Verižni razlomci i neke njihove primjene

Hudeček, Lovro

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Verižni razlomci i neke njihove primjene

Završni rad

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Student:
Lovro Hudeček

Osijek, 2024

Sadržaj

1 | Uvod

U ovom završnom radu bavit ćemo se verižnim razlomcima, njihovim svojstvima i rezultatima koji se na njih odnose.

U poglavlju *Konačni verižni razlomci* izvest ćemo algoritam kojim dobivamo verižne razlomke. Može se pokazati da racionalne brojeve možemo zapisati kao konačne verižne razlomke, a iracionalne brojeve kao beskonačne verižne razlomke te ćemo u ovom poglavlju najprije promatrati racionalne brojeve. Nakon toga ćemo iskazati i dokazati neka svojstva konačnih verižnih razlomaka, pokazat ćemo da racionalni broj možemo zapisati u točno dva oblika verižnog razlomka te ćemo na kraju uvesti pojam konvergente koji će nam pogotovo biti koristan primjerice prilikom rješavanja linearnih diofantskih jednadžbi.

U poglavlju *Beskonačni verižni razlomci* ćemo pokazati kako se iracionalni broj na jedinstven način može zapisati kao verižni razlomak te ćemo ponovno pokazati neka njegova svojstva. U ovom poglavlju uvest ćemo i pojam periodski verižni razlomak, specifičan oblik beskonačnog verižnog razlomka te pojam kvadratne iracionalnosti.

Na kraju završnog rada, proučavat ćemo *Primjene verižnih razlomaka* te se baviti Pellovom jednadžbom i ostalim primjenama verižnih razlomaka.

2 | Konačni verižni razlomci

U ovom poglavlju najprije ćemo izvesti algoritam kojim dobivamo verižne razlomke, a nakon toga ćemo posebno promatrati racionalne brojeve, njihov razvoj u konačne verižne razlomke i neka njihova svojstva te ćemo definirati pojam konvergente.

2.1 Definicija i svojstva

Započnimo najprije s osnovnim algoritmom kojim dobivamo verižne razlomke. Postoji ih nekoliko, no mi ćemo u ovom radu koristiti način opisan u [2].

Neka su $p_0, q_0, p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ polinomi koji ovise o varijablama $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Definiramo $p_0 = a_0, q_0 = 1$. Pretpostavimo još da su polinomi $p_0, q_0, \ldots, p_{n-1}, q_{n-1}$ već definirani. Uz oznake $p'_k = p_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$, $q'_k = q_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$, definiramo:

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1},\ q_n = p'_{n-1}.$$

Sada je $\frac{p_n}{q_n}$ racionalna funkcija od $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i možemo pisati

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Posebno, $[a_0] = \frac{p_0}{q_0} = a_0$. Za $n > 0$ imamo:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1}}{p'_{n-1}} = a_0 + \frac{1}{p'_{n-1}/q'_{n-1}} = a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_n]}.$$

Ponavljanjem postupka dobivamo:

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}. \tag{2.1}$$

Definicija 1. *Racionalne funkcije oblika (2.1) nazivaju se* ***konačni verižni ili neprekidni razlomci****.*

Kako bismo lakše ilustrirali zapisano, pogledajmo jednostavan primjer.

Primjer 1. *Zapišimo* $[5,3,1,1,3]$ *u konačni verižni razlomak.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
5+\cfrac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}} &= 5+\cfrac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}} = 5+\cfrac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}} \\
&= 5+\cfrac{1}{3+\frac{1}{\frac{7}{4}}} = 5+\cfrac{1}{3+\frac{4}{7}} = 5+\frac{1}{\frac{25}{7}} = 5+\frac{7}{25} = \frac{132}{25}.
\end{aligned}
$$

No, češće se događa da želimo neki racionalan broj zapisati u obliku konačnog verižnog razlomka. Kako ćemo to napraviti? U tu svrhu koristimo Euklidov algoritam pomoću kojeg ćemo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1 (vidjeti [6, Teorem 2]). *Svaki racionalni broj može se zapisati u obliku konačnog verižnog razlomka.*

Dokaz. Neka je $\frac{a}{b}$ racionalni broj i pretpostavimo da je $b > 0$. Iz Euklidovog algoritma dobivamo niz jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
a &= a_1 b + b_1 & \qquad & 0 < b_1 < b \\
b &= a_2 b_1 + b_2 & & 0 < b_2 < b_1 \\
b_1 &= a_3 b_2 + b_3 & & 0 < b_3 < b_2 \\
&\vdots & & \vdots \\
b_{n-3} &= a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} & & 0 < b_{n-1} < b_{n-2}. \\
b_{n-2} &= a_n b_{n-1}
\end{aligned}
$$

Jer su b-ovi pozitivni cijeli brojevi, slijedi da su $a_2, a_3, \ldots, a_n$ također pozitivni cijeli brojevi. Kada "malo" sredimo jednadžbe dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a_1 + \frac{b_1}{b} \\
\frac{b}{b_1} &= a_2 + \frac{b_2}{b_1} \\
\frac{b_1}{b_2} &= a_3 + \frac{b_3}{b_2} \\
&\vdots \\
\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} &= a_n.
\end{aligned}
$$

Kontinuiranim uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= a_1 + \frac{1}{\frac{b}{b_1}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{b_1}{b_2}} \\ &\cdots \\ &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \frac{1}{a_n}}} = [a_1, a_2, \ldots, a_n].\end{aligned}$$

□

Time smo dokazali postojanost verižnog razlomka. No što je s njegovom jedinstvenošću? Primjerice iz $a + 1/1 = a + 1$ može se lako vidjeti da on nije jedinstven. Za $a_n > 1$ vrijedi:

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1]$$

dok za $a_n = 1$ vrijedi:

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + 1].$$

Dakle, iz gornjeg razmatranja slijedi kako razvoj racionalnog broja u konačni verižni razlomak nije jedinstven već da se taj razvoj može napisati s parno mnogo koeficijenata, odnosno s neparno mnogo koeficijenata. Primjerice, $\frac{8}{5}$ se može zapisati u obliku $[1, 1, 1, 2]$, no on se može i zapisati u obliku $[1, 1, 1, 1, 1]$:

$$\frac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}.$$

Direktno iz toga slijedi sljedeći teorem.

