tome je što se u petom razredu počinju upoznavati sa sadržajem koji nije toliko intuitivan kao sadržaj prethodnih godina učenja matematike. Susreću se s puno novih pojmova koji mogu biti dosta apstraktni. Zbog toga nastavnik ima važnu ulogu što kvalitetnije i jasnije učenicima objasniti nove teme. Neki od načina su objasniti sadržaj na primjerima koje učenici susreću u svom svakodnevnom životu te korištenjem raznih modela. Sve ovo učenicima nastavu čini zanimljivijom, budu aktivniji za vrijeme sata te lakše usvajaju nove sadržaje.
Susret s razlomcima učenicima je često prvi zahtijevan i apstraktan sadržaj iz matematike s kojim se susreću u svom školovanju. Kroz ovaj rad pokazano je nekoliko primjera koje nastavnici mogu koristiti u nastavi kako bi učenicima približili sadržaj vezan za razlomke. Također su analizirane neke od najčešćih pogrešaka koje učenici mogu napraviti računajući s razlomcima.

1 Razlomci i kurikulum

Učenici se s pojom razlomka prvi puta susreću u petom razredu osnovne škole. Peta godina učenja matematike ukazat će učenicima kako su često razlomke koristili u svakodnevnom životu, a da toga nisu bili ni svjesni. Sigurno su koristili izraze pola od pola čokolade, pola kruha, podijelimo tortu na osam dijelova itd. Ono što nisu znali je da izrazi pola, osam dijelova ili pola od pola imaju svoje mjesto i naziv u matematici. Stoga su ovi primjeri iz svakodnevnog života odličan način kako učenike uvesti u gradivo razlomaka te im olakšati njihovo prikazivanje na različite načine. Upravo to je ono što se kroz ishode u kurikulumu traži od učenika. Za početak pogledajmo što o razlomcima možemo pronaći u kurikulumu vezano za sadržaj osnovne škole.

1.1 Odgojno - obrazovni ishodi u kurikulumu

Kako je već ranije navedeno, peti razred osnovne škole donosi prvi susret s razlomcima. Ishod u kurikulumu za taj uzrast učenika zahtijeva sljedeće:

- **MAT OŠ A.5.3.** Povezuje i primjenjuje različite prikaze razlomaka.

Konkretno, od učenika se traži da brojevni zapis razlomka povezuje sa slikovnim prikazom i obratno. Različiti prikazi razlomka omogućuju učeniku da poveže razlomak s dijeljenjem te na taj način uspješno zapisuje i tumači razlomak. Isto tako je važno da učenik prikazuje i očitava razlomke na brojevnom pravcu, povezuje različite brojevne zapise nepravih razlomaka, mješovitih brojeva i prirodnih brojeva te određuje udio u skupu istovrsnih podataka. U šestom razredu osnovne škole učenike očekuje puno više gradiva vezanog za razlomke pa stoga u kurikulumu postoji više ishoda koje učenici trebaju ostvariti:

- **MAT OŠ A.6.2.** Proširuje i skraćuje razlomke te primjenjuje postupak svođenja na zajednički nazivnik.
- **MAT OŠ A.6.3.** Primjenjuje različite zapise nenegativnih racionalnih brojeva.
- **MAT OŠ A.6.4** Primjenjuje uspoređivanje nenegativnih racionalnih brojeva.
- **MAT OŠ A.6.5.** Računa s nenegativnim racionalnim brojevima.
- **MAT OŠ D.6.4.** Pridružuje cijele i pozitivne racionalne brojeve točkama brojevnog pravca.

Navodeći ove ishode, vidimo da je jako važno da učenici uspješno svladaju gradivo razlomaka u petom razredu jer ih u šestom razredu očekuje puno detaljniji rad na ovu temu koji zahtijeva od njih potpuno razumijevanje gradiva prethodne godine. Najčešće preporuke nastavnicima je da koriste što više slikovnih prikaza prilikom objašnjavanja gradiva kako bi ga učenici što lakše usvojili te sami stvorili naviku korištenja takvog prikaza za rješavanje problema u zadacima. Također je preporuka u početku koristiti nazivnike koji nisu veliki brojevi te, prateći rad učenika, postepeno povećavati broj u nazivniku.

Navedimo još ishode za sedmu i osmu godinu učenja matematike:

- **MAT OŠ A.7.3.** Primjenjuje različite zapise racionalnih brojeva.
- **MAT OŠ A.7.4.** Primjenjuje uspoređivanje racionalnih brojeva.
- **MAT OŠ A.7.5.** Primjenjuje računanje s racionalnim brojevima.
- **MAT OŠ D.7.1.** Pridružuje točke pravca racionalnim brojevima
- **MAT OŠ D.7.2.** U pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini crta točke s racionalnim koordinatama i stvara motive koristeći se njima.
- **MAT OŠ A.8.3.** Prepoznaje odnose među skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ i $\mathbb{R}$ te raspravlja o pripadnosti rješenja jednadžbe skupu brojeva.

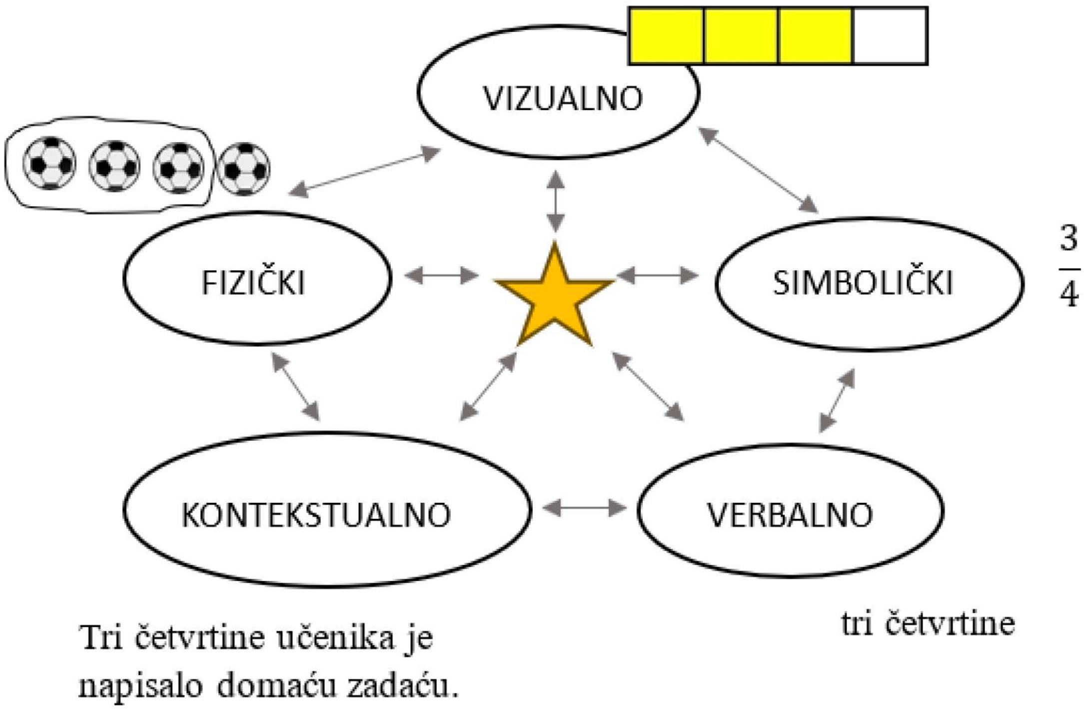
U sedmom razredu učenici se prvi puta upoznaju sa skupom racionalnih brojeva. Također računaju s algebraskim izrazima u skupu racionalnih brojeva pa je važno da učenici shvate pojam skupa racionalnih brojeva. Razumijevanje razlomaka u prethodnim godinama učenja bio je samo početak njihova putovanja prema skupu racionalnih brojeva. U osmom razredu se podsjećaju svih skupova brojeva koje su do tada naučili te proučavaju odnose među tim skupovima kako bi na kraju uveli pojam realnih brojeva.

2 Uvođenje pojma razlomka

Često možemo čuti da je učenicima najgori predmet matematika ili da najveći strah imaju od matematike. Kada ih pitamo zašto se boje matematike, daju odgovore kao što su "zato što je ne razumiju", "njima to ništa nije jasno" i slično. Do sada je provedeno jako puno istaživanja vezanih za pojam straha od matematike. Kroz ta istaživanja došlo se i do njegove definicije koja govori da je to osjećaj napetosti i anksioznosti u shvaćanju i procesuiranju matematičkih problema u svakodnevnom životu i školskom okruženju. Također, utvrđeno je kako postoje tri tipa straha od matematike, a to su strah od ispitnih situacija, strah od brojeva i strah od apstraktnog. Za mnoge učenike njihov odnos s matematikom postaje loš kada krenu u peti razred osnovne škole. Sadržaj prethodnih godina bio im je nešto lakši za shvaćanje, a ono što im je bilo teže uspjeli su naučiti napamet ili prisjećanjem doći do točnog odgovora. Upoznavanje s razlomcima kod učenika budi strah od brojeva i strah od apstraktnog. Razlog tomu je što ne shvaćaju razlomak kao broj, ne razumiju što im govore ta dva broja iznad i ispod crte. Stoga je važno koristiti razne metode pomoću kojih će nastavnik uvesti pojam razlomka na način da ne upalši učenike na samom početku.
U tome će pomoći korištenje pet tipova matematičkih prikaza:

- vizualni,
- simbolički,
- fizički,
- verbalni,
- kontekstualni.

Korištenjem i kombiniranjem ovih pet prikaza učenicima se stvara puno šira slika o tome što razlomci zapravo predstavljaju . Na Slici 1 ilustrirano je pet tipova matematičkih prikaza i međusobna veza između različitih prikaza.



Slika 1: Pet tipova matematičkih prikaza

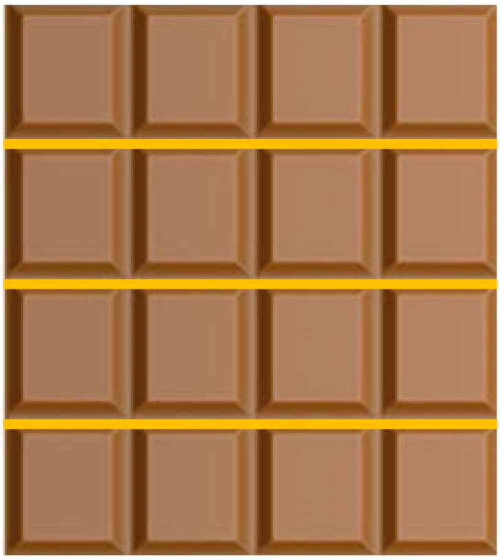
Ukoliko nastavnik odmah na početku koristi kombinacije gornjih matematičkih prikaza prilikom objašnjavanja razlomaka, učenici će lakše shvatiti matematički koncept razlomka te će povezivati i samostalno koristiti različite reprezentacije tog matematičkog pojma. Primjerice, za rješevanje zadataka će učenici često prvo koristiti vizualne modele koje će kasnije povezati sa simboličkim prikazom te će na taj način izgraditi bolje razumijevanje simboličkih prikaza.

2.1 Matematički prikazi razlomaka u zadacima

Kako je već ranije navedeno, susret s razlomcima počinje kod učenika stvarati strah od matematike jer se upoznaju s nečim što je njima nejasno i apstraktno. Stoga nastavnik ima važnu ulogu odabrati i učenicima predstaviti prave zadatke s kojima će ih uvesti u gradivo razlomaka. U sljedećim primjerima moguće je vidjeti na koji način nastavnik može različite matematičke prikaze povezivati unutar istog zadatka i na taj način kod učenika graditi konceptualno znanje.

Za početak je važno da učenici shvate kako su za vizualni prikaz razlomaka potrebni dijelovi jednakih veličina, odnosno površina. Za bolje razumijevanje zašto je nužno imati dijelove istih veličina, nastavnik može dati učenicima primjer pravednog dijeljenja čokolade s prijateljima:

Primjer 1. *Marko je odlučio podijeliti svoju čokoladu s tri prijatelja tako da svi dobiju jednaku količinu čokolade. Zaokruži sliku koja prikazuje pravednu podjelu.*



Kako je ovdje riječ o primjeru iz svakodnevnog života, učenici će odmah uočiti koja slika prikazuje pravednu podjelu. Poželjno je da nastavnik postavi razna potpitanja kojima će dovesti učenike do simboličkog prikaza razlomka. Neka od pitanja mogu biti:

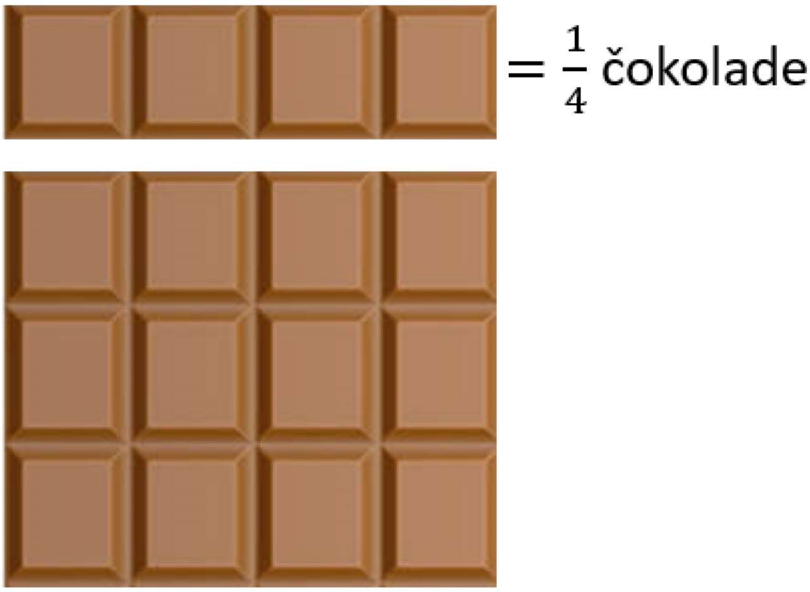
- *Što znači pravedna podjela?*
- *Zašto prva slika predstavlja pravednu podjelu?*
- *Na koliko je dijelova podijeljenja čokolada na prvoj slici? Na koliko je dijelova podijeljenja čokolada na drugoj slici?*
- *Po čemu se razlikuju dijelovi čokolade na lijevoj i desnoj slici?*

Nakon odabira slike koja prikazuje pravednu podjelu, sljedeći korak je odvajanje dijela čokolade koji će dobiti Marko.

