

# Involuta i evoluta krivulje

---

Osmanović, Tea

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, School of Applied Mathematics and Informatics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet primijenjene matematike i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:643219>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-02**



**mathos**

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primijenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Tea Osmanović

# Involuta i evoluta krivulje

Završni rad

Osijek, 2024.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Fakultet primjenjene matematike i informatike  
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Tea Osmanović

# Involuta i evoluta krivulje

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2024.

**Sažetak:**

U ovom završnom radu proučit ćemo involutu i evolutu krivulja. Evoluta krivulje je krivulja koja se sastoji od središta zakrivljenosti svih točaka zadane krivulje, dok se involutom (ili evolventom) krivulje zove ona krivulja za koju je polazna krivulja njezina evoluta. Takve krivulje imaju i svoju primjenu, prvenstveno pri izradi zupčanika. U radu su navedeni primjeri krivulja i njihovih involuta s grafičkim prikazima izrađenim pomoću programa Wolfram Mathematica.

**Ključne riječi:** krivulja, Frenetov trobrid krivulje, zakrivljenost, torzija, involuta, evoluta

## Involute and evolute of a curve

### **Abstract:**

In this paper we study the theory of involutes and evolutes of curves. The evolute of a curve is a curve consisting of the center of curvature of all points of a given curve, while the involute of a curve is the curve for which the starting curve is its evolute. Such curves also have their application, primarily in the manufacture of gears. In paper are listed some examples of curves and their involutes with graphic representations that were created using the Wolfram Mathematica program.

**Key words:** curve, Frenet frame, curvature, torsion, involute, evolute

# Sadržaj

Uvod	1
1. Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja u $\mathbb{R}^3$	2
2. Involuta i evoluta	4
2.1. Kružnica zakrivljenosti i središte zakrivljenosti . . . . .	4
2.2. Grafički prikazi evoluta nekih krivulja . . . . .	13

# Uvod

U ovom završnom radu obradit ćemo specijalne klase krivulja koje možemo pridružiti proizvoljnoj krivulji. Detaljnije, bavit ćemo se involutom i evolutom krivulja. Sama definicija involute i evolute krivulja veoma je ovisna o poznavanju pojmova iz lokalne teorije krivulja kao što su fleksija, kružnica zakrivljenosti, središte kružnice zakrivljenosti, i još neki drugi. U prvom poglavlju rada ponovit ćemo osnovne definicije potrebne za razumijevanje teme, a zatim ćemo u drugom poglavlju detaljnije pojasniti pojmove involute i evolute krivulje. Ovi koncepti imaju duboke korijene u matematičkoj analizi i geometriji te su kroz povijest privlačili pažnju matematičara zbog svoje fundamentalne uloge u razumijevanju zakrivljenosti i promjene smjera krivulja.

Povijesno gledano, proučavanje involute započelo je u 17. stoljeću kada je Johannes Kepler, prvi put, razmotrio specifične primjere involuta u svojim radovima o orbitalnim kretanjima planeta. Kasnije, u 18. i 19. stoljeću, matematičari poput Christiana Huygensa i Gottfrieda Leibniza razvili su formalne definicije i teorije o involuti, postavljajući temelje za daljnje istraživanje u diferencijalnoj geometriji.

Evoluta, s druge strane, proučavana je zbog svoje veze sa zakrivljenošću i središtem zakrivljenosti krivulje. Pioniri poput Jamesa Gregoryja u 17. stoljeću pridonijeli su razumijevanju evolute kao koncepta koji povezuje geometrijska svojstva zakrivljenosti s promjenom smjera krivulje.

Neke od naprednih primjena involute i evolute su u područjima poput robotike, medicinske dijagnostike i digitalne obrade slike.

Involuta se koristi u konstrukciji zupčanika gdje je oblik zupčanika definiran kao involuta krivulje radi optimalnog prijenosa energije i minimizacije troškova. U fizici, involuta se primjenjuje u teoriji valova kao model za opisivanje krivulja valova koji se reflektiraju ili lome. Primjene involute u medicini uključuju modeliranje anatomskih struktura i kretanja tijela, što je korisno u biomehanici i dijagnostici.

Evoluta je posebno važna u proučavanju zakrivljenosti krivulje i identifikaciji kritičnih točaka kao što su mjesta ekstremne zakrivljenosti ili tangencijalne promjene smjera. Primjene evolute uključuju analizu složenih geometrijskih oblika poput latica cvijeta ili lista koji se mogu opisati pomoću evoluta radi boljeg razumijevanja njihove strukture i formacije.

Ovi povijesni detalji i primjeri primjene pokazuju koliko su involuta i evoluta važne ne samo u matematičkoj teoriji već i u raznim praktičnim područjima znanosti i tehnologije, ističući njihovu duboku povezanost s geometrijskim i fizičkim fenomenima u stvarnom svijetu.

Ovaj rad pruža dublje razumijevanje matematičkih svojstava, povijesnog razvoja i širokih primjena involute i evolute, potičući daljnje istraživanje i primjenu u različitim područjima znanosti i tehnologije. U prvom poglavlju rada navedeni su osnovne definicije i teoremi lokalne teorije krivulja. U drugom poglavlju detaljno su obrađene teme involute i evolute krivulja, uz odgovarajuće grafičke prikaze.