Teorem 2 (vidjeti [6, Teorem 3]). *Racionalni broj može se zapisati u točno dva oblika verižnog razlomka, s parnim ili neparnim brojem koeficijenata.*

Pogledajmo sada primjer, dakle, kako neki racionalni broj pretvoriti u verižni razlomak.

Primjer 2. *Zapišimo $\frac{123}{240}$ u obliku verižnog razlomka.*

Rješenje. Prvo ćemo korisiti Euklidov algoritam kako bismo racionalni broj rastavili na niz jednadžbi. Imamo:

$$\begin{aligned} 123 &= 0 \cdot 240 + 123, & 0 < 123 < 240 \\ 240 &= 1 \cdot 123 + 117, & 0 < 117 < 123 \\ 123 &= 1 \cdot 117 + 6, & 0 < 6 < 117 \\ 117 &= 19 \cdot 6 + 3, & 0 < 3 < 6 \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\frac{123}{240}$ možemo zapisati u obliku [0,1,1,19,2]. Dodatno, primjetimo još da se $\frac{123}{240}$ može zapisati i u obliku [0,1,1,19,1,1] po Teoremu 2.

Pogledajmo sada neka svojstva verižnih razlomaka. U tu svrhu iskazujemo sljedeće leme.

Lema 1 (vidjeti [2, Lema 8.13.]). *Za $N \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:*

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (2 \leq n \leq N),$$

$$q_0 = 1, \qquad q_1 = a_1, \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (2 \leq n \leq N).$$

Dokaz. Za dokaz koristimo matematičku indukciju. Dakle, za $n = 2$ imamo:

$$\begin{aligned} p_2 &= a_2 p_1 + p_0, \\ q_2 &= a_2 q_1 + q_0. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $n > 2$ i tvrdnja vrijedi i za $n - 1$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} p'_{n-1} &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}, \\ q'_{n-1} &= a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}. \end{aligned}$$

Napokon, pokažimo da tvrdnja vrijedi i za n:

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} \\ &= a_0(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + (a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}) \\ &= a_n(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + (a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3}) \\ &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}. \end{aligned}$$

Na sličan način možemo pokazati i za $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$. Primjetimo kako smo rekurzivno došli do n-tog člana. □

Prije dokaza sljedeće leme, napomenimo kako se dogovorno uzima sljedeće:

$$p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0.$$

Lema 2 (vidjeti [2, Lema 8.15.]). *Za $n \geq -1$ vrijedi:*

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

Dokaz. I za ovaj dokaz koristimo princip matematičke indukcije. Uzmemo najprije $k = -1$ i provjerimo bazu indukcije:

$$\begin{aligned} q_{-1} p_{-2} - q_{-2} p_{-1} &= (-1)^{-1} \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 &= -1 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi baza indukcije. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za svaki $k < n$, pa uzmemo onda $k = n - 1$, tj.

$$q_{n-1} p_{n-2} - q_{n-2} p_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

Sada tvrdnju provjerimo za sam n:

$$\begin{aligned} q_n p_{n-1} - q_{n-1} p_n &= (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1} - (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} \\ &= a_n p_{n-1} q_{n-1} + q_{n-2} p_{n-1} - a_n p_{n-1} q_{n-1} + p_{n-2} q_{n-1} \\ &= q_{n-2} p_{n-1} - p_{n-2} q_{n-1} \\ &= -(-1)^{n-1} \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Prema tome, pokazali smo traženu tvrdnju. □

Lema 3 (vidjeti [3, Teorem 1.3.]). *Za verižne razlomke, vrijede sljedeća svojstva:*

1) *Ako je* $n > 1$, *onda je* $q_n \geq q_{n-1} + 1$ *i vrijedi* $q_n \geq n$,

2) $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \quad n \geq 1$,

3) $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n, \quad n \geq 2.$

Prethodne tri leme nam omogućuju dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 3 (vidjeti [2, Lema 8.19.]). *Neka su* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *pozitivni realni brojevi. Vrijedi sljedeće:*

1) $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \ldots,$

2) $\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \ldots,$

3) *Ako je* n *paran, a* m *neparan, onda je* $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_m}{q_m}$.

Dokaz. Prve dvije tvrdnje proizlaze iz Leme 3. Preuredimo li malo izraz iz Leme 3 pod 3), dobivamo:

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

Ako uzmemo $n \geq 2$, n paran, dobivamo $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} < \frac{p_n}{q_n}$, dok za $n \geq 3$, n neparan, dobivamo $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} > \frac{p_n}{q_n}$ te smo tako dokazali tvrdnje 1) i 2).
Treba još pokazati tvrdnju 3). Pretpostavimo da je $n < m$. Kako vrijedi da je $\frac{p_n}{q_n} \leq \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$, treba još pokazati $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} < \frac{p_m}{q_m}$ (jer to onda povlači $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_m}{q_m}$). Ovdje koristimo Lemu 2 iz koje slijedi $q_m p_{m-1} - p_m q_{m-1} = (-1)^m = -1 < 0$. Za slučaj $n > m$ provodi se analogan dokaz. □

2.2 Konvergente verižnog razlomka

Definicija 2. *Neka je $\alpha = [a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n]$, gdje je $a_i \in \mathbb{Z}, i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Promotrimo zapis do k-tog člana, $k < n$, odnosno gledamo $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$. Ovaj izraz nazivamo k-**ta konvergenta** od α u razvoju u konačni verižni razlomak i označavamo ga s C_k.*

Primjer 3. *Pretvorimo racionalni broj $\frac{68}{81}$ u konačni verižni razlomak i odredimo njegove konvergente.*

Rješenje. Primjenom Teorema 1 dobijemo da se racionalni broj $\frac{68}{81}$ može zapisati kao $[0, 1, 5, 4, 3]$. Njegove konvergente bi onda izgledale na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
C_0 &= [a_0] = 0 \\
C_1 &= [a_0, a_1] = [0, 1] = 0 + \frac{1}{1} = 1 \\
C_2 &= [a_0, a_1, a_2] = [0, 1, 5] = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = \cdots = \frac{5}{6} \\
C_3 &= [a_0, a_1, a_2, a_3] = [0, 1, 5, 4] = \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4}}} = \cdots = \frac{21}{25} \\
C_4 &= [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] = [0, 1, 5, 4, 3] = \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}} = \cdots = \frac{68}{81}.
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada neka svojstva konvergenti.