Konačni cilj je doći do simboličkog prikaza razlomka. Nastavnik ponovno radi analizu kroz potpitanja, ali ovog puta u fokus stavlja dio koji je dobio Marko. Primjer pitanja koje nastavnik može postaviti učenicima:

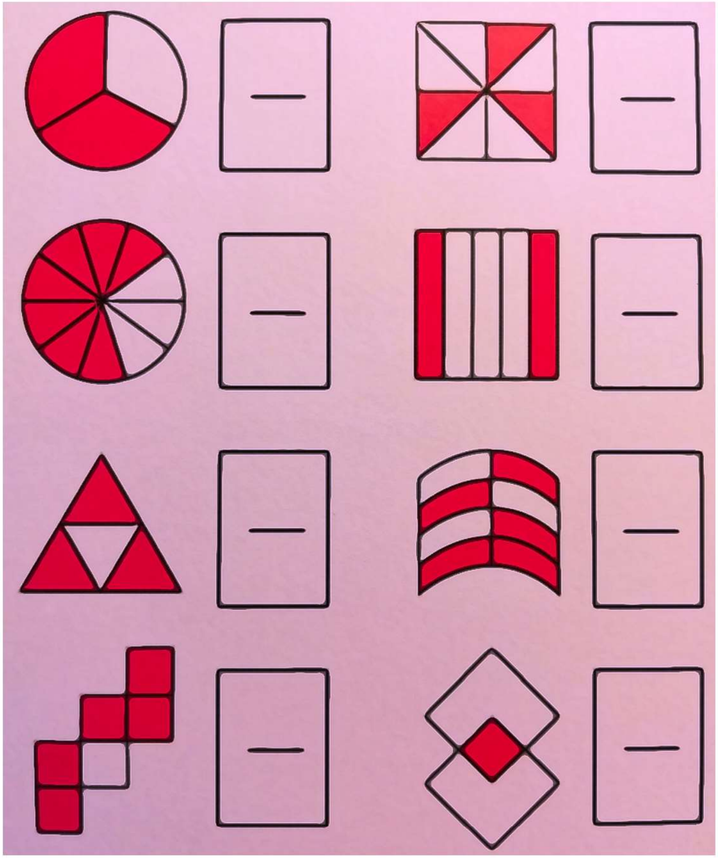
- *Na koliko dijelova smo podijelili čokoladu? Koliko je dijelova dobio Marko?*
- *Koliko dijelova su dobili Markovi prijatelji?*

Nastavnik treba naglašavati kako je jedan red dio cijele čokolade te nakon toga to povezati s pojmom razlomka s kojim iskazujemo dio cjeline. Na taj način je učenicima uveden simbolički prikaz razlomka korištenjem vizualnog prikaza.



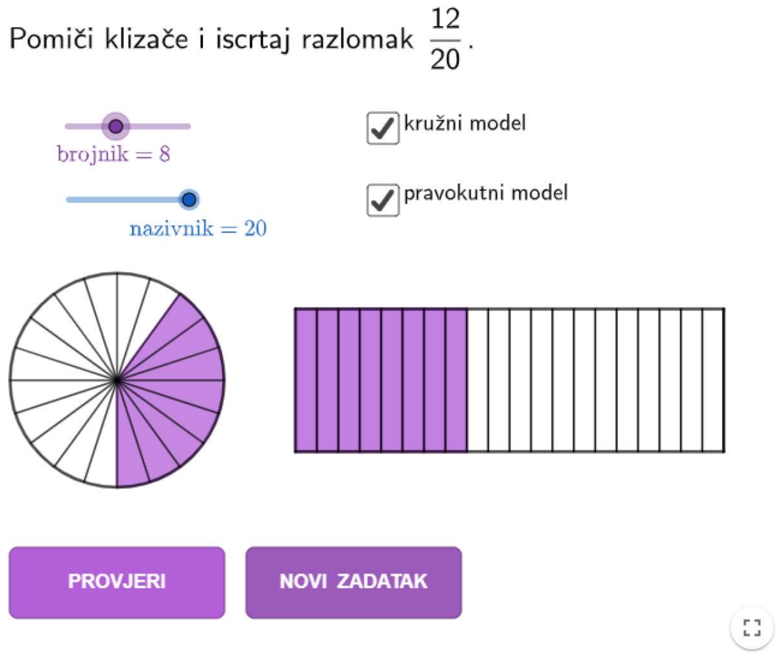
U zadacima se često za vizualne prikaze razlomaka koriste oblici kruga ili pravokutnika. Učenici tada prihvate samo ta dva oblika kao mogućnost vizualnog prikaza razlomaka pa prilikom susreta s nekim drugim oblikom ne znaju odrediti o kojem razlomku se radi. Stoga je poželjno koristiti što više različitih oblika čiji su dijelovi bojani nasumično kao što je prikazano u sljedećem primjeru.

Primjer 2. *U prazne kućice, koristeći razlomke, napiši koliki dio svakog oblika je obojan.*



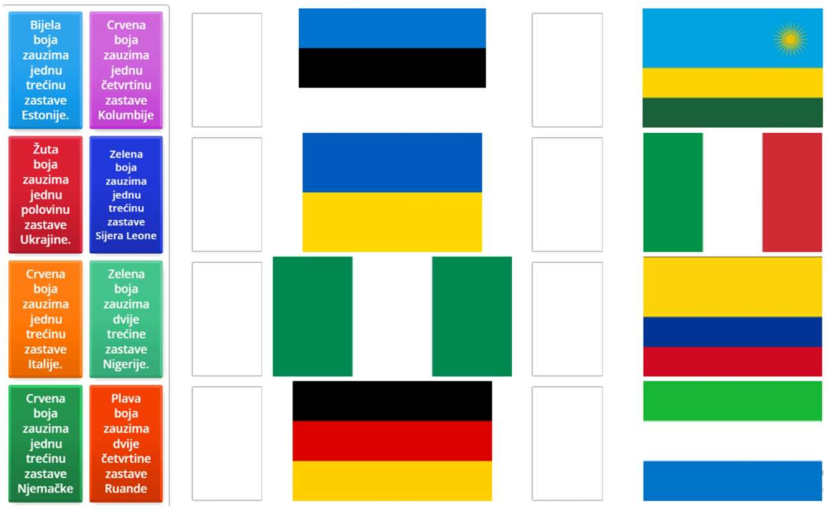
Kroz ovaj zadatak, učenici će uvježbavati vizualne i simboličke prikaze razlomaka, a provjeravanjem točnosti rješenja nastavnik će uvidjeti jesu li učenici usvojili verbalni matematički prikaz razlomka.

Poznato je kako je učenicima jedan od najdražih oblika nastave upravo onaj kada na satu smiju koristiti tehnologiju. Korištenjem računala ili mobitela učenici postanu aktivniji te im sat bude zanimljiviji. Također, postoje različite edukativne igre i apleti vezani za matematiku koje nastavnik može iskoristiti kao način obrade gradiva. Velika prednost rješavnja zadataka na ovaj način je što učenici odmah dobiju povratnu informaciju jesu li točno riješili zadatak.



Slika 2: Interaktivni apleti za vizualni prikaz razlomaka
(Izvor: https://edutorij.e-skole.hr/)

S druge strane, kroz edukativne igre nastavnik može ostvariti korelaciju matematike s ostalim predmetima. Likovna umjetnost je najčešće područje u kojem možemo pronaći razne omjere i proprcionalnosti na umjetničkim djelima, ali matematiku možemo iskoristiti i u geografiji prilikom analiziranja zastava kako je prikazano na slici ispod.



Slika 3: Korelacija matematike i geografije u edukativnim igrama
(Izvor: https://wordwall.net/hr)

Nadalje, nastavnik može osmisliti razne aktivnosti i zadatke u kojima će povezati fizički i kontekstualni matematički prikaz razlomaka. Neki od primjera su:

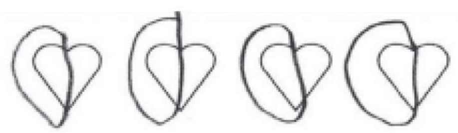
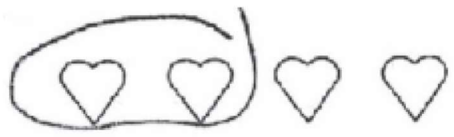
- Odredi koliki dio učenika u razredu ima smeđe/plave/zelene oči.
- Odredi koliki dio razreda su dječaci, a koliki djevojčice.

- Podijeli sok tako da svakome napuniš dvije trećine čaše.

Izbor zadataka i aktivnosti je velik. Uloga nastavnika je da izabere ili osmisli zadatke primjerene za dob učenika koji će ih potaknuti na rad te im na što lakši način približiti što se krije iza pojma razlomka.

3 Razumijevanje cjeline

U prethodnom poglavlju vidjeli smo nekoliko primjera vizualnog prikaza razlomaka. Na samom početku učenja o razlomcima, kada se učenici upoznaju s jednostavnim razlomcima kao što su $\frac{1}{2}$ ili $\frac{2}{3}$, vizualni prikazi su ono što nastavnici najčešće koriste prilikom objašnjavanja sadržaja. Tu naviku usvoje i sami učenici pa kasnije također sami rješavaju zadatke uz pomoć crtanja kruga ili pravokutnika koje zatim dijele na određeni broj dijelova. Uočimo kako su to sve primjeri gdje cjelinu predstavlja jedan lik ili jedan objekt. Problem nastaje kada učenici trebaju više likova ili objekata promatrati kao cjelinu. Učenici su zbog prethodnih primjera stvorili sliku da cjelina znači jedan krug, jedan pravokutnik ili jedan kvadrat kojeg moram podijeliti na dijelove. Stoga im postaje teško shvatiti kako primjerice tri kruga mogu biti jedna cjelina. U tablici ispod možemo vidjeti primjer vezan za shvaćanje cjeline.

Zadatak:	Zaokruži $\frac{1}{2}$ srca iz dane grupe.
Ana	
Marko	

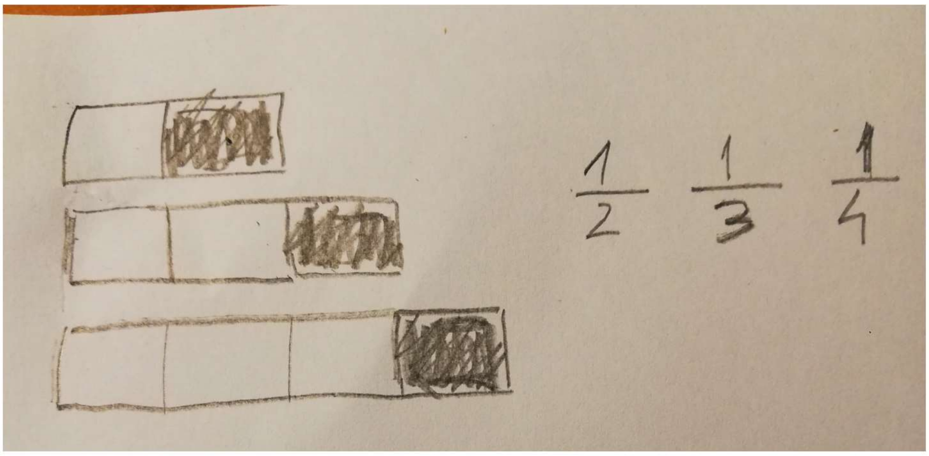
Tablica 1: Primjer shvaćanja cjeline

Uočimo kako je Marko shvatio da u ovom zadatku cjelinu predstavljaju sva četiri srca zajedno te je točno zaokružio jednu polovinu srca iz cijele grupe. S druge strane, Ana je svako srce posebno gledala kao cjelinu pa je zaokružila jednu polovinu svakog srca. Iz ovoga primjera možemo uvidjeti kako je važno da nastavnik, osim pojedinačnih likova ili objekata, za cjelinu koristi i grupu od nekoliko likova ili objekata. Kako bi učenicima ovaj dio bio jasniji, poželjno je upotrijebiti neki primjer iz svakodnevnog života. Jedna mogućnost je podjela vrećice bombona u razredu. Ovdje nastavnik raznim potpitanjima treba usmjeravati učenike kako bi sami došli do zaključka zašto sve bombone u vrećici promatramo kao jednu cjelinu. Primjeri dobrih pitanja su sljedeći:

- Kako biste vi podijelili vrećicu bombona u razredu?
- Hoćemo li svaki bombon otvoriti posebno pa ga dijeliti po razredu ili ćemo pogledati koliko ukupno imamo bombona pa ih pravedno podijeliti tako da svi dobijete isti broj bombona?
- Što nam ovdje predstavlja cjelinu, svaki bombon posebno ili su svi bomboni zajedno jedna cjelina?