# 1. Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja u $\mathbb{R}^3$

U ovome poglavlju ćemo navesti definicije potrebne u svrhu boljeg razumijevanja teme ovog završnog rada. Najveći dio definicija preuzet je iz materijala s predavanja iz kolegija Uvod u diferencijalnu geometriju koji se izvodio 2024. godine na Fakultetu primijenjene matematike i informatike u Osijeku.

**Definicija 1.1.** *Krivulja  $c$  u  $\mathbb{R}^3$  je glatko preslikavanje*

$$c : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

gdje je  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  otvoreni interval.

Za krivulje u  $\mathbb{R}^3$  istaknut ćemo njihove koordinatne funkcije, odnosno pisat ćemo  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , a za njihovu derivaciju

$$\frac{dc}{dt}(t) = \dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \quad \frac{d^2c}{dt^2}(t) = \ddot{c}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).$$

**Definicija 1.2.** *Krivulju  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazivamo regularnom ako je  $\dot{c}(t) \neq 0$ ,  $t \in I$ . Točku krivulje za koju je  $\dot{c}(t) = 0$  nazivamo singularnom točkom krivulje.*

**Definicija 1.3.** *Neka je  $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  otvoreni interval. Duljina luka krivulje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  je realni broj*

$$s = \int_a^b \|\dot{c}(u)\| du.$$

**Definicija 1.4.** *Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna krivulja. Tada vektor  $\dot{c}(t)$  nazivamo tangencijalnim vektorom ili vektorom brzine krivulje  $c$  u točki  $c(t)$ . Funkciju  $\|\dot{c}(t)\|$  nazivamo brzinom krivulje  $c$  u točki  $c(t)$ .*

*Za krivulju  $c$  kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka ako je  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  za svaki  $t \in I$ .*

**Definicija 1.5.** *Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$ . Funkciju  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu  $s$*

$$\kappa(s) = \|c''(s)\|$$

*nazivamo zakrivljenošću (fleksijom) krivulje  $c$  u točki  $c(s)$ .*



**Propozicija 1.1.** (Vidjeti [5], Propozicija 1.3.3) Regularna krivulja je pravac (dio pravca) ako i samo ako je  $\kappa = 0$ .

**Primjer 1.1.** Zakrivljenost kružnice  $c(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0)$  radijusa  $r > 0$  jednaka je  $\frac{1}{r}$ .

**Propozicija 1.2.** (Vidjeti [5], Propozicija 1.3.5) Neka je  $c$  regularna krivulja u  $\mathbb{R}^3$  parametrizirana općim parametrom  $t$ . Tada je njena zakrivljenost

$$\kappa = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3}.$$

Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja parametrizirana duljinom luka. Polje  $t(s) = c'(s)$  je jedinično tangencijalno polje od  $c$ . Polje vektora glavnih normala definiramo kao

$$n(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}, c''(s) \neq 0,$$

a polje binormala

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

Tada je  $(t(s), n(s), b(s))$  desna ortonormirana baza od  $\mathbb{R}_{c(s)}^3$ , tj. prostora svih vektora u točki  $c(s)$ .

Nazivamo je Frenetovim (Frenet-Serret-ovim) trobridom krivulje  $c$ .

**Definicija 1.6.** Za krivulju  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametriziranu duljinom luka, funkcija  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\tau(s) = -n(s) \cdot b'(s)$$

naziva se torzijom (sukanjem) krivulje  $c$  u točki  $c(s)$ .

**Napomena 1.1.** Polje  $n$  je definirano samo za  $c''(s) \neq 0$ , a krivulje za koje to vrijedi nazivamo dopustivim.

**Teorem 1.1.** (Vidjeti [5], Teorem 1.3.7) Neka je  $c$  dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$ . Tada vrijedi

$$t' = \kappa n$$

$$n' = -\kappa t + \tau b$$

$$b' = -\tau n.$$

## 2. Involuta i evoluta

### 2.1. Kružnica zakrivljenosti i središte zakrivljenosti

U ovom potpoglavlju ćemo se najprije upoznati s pojmovima potrebnim za definiciju involute i evolute krivulje, objasniti ćemo što je oskulacijska kružnica te središte zakrivljenosti krivulje.

Zakrivljenost ravninske krivulje ćemo računati pomoću druge derivacije vektorski zadane krivulje. Geometrijski zakrivljenost krivulje predstavlja odklon krivulje od tangente.

**Napomena 2.1.** Zakrivljenost kružnice polumjera  $R$  jednaka je za sve njezine točke i iznosi  $\kappa_c = \frac{1}{R}$ .

Kružnica (krivulja konstantne zakrivljenosti) će nam služiti za mjerenje zakrivljenosti krivulja kod kojih ta vrijednost nije konstantna. Polumjer kružnice se smanjuje kako se njena zakrivljenost povećava, tj. polumjer kružnice i njezina zakrivljenost su obrnuto proporcionalni.

Za zakrivljenost pravca uzimamo vrijednost 0 i smatrat ćemo ju zakrivljenošću kružnice s beskonačno velikim polumjerom.

Ako u točki  $T$  neke krivulje  $c$  promatramo tangentu i normalu onda bilo koja kružnica  $k$  koja prolazi točkom  $T$  i čije središte pripada normalu, ima istu tangentu u točki  $T$  kao krivulja  $c$ .