Lema 4 (vidjeti [6, Teorem 6.]). *Ako je C_k k-ta konvergenta konačnog verižnog razlomka $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$, onda vrijedi:*

$$C_0 < C_2 < C_4 < \cdots < C_5 < C_3 < C_1.$$

Dokaz. Direktno iz Leme 1. □

Sljedeći teorem ćemo iskazati bez dokaza. Za dokaz pogledati [6].

Teorem 4 (vidjeti [1, Korolar 8.1.4]). *Neka su $\alpha \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Z}$ i $q > 0$. Za sve konvergente $\frac{p_n}{q_n}$ vrijedi:*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

Primjer 4. *Pokažimo da Teorem 4 vrijedi za racionalni broj $\frac{68}{81}$ iz Primjera 3.*

Rješenje. Iz razvoja racionalnog broja $\frac{68}{81}$ u konačni verižni razlomak, slijedi da su njegove konvergente redom $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{5}{6}$, $C_3 = \frac{21}{25}$, $C_4 = \frac{68}{81}$. Za primjerice C_2 vrijedi:

$$\left|\alpha - \frac{p_2}{q_2}\right| = \left|\frac{68}{81} - \frac{5}{6}\right| = \frac{1}{162} < \frac{1}{q_3 q_2} < \frac{1}{25 \cdot 6} = \frac{1}{150} < \frac{1}{a_3 q_2^2} < \frac{1}{4 \cdot 6^2} = \frac{1}{144}.$$

Odnosno, vrijedit će:

$$\left|\alpha - \tfrac{p_2}{q_2}\right| = \frac{1}{162} < \frac{1}{q_3 q_2} = \frac{1}{150} < \frac{1}{a_3 q_2^2} = \frac{1}{144}.$$

Za ostale konvergente može se analogno pokazati.

Teorem 5 (Legendre, vidjeti [1, Teorem 8.1.5]). *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q > 0$ za koje vrijedi:*

$$\left|\alpha - \tfrac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Tada je $\frac{p}{q}$ neka konvergenta od α u razvoju u konačni verižni razlomak.

Dokaz. Neka su p_0, q_0, p_1, q_1 konvergente od α i neka je n takav da je $q_n < q < q_{n+1}$. Pretpostavimo još da je $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ (jer znamo da je $\frac{p_n}{q_n}$ konvergenta). Koristimo prethodne teoreme i imamo sljedeći niz nejednakosti:

$$\frac{1}{qq_n} \leq \left|\tfrac{p}{q} - \tfrac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|\alpha - \tfrac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \tfrac{p}{q}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} + \frac{1}{2q^2}.$$

Pomnožimo cijeli izraz s qq_n kako bismo imali dobili nejednakost $1 < \frac{q_n}{2q} + \frac{q}{q_{n+1}}$. Ako je $q_n \geq 2q$, iz $q_n \leq q$ imamo $1 < 1/2 + 1/2$ i imamo kontradikciju. Pretpostavimo sada da je $q_{n+1} < 2q$. Pretpostavimo još da $\alpha - \frac{p}{q}$ i $\alpha - \frac{p_n}{q_n}$ imaju isti predznak. Iz toga slijedi da je razlika njihove apsolutne vrijednosti, $|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}|$ omeđena odozgo s $max\{\frac{1}{2q^2}, \frac{1}{q_n q_{n+1}}\}$, a odozdo s $\frac{1}{qq_n}$. Ako pomnožimo sve s qq_n, dobivamo $1 < max\{\frac{q_n}{2q}, \frac{q}{q_{n+1}}\} < max\{\frac{1}{2}, 1\} = 1$, što je opet kontradikcija s polaznom pretpostavkom.

Pretpostavimo sada da $\alpha - \frac{p}{q}$ i $\alpha - \frac{p_n}{q_n}$ imaju suprotni predznak. Iz toga bi sljedilo da $\alpha - \frac{p}{q}$ i $\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ imaju isti predznak. Pomnožimo opet sve s qq_n i imamo slično $1 < max\{\frac{q_{n+1}}{2q}, \frac{q}{q_{n+2}}\}$. Jer je $q_{n+1} < 2q$, imamo $1 < max\{1, 1\} = 1$ što je opet u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, vrijedi početna nejednakost. □

Primjer 5. *Pokažimo da je $\frac{16}{9}$ konvergenta od $\frac{41}{23}$ u razvoju u konačni verižni razlomak, a da $\frac{14}{9}$ nije konvergenta od $\frac{41}{23}$ u razvoju u konačni verižni razlomak.*

Rješenje.

$$\left|\alpha - \tfrac{p}{q}\right| = \left|\tfrac{41}{23} - \tfrac{16}{9}\right| = \frac{1}{207} < \frac{1}{2q^2} = \frac{1}{2 \cdot 9^2} = \frac{1}{162}$$

Dakle, po Teoremu 5, $\frac{16}{9}$ je neka konvergenta od $\frac{41}{23}$ u razvoju u konačni verižni razlomak. Pokažimo sada da $\frac{14}{9}$ nije konvergenta od $\frac{41}{23}$ u razvoju u konačni verižni razlomak.

$$\left|\alpha - \tfrac{p}{q}\right| = \left|\tfrac{41}{23} - \tfrac{14}{9}\right| = \frac{47}{207} \not< \frac{1}{2q^2} = \frac{1}{2 \cdot 9^2} = \frac{1}{162}$$

Dakle, $\frac{14}{9}$ nije konvergenta od $\frac{41}{23}$ u razvoju u konačni verižni razlomak.