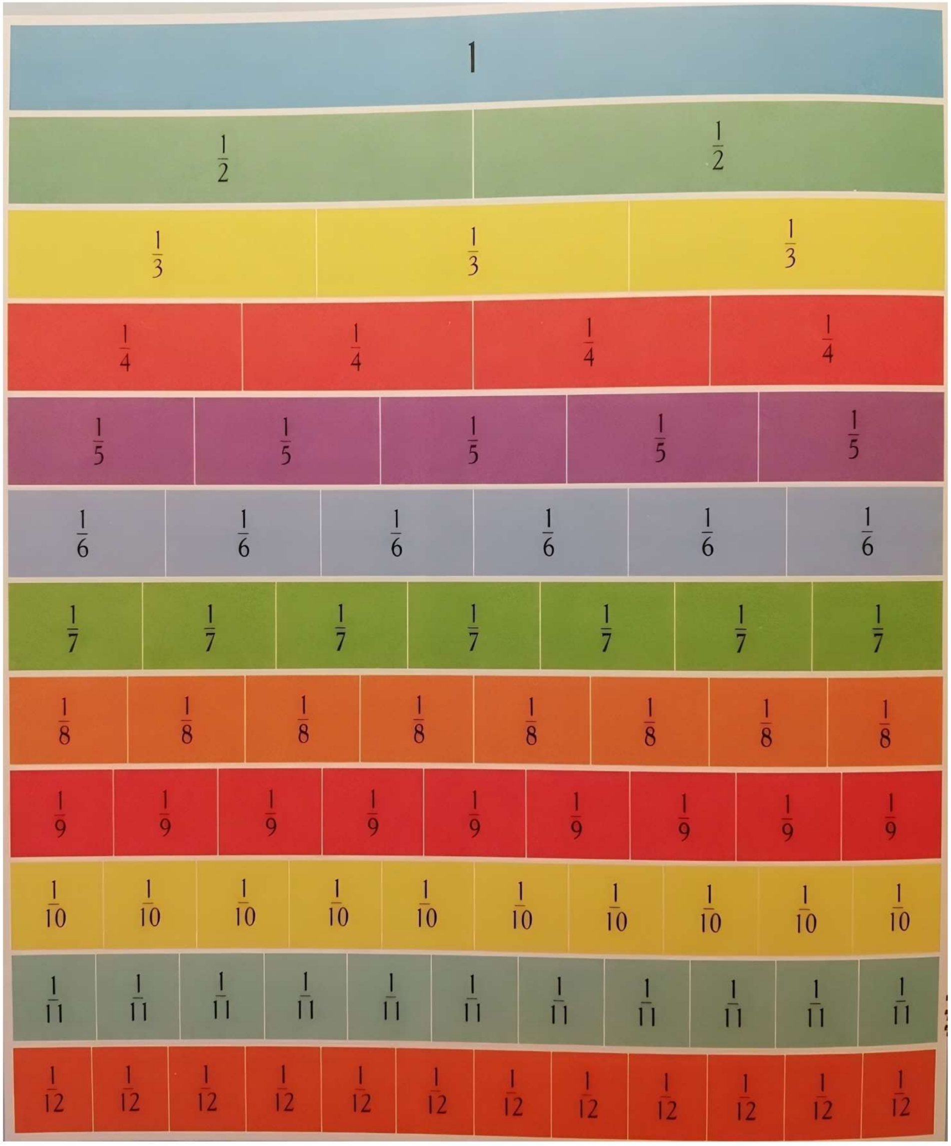
Drugi problem koji učenici mogu imati je da za svaki razlomak vežu vizualni prikaz koji su prvi susreli te na taj način koriste napamet naučenu cjelinu za dani razlomak bez razumijevanja što bi cjelina trebala značiti u kontekstu zadatka. Sljedećim primjerom prikazan je navedeni problem.

Primjer 3. *Razlomke* $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ *i* $\frac{1}{4}$ *poredaj od najmanjeg prema najvećem. Crtežom potkrijepi svoj odgovor.*
Odgovor učenika:



U ovom zadatku učenik je nacrtao pravokutnik koji je zatim podijelio na dva dijela kako bi prikazao $\frac{1}{2}$*. Nakon toga je za sljedeći razlomak produljio cjelinu koju je prethodno koristio i zatim označio* $\frac{1}{3}$ *te analognim načinom* $\frac{1}{4}$*. Konkretno, učenik je za svaki razlomak koristio cjelinu koju je napamet naučio da treba vezati za dani razlomak te ne razumije značenje cjeline prilikom uspoređivanja razlomaka.*

Pogrešku prikazanu prethodnim primjerom nastavnik može ispraviti i dodatno pojasniti koristeći se primjerom iz svakodnevnog života koji je blizak učenicima. Najčešći primjer prilikom obrade razlomaka je podjela pizze na jednake dijelove. Nastavnik koristeći ovaj primjer može od učenika dobiti odgovore jesu li veći komadi pizze koja je podijeljena na dva ili na tri jednaka dijela, na tri ili na četiri jednaka dijela. Također treba staviti naglasak kako je pizza uvijek iste veličine, nemoguće je povećati pizzu ako ju želimo podijeliti na više dijelova.
Drugi način koji može pomoći učenicima u zadacima uspoređivanja razlomaka je koristeći list s razlomačkim trakama. Na početku obrade sadržaja nastavnik može za svakog učenika prirediti jedan takav list s kojim se učenici mogu služiti dok rješavaju zadatke.

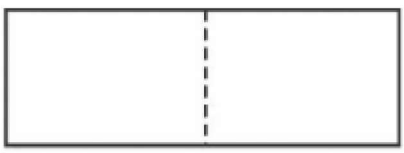


Slika 4: List s razlomačkim trakama

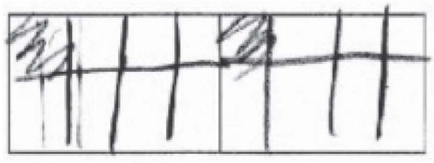
Vidimo kako trake prikazuju jednostavnije razlomke, stoga je ovo dobra vizualna pomoć učenicima da na lakšim primjerima shvate značenje cjeline i podjele na jednake dijelove, a zatim će naučeno lakše i brže primjeniti na složenijim razlomcima. Nastavnik treba objasniti učenicima da razlomačke trake prikazuju različite veličine podjela (pa tako i razlomke).

Ranije je navedeno kako korištenje više likova ili oblika kao cjeline kod učenika može stvoriti problem razumijevanja cjeline. No, ponekad i manipulacija jednog lika ili oblika koji čini cjelinu može izazvati poteškoće kod učenika. Sljedećim primjerom pokazan je upravo takav slučaj.

Primjer 4. *Oboji* $\frac{1}{8}$ *danog lika.*



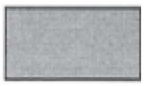
Rješenje koje je dao učenik:



Prvo treba uočiti kako je dani lik unaprijed podijeljen na dva dijela te se od učenika traži da nastave podjelu koja će im omogućiti bojanje $\frac{1}{8}$ danog lika. U rješenju vidimo da je učenik obojao $\frac{1}{8}$. No, uzmemo li u obzir podjele koje je učenik napravio, vidimo da je svaka polovica lika promatrana kao cjelina koja se zatim dijelila na osam dijelova. Učenik je tako obojao $\frac{1}{8}$ svake polovice lika što na kraju daje $\frac{1}{8}$ cijelog lika. Bez obzira na točno rješenje, jasno je da učenik nije shvatio što predstavlja cjelinu u ovom zadatku.

Kroz prethodne primjere promatrane su moguće pogreške koje učenici mogu napraviti prilikom traženja dijelova cjeline. No, često učenici imaju poteškoća pronaći cjelinu kada im je dan dio te cjeline. Na primjeru lista s razlomačkim trakama vidimo kako su podjele često prezentirane s razlomcima čiji je brojnik upravo broj jedan. Učenici tada automatizmom podjele povezuju s razlomcima obika "1 kroz nešto" pa pojava razlomka koji nije tog oblika stvara problem u pronalaženju cjeline. Sljedećim primjerom pokazan je takav slučaj pogrešno rješenog zadatka.

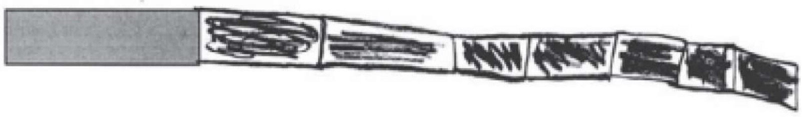
Primjer 5. *Pažljivo pročitaj i riješi sljedeće zadatke.*
a) Na slici je dana $\frac{1}{5}$ čokoladice. Nacrtaj cijelu čokoladicu.



b) Na slici je $\frac{7}{8}$ čokoladice. Nacrtaj cijelu čokoladicu.

Primjer rješenja koje učenik može dati:
a) Na slici je dana $\frac{1}{5}$ čokoladice. Nacrtaj cijelu čokoladicu.

b) Na slici je $\frac{7}{8}$ čokoladice. Nacrtaj cijelu čokoladicu.



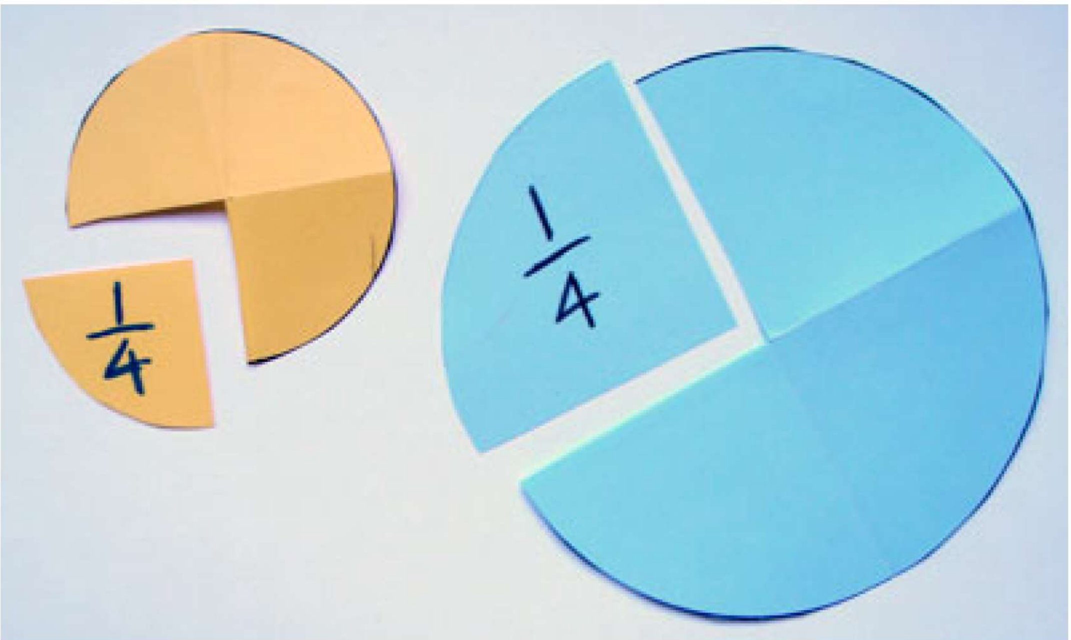
Vidimo kako je učenik podzadatak a) točno riješio jer vizualne prikaze povezuje s razlomcima čiji je brojnik jedan, a iz nazivnika iščitava koliko dijelova čini tu cjelinu. Kako je nazivnik 5, još su mu nedostajala četiri dijela kako bi dobio cijelu čokoladicu. Isto takvo razmišljanje je primijenio u podzadatku b) što ga je dovelo do netočnog rješenja. Iz toga razloga je dani dio promatrao kao $\frac{1}{8}$ čokoladice te je, promatrajući vrijednost nazivnika kao i u prethodnom zadatku, nacrtao još sedam dijelova.
Ovaj zadatak je također odličan primjer kako nastavnik treba od učenika tražiti da paze na ekvivalentnu podjelu, odnosno da uvijek paze na to da crtaju dijelove koji su jednakih veličina. U podzataku a) učenik je točno odredio koliko dijelova nedostaje da bi imali cijelu čokoladicu, ali uspoređujući veličinu nacrtanih dijelova, ne možemo reći da smo na kraju dobili cijelu čokoladicu. Naravno, s obzirom na uzrast učenika ne treba tražiti preciznost u milimetar, ali otprilike treba paziti da dijelovi budu jednakih veličina, odnosno da razlike u veličinama ne budu prevelike.

Na kraju ovog poglavlja još ćemo sljedećim primjerom analizirati kako veličina cjeline utječe na veličinu dijelova. To je također važno pojasniti učenicima kako bi razumijeli da primjerice $\frac{1}{2}$ nečega ne predstavlja uvijek istu veličinu/količinu, odnosno da ne povezuju vrijednost razlomka s fiksnom veličinom dijelova.

Primjer 6. *Na kraju školske godine nastavnik je odlučio počastiti svoj razred. Kupio je nekoliko malih i velikih čokoladi koje će podijeliti po razredu. Čokolade je stavio u vrećicu kako ih učenici ne bi vidjeli te je pitao tko želi cijelu, a tko pola čokolade. Učenici koji nisu veliki ljubitelji slatkoga su tražili pola čokolade, dok su ostali tražili cijelu. Nastavnik je tada izvadio čokolade te učenicima koji su htjeli pola čokolade dao je pola od velike čokolade, a učenici koji su tražili cijelu čokoladu dobili su male čokolade.*

Slika 5: Cjeline različitih veličina na primjeru čokolade
(Izvor: https://www.pinterest.com/)

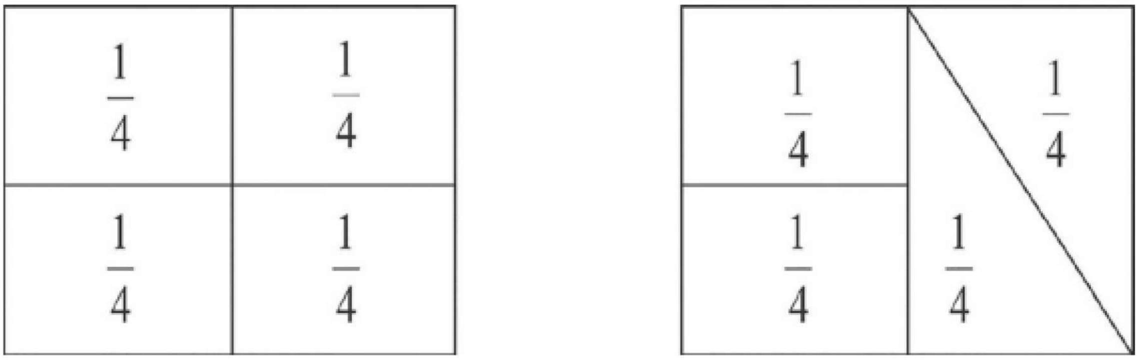
Prethodni primjer svaki nastavnik može i sam izvesti u svom razredu. Na ovaj način će učenici puno brže uvidjeti kako veličina cjeline utječe na veličinu dijelova. Lako je uočiti da pola čokolade ne znači uvijek istu količinu čokolade jer ne znamo o kolikoj čokoladi se radi. Također, razne aktivnosti poput izrezivanja papira mogu poslužiti kao pomoć pri obradi ovog dijela sadržaja. Jedan takav primjer prikazan je na slici ispod.