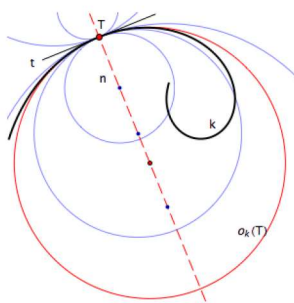
Kružnica  $k$  će imati dvije zajedničke točke s krivuljom  $c$  i to nazivamo **dodir 1. reda** u toj točki. Kružnicu ćemo zvati dirna kružnica krivulje  $c$  u točki  $T$ .

Dirne kružnice (kojih ima beskonačno mnogo) će činiti pramen dirnih kružnica krivulje  $c$  u točki  $T$ .

Ako je  $c$  algebarska krivulja reda  $n$ , onda će svaka dirna kružnica s njom imati još  $2(n-1)$  zajedničkih točaka.

U pramenu dirnih kružnica krivulje  $c$  u regularnoj točki  $T$  uvijek će se nalaziti jedna kružnica kojoj se i neko od preostalih  $2(n-1)$  sjecišta podudara s točkom  $T$ .

Ta kružnica i krivulja  $c$  imaju 3 zajedničke točke koje se podudaraju s točkom  $T$  (u  $T$  imaju **dodir 2. reda**). Nju nazivamo oskulacijskom kružnicom krivulje  $c$  u točki  $T$  ili kružnicom zakrivljenosti krivulje  $c$  u točki  $T$ . Koristit ćemo oznaku  $o_k(T)$ .



Slika 1: Grafički prikaz dodira 1. i 2. reda u točki  $T$ . (Vidjeti [6])

Zakrivljenost krivulje  $c$  u točki  $T$  jednaka je zakrivljenosti njezine oskulacijske kružnice u  $T$ , tj.  $\kappa_c(T) = \kappa_{o_k}(T)$ .

**Definicija 2.1.** Središte zakrivljenosti  $S$  krivulje u točki  $T$  ujedno je i središte oskulacijske kružnice, koja krivulju dira u točki  $T$ . Središte leži na onoj istoj strani krivulje prema kojoj je ona konkavna.

Odnosno, točka  $S$  leži na dijelu normale koji pokazuje smjer konkavnosti krivulje.

Vrijedi napomenuti temeljnu razliku između evolute ravninske i prostorne krivulje:

- evoluta ravninske krivulje je jedinstvena, dok prostorne krivulje imaju beskonačno mnogo evoluta,
- evoluta ravninske krivulje je definirana kao mjesto točaka koje se sastoji od središta zakrivljenosti promatrane krivulje.

**Napomena 2.2.** *Iako se definicije evolute razlikuju obzirom je li krivulja ravninska ili prostorna, definicija involute ravninske krivulje prirodno se proširuje odnosno generalizira na definiciju prostorne krivulje.*

*Jednom kada odredimo involutu  $\tilde{c}$  krivulje  $c$ , definiramo  $c$  kao evolutu krivulje  $\tilde{c}$ .*

**Definicija 2.2.** *Ploha koju čine tangencijalni vektori dane krivulje  $c$  zove se tangentna ploha krivulje  $c$ .*

Koristeći prethodnu definiciju, odredit ćemo vektor položaja točke  $P$  koja se nalazi na tangentnoj plohi.

Neka je  $A$  bilo koja točka na krivulji koja je od fiksne točke  $O$  na krivulji  $c$  udaljena za duljinu luka  $s$ . Budući da je  $P$  točka sa tangentne plohe,  $AP$  je tangenta na krivulju  $c$ . Ukoliko  $s$  u označimo udaljenost od točke  $P$  do točke  $A$ , onda je vektor položaja točke  $P$  na tangentnu plohu  $R = r(s) + ut(s)$ .

Budući da je  $R$  funkcija dvije varijable  $u$  i  $s$ , označavamo vektor položaja s  $R(s, u)$  pa možemo pisati

$$R(s, u) = r(s) + ut(s). \quad (1)$$

Budući da je (1) funkcija dvije varijable, ona predstavlja plohu.

Pretpostavimo li da vrijedi  $u = \lambda(s)$  ovisno o točki na krivulji, (1) predstavlja familiju funkcija jedne varijable pa na taj način predstavlja krivulju na tangentnoj plohi krivulje  $c$ .

**Definicija 2.3.** *Krivulja koja leži na tangentnoj plohi krivulje  $c$  i okomita je na izvodnice te plohe zove se involuta krivulje  $c$  i označava s  $\tilde{c}$ .*

Iz definicije slijedi da su tangente krivulje  $c$  zapravo normale krivulje  $\tilde{c}$ . To znači da je tangenta u točki  $P$  na krivulju  $c$  okomita na tangentu u odgovarajućoj točki krivulje  $\tilde{c}$ .

Sljedeći teorem daje nam jednadžbu involute. Koristit ćemo broj 1 u indeksu veličina koja se odnose na krivulju  $\tilde{c}$ .