3 | Beskonačni verižni razlomci

U ovom poglavlju bavit ćemo se beskonačnim verižnim razlomcima te ćemo se posebno baviti periodskim verižnim razlomcima, posebnom kategorijom beskonačnih verižnih razlomaka. Definirat ćemo kvadratnu iracionalnost koju ćemo povezati s periodskim verižnim razlomcima te za kraj ovog poglavlja pokazat ćemo jedan algoritam kojim možemo razviti realan broj u verižni razlomak.

3.1 Definicija i svojstva

Do sada smo promatrali samo racionalne brojeve i njihov razvoj u verižni razlomak. No, što s iracionalnim brojevima?

Ako bismo npr. brojeve π i e pretvorili u verižni razlomak, dobili bismo sljedeći razvoj:

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \dots]$$
$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$$

Dakle, razvoj nije konačan. Prirodno je zapitati se postoji li limes tog razvoja iracionalnog broja. O tome nam govori sljedeći rezultat.

Teorem 6 (vidjeti [6, Teorem 7])**.** *Neka su $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ pozitivni cijeli brojevi, osim možda a_1. Neka je $C_k = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$. Onda $\lim\limits_{k\to\infty} C_k$ postoji i konačan je.*

Dokaz. Kako je C_k jedna od konvergenti verižnog razlomka, može se zapisati u obliku $C_k = \frac{P_k}{Q_k}$ i po Teoremu 3, vrijedi $C_{2k+1} < C_{2k-1}$ (za neparne), odnosno $C_{2k} > C_{2k-2}$ (za parne). Iz Leme 3, slijedi $C_2 \geq C_{2k} \geq C_{2k+1} \geq C_1$, pa onda postoje i limesi od C_{2k} i C_{2k+1}. Konačno, iz Leme 2 i 3 imamo $|C_{2k} - C_{2k-1}| = \frac{1}{q_{2k}q_{2k-1}} \leq \frac{1}{2k(2k-1)}$ takve da je $\lim C_{2k} = \lim C_{2k-1} = \lim C_k$. □

Prije nego što pokažemo da je zapis iracionalnog broja u verižni razlomak jedinstven, definirat ćemo kvocijente verižnog razlomka i njegova svojstva koji će nam biti potrebni prilikom dokaza sljedećeg teorema.

Definicija 3. *Neka je $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. Član a_k nazivamo **k-ti parcijalni kvocijent** od α, a $\alpha_k = [a_k, a_{k+1}, \dots]$ je **k-ti potpuni kvocijent** od α.*

Lema 5 (vidjeti [3, Teorem 2.1.]). *Za $n \geq 2$ vrijedi:*

$$\alpha = \alpha_0, \quad \alpha = \frac{\alpha_1 a_0 + 1}{\alpha_1}, \quad \alpha = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

U sljedećem teoremu pokazat ćemo da postoji jedinstven zapis iracionalnog broja u verižni razlomak.

Teorem 7 (vidjeti [3, Teorem 2.3.]). *Zapis svakog iracionalnog broja u verižni razlomak je jedinstven.*

Dokaz. Neka je $\alpha = [a_0, a_{1,2}, \dots] = [b_0, b_1, b_2, \dots]$ i neka su to dva zapisa $\alpha \in \mathbb{I}$. Pokazat ćemo da su ta dva zapisa jednaka. Iz svojstava verižnih razlomaka, slijedi da je $a_0 = b_0 = [\alpha]$ i slično $a_1 = b_1$. Pretpostavimo sada da je $a_k = b_k$, za svaki $k < n$, i trebamo pokazati da vrijedi $a_n = b_n$. Iz $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a'_{n_1}] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a'_{n_2}]$, gdje su a'_{n_1} i a'_{n_2} n-ti potpuni kvocijenti od α i svojstava potpunih kvocijenata, imamo:

$$\alpha = \frac{a'_{n_1} p_{n-1} + p_{n-2}}{a'_{n_1} q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a'_{n_2} p_{n-1} + p_{n-2}}{a'_{n_2} q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Kada malo "sredimo" taj izraz, možemo ga zapisati u obliku $(a'_{n_1} - a'_{n_2})(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) = 0$. Iz Leme 3 slijedi da je $a'_{n_1} = a'_{n_2}$ i vrijedi $a_n = [a'_{n_1}] = [a'_{n_2}] = b_n$. □

Konačno, definirat ćemo beskonačni verižni razlomak.

Definicija 4. *Neka su $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ niz pozitivnih cijelih brojeva, osim možda a_1. Izraz*

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$$

*nazivamo **beskonačan verižni razlomak** od α.*

Može se pokazati da ako je neki broj beskonačan verižni razlomak, da je on onda i iracionalni broj. Sljedeći teorem ćemo iskazati bez dokaza, a skica dokaza se može pronaći u [6].

Teorem 8 (vidjeti [6, Teorem 9.]). *Ako je α beskonačan verižni razlomak, onda je α iracionalan broj.*

Primjer 6. *Razvijmo $\sqrt{6}$ u verižni razlomak.*

Rješenje. Imamo:

$$\sqrt{6} = 2 + (\sqrt{6} - 2) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}-2}}.$$

Množenjem $\frac{1}{\sqrt{6}-2}$ s $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2}$ dobivamo:

$$2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}-2}} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}.$$

Sada razlomak $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$ možemo zapisati kao:

$$\frac{\sqrt{6}+2}{2} = 2 + \left(\frac{\sqrt{6}+2}{2} - 2\right) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}-2}}.$$

Množenjem $\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}-2} = \frac{2}{\sqrt{6}-2}$ s $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2}$ dobivamo $\sqrt{6}+2$. Sada taj izraz možemo napisati kao:

$$\sqrt{6}+2 = 4 + (\sqrt{6}-2) = 4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}-2}}.$$

Primjetimo kako se izraz u nazivniku ponovio kao i na početku te bismo, ponavljanjem postupka, opet dobivali isti rezultat, odnosno dobili bismo:

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}}}.$$

Za ovakav beskonačni verižni razlomak kažemo da je on periodski verižni razlomak o čemu ćemo više govoriti u sljedećem potpoglavlju.