Slika 6: Usporedba veličine dijelova različitih cjelina
(Izvor: https://topdrawer.aamt.edu.au/)

4 Različiti načini podjele cjeline na jednake dijelove

Na početku ovog rada spomenuto je kako je za razumijevanje razlomaka važno da učenici shvate kako moraju cjelinu dijeliti na ekvivalentne dijelove. Vizualni modeli će biti najčešći prikazi razlomaka prilikom objašnjavanja dijeljenja cjeline. Također, nije dovoljno da učenici znaju da dijelovi moraju biti samo iste veličine. Važno je da se prilikom određivanja podjele dijelovi međusobno ne preklapaju. Kada svaki dio predstavlja isti razlomački dio cjeline, dijelovi će biti iste veličine. S druge strane, učenici često usvoje jedan ili dva načina podjele te takve podjele jedine smatraju ispravnima za dobivanje dijelova jednakih veličina. Za primjer možemo dati podjelu pravokutnika na jednake dijelove koristeći simetrale stranica ili dijagonale pravokutnika kao najčešći način podjele. Kada učenici usvoje ta dva načina, bilo koja drugačija podjela na jednake dijelove za njih se čini netočna. Primjer možemo pogledati na slici ispod.

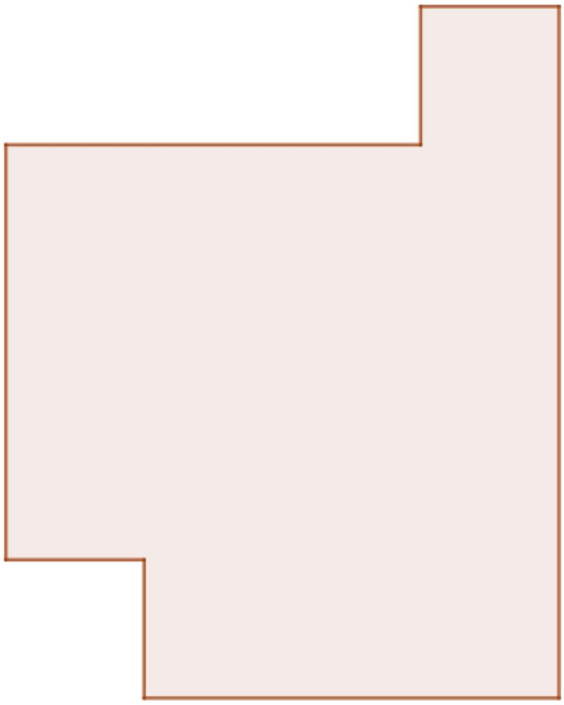


Slika 7: Dva načina podjele pravokutnika na jednake dijelove

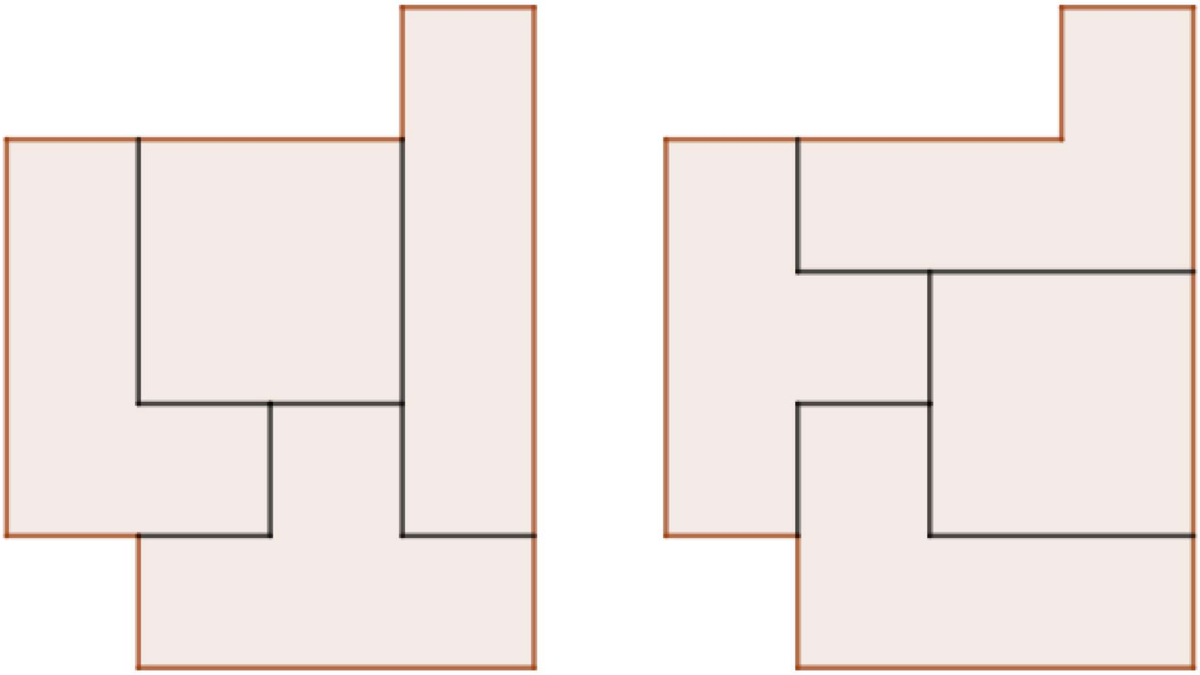
Ukoliko pred učenike stavimo gornju sliku, bez navođenja veličine svakog dijela, najčešće ćemo dobiti odgovor da je lijevi pravokutnik podijeljen na četiri jednaka dijela, a desni nije. Uočimo kako je lijevi pravokutnik podijeljen na četiri manja pravokutnika pa je učenicima lako uočiti da su jednake veličine jer uspoređuju površine istih likova. Desni pravokutnik je podijeljen također na četiri jednaka dijela, ali kako je riječ o dva pravokutnika i dva trokuta, učenicima je teže uspoređivati površine različitih likova. Stoga im se može činiti kako "trokuti izgledaju veće nego pravokutnici" pa tu neće uočiti ekvivalentnu podjelu. Ovakvi primjeri mogu biti odlični za učenike i njihovu samostalnu provjeru točnosti rješenja. Naime, ako učenici gledajući slike ne uočavaju jednakost dijelova, sljedeći korak je izrezivanje tih dijelova škarama te uspoređivanje veličina dijelova tako da ih učenici međusobno preklapaju. Također, ovakve primjere nastavnik može iskoristiti i za ponavljanje računanja površine različitih likova. Učenici mogu odrediti duljine stranica ili visina, te izračunavanjem površine provjeriti ekvivalentnost dijelova. Nadalje, još jedan način kako učenicima pokazati da dijelovi jednake površine ne moraju biti istog oblika je korištenje zadataka s primjerima iz svakodnevnog života. Pogledajmo jedan takav primjer:

Primjer 7. *Na sastanku poljoprivrednika podijeljeno je 20 hektara državnog zemljišta. Zemljište je prikazano na slici ispod. Četiri poljoprivrednika su zadovoljila sve uvjete te su međusobno podijelila 20 hektara tako da je svaki poljoprivrednik dobio jednaku površinu zemljišta.*

Nacrtaj moguću podjelu 20 hektara zemljišta na četiri poljoprivrednika.

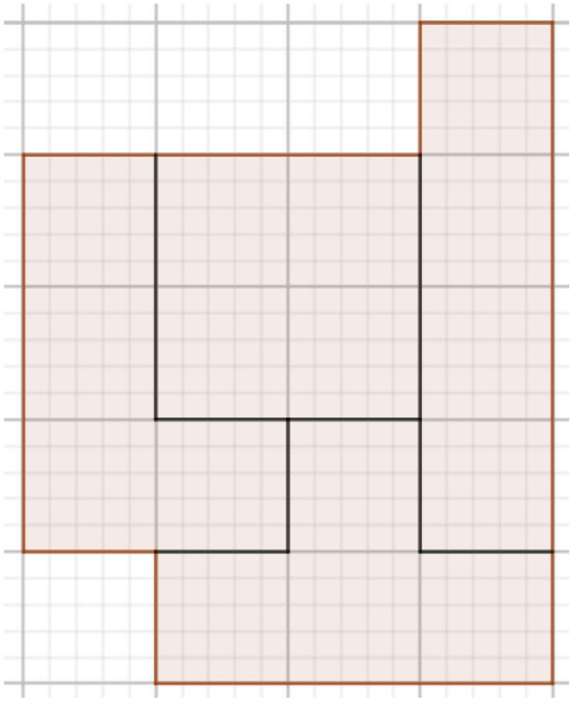


Primjer rješenja:



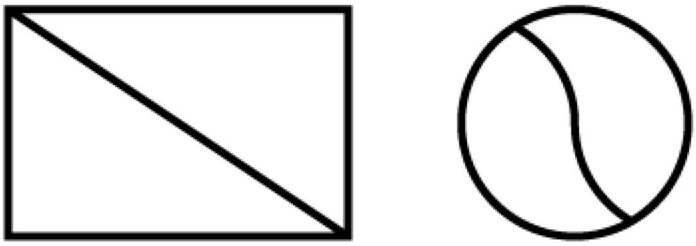
Za očekivati je da će svaki učenik imati svoju ideju za podjelu. Stoga će u razredu biti više različitih primjera podjele baš kako je pokazano i u primjeru rješenja. Na taj način će nastavnik moći lako pokazati nekoliko primjera točno riješenog zadatka. Važno je da na kraju zadatka učenici shvate da je svaki poljoprivrednik dobio $\frac{1}{4}$ *od 20 hektara, odnosno 5 hektara.*

Iako dijelovi nisu istog oblika, oni imaju istu površinu. Također, zadatke ovog tipa bi učenici svakako mogli rješavati koristeći razne aplikacije poput GeoGebre. Nastavnik može tražiti od učenika da naprave dano zemljište u izabranoj aplikaciji te će puno lakše napraviti i uočiti ekvivalentnu podjelu služeći se alatima koje im nudi aplikacija.



Slika 8: Ekvivalentna podjela zemljišta pomoću GeoGebre

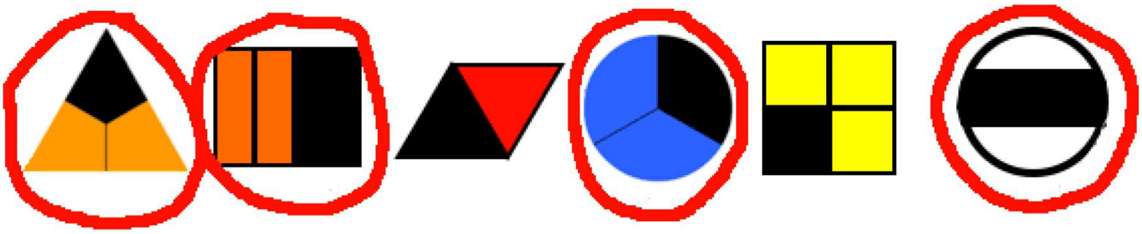
Uočimo kako je čest slučaj u zadacima da linije, koje crtamo za dobivanje ekvivalentne podjele, predstavljaju neku os simetrije. Stoga učenici mogu povezati da će ekvivalentnu podjelu imati samo ako imaju os simetrije. Pogledajmo sljedeću sliku:



Slika 9: Dva načina prikaza $\frac{1}{2}$
(Izvor: https://topdrawer.aamt.edu.au/)

Na gornjoj slici oba lika su podijeljenja na dva jednaka dijela. Učenicima će kod pravokutnika biti puno lakše uočiti dijelove jednake veličine jer će koristeći nacrtanu os simetrije odmah vidjeti kako dijelove mogu preklopiti, što mogu učiniti savijanjem papira po nacrtanoj liniji. Na primjeru kruga će savijanjem papira po liniji dobiti dijelove koji se ne prklapaju što može dovesti do pogrešnog zaključka da dijelovi nisu iste veličine. Zato je važno da nastavnik ne koristi samo ravne linije kao jedini način podjele cjeline.
Na početku rada su navedeni tipovi matematičkih prikaza. Koliko god oni učenicima olakšavali rješavanje zadataka i njihovo razumijevanje, s druge strane mogu dovesti i do krivih zaključaka. Proučimo situaciju u sljedećem primjeru.

Primjer 8. *Nastavnica je učenicima zadala šest likova čije su površine podijeljenje na nekoliko različito obojanih dijelova. Zadatak je bio da učenici zaokruže sliku na kojoj je $\frac{1}{3}$ lika obojana crnom bojom i objasne svoj odgovor. Jedno od rješenja koje je ponudio učenik:*



(Izvor: https://topdrawer.aamt.edu.au/)

Objašnjenje: U razlomku $\frac{1}{3}$ broj 3 mi govori da je lik podijeljen na tri dijela, a broj 1 mi govori da je jedan od tih dijelova obojan crnom bojom.

Nakon što je pročitala rješenje, nastavnica je upitala učenika za dodatno objašnjenje kako bi bolje analizirala njegov način razmišljanja. Učenik je odlučio dati dodatno objašnjenje koristeći se lopticama koje su u nastavi služile kao fizički prikaz razlomaka. Uzeo je tri loptice i stavio ih na stol.