**Teorem 2.1.** *(Vidjeti [1], Teorem 1) Ako je  $r_1$  vektor položaja točke  $P_1$  koja se nalazi na involuti  $\tilde{c}$  krivulje  $c$ , onda je  $r_1 = r + (c - s)t$  pri čemu je  $c$  proizvoljna konstanta, a  $r$  je vektor položaja točke  $P$  na krivulji  $c$ .*

*Dokaz.* Budući da involuta leži na tangentnoj plohi, koordinate vektora  $r_1$  točke  $P_1$  na involuti su

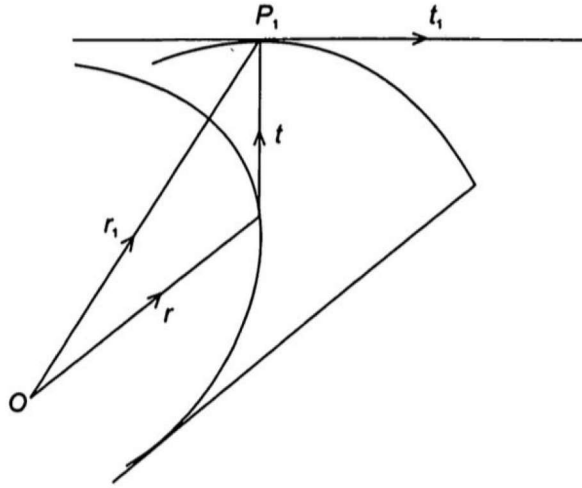
$$r_1 = r + \lambda(s)t. \quad (2)$$

Koristeći definiciju involute, naći ćemo  $\lambda(s)$  na sljedeći način.

Deriviranjem gornje jednakosti (2) po varijabli  $s$  imamo

$$\frac{dr_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{dr}{ds} + \lambda'(s)t + \lambda(s)t'.$$





Slika 2: Grafički prikaz vektora  $r_1$ . Izvor: [2]

To je :

$$t_1 \frac{ds_1}{ds} = t + \lambda'(s)t + \lambda(s)\kappa n. \quad (3)$$

Budući da tangenta na involutu siječe tangencijalne vektore ravnine okomito slijedi  $t \cdot t_1 = 0$ . Koristeći prethodno i množeći obje strane jednakosti (3) s  $t$  dobivamo

$$1 + \lambda'(s) = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{d\lambda}{ds} = -1. \quad (4)$$

Integriranjem (4) po  $s$ , nalazimo  $\lambda = c - s$ .

Stoga jednačba involute glasi

$$r_1 = r + (c - s)t. \quad (5)$$

□

Budući da je  $c$  proizvoljna konstanta, jednačba (5) pokazuje da za različit izbor konstante  $c$  dobivamo različite involute, tj. može ih biti beskonačno mnogo.

**Korolar 2.1.** (Vidjeti [1], Korolar 1) Udaljenost između odgovarajućih točaka dvije involute je konstantna.

*Dokaz.* Neka je  $P$  fiksna točka na krivulji  $c$ . Neka su  $r_1$  i  $r_2$  vektori položaja odgovarajućih točaka na dvije involute određene sa  $c = c_1$  i  $c = c_2$ . Tada imamo

$$r_1 = r + (c_1 - s)t, \quad r_2 = r + (c_2 - s)t,$$

odnosno

$$r_1 - r_2 = (c_1 - c_2)t \quad \text{tj.} \quad \|r_1 - r_2\| = \|c_1 - c_2\|,$$

što je konstantno.

Stoga je i udaljenost između dvije odgovarajuće točke konstantna.

□

**Korolar 2.2.** (Vidjeti [1], Korolar 2) Budući da je  $t$  isti za različite involute, tangente u odgovarajućim točkama involuta su međusobno paralelne.

**Teorem 2.2.** (Vidjeti [1], Teorem 2) Zakrivljenost  $\kappa_1$  i torzija  $\tau_1$  involute  $\tilde{c}$  krivulje  $c$  dane su sa

$$\kappa_1^2 = \frac{\tau^2 + \kappa^2}{\kappa^2(c-s)^2}, \quad \tau_1 = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa(c-s)(\kappa^2 + \tau^2)}.$$

*Dokaz.* Prema prethodnom teoremu, vektor smjera  $r_1$  od  $\tilde{c}$  na involuti je

$$r_1 = r + (c-s)t. \quad (6)$$

Derivirajući (6) po varijabli  $s$  dobivamo

$$\frac{dr_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = r' + (c-s)t' - t,$$

što nam daje

$$t_1 \frac{ds_1}{ds} = (c-s)\kappa n. \quad (7)$$

Jednadžba (7) nam pokazuje da je tangenta na involutu  $\tilde{c}$  paralelna sa glavnom normalom u točki A na krivulji.

Uzmimo pozitivan smjer duž involute takav da je  $t_1 = n$ .

Uvrštavanjem ovoga u (7) imamo

$$\frac{ds_1}{ds} = (c-s)\kappa. \quad (8)$$

Nadalje

$$\frac{dt_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{dn}{ds} = \tau b - \kappa t. \quad (9)$$

Uvrštavanjem (8) u (9)

$$\kappa_1 n_1 (c-s)\kappa = \tau b - \kappa t. \quad (10)$$

Kvadrirajući jednakost (10) imamo

$$\kappa_1^2 (c-s)^2 \kappa^2 = \tau^2 + \kappa^2, \quad (11)$$

što daje

$$\kappa_1^2 = \frac{\tau^2 + \kappa^2}{\kappa^2(c-s)^2}. \quad (12)$$

Kako bismo odredili torziju, potreban nam je izraz za vektorsko polje  $b$ .