3.2 Periodski verižni razlomci

Definicija 5. *Za beskonačan verižni razlomak α kažemo da je* ***periodski verižni razlomak*** *ako postoje $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $k \geq m, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$a_k = a_{k+n}.$$

Najmanji $n \in \mathbb{N}$ za koji to vrijedi nazivamo ***periodom verižnog razlomka*** *i verižni razlomak možemo zapisati na sljedeći način:*

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}, \dots}].$$

Kažemo da je beskonačni verižni razlomak ***čisto periodski*** *ako je njegov oblik:*

$$[\overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}].$$

Primjer 7. *Jedan od primjera periodskog verižnog razlomka je $\sqrt{23}$ koji možemo zapisati kao $\sqrt{23} = [4, \overline{1, 3, 1, 8}]$.*

Definicija 6. *Za $\alpha \in \mathbb{I}$ kažemo da je* ***kvadratna iracionalost*** *ako je α rješenje kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i α će biti oblika:*

$$\alpha = \frac{a \pm \sqrt{b}}{c},\ c \neq 0,\ b \neq \square,\ b \in \mathbb{N}.$$

U sljedećem teoremu ćemo povezati čisto periodski verižni razlomak i kvadratnu iracionalnost.

Teorem 9 (vidjeti [6, Lema]). *Svaki čisti periodski verižni razlomak je i kvadratna iracionalnost.*

Dokaz. Neka je dan $\alpha = [\overline{a_1, a_1, a_2, \dots, a_n}] \in \mathbb{I}$ i neka je C_k k-ta konvergenta od α. Iz svojstava konvergenti vrijedi sljedeće:

$$\alpha = \frac{\alpha P_n + P_{n-1}}{\alpha Q_n + Q_{n-1}}.$$

Ako bismo ovu jednakost zapisali u obliku kvadratne jednadžbe dobili bismo sljedeće:

$$Q_n \alpha^2 + (Q_{n-1} - P_n)\alpha - P_{n-1} = 0.$$

Dakle, kako je α iracionalan broj, slijedi i da je α kvadratna iracionalnost. □

Osim čisto periodskog verižnog razlomka, može se pokazati i da je svaki periodski verižni razlomak kvadratna iracionalnost. Prije nego što pokažemo sljedeći teorem, iskazat ćemo jednu pomoćnu tvrdnju:

Lema 6 (vidjeti [6]). *Ako je α kvadratna iracionalnost i $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, gdje c i d nisu oboje 0, vrijedi da je*

$$\frac{a + b\alpha}{c + d\alpha}$$

ili racionalan broj ili kvadratna iracionalnost.

Teorem 10 (vidjeti [6, Teorem 16]). *Svaki periodski verižni razlomak je ujedno i kvadratna iracionalnost.*

Dokaz. Neka je $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n}}]$. Označimo s $\alpha' = [\overline{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n}}]$, te će prema teoremu 9 slijediti da je α' kvadratna iracionalnost. Ako je C_k k-ta konvergenta od α, onda će prema lemi 5 vrijediti

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \alpha'] = \frac{\alpha' P_n + P_{n-1}}{\alpha' Q_n + Q_{n-1}}$$

i prema prethodnoj lemi, α će ili biti racionalan broj ili kvadratna iracionalnost, no kako je α beskonačan verižni razlomak, iz toga nužno slijedi, prema teoremu 8, da je α kvadratna iracionalnost. □

Može se pokazati da vrijedi i obrat Teorema 10. Iskazat ćemo ga bez dokaza. Postoji više načina dokaza, a oni se mogu pogledati u [6], [1] ili [2].

Teorem 11 (vidjeti [1, Teorem 8.2.3]). *Svaka kvadratna iracionalnost se može zapisati u obliku periodskog verižnog razlomka.*

Dakle, iz Teorema 10 i 11 konačno slijedi:

Korolar 1 (vidjeti [6]). *Razvoj u verižni razlomak realnog broja α je periodski $\Longleftrightarrow$ je α kvadratna iracionalost.*

Ilustrirajmo do sada iskazano jednim primjerom.

Primjer 8. *Zapišite $\alpha = [2, \overline{3, 2}]$ u obliku kvadratne iracionalnosti.*

Rješenje. Označimo s β dio koji se periodički ponavlja, $\beta = [\overline{3, 2}]$, dakle imamo:

$$\beta = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\beta}}.$$

Sredimo izraz tako da dobijem kvadratnu jednadžbu gdje je β nepoznanica:

$$2\beta^2 - 6\beta - 3 = 0.$$

Kako rješenje od $\beta > 0$, dobivamo $\beta = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$. Zapišimo sada α u obliku verižnog razlomka:

$$\alpha = 2 + \frac{1}{\beta} = 2 + \frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{2}} = 2 + \frac{2}{3 + \sqrt{15}} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{3 + \sqrt{15}}.$$

Množenjem cijelog izraza s $\frac{3-\sqrt{15}}{3-\sqrt{15}}$ i daljnjim sređivanjem dobivamo:

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}.$$

Pokažimo sada algoritam kojim možemo na još jedan način razviti iracionalan broj u periodski verižni razlomak. Neka je dan $\alpha = \alpha_0 = \frac{s_0+\sqrt{d}}{t_0}$, gdje je $d \in \mathbb{N}, d \neq \square, s_0, t_0 \in \mathbb{Z}$ i neka su:

$$s_{i+1} = a_i t_i - s_i, \quad t_{i+1} = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i}, \quad a_i = \left\lfloor \frac{s_i + \sqrt{d}}{t_i} \right\rfloor, \text{za } i \geq 0.$$

Algoritam prestaje kada $s_i = s_j,\ t_i = t_j,\ a_i = a_j,\ i \neq j,\ i, j \geq 0$ i tada je α dan kao $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, \overline{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}}]$. Dakle, na ovaj način možemo dobiti zapis kvadratne iracionalnosti u periodski verižni razlomak.