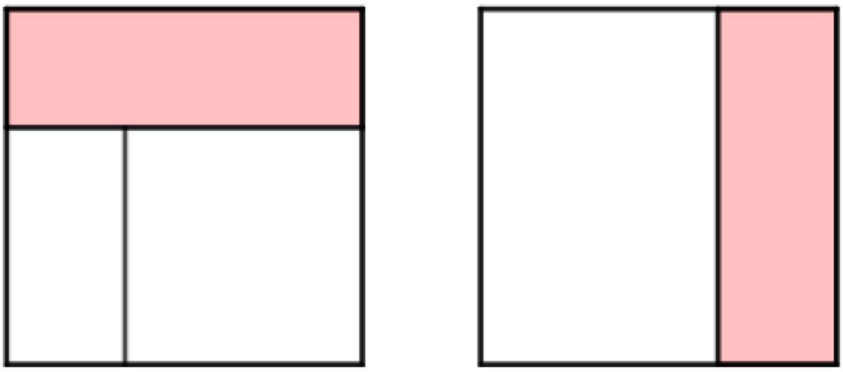
Slika 10: Rješavanje zadatka pomoću loptica

Učenik je rekao da, iako nisu iste veličine, jedna od ovih loptica čini $\frac{1}{3}$ u skupini od tri loptice. Isto tako je i na danim likovima, odnosno crno obojani dio je jedan dio od ukupno tri dijela različitih veličina pa on čini $\frac{1}{3}$ danog lika.

U prethodnom primjeru vidimo da je učenik određivanje razlomačkog dijela u skupini objekata poistovjetio s određivanjem razlomačkog dijela površine lika. Takvo zaključivanje dovelo ga je do netočnog odgovora u zadatku. Zato je važno da nastavnik od samog početka razjasni učenicima međusobne razlike u matematičkim prikazima razlomaka kako se ne bi dogodila slična situacija da fizički prikaz u grupi objekata bude isti kao vizualni prikaz s obzirom na površinu lika.

Nakon što učenici shvate potrebu za ekvivalentnom podjelom u kontekstu razlomaka, sljedeći korak je provjeriti da li učenici pravilno povezuju razlomak s dijelom kojeg on predstavlja. Analizirajmo situaciju u primjeru koji slijedi.

Primjer 9. *Nastavnik je učenicima dao sljedeći zadatak:*
Je li na svakom kvadratu obojana njegova $\frac{1}{3}$*? Objasni svoj odgovor.*



Odgovor koji je dao učenik:
Na prvom kvadratu nije obojana njegova $\frac{1}{3}$ *jer kvadrat nije podijeljen na tri jednaka dijela, dijelovi nisu iste veličine i istog oblika. Zato obojani dio nije* $\frac{1}{3}$ *kvadrata.*
Drugi kvadrat je podijeljen na dva dijela koja nisu iste veličine. U zadatku se traži $\frac{1}{3}$ *pa moramo imati tri dijela, a ovdje imamo dva pa zbog toga ne može biti obojana* $\frac{1}{3}$ *kvadrata.*

Iz učenikovog odgovora proizlazi razmišljanje da ne može biti obojana $\frac{1}{3}$ *kvadrata ukoliko nemamo tri dijela koji su iste površine i oblika. Ovakvo razmišljanje je rezultat toga što se pred učenike uvijek stavljaju zadaci na kojima je podijela napravljena na način da su svi dijelovi istog oblika i površine. Takvi zadaci bi trebali biti ponuđeni prilikom obrade gradiva, a za uvježbavanje pred učenike treba staviti izazovnije zadatke poput zadatka koji je dan u ovom primjeru. Tada će nastavnik dobiti pravu sliku o tome koliko učenici shvaćaju razlomke i njihovu ulogu u kontekstu ekvivalentne podjele.*

5 Ekvivalentni razlomci

Razumijevanje pojma cjeline i ekvivalentne podjele cjeline važno je za uvođenje pojma ekvivalentnih razlomaka. Isto tako, shvaćanje ekvivalentnih razlomaka je temelj za uspoređivanje razlomaka te njihovo zbrajanje i oduzimanje. Uočimo kako svako novo gradivo traži od učenika potpuno razumijevanje prethodno naučenog gradiva. Stoga učenici moraju odmah na početku imati jasnu sliku o tome što predstavlja razlomak. U suprotnom će imati velikih poteškoća u pronalaženju ekvivalentnih razlomaka ukoliko uopće ne razumiju što im predstavlja zadani razlomak. Vizualni prikazi razlomaka će imati veliku ulogu i u obradi ovog dijela sadržaja.
Osnovni koncepti koje vežemo za ekvivalentne razlomke su:

1. Za dva razlomka kažemo da su ekvivalentna ako izražavaju isti broj. Drugim riječima, ekvivalentni razlomci su oni u kojima dijeleći brojnik s nazivnikom dobivamo isti rezultat.

2. Svaki razlomak ima beskonačno ekvivalentnih razlomaka.

Pojam ekvivalentnih razlomaka poželjno je učenicima predstaviti na primjeru iz svakodnevnog života. Proučimo jedan takav zadatak i moguće poteškoće koje bi učenici imali prilikom rješavanja.

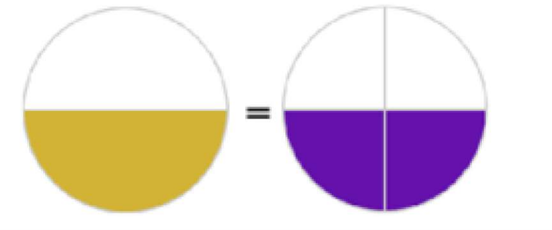
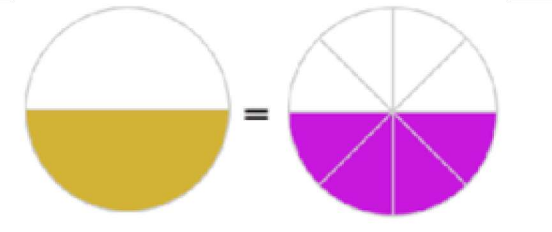
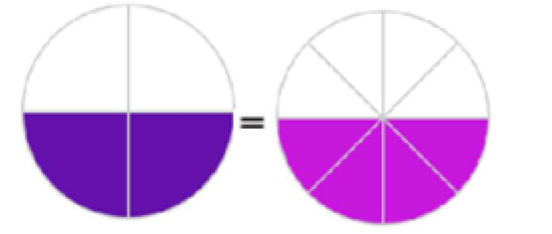
Primjer 10. *Karlo, Marta i Petra su naručili tri jednake pizze.*
Karlo je pojeo $\frac{1}{2}$ *svoje pizze.*
Marta je pojela $\frac{2}{4}$ *svoje pizze.*
Petra je pojela $\frac{4}{8}$ *svoje pizze.*
Tko je pojeo najviše pizze?

Prije svega, ovaj zadatak treba dati učenicima da ga pokušaju samostalno riješiti. Pogledajmo neke od odgovora koje nastavnik može dobiti.

Klara je kao rješenje zadatka ponudila sljedeći odgovor:
Ja mislim da je najviše pizze pojela Petra jer broj 4 *je najveći od svih brojnika, a i nazivnik* 8 *je najveći od preostala dva nazivnika.*
U Klarinom odgovoru možemo uočiti nepoznavanje osnovna vezanih za razlomke. Umjesto da gleda vrijednost razlomka, Klara je posebno gledala vrijednosti brojnika, a zatim posebno vrijednosti nazivnika te ih međusobno uspoređivala.
Mia je s druge strane koristila vizualne modele kako bi pronašla točno rješenje:

Učenica je dala točno rješenje jer je uvidjela da zadani razlomci na modelima predstavljaju istu površinu. Također, njezino rješenje pokazuje zašto je nužno usvojiti koncept cjeline i dijelova cjeline.
Nakon što učenici ponude svoja rješenja, nastavnik je dužan dodatno pojasniti rješenje ovog zadatka zbog učenika koji nisu dobro riješili, ali i zbog učenika koji su dobro riješili kako bi pažnju stavio na tri zapisom različita razlomka čija je vrijednost ista. Ono što nastavnik može napraviti je još jednom učenicima predstaviti vizualni model te analizirati načine rezanja pizze i na koliko dijelova je svaka pizza podijeljena:

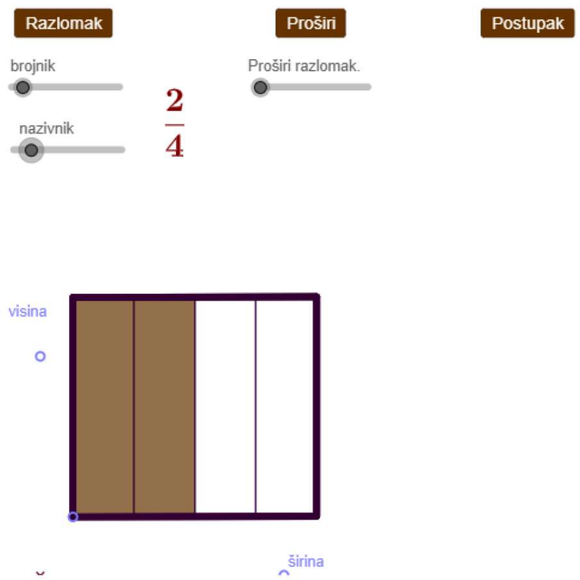
Nakon toga analizirati kako se odnose vrijednosti brojnika navedenih razlomaka te analogno nazivnika. Cilj je da učenici dođu do zaključka da se ti međusobno jednaki razlomci dobivaju iz $\frac{1}{2}$ na način da brojnik i nazivnik pomnožimo istim brojem, odnosno:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$	
$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$	
$\frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{4}{8}$	

Tablica 2: Ekvivalentni razlomci

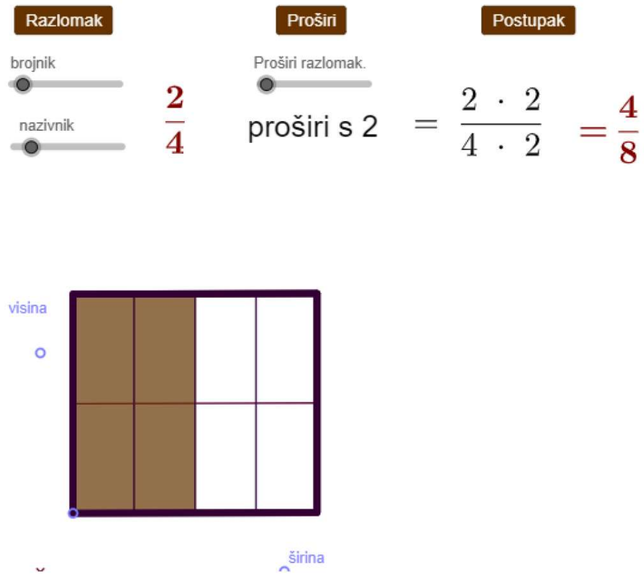
Osim ekvivalentnih razlomaka, koristeći ovaj primjer nastavnik može uvesti pojmove proširivanja i skraćivanja razlomaka. Konačni cilj je da učenici uoče da množenjem ili dijeljenjem brojnika i nazivnika istim brojem dobivamo ekvivalentne razlomke.

Postoje i razni apleti koji mogu koristiti učenicima u svladavanju ovog sadržaja. Kroz aplete učenici mogu sami istraživati odnos između razlomaka te samostalno doći do određenih zaključaka.



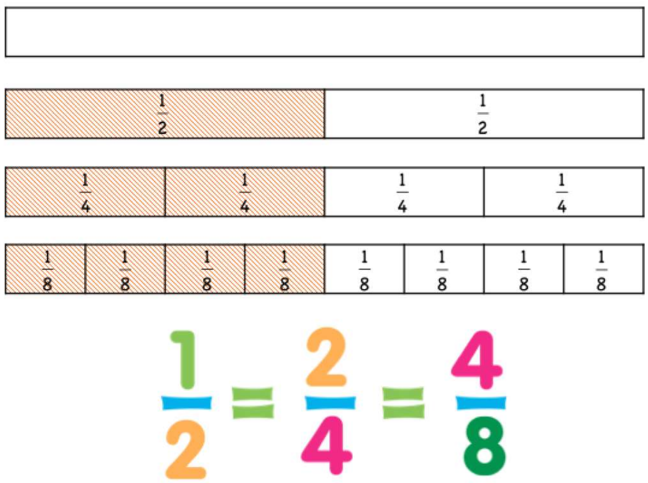
Slika 11: Vizualni prikaz razlomka koristeći aplet

Nakon što odaberu početni razlomak, učenici mogu proučavati postupak proširivanja izabranog razlomka.



Slika 12: Korištenje apleta za proširivanje razlomaka

Također, list s razlomačkim trakama je dobar pokazatelj ekvivalentih razlomaka, odnosno učenik će pronaći ekvivalentne razlomke tako što će pronaći trake jednake širine kako je prikazano na Slici 13.