Koristeći  $t_1 = n$  i vektorski množeći (10)

$$t_1 \times \kappa \kappa_1 n_1 (c-s) = n \times (\tau b - \kappa t). \quad (13)$$

dobivamo

$$(c-s)\kappa \kappa_1 b_1 = \tau t + \kappa b. \quad (14)$$

Deriviranjem obzirom na  $s$  dobivamo:

$$\kappa \kappa_1 (c-s) \frac{db_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} + b_1 \frac{d}{ds} [\kappa \kappa_1 (c-s)] = \tau t' + \tau' t + \kappa' b + \kappa b'.$$

Supstitucijom  $\frac{ds_1}{ds}$  i pojednostavljivanjem dobivamo:

$$\kappa_1 \kappa^2 (c-s)^2 (-\tau_1 n_1) + b_1 \frac{d}{ds} [\kappa \kappa_1 (c-s)] = \tau' t + \kappa' b. \quad (15)$$

Množeći (10) i (15) dobit ćemo sljedeće

$$-\tau_1 \kappa_1^2 \kappa^3 (c-s)^3 = \kappa' \tau - \kappa \tau',$$

odakle slijedi

$$\tau_1 = \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{\kappa_1^2 \kappa^3 (c-s)^3}. \quad (16)$$

Uvrštavajući  $\kappa_1^2$ , nalazimo

$$\tau_1 = \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{\kappa (c-s) (\kappa^2 + \tau^2)}.$$

Ako uzmemo  $\kappa = \frac{1}{\rho}$ ,  $\tau = \frac{1}{\sigma}$ , onda je  $\kappa' = \frac{-\rho'}{\rho^2}$  i  $\tau' = -\frac{\sigma'}{\sigma^2}$ . Uvrštavajući prethodno imamo formulu za  $\tau_1$  oblika

$$\tau_1 = \frac{\rho(\sigma\rho' - \sigma'\rho)}{(\rho^2 + \sigma^2)(c-s)}.$$

□

**Primjer 2.1.** Pokažimo da su involute kružne zavojnice ravninske krivulje.

Torzija involute dana je formulom

$$\tau_1 = \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{\kappa (c-s) (\kappa^2 + \tau^2)}.$$

Za kružnu zavojnicu, zakrivljenost  $\kappa$  i torzija  $\tau$  su konstante pa je  $\kappa' = 0$  i  $\tau' = 0$ .

Prema gornjoj formuli slijedi da je  $\tau_1 = 0$ , a to je nužan i dovoljan uvjet da bi naša promatrana krivulja bila ravninska.

Stoga možemo zaključiti da je involuta kružne zavojnice ravninska krivulja.

**Definicija 2.4.** Ako je  $\tilde{c}$  involuta dane krivulje  $c$ , onda  $c$  definiramo kao evolutu krivulje  $\tilde{c}$ .

**Teorem 2.3.** (Vidjeti [1], Teorem 3) Ako je  $r = r(s)$  jednadžba involute  $\tilde{c}$  krivulje  $c$ , i  $(t, n, b)$  je Frenetov trobrid u bilo kojoj točki  $r = r(s)$ , onda je vektor smjera  $r_1$  točke na krivulji  $c$

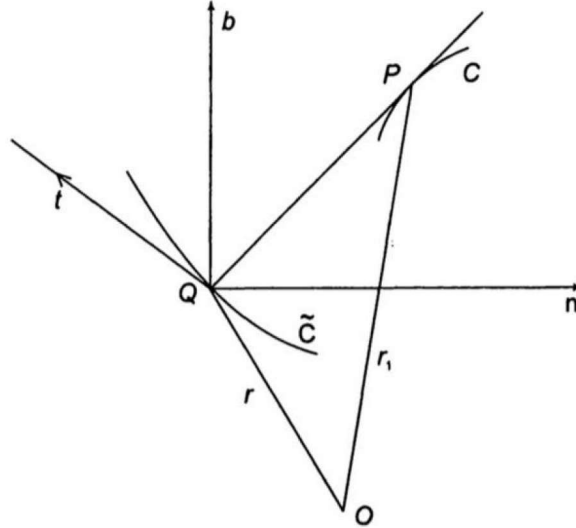
$$r_1 = r + \rho n + \rho c t g(\psi + c) \cdot b, \quad (17)$$

gdje je  $\psi = \int \tau ds$ .