Primjer 9. *Razvijmo $\alpha = \frac{8+\sqrt{7}}{3}$ u verižni razlomak koristeći prethodni algoritam.*

Rješenje. Primjetimo da iz α slijedi $s_0 = 8, d = 7, t_0 = 3$. Prema algoritmu dobivamo:

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor = \left\lfloor \frac{8 + \sqrt{7}}{3} \right\rfloor = 3.$$

Sada računamo svaki $s_i, t_i, a_i, i \geq 1$:

$$s_1 = a_0t_0 - s_0 = 1, \quad t_1 = \frac{d-s_1^2}{t_0} = 2, \quad a_1 = \left\lfloor \frac{s_1+\sqrt{d}}{t_1} \right\rfloor = 1$$

$$s_2 = a_1t_1 - s_1 = 1, \quad t_2 = \frac{d-s_2^2}{t_1} = 3, \quad a_2 = \left\lfloor \frac{s_2+\sqrt{d}}{t_2} \right\rfloor = 1$$

$$s_3 = a_2t_2 - s_2 = 2, \quad t_3 = \frac{d-s_3^2}{t_2} = 1, \quad a_3 = \left\lfloor \frac{s_3+\sqrt{d}}{t_3} \right\rfloor = 4$$

$$s_4 = a_3t_3 - s_3 = 2, \quad t_4 = \frac{d-s_4^2}{t_3} = 3, \quad a_4 = \left\lfloor \frac{s_4+\sqrt{d}}{t_4} \right\rfloor = 1.$$

Računanjem s_5, t_5, a_5 dobivamo isti rezultat kao i za s_1, t_1, a_1, te konačno možemo pisati:

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots] = [3, \overline{1, 1, 4, 1}].$$

4 | Primjene verižnih razlomaka

U ovom poglavlju bavit ćemo se nekim primjenama verižnih razlomaka. Proučavat ćemo Pellovu jednadžbu koju ćemo moći riješiti uz pomoć verižnih razlomaka te ćemo nakon toga koristiti konvergente verižnog razlomka kako bismo riješili linearne diofantske jednadžbe.

4.1 Pellova jednadžba

Definicija 7. *Diofantska jednadžba oblika*

$$x^2 - Dy^2 = 1,\ D \neq \square$$

naziva se ***Pellova jednadžba***

Ova jednadžba dobila je ime po engleskom matematičaru iz 17. stoljeća Johnu Pellu, no pokazalo se da Pell uopće nije radio na toj jednadžbi. Prvi koji je dao metodu za njeno rješavanje je engleski matematičar William Brouncker 1657. godine. Jednadžba koju je on rješavao je $x^2 - 313y^2 = 1$ i za jedno njeno rješenje je dobio

$$(x, y) = (32188120829134849, 1819380158564160).$$

Brounckerova metoda je prvi put opisana u knjizi engleskog matematičara Johna Wallisa *Treatise on Algebra* 1685. godine., no Euler je zaslugu za rješavanje te jednadžbe dao Pellu te se to ime za jednadžbu zadržalo i do danas.

Pogledajmo neka svojstva Pellove jednadžbe. Primjetimo da ako su $x, y \in \mathbb{Z}$ rješenja Pellove jednadžbe, da su onda to i $-x, -y; -x, y$ i $x, -y$. Također, ako bismo uzeli za $y := 0$, onda je $x = \pm 1$, a ako bismo uzeli $x := 0$, onda bismo imali rješenje za slučaj $D = -1$ i to rješenje je trivijalno, tj. $y = \pm 1$. Ako bismo promatrali D, za slučaj $D < 0$, Pellova jednadžba neće imati pozitivna rješenja. Ako je D potpun kvadrat, tj. može se zapisati kao kvadrat nekog cijelog broja, npr. $D = d^2$, onda se jednadžba može zapisati u obliku

$$x^2 - (dy)^2 = 1.$$

Ako postoji pozitivno rješenje, onda će 1 biti dan kao razlika dva potpuna kvadrata, što nije moguće. Dakle, ni u ovom slučaju jedndažba nema pozitivna rješenja.

Može se pokazati da pozitivno, netrivijalno rješenje Pellove jednadžbe uvijek postoji.

Teorem 12 (vidjeti [1, Propozicija 8.3.1]). *Neka je dana Pellova jednadžba $x^2 - Dy^2 = 1$, $D \in \mathbb{N}, D \neq \square$. Tada postoje $x, y \in \mathbf{N}$ koja su rješenja te jednadžbe.*

Dokaz. Pogledati [1] ili [2]. $\square$

Primjer 10. *Promotrimo Pellovu jednadžbu $x^2 - 5y^2 = 1$. Jedno rješenje je dano s $x = 9$ i $y = 4$.*

Primjer 11. *Promotrimo sada Pellovu jednadžbu za jedan veći D, primjerice $x^2 - 163y^2 = 1$. Rješenje ove jedandžbe postoji, a najmanje rješenje je dano s $x = 64080026$ i $y = 5019135$! Dakle, uz uvjete iz Teorema 12, rješenje će uvijek postojati.*

Definicija 8. *Ako Pellova jednadžba ima pozitivno rješenje, onda postoje x_1, y_1 za koje je izraz $x_1 + y_1\sqrt{D}$ minimalan i taj izraz je jedinstven. Minimalno rješenje Pellove jednadžbe nazivamo **fundamentalno rješenje** Pellove jednadžbe.*

Može se pokazati veza između rješenja Pellove jednadžbe i fundamentalnog rješenja Pellove jednadžbe.