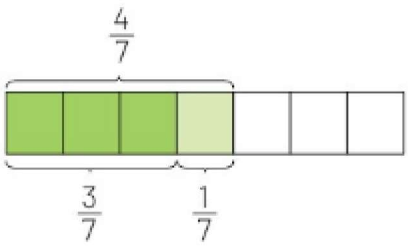


Slika 13: Ekvivalentni razlomci
(Izvor: https://teachablemath.com/)

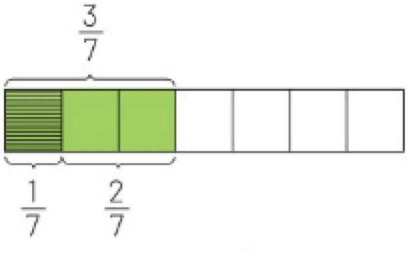
6 Zbrajanje i oduzimanje razlomaka

Važan cilj kod učenja razlomaka je da učenici razvijaju proceduralno znanje pri zbrajanju i oduzimanju razlomaka. To se odnosi na usvajanje korak-po-korak instrukcija koje propisuju kako riješiti zadatak, odnosno korištenje vještina, algoritama i strategija za točno i učinkovito rješavanje problema. Međutim, samo proceduralno znanje nije dovoljno za svaldavanje sadržaja zbrajanja i oduzimanja razlomaka. Uz proceduralno znanje potrebno je graditi i konceptualno znanje. Konceptualno znanje stvara mrežu znanja koje se odnosi na razumijevanje činjenica, koncepata i pravila. Riječ je o dubinskom znanju koje najviše dolazi do izražaja u zahtjevnijim, problemskim zadacima. Od učenika zahtijeva kategorizaciju pojmova i postupaka koje je do sada naučio kako bi na što brži i prikladniji način došao to točnog rješenja u zadacima. Na samom početku obrade zbrajanja i oduzimanja razlomaka, potrebno je operacije izvoditi na razlomcima čiji su nazivnici jednaki. Kao i sa svakim uvođenjem novog gradiva, treba krenuti s jednostavnijim primjerima koji se nadograđuju s obzirom na pomake koje učenici pokazuju. Kako su učenici do sada naučili već dosta toga o razlomcima, za očekivati je da će korisiti razne strategije kako bi pronašli rješenje zadatka. Kombinirat će razne matematičke prikaze i korake rješavanja te na taj način garditi mrežu znanja koja predstavlja konceptualno znanje. Pogledajmo u nastavku primjer zadatka koji je prikladan za početak obrade gradiva.

Primjer 11. *Izračunaj zbroj* $\frac{3}{7} + \frac{1}{7}$ *i razliku* $\frac{3}{7} - \frac{1}{7}$.
Prilikom objašnjavanja nastavnik može učenicima pomoću slikovnih prikaza objasniti vršenje ovih operacija. Za zbrajanje se može koristiti sljedeći prikaz:

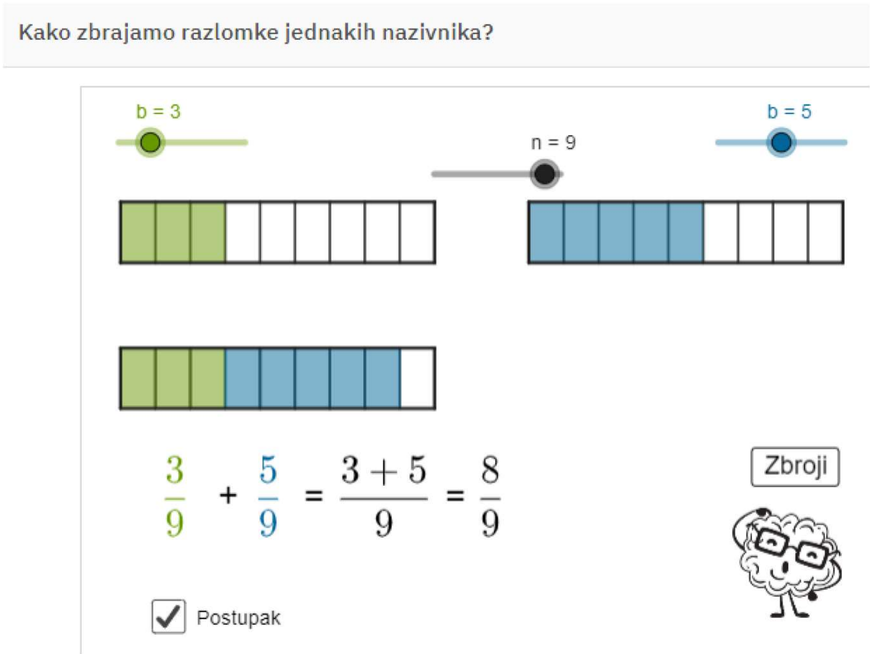


Učenicima objasnimo da najprije označe dijelove koji predstavljaju prvi razlomak, a zatim u nastavku samo dodaju dio koji predstavlja drugi razlomak. Nakon toga im koristeći nacrtano objasnimo da se razlomci jednakih nazivnika zbrajaju tako da im se brojnici zbroje, a nazivnik ostaje nepromijenjen.
Kod oduzimanja je slikovni prikaz sljedeći:

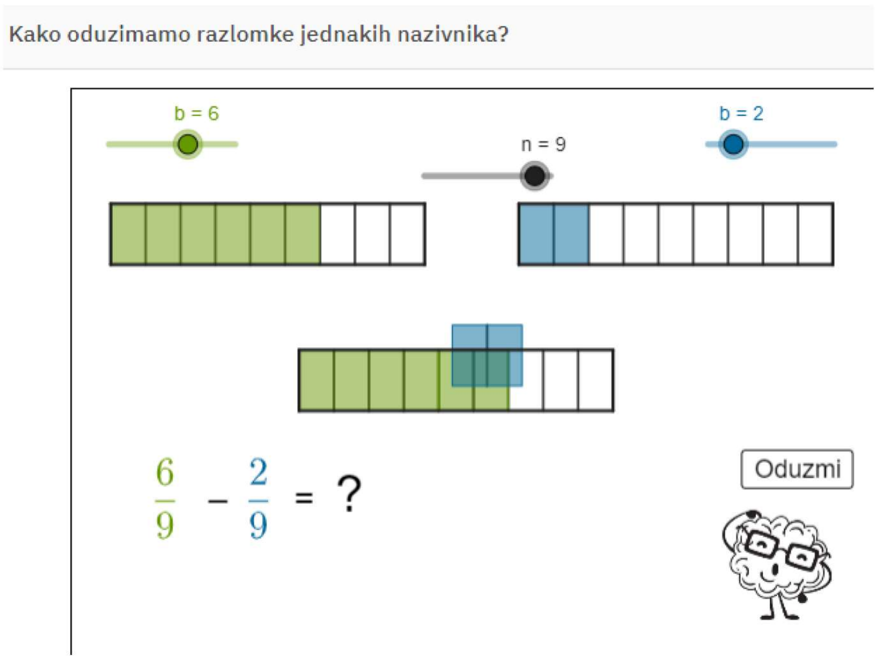


Ovdje je važno naglasiti razliku između slikovnih prikaza za zbrajanje i oduzimanje. Kod zbrajanja su se dijelovi stavljali u niz jedan do drugoga, a kod oduzimanja najprije označimo dijelove koje predstavlja prvi razlomak, a drugi razlomak označimo tako da bojamo njegove dijelove preko već obojanih dijelova prvog razlomka. Na taj način pravimo "eliminaciju" dijelova koje gubimo oduzimanjem te je konačni rezultat broj dijelova koji nije precrtan drugi puta. Zatim analogno objasnimo da se razlomci jednakih nazivnika oduzimaju tako da im se brojnici oduzmu, a nazivnik ostaje nepromijenjen.

Učenicima možemo ponuditi i razne aplete pomoću kojih će dodatno istražiti i analizirati prethodne postupke ili provjeriti jesu li točno riješili zadatke.



Slika 14: Postupak zbrajanja koristeći aplet



Slika 15: Postupak oduzimanja koristeći aplet

Učenici ovaj dio obično brzo usvoje. Problem nastaje kada razlomci nemaju isti nazivnik te je potrebno provesti postupak svođenja na zajednički nazivnik. Također, poteškoće može stvoriti ako u zadacima, osim razlomaka, postoje prirodni i/ili mješoviti brojevi. Pogledajmo nekoliko načina koje su učenici koristili za rješavanje različitih zadataka.

Primjer 12. *Luka svaki dan mora prijeći* $2\frac{1}{5}$ *kilometara od svoje kuće do posla. Auto mu se pokvario na* $\frac{3}{5}$ *kilometra od posla. Koliko je Luka udaljen od svoje kuće?*
Pogledajmo nekoliko načina rješavanja ovog zadatka.
Prvo rješenje:

$$2\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=2$$
$$2-\frac{1}{5}=1\frac{4}{5}$$
$$1\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=1\frac{3}{5}$$

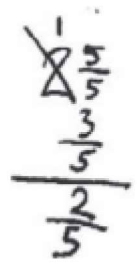
Učenik je uočio da u mješovitom broju $2\frac{1}{5}$ *stoji razlomak* $\frac{1}{5}$ *te je odlučio rastaviti razlomak* $\frac{3}{5}$ *koristeći se* $\frac{1}{5}$*, odnosno* $\frac{3}{5}$ *je shvatio kao* $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$*. Zatim je napravio tri oduzimanja gdje je u svakom koraku oduzimao* $\frac{1}{5}$*.*
Drugo rješenje:

$$2\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=2$$
$$2-\frac{2}{5}=1\frac{3}{5}$$

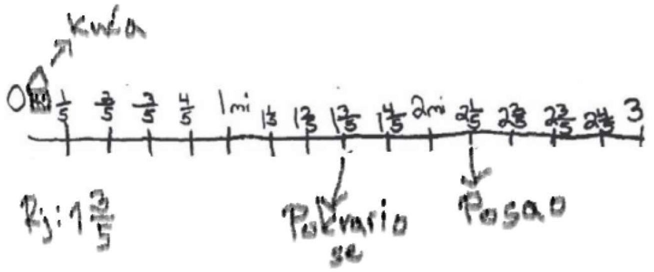
Za razliku od prethodnog rješenja, u ovom postupku učenik je također uočio $\frac{1}{5}$ *u mješovitom broju* $2\frac{1}{5}$*, ali je* $\frac{3}{5}$ *promatrao kao* $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ *kako bi mu u drugom koraku oduzimanja ostao samo cijeli dio mješovitog broja od kojeg je zatim oduzeo* $\frac{2}{5}$*.*
Treće rješenje:

$$2\frac{1}{5}-\frac{3}{5} \qquad \text{Rj}: 2\frac{2}{5}$$
$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

Uočimo kako je u ovom rješenju učenik ignorirao cijeli dio mješovitog broja te je napravio netočno oduzimanje tako što je od $\frac{3}{5}$ *oduzeo* $\frac{1}{5}$*. Na kraju je rezultat koji je dobio oduzimanjem samo povezao s cijelim dijelom mješovitog broja kojeg je na početku ignorirao.*
Četvrto rješenje:

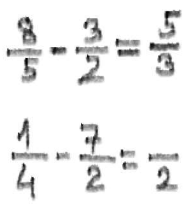


U ovom postupku učenik je uočio kako bi mogao povećati razlomački dio mješovitog broja na način da cijeli dio umanji za jedan te ga doda razlomku $\frac{1}{5}$. Ali kada je trebalo napraviti zbrajanje, odnosno $1 + \frac{1}{5}$, učenik je napravio pogrešku. Također je u postupku oduzimanja ignorirao cijeli dio mješovitog broja koji mu je ostao.
Peto rješenje:



U ovom rješenju vidimo kako je učenik uspješno riješio zadatak koristeći se brojevnim pravcem. Prikazom na pravcu odmah je mogao iščitati koja udaljenost je rješenje zadatka.

Za kraj još spomenimo možda najčešću pogrešku koju učenici rade izvršavajući operacije zbrajanja i oduzimanja razlomaka. Riječ je strategiji u kojoj zbrajaju brojnik s brojnikom te nazivnik s nazivnikom te isto koriste i prilikom oduzimanja. Ovaj postupak učenici su preuzeli od zbrajanja i oduzimanja razlomaka s jednakim nazivnicima. Jedan takav primjer dan je na slici ispod.



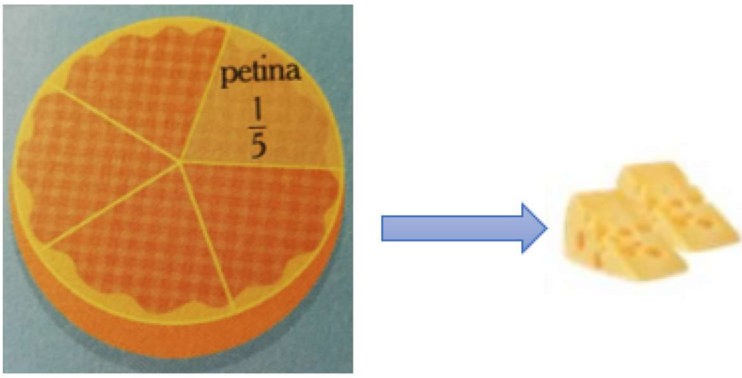
Slika 16: Pogrešna strategija prilikom oduzimanja razlomaka

Uočimo na prethodnoj slici kako strategiju oduzimanja brojnik s brojnikom, nazivnik s nazivnikom učenici koriste kada su brojnik i nazivnik prvog razlomka veći od brojnika i nazivnika drugog razlomka pa je moguće provesti oduzimanje. Ukoliko su brojnik i/ili nazivnik drugog razlomka veći, učenici najčešće odustaju od rješavanja zadatka.

7 Množenje razlomaka

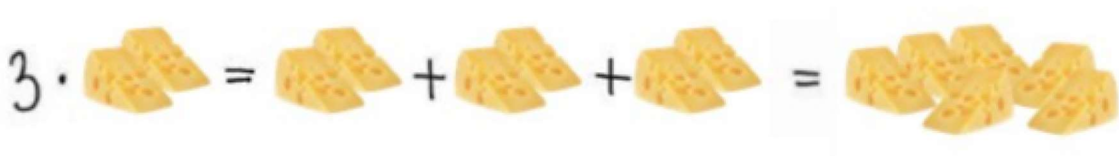
Kao i u prethodnim poglavljima, kod množenja razlomaka je također potrebno koristiti što više vizualnih modela kako bi učenici shvatili pozadinu samog množenja razlomaka. Na početku ove cjeline, učenici se prvo susreću s množenjem prirodnog broja i razlomka. Cilj je da učenici shvate da pomnožiti prirodni broj s razlomkom znači uzastopno pribrajati isti razlomak. U sljedećem primjeru pokazan je jedan način obrade ovog dijela gradiva.