*Dokaz.* Neka je P točka na krivulji  $c$  koja ima odgovarajuću točku Q na krivulji  $\tilde{c}$ . Pravac PQ je tangenta u točki P ortogonalna na krivulju  $\tilde{c}$ . Stoga je PQ okomito na tangentu u točki Q na  $\tilde{c}$ . Tu činjenicu ćemo koristiti više puta u dokazu. Budući da tangenta u točki Q na involuti zatvara pravi kut s tangentom PQ na krivulji  $c$ , PQ leži u normalnoj ravnini u točki Q na krivulji  $\tilde{c}$ . Gledajući koordinatni sustav  $(t, n, b)$  u točki Q, možemo uzeti vektor  $\vec{PQ} = \lambda n + \mu b$ . Koeficijenti  $\lambda, \mu$  se mijenjaju po točkama na krivulji  $\tilde{c}$  pa su  $\lambda, \mu$  funkcije od  $s$  na krivulji  $c$ . Koristeći prethodno imamo da je vektor smjera u bilo kojoj točki  $r_1$  na krivulji  $c$

$$r_1 = \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

$$r_1 = r + \lambda n + \mu b. \quad (18)$$



Slika 3: Grafički prikaz vektora  $r_1$  na krivulji  $c$ . Izvor: [2]

Sada trebamo odrediti  $\lambda$  i  $\mu$ .

Derivirajući (18) po varijabli  $s$  imamo sljedeće

$$\frac{dr_1}{ds} = t + \lambda'n + \lambda(\tau b - \kappa t) + \mu'b + \mu(-\tau n) = (1 - \lambda\kappa)t + (\lambda' - \mu\tau)n + (\lambda\tau + \mu')b. \quad (19)$$

Budući da je

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{dr_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = t_1 \frac{ds_1}{ds},$$

to je tangenta u točki P na krivulju  $c$  te leži u normalnoj ravnini krivulje  $\tilde{c}$  u točki Q i mora biti kolianaran s

$$\lambda n + \mu b. \quad (20)$$

Budući da su (19) i (20) kolinearni, mora vrijediti

$$1 - \lambda\kappa = 0 \quad i \quad \frac{\lambda' - \mu\tau}{\lambda} = \frac{\lambda\tau + \mu'}{\mu}. \quad (21)$$

Iz relacije (21) odredimo  $\lambda$  i  $\mu$ . Iz prve jednakosti dobivamo  $\lambda = \frac{1}{\kappa} = \rho$ . Iz druge jednakosti dobijemo  $\tau(\lambda^2 + \mu^2) = \mu\lambda' - \lambda\mu'$ .

Kako je  $\mu \neq 0$

$$\frac{\tau(\lambda^2 + \mu^2)}{\mu^2} = \frac{\mu\lambda' - \lambda\mu'}{\mu^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right).$$



Sada odredimo

$$\tau = \frac{\frac{d}{ds} \frac{\lambda}{\mu}}{1 + (\lambda/\mu)^2} = \frac{d}{ds} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu} \right].$$

Integriramo obje strane gornje jednadžbe

$$\int \tau ds + C = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu},$$

gdje je  $C$  konstanta.

Slijedi:  $\frac{\lambda}{\mu} = tg(\int \tau ds + c)$ .

Ako uvedemo oznaku  $\psi = \int \tau ds$ , onda možemo zapisati u obliku  $\frac{\lambda}{\mu} = tg(\psi + C)$  pa je  $\mu = \lambda ctg(\psi + c)$ .

Konačno, jednadžba evolute krivulje  $\tilde{c}$  je

$$r_1 = r + \rho n + \rho ctg(\psi + C)b, \quad (22)$$

gdje je  $\psi = \int \tau ds$ .

Prethodna jednakost predstavlja beskonačan skup evoluta dane krivulje, tj. svaki izbor konstante  $C$  određuje jednu evolutu. □

**Korolar 2.3.** (Vidjeti [1], Korolar) *Tangente na dvije različite evolute koje odgovaraju dvjema konstantama  $c_1$  i  $c_2$  povučenim iz iste točke dane krivulje zatvaraju konstantni kut  $c_1 - c_2$ .*

*Dokaz.* Jednadžba evolute je  $r_1 = r + \rho n + \rho ctg(\psi + C)b$ . Radi jednostavnosti, izaberimo  $C = \frac{\pi}{2} + a$  tako da jednadžba evolute postane:

$$r_1 = r + \rho n - \rho tg(\psi + a)b. \quad (23)$$

Nadalje,

$$\psi = \int \tau ds \quad \text{tako da} \quad \psi' = \tau. \quad (24)$$

Trebamo odrediti jedinične tangencijalne vektore  $t_1^{(1)}$  i  $t_2^{(2)}$  u dvije točke na evoluti i naći kut između njih koristeći  $t_1^{(1)} \cdot t_2^{(2)} = \cos \theta$ .

Deriviranjem (23) po varijabli  $s_1$  dobivamo

$$\frac{dr_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = t + \rho(\tau b - \kappa t) + \rho' n - [\rho' tg(\psi + a) + \rho \sec^2(\psi + a) \psi'] b - \rho tg(\psi + a)(-\tau n). \quad (25)$$

Koristeći (24) i (25) i dodatnim pojednostavljivanjem, dobivamo

$$t_1 \frac{ds_1}{ds} = [\rho' + \rho \tau tg(\psi + a)] n - [\rho' tg(\psi + a) + \rho \tau tg^2(\psi + a)] b$$

$$t_1 \frac{ds_1}{ds} = [\rho' + \rho \tau tg(\psi + a)] [n - tg(\psi + a)b]. \quad (26)$$

Kvadriranjem jednadžbe (26) dobivamo

$$\left( \frac{ds_1}{ds} \right)^2 = [\rho' + \rho \tau tg(\psi + a)]^2 [1 + tg^2(\psi + a)].$$