Teorem 13 (vidjeti [2, Teorem 10.11.]). *Ako je (x_1, y_1) fundamentalno rješenje Pellove jednadžbe, onda su sva ostala rješenja (u $\mathbb{N}$) dana izrazom:*

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n, \ n \in \mathbb{N}$$

tj. vrijedi:

$$\begin{aligned} x_n &= x_1^n + \binom{n}{2} D x_1^{n-2} y_1^2 + \binom{n}{4} D^2 x_1^{n-4} y_1^4 + \dots, \\ y_n &= n x_1^{n-1} y_1 + \binom{n}{3} D x_1^{n-3} y_1^3 + \binom{n}{5} D^2 x_1^{n-5} y_1^5 + \dots. \end{aligned}$$

Dokaz. Iz razvoja po binomnom teoremu dobivamo:

$$x_n - y_n\sqrt{D} = (x_1 - y_1\sqrt{D})^n.$$

Raspišimo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} x_n^2 - y_n^2 D &= (x_n - y_n\sqrt{D})(X_n + y_n\sqrt{D}) \\ &= (x_1 - y_1\sqrt{D})^n (x_1 + y_1\sqrt{D})^n \\ &= (x_1^2 - y_1^2 D)^n \\ &= 1^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je (x_n, y_n) rješenje Pellove jednadžbe. $\square$

Iz prethodnog teorema nam direktno slijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar 2 (vidjeti [2, Teorem 10.11.]). *Ako Pellova jednadžba ima pozitivno rješenje, onda ona ima beskonačno mnogo rješenja.*

Primjer 12. *Promotrimo Pellovu jednadžbu* $x^2 - 5y^2 = 1$. *Najmanje rješenje* ($za\ n = 1$) *koje zadovoljava zadanu jednadžbu je dano s* $x = 9$ *i* $y = 4$ *i to je fundamentalno rješenje Pellove jednadžbe. No može se pokazati, po Teoremu 13 uz* $n = 2$, *da je* $x = 161$ *i* $y = 72$ *također jedno rješenje, za* $n = 3$ *da je* $x = 2889$ *i* $y = 1292$ *rješenje... Dakle, postoji beskonačno mnogo rješenja ove Pellove jednadžbe po Korolaru 2 i sva su ona dana s:*

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (9 + 4\sqrt{5})^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

U sljedećem teoremu ćemo povezati konvergente verižnog razlomka broja $\sqrt{D}$ i rješenje Pellove jednadžbe $x^2 + Dy^2 = k$, za dovoljno mali k.

Teorem 14 (vidjeti [1, Teorem 8.3.3])**.** *Neka su* $x, y \in \mathbb{N}$ *takvi da zadovoljavaju nejednadžbu* $|x^2 - Dy^2| \leq \sqrt{D}$. *Tada je* $\frac{x}{y}$ *konvergenta verižnog razlomka* $\sqrt{D}$.

Dokaz. Označimo s $K = [\sqrt{D}]$. Kako je $x^2 - Dy^2$ cijeli broj, iz nejednadžbe $|x^2 - Dy^2| < \sqrt{D}$ slijedi kako je $|x^2 - Dy^2| \leq K$. Pretpostavimo najprije da je $x < Ky$. Tada vrijede sljedeće:

$$x^2 - Dy^2 < x^2 - K^2y^2 = (x - Ky)(x + Ky) < -K,$$

što daje kontradikciju s $|x^2 - Dy^2| \leq K$ te iz toga slijedi kako je $x \geq Ky$. Primjetimo kako vrijedi sljedeće:

$$|x - \sqrt{D}y| \leq \frac{K}{x + \sqrt{D}y} < \frac{K}{x + Ky} \leq \frac{K}{2Ky} = \frac{1}{2y}.$$

Podijelimo nejednakost s y:

$$\left|\tfrac{x}{y} - \sqrt{D}\right| \leq \frac{1}{2y^2}.$$

Sada, prema Legendreovom teoremu (Teorem 5) slijedi kako je upravo $\frac{x}{y}$ konvergenta od $\sqrt{D}$ u razvoju u verižni razlomak. □

Primjer 13. *Pokažimo da je* $\frac{8}{3}$ *konvergenta prilikom razvoja broja* $\sqrt{7}$ *u verižni razlomak.*

Rješenje. Uzmimo $x = 8, y = 3, D = 7$ te uvrstimo u nejednadžbu iz Teorema 14:

$$\left|x^2 - Dy^2\right| = \left|8^2 - 7 \cdot 3^2\right| = 1 < \sqrt{7}.$$

Dakle, ispunjene su pretpostavke Teorema 14 i $\frac{8}{3}$ je konvergenta verižnog razlomka $\sqrt{7}$.

4.2 Linearne diofantske jednadžbe

Jedan od načina primjena konvergenti verižnog razlomka imamo kod rješavanja linearne diofantske jednadžbe $ax + by = (-1)^n$, za $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, (a, b) = 1$. U tu svrhu, iskazujemo sljedeća dva teorema.

Teorem 15 (vidjeti [6, Korolar 5.1])**.** *Za $n \geq 0$, vrijedi:*

$$(P_n, P_{n+1}) = 1, \ (Q_n, Q_{n+1}) = 1, \ (P_n, Q_n) = 1,$$

gdje su $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ konvergente u razvoju od $\frac{a}{b}$ u verižni razlomak.

Dokaz. Dokažimo prvu tvrdnju. Najveći zajednički djelitelj P_n i P_{n+1} je najmanji pozitivni cijeli broj koji se može napisati kao suma višekratnika od P_n i P_{n+1}. Iz leme 2 slijedi:

$$P_{n+1}(-1)^{n+1}Q_n + P_n(-1)^{n+2}Q_{n+1} = 1$$

Dakle, P_n i P_{n+1} su relativno prosti, tj. $(P_n, P_{n+1}) = 1$.