Primjer 13. *Lucija je u svom dvorištu uočila malog miša. Odlučila ga je hraniti sa sirom. Svaki dan mu ostavi $\frac{2}{5}$ sira. Koliko će sira pojesti miš tijekom tri dana?*
Za početak je važno s učenicima odrediti što znači da miš dnevno pojede $\frac{2}{5}$ sira. Koristeći vizualni model dolazimo do zaključka da miš pojede dva komada sira od ukupno pet jednakih komada.



Slika 17: Količina sira koju miš pojede u jednom danu

Sada nas zanima kolika je to količina za tri dana, odnosno koliko je $3 \cdot \frac{2}{5}$. Ponovno se poslužimo vizualnim modelom:

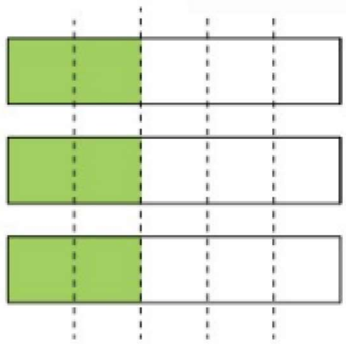


Kako dva komada sira predstavljaju $\frac{2}{5}$ sira, zamijenimo svaki komad s $\frac{2}{5}$ i dobivamo:

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2+2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

. Dakle, $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

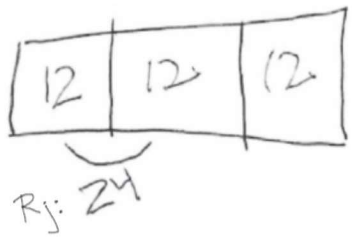
Nastavnik ovdje svakako treba naglasiti da $3 \cdot \frac{2}{5} \neq 3\frac{2}{5}$. Ovo je česta pogreška koju učenici rade pa ih svakako treba unaprijed upozoriti na nju te dodatno pojasniti.
Sljedeće gradivo s kojim se učenici susreću je množenje razlomka s prirodnim brojem. Ovdje ne možemo imati isto razmišljanje kao u gornjem primjeru, odnosno ne znamo što znači $\frac{2}{5}$ puta pribrojiti broj 3. Stoga ovaj dio objasnimo tako da $\frac{2}{5} \cdot 3$ shvatimo kao $\frac{2}{5}$ od 3 te vizualnim modelom dodatno pojasnimo.



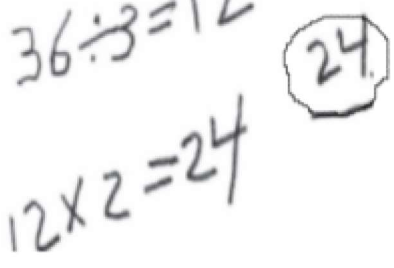
Slika 18: Prikaz $\frac{2}{5} \cdot 3$

Slijedi da $\frac{2}{5} \cdot 3$ znači da moramo uzeti tri modela, u našem slučaju tri pravokutnika, a zatim svaki pravokutnik podijeliti na pet jednakih dijelova te obojati dva od ukupno 5 dijelova na svakom pravokutniku. Kako smo iz svakog pravokutnika uzeli $\frac{2}{5}$, zaključujemo da na kraju imamo $\frac{6}{5}$. Slijedi $\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5}$.
Analiza prethodna dva primjera množenja daje zaključak da množenjem prirodnog broja razlomkom daje isti rezultat kao i množenje razlomka s prirodnim brojem.
Učenici mogu stvoriti i svoje strategije za rješavanje problema u danom zadatku. Neke od tih strategija pokazane su u primjeru ispod.

Primjer 14. *U 6.B razredu je 36 učenika. $\frac{2}{3}$ učenika ima smeđe oči. Koliko učenika u razredu ima smeđe oči?*
Bornin odgovor:



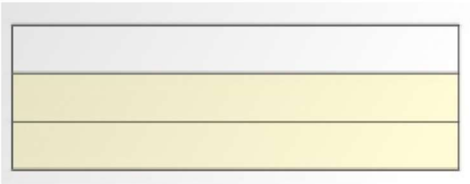
Borna je koristio vizualni model pravokutnika za prikaz razreda. Zatim je pravokutnik podijelio na tri jednaka dijela te odredio koliki broj učenika čini $\frac{1}{3}$ razreda. Za kraj je na modelu označio $\frac{2}{3}$ učenika koji imaju smeđe oči te do konačnog rezultata došao množenjem broja 12 s 2.
Larin odgovor:



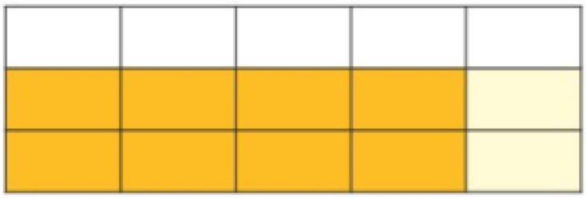
Uočimo kako Lara nije koristila vizualne modele. Iz zadatka je shvatila da mora pronaći $\frac{1}{3}$ razreda te da je to isto što i podijeliti ukupan broj učenika s tri. Nakon toga je dobiveni broj pomnožila s dva te dobila broj koji predstavlja $\frac{2}{3}$ učenika sa smeđim očima.

Za kraj još ostaje množenje razlomka razlomkom. Prije uvođenja samog pravila da se razlomak množi razlomkom tako da se brojnik pomnoži s brojnikom, a nazivnik s nazivnikom, učenicima je potrebno postupak objasniti na vizualnim modelima. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 15. *Koliko je $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$?*
Prije svega treba znati da $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ znači $\frac{4}{5}$ od $\frac{2}{3}$. Najprije modelom prikažimo $\frac{2}{3}$:

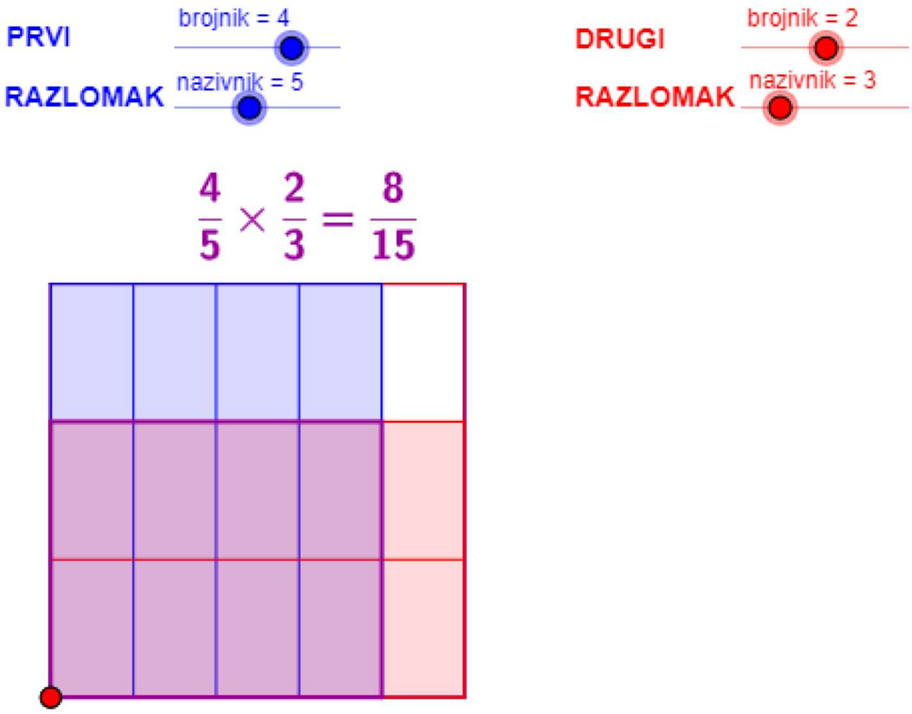


Nakon toga tražimo $\frac{4}{5}$ od $\frac{2}{3}$. To znači da prethodni model moramo podijeliti na pet jednakih dijelova, a zatim obojati četiri dijela od tih pet. Konačni rezultat je broj dijelova koje smo obojali dva puta, odnosno:



Prebrojavanjem pravokutnika slijedi da je $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$.

Za ovaj dio također postoje mnogi apleti koji će učenicima olakšati razumijevanje međusobnog množenja razlomaka. Korištenjem apleta potičemo učenike na samostalan rad i istraživanje pa kao rezultat dobivamo aktivne učenike.



Slika 19: Množenje razlomaka koristeći aplet

Učenici obično brzo usvoje pravilo množenja dvaju razlomaka. Pogreška koju mogu napraviti je da prilikom množenja pomnože brojnike, a nazivnike zbroje, ili obrnuto da pomnože nazivnike, a brojnike zbroje. Nastavnik svakako treba pratiti rad svojih učenika te ako uoči neku od navedenih pogreški na vrijeme reagirati. Jedan od načina je tražiti od učenika da se koriste vizualnim modelima te na taj način provjere točnost svog postupka.

8 Dijeljenje razlomaka

Prije uvođenja operacije dijeljenja, potrebno je učenike upoznati s pojmom recipročnih brojeva, odnosno recipročnih razlomaka. Potrebno je učenicima objasniti da recipročan znači obrnut, preokrenut pa ih zatim pitati što bi oni rekli koji razlomak je recipročan razlomku $\frac{3}{4}$. Učenike treba voditi raznim potpitanjima kako bi uspješno došli do točnog zaključka. Neka od mogućih pitanja su:

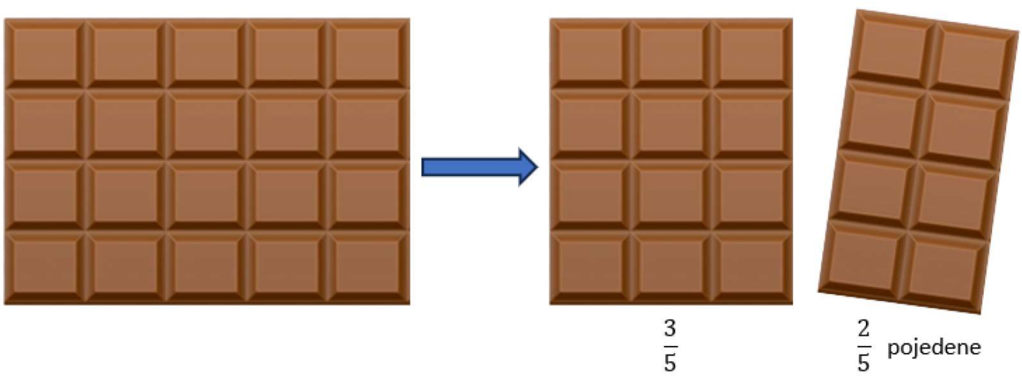
- Što biste vi rekli da je obrnuto od $\frac{3}{4}$?
- Kako biste vi "preokrenuli" razlomak $\frac{3}{4}$?

Nakon što učenici dođu do točnog odgovora, nastavnik im zapisuje općeniti slučaj, tj. da su razlomci $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$ međusobno recipročni ($a \neq 0, b \neq 0$). Također, ponavlja da kod recipročnih razlomaka vrijedi da je brojnik prvog razlomka jednak nazivniku drugog razlomka i nazivnik prvog jednak je brojniku drugog razlomka. U nastavku je potrebno još uvidjeti da je umnožak recipročnih razlomaka jednak 1.

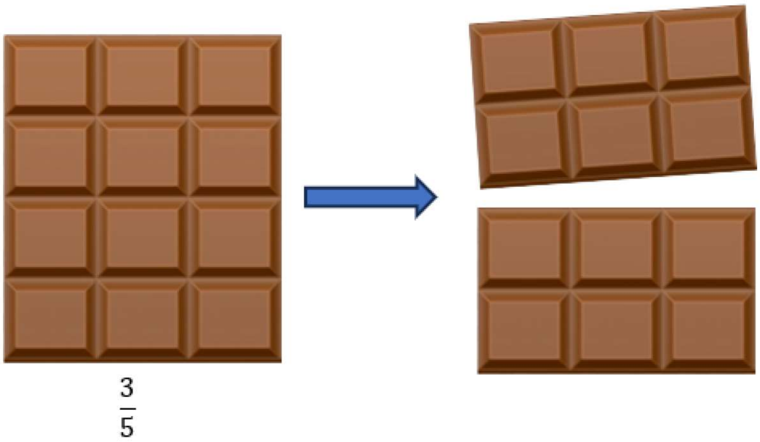
8.1 Dijeljenje razlomka prirodnim brojem

Uvođenje učenika u podtemu dijeljenja razlomaka prirodnim brojem poželjno je napraviti korištenjem primjera iz svakodnevnog života. Učenici će tako lakše shvatiti pozadinu ovog dijeljenja te će im općeniti postupak biti jednostavniji za usvojiti. Navedimo jedan takav primjer.