Slijedi

$$\frac{ds_1}{ds} = [\rho' + \rho\tau tg(\psi + a)] \sec(\psi + a). \quad (27)$$

Uvrštavanjem (27) u (26) dobivamo

$$t_1 = \cos(\psi + a)n - \sin(\psi + a)b.$$

Sada su jedinični tangencijalni vektori koji odgovaraju  $a_1$  i  $a_2$

$$t_1^{(1)} = \cos(\psi + a_1)n - \sin(\psi + a_1)b$$

$$t_1^{(2)} = \cos(\psi + a_2)n - \sin(\psi + a_2)b.$$

Stoga ako je  $\theta$  kut između tih dviju tangenti, imamo

$$\cos \theta = t_1^{(1)} \cdot t_1^{(2)} = \cos(\psi + a_1) \cos(\psi + a_2) + \sin(\psi + a_1) \sin(\psi + a_2) = \cos(a_1 - a_2).$$

te je

$$\theta = a_1 - a_2 = \left(c_1 - \frac{\pi}{2}\right) - \left(c_2 - \frac{\pi}{2}\right) = c_1 - c_2.$$

□

**Teorem 2.4.** (Vidjeti [1], Teorem 4) Mjesto točaka sferne zakrivljenosti je evoluta ako i samo ako je krivulja ravninska.

*Dokaz.* Jednadžba evolute je

$$r_1 = r + \rho n + \rho ctg(\psi + c)b, \psi = \int \tau ds. \quad (28)$$

Uspoređujući (28) sa jednadžbom središta zakrivljenosti krivulje  $r_1 = r + \rho n$ , one se podudaraju ako i samo ako je

$$\rho ctg(\psi + c) = 0. \quad (29)$$

Budući da je  $\rho \neq 0$ , (29) implicira

$$\int \tau ds + c = n \frac{\pi}{2} \quad \text{ili} \quad \int \tau ds = \frac{n\pi}{2} - c. \quad (30)$$

Derivirajući obje strane jednadžbe po  $s$  dobijemo  $\tau = 0$ , što je nužan i dovoljan uvjet za krivulju da bi bila ravninska, to dokazuje rezultat.

□

**Primjer 2.2.** Nađite involute i evolute kružne zavojnice

$$r = (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta). \quad (31)$$

Jednadžba involute je

$$r_1 = r + (\lambda - s)t. \quad (32)$$

Derivirajući (31) imamo

$$t \frac{ds}{d\theta} = (-a \sin \theta, a \cos \theta, b).$$

Stoga  $(\frac{ds}{d\theta})^2 = a^2 + b^2 = C^2$  pa je onda  $\frac{ds}{d\theta} = C$ , što daje  $s = C\theta$ , onda

$$t = \frac{1}{C}(-a \sin \theta, a \cos \theta, b). \quad (33)$$

Uvrštavajući (33) u (32) dobijemo jednadžbu involute u sljedećem obliku

$$r_1 = (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta) + \frac{1}{c}(\lambda - C\theta)(-a \sin \theta, a \cos \theta, b).$$

Jednadžba evolute je

$$r_1 = r + \rho n + \rho ctg[\psi + \lambda]b, \quad (34)$$

pri čemu je  $\psi = \int \tau ds$ .

Kako bismo odredili  $r_1$ , moramo najprije odrediti  $n, b, \rho, \tau$  i  $\psi$ .

Za kružnu zavojnicu vrijedi  $\kappa = \frac{a}{c^2}$ ,  $\tau = \frac{b}{c^2}$ .

Stoga je

$$\psi = \int \frac{b}{c^2} ds = \frac{b}{c^2} s. \quad (35)$$

Koristeći (33) dobivamo  $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c}(-a \cos \theta - a \sin \theta, 0) \frac{d\theta}{ds}$ , te

$$n = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{c^2}(-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0) = (-\cos \theta, -\sin \theta, 0). \quad (36)$$

Nadalje

$$b = t \times n = \frac{1}{c}(b \sin \theta, -b \cos \theta, a). \quad (37)$$

Koristeći (35), (36) (37) u (34) dobivamo:

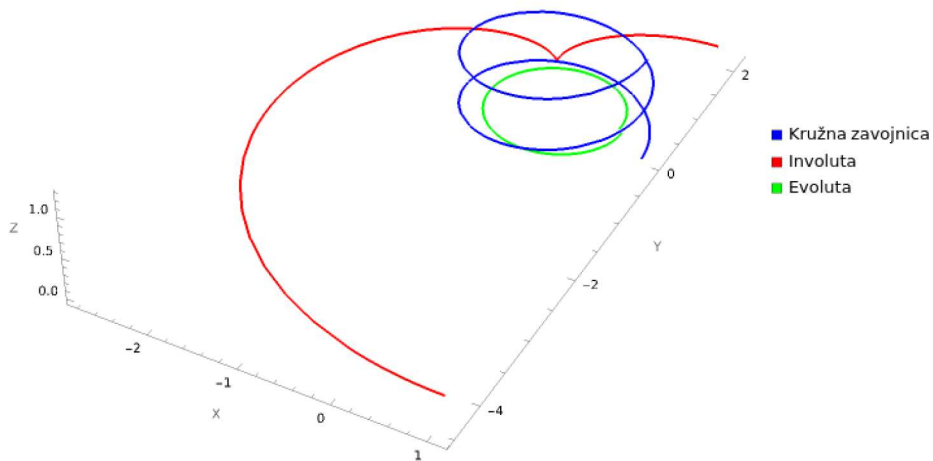
$$r_1 = (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta) + \frac{c^2}{a}(-\cos \theta, -\sin \theta, 0) + \frac{c^2}{a} ctg\left[\frac{b}{c}\theta + \lambda\right] \frac{1}{c}(b \sin \theta, -b \cos \theta, a).$$