Dokaz je sličan za preostale dvije tvrdnje. □

Primjer 14. *Razvijanjem racionalnog broja $\frac{41}{23}$ u konačni verižni razlomak dobivamo njegove njegove konvergente:*

$$C_0 = 1 \quad C_1 = 2 \quad C_2 = \tfrac{7}{4} \quad C_3 = \tfrac{9}{5} \quad C_4 = \tfrac{16}{9} \quad C_5 = \tfrac{41}{23}.$$

Vidimo kako su primjerice $(P_3, P_4) = (9, 16) = 1$, $(Q_3, Q_4) = (5, 9) = 1$, $(P_3, Q_3) = (9, 5) = 1$ te $(P_4, Q_4) = (16, 9) = 1$. Analogno se može vidjeti i za ostale P_n, Q_n-ove.

Teorem 16 (vidjeti [6, Korolar 5.2])**.** *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, (a, b) = 1$. Ako razvoj od $\frac{a}{b}$ u verižni razlomak ima n članova, te s x i y označimo $x = Q_{n-1}, y = -P_{n-1}$, onda su to rješenja linearne diofantske jednadžbe:*

$$ax + by = (-1)^n.$$

Dokaz. n-ta konvergenta od $\frac{a}{b}$ je $C_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$. Kako su i $\frac{a}{b}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$ svedeni na najniži član, slijedi da je baš $a = P_n$ i $b = Q_n$. Po Lemi 3 vrijedi:

$$aQ_{n-1} + b(-P_{n-1}) = (-1)^n.$$

Kako znamo da se verižni razlomak može zapisati u točno dva oblika, s parno mnogo ili neparno mnogo članova, iz Leme 2 slijedi da su x i y rješenja linearnih diofantskih jednadžbi

$$ax + by = 1 \ \text{ i } \ ax + by = -1.$$

□

Pogledajmo sada jedan primjer.

Primjer 15. *Riješite linearnu diofantsku jednadžbu:*

$$73x + 57y = 1.$$

Rješenje. Primjetimo najprije kako su 73 i 57 relativno prosti cijeli brojevi, pa po Teoremu 16 ima smisla razviti $\frac{73}{57}$ u verižni razlomak. Dobivamo sljedeće:

$$\frac{73}{57} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}}} = [1,3,1,1,3,2].$$

Sada promatramo konvergente:

$$C_1 = 1 \quad C_2 = \tfrac{4}{3} \quad C_3 = \tfrac{5}{4}$$

$$C_4 = \tfrac{9}{7} \quad C_5 = \tfrac{32}{25} \quad C_6 = \tfrac{73}{57}.$$

Zanima nas pretposljednja konvergenta $C_5 = \frac{32}{25}$, jer će upravo ona biti ključna za pronalazak rješenja. Dakle, prema Teoremu 16 za rješenje dobivamo $x = Q_5 = 25$ i $y = -P_5 = -32$. Zaista, uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo:

$$a \cdot Q_5 + b \cdot (-P_5) = 73 \cdot 25 + 57 \cdot (-32) = 1825 - 1824 = 1.$$

Literatura

[1] F. Beukers, *Elementary Number Theory*, Department of Mathematics, Universiteit Utrecht, Utrecht, 2012.

[2] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[3] L. K. Hua, *Introduction to Number Theory*, Springler-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1982.

[4] M. Jukić Bokun, I. Soldo, *Zbirka zadataka iz teorije brojeva*, Fakultet primjenjene matematike i informatike, Osijek, 2023.

[5] C. D. Olds, *Continued Fractions*, Random House and The L. W. Singer Company, New York, 1963.

[6] J. E. Shockley, *Introduction to Number Theory*, Holt, Rineheart and Winston Inc, New York, 1967.

Sažetak

Prvi put spominjani i uvedeni još u 17. stoljeću, verižni razlomci su brzo pronašli svoju uporabu u kompleksnom svijetu matematike. Definiraju se kao funkcije oblika:

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Verižne razlomke dijelimo na konačne i beskonačne. Konačni verižni razlomci su dani kao razvoj racionalnih brojeva u verižni razlomak i oni se mogu zapisati na točno dva načina, s parnim ili neparnim brojem članova. Pokazali smo neka svojstva konačnih verižnih razlomaka, primjerice da se članovi dobivaju rekurzivno.

Ako bismo verižni razlomak $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ gledali do nekog člana, npr. a_k, $k \in \mathbb{N}$, onda izraz $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ nazivamo k-ta konvergenta od $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Konvergenta verižnog razlomka ima brojne primjene, primjerice kod rješavanja linearnih diofantskih jednadžbi i kod aproksimacije iracionalnih brojeva.

Beskonačni verižni razlomci su verižni razlomci oblika $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Pokazali smo da se svaki iracionalni broj može zapisati u obliku beskonačnog verižnog razlomka i da je taj zapis jedinstven, a nakon toga smo pokazali neka njegova svojstva. Uveli smo pojam periodskog verižnog razlomka, vrsta beskonačnog verižnog razlomka kod kojeg se nakon nekog člana, niz prethodnih članova ponavlja u pravilnim intervalima, te smo pokazali povezanost kvadratne iracionalnosti, rješenja kvadratne jednadžbe oblika $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, i periodskog verižnog razlomka.

Na kraju smo se bavili primjenama verižnih razlomaka, odnosno Pellovom jednadžbom i linearnom diofantskom jednadžbom oblika $ax + by = (-1)^n$, za $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, (a, b) = 1$, koja je usko povezana s konvergentama verižnog razlomka.

Ključne riječi

konačni verižni razlomci, konvergenta verižnog razlomka, beskonačni verižni razlomci, periodski verižni razlomci, kvadratna iracionalnost, Pellova jednadžba, linearne diofantske jednadžbe

Continued fractions and some applications

Summary

First mentioned