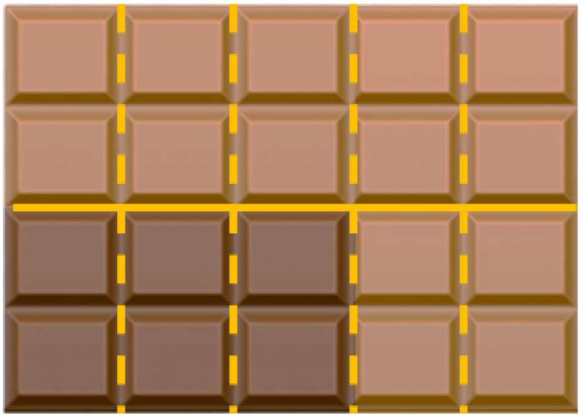
Primjer 16. *Jakov je kupio čokoladu. Dok je čekao Dinu, pojeo je* $\frac{2}{5}$ *čokolade. Kada je Dino stigao, podijelili su ostatak čokolade tako da je svaki dobio jednaku količinu. Koliko je čokolade dobio Dino?*
Zadatak treba analizirati dio po dio. Prvo saznajemo da je Jakov pojeo $\frac{2}{5}$ *čokolade dok je čekao Dinu pa prikažimo to modelom:*



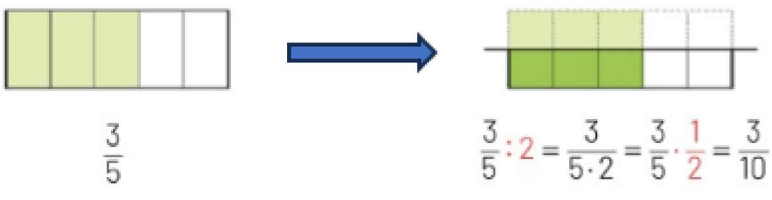
Nakon toga dolazi Dino te su pravedno podijelili ostatak čokolade:



Modelom smo prikazali kako izgleda količina čokolade koju je dobio Dino. Sada pogledajmo kako izgledaju sve podjele zajedno:



Uočimo kako je čokolada morala biti podijeljena na 10 *jednakih dijelova. Promatrajući veličinu dijela koji je dobio Dino, vidimo da njegov dio sadrži* 3 *od ukupno* 10 *dijelova. Iz toga slijedi da je Dino pojeo* $\frac{3}{10}$ *čokolade. Sada, koristeći jednostavniji model, učenici mogu uočiti da podijeliti razlomak* $\frac{3}{5}$ *s* 2 *ustvari znači pomnožiti* $\frac{3}{5}$ *s recipročnim brojem od broja* 2*, odnosno s* $\frac{1}{2}$*:*

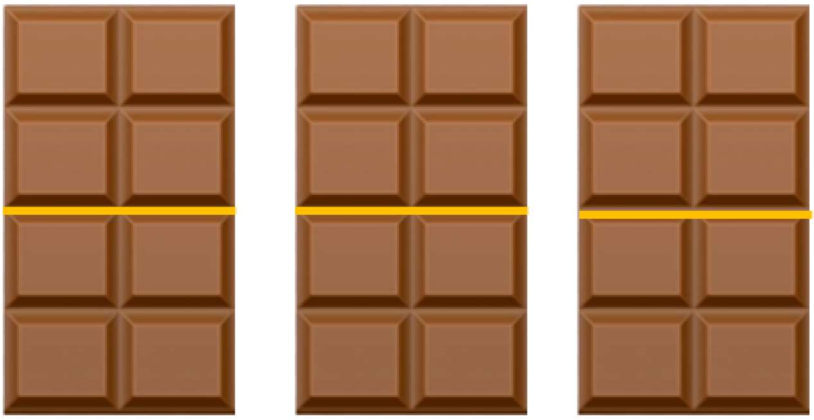


8.2 Dijeljenje prirodnog broja razlomkom

Za podtemu dijeljenja prirodnog broja razlomkom također možemo iskoristiti primjer vezan za čokoladu.

Primjer 17. *David ima* 3 *jednaka komada čokolade. Zanima ga koliko će komada čokolade imati ako svaki od ta* 3 *komada podijeli na pola, odnosno* $3 : \frac{1}{2}$*. Pomozi Davidu otkriti koliko*

komada čokolade će imati.
Ponovno se poslužimo modelom kako bismo pronašli rješenje zadatka:



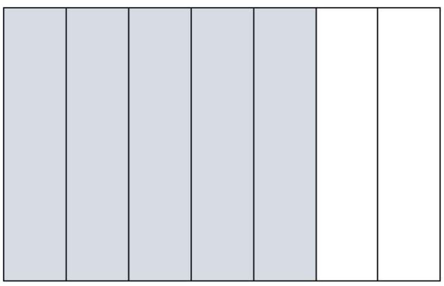
Uočimo kako navedenom podjelom od početna 3 *komada sada dobivamo* 6 *komada čokolade. Sada dodatnom analizom i potpitanjima od strane nastavnika, učenici trebaju zaključiti da dijeljenjem broja* 3 *s* $\frac{1}{2}$ *dobiju rezultat* 6 *što je isto kao da su broj* 3 *pomnožili brojem* 2. *Cilj je doći do zaključka da dijeliti broj s razlomkom znači množiti taj broj s recipročnim razlomkom, odnosno:*

$$\square : \frac{a}{b} = \square \cdot \frac{b}{a}$$

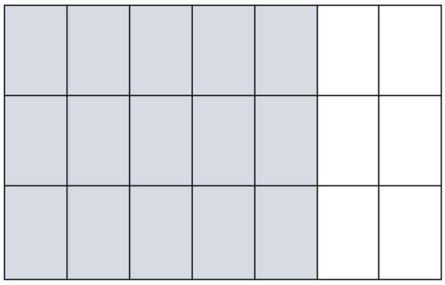
8.3 Dijeljenje razlomka razlomkom

Posljednje s čim se učenici moraju upoznati vezano za operaciju dijeljenja je dijeljenje razlomka razlomkom. Pogledajmo jedan način objašnjavanja ovog dijela sadržaja koristeći se modelom pravokutnika.

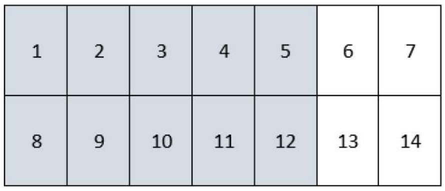
Primjer 18. *Koliko je* $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$*?*
Najprije na modelu odredimo dio koji predstavlja $\frac{5}{7}$*:*



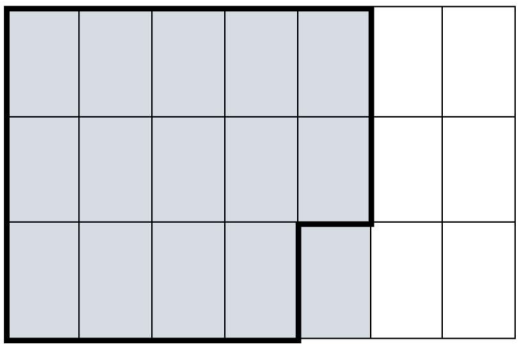
Uočimo sada kako je u nazivniku drugog razlomka broj 3 *pa podijelimo naš model u horizontalnom smjeru na tri jednaka dijela:*



Uzmimo sada $\frac{2}{3}$ modela i pogledajmo od koliko malih pravokutnika se sastoji:



Prebrojavanjem dobivamo 14 malih pravokutnika. Sada se pitamo koliko puta $\frac{2}{3}$ (14 malih pravokutnika) ide u $\frac{5}{7}$ (dio obojan sivom bojom)? Označimo to na modelu:



Vidimo da $\frac{2}{3}$ površine modela (14 malih pravokutnika) jednom staje u $\frac{5}{7}$ površine modela (dio obojan sivom bojom). Ostao nam je još jedan sivi pravokutnik koji bi pripadao sljedećoj grupi 14 pravokutnika pa on čini $\frac{1}{14}$ te grupe. Kako $\frac{2}{3}$ površine modela (14 malih pravokutnika) jednom staje u $\frac{5}{7}$ površine modela i ostaje jedan sivi pravokutnik koji predstavlja $\frac{1}{14}$ slijedi da je konačni rezultat $1\frac{1}{14}$, odnosno $\frac{15}{14}$.

Nakon analize gornjeg primjera, nastavnik može tražiti od učenika da izračunaju koliko je $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2}$. Učenici će dobiti isti rezultat kao u gornjem primjeru pa nastavnik raznim potpitanjima treba učenike dovesti do zaključka da razlomke dijelimo tako da djeljenik prepišemo i pomnožimo s recipročnim brojem djelitelja.

8.4 Pogreške prilikom dijeljenja razlomaka

Za kraj ćemo kroz nekoliko primjera navesti neke od najčešćih pogrešaka koje učenici mogu napraviti prilikom dijeljenja razlomaka.

Primjer 19. *Izračunaj koliko je $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ te zaokruži točan rezultat:*

a) $\frac{1}{8}$

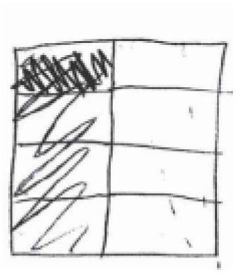
b) 0

c) 1

d) 2

Prvi odgovor:

a) $\frac{1}{8}$
b) 0
c) 1
d) 2



Učenik je koristio vizualni model za rješavanje zadatka te je umjesto $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ *računao* $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$.

Drugi odgovor:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Rj: $\frac{1}{8}$

Učenik nije množio s recipročnim brojem, nego s početnim razlomkom.
Treći odgovor:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Učenik pogrešno određuje recipročni razlomak.

Primjer 20. *Dva prijatelja su odlučila podijeliti pola boce soka. Odredi koliko će svatko popiti soka.*
Odgovor učenika:

$$2 : \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4$$

Učenik pogrešno određuje što je djeljenik, a što djelitelj. Umjesto $\frac{1}{2} : 2$ *učenik računa* $2 : \frac{1}{2}$.

Zaključak

Strah od matematike dovodi do toga da učenici matematiku povezuju s osjećajem napetosti i nelagode. Fenomen straha od matematike prvenstveno mogu smanjiti nastavnici. Njihova je uloga učenicima predstaviti matematiku kao zanimljivu, zabavnu i korisnu. Učenike je potrebno motivirati odabirom adekvatnih aktivnosti i zadataka kroz koje će se obraditi sadržaj. Kroz ovaj rad predstavljene su razne aktivnosti i zadaci s primjerima iz svakodnevnog života koji potiču učenike na aktivno sudjelovanje, razmišljanje te samostalno istraživanje sadržaja vezanog za razlomke. Učenicima je potrebno ponuditi zadatke u kojima se kombiniraju razni tipovi matematičkih prikaza razlomaka. Na taj način se kod učenika, osim proceduralnog znanja, razvija i konceptualno znanje pa će učenici lakše shvatiti matematički koncept razlomka. Analizirane su i strategije s kojima se učenici koriste prilikom rješavanja zadataka. Pokazani su primjeri u kojima te strategije vode ka točnom rješenju, ali i primjeri u kojima učenici nisu uspješno riješili zadatak. Navedene pogreške i miskoncepcije mogu poslužiti nastavnicima za unaprjeđenje nastave i prilagođavanje poučavanja potrebama učenika. S druge strane, pogreške potiču učenike na dublje razmišljanje i razvoj kritičkog razmišljanja što u konačnici daje dinamičniji i učinkovitij proces učenja.

Literatura

[1] M.M. Petit, R.E. Laird, C.B. Ebby, E.L. Marsden, *A focus on fractions; Bringing Mathematics Education Research to the Classroom*, Routledge, New York, 2023.

[2] R. Hore , *Fractions and Decimals Activity Book*, Usborne publishing Ltd, London, 2021.

[3] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić, M. Vuković, *Matematika 5, udžbenik za peti razred osnovne škole, 2. svezak*, Profil Klett d.o.o., Zagreb, 2020.

[4] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić, M. Vuković, *Matematika 6, udžbenik za šesti razred osnovne škole, 2. svezak*, Profil Klett d.o.o., Zagreb, 2020.

[5] T. Vidić, S. Smetko, A. Maričić, *Strah od matematike učenika u osnovnoj školi*, Napredak: Časopis za interdisciplinarna istraživanja u odgoju i obrazovanju, 2020.

[6] S.J. Lamon, *Teaching Fractions and Ratios for Understanding; Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*, Routledge, New York, 2020.

[7] *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2.*, Ministarstvo znanosti i obrazovanja, Zagreb, 2019.
https://mzo.gov.hr/istaknute-teme/odgoj-i-obrazovanje/nacionalni-kurikulum/predmetni-kurikulumi/matematika/746

Sažetak

Kroz ovaj rad prikazane su razne strategije za obradu sadržaja razlomaka te su dani primjeri zadataka kroz koje je moguće primijeniti te strategije. Naglasak se stavlja na važnost korištenja pet tipova matematičkih prikaza te međusobno kombiniranje tih prikaza u zadacima. U radu se mogu pronaći i zadaci kroz koje su predstavljena moguća rješenja učenika te analiza njihovih strategija rješavanja. Također su navedene moguće pogreške i miskoncepcije koje učenici mogu razviti.

Ključne riječi: Razlomci, podjela cjeline, ekvivalentni dijelovi cjeline, ekvivalentni razlomci, zbrajanje i oduzimanje razlomaka, množenje razlomaka, dijeljenje razlomaka

Title: Fractions

Abstract

This paper presents various strategies for processing the content of fractions and gives examples of tasks through which it is possible to apply these strategies. Emphasis is placed on the importance of using five types of mathematical representations and combining these representations in tasks. In the paper, you can also find tasks through which the students' possible solutions are presented and an analysis of their solution strategies. Possible mistakes and misconceptions that students may develop are also listed.

Keywords: Fractions, division of a whole, equivalent parts of a whole, equivalent fractions, addition and subtraction of fractions, multiplication of fractions, division of fractions

Životopis

Rođena sam 9.4.1998. godine u Slavonskom Brodu. Pohađala sam Osnovnu školu "Vjekoslav Klaić" u Garčinu koju završavam 2012. godine. Nakon toga upisujem Tehničku školu Slavonski Brod, zanimanje elektrotehničarka. Kroz srednju školu odrađujem praksu iz područja elektrotehnike te ju završavam 2016. godine završnim radom na temu "Elektrane na obnovljive izvore" pod mentorstvom profesorice elektrotehnike Roze Mihić. Obrazovanje nastavljam upisom Sveučilišnog preddiplomskog studija matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Sveučilišni preddiplomski studij završavam 2021. godine završnim radom na temu "Interpolacija" pod mentorstvom izv.prof.dr.sc. Tomislava Maroševića. Iste godine upisujem Diplomski nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studiranja odrađujem stručnu praksu iz matematike i informatike u raznim osnovnim i srednjim školama na području Osijeka.