Gornju jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način

$$x = \left[ a \cos \theta - \frac{c^2}{a} \cos \theta + \frac{c}{a} b \sin \theta \cdot ctg\left(\frac{b\theta}{c} + \lambda\right) \right]$$

$$y = \left[ a \sin \theta - \frac{c^2}{a} \sin \theta - \frac{c}{a} b \cos \theta \cdot ctg\left(\frac{b\theta}{c} + \lambda\right) \right]$$

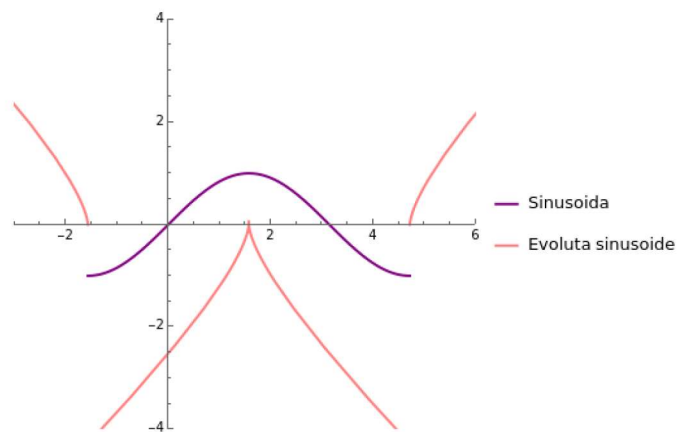
$$z = \left[ b\theta + c ctg\left(\frac{b\theta}{c} + \lambda\right) \right].$$



Slika 4: Grafički prikaz kružne zavojnice i njezine evolute i involute

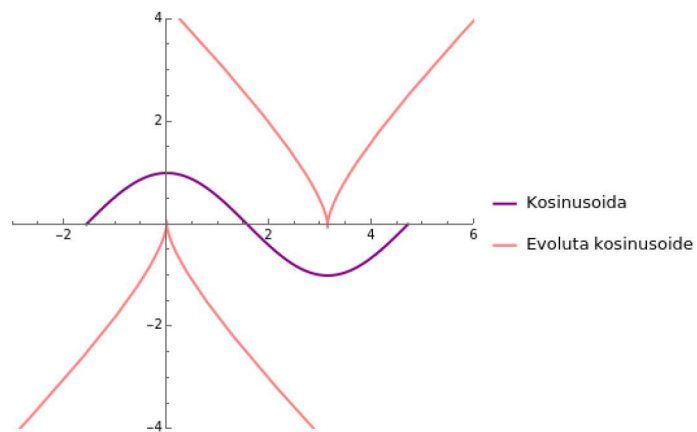
## 2.2. Grafički prikazi evoluta nekih krivulja

### Evoluta sinusoide



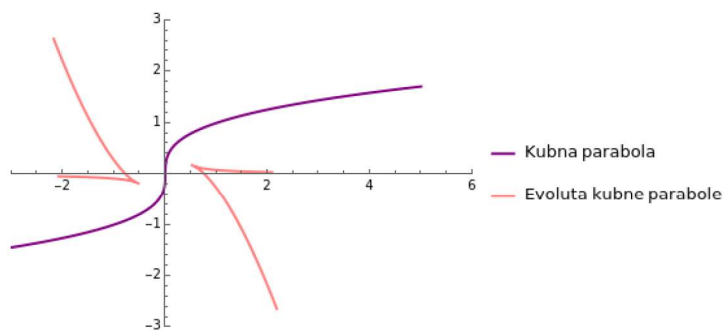
Slika 5: Sinusoīda i njena evoluta na  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

## Evoluta kosinusoide



Slika 6: Kosinusoida i njena evoluta na  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

## Evoluta kubne parabole $x - y^3 = 0$



Slika 7: Kubna parabola  $x - y^3 = 0$  i njena evoluta

## Literatura

- [1] A.A. SAVELOV, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- [2] D. SOMASUNDARAM, *Differential geometry - A first course*, Alpha Science, 2005.
- [3] L. VUČKOVIĆ, M. SOŠIĆ, *Evolute ravninskih krivulja*, - Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci (Završni rad).
- [4] T. ŽIVKOVIĆ, *Svojstva i konstrukcije nekih ravninskih krivulja*, - Odjel za matematiku, Sveučilište u J.J. Strossmayera u Osijeku (Diplomski rad).
- [5] Ž. MILIN ŠIPUŠ, S. VIDAČ, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, - PMF Zagreb
- [6] <https://www.grad.hr/geomteh3d/skripta/zakrivljenost.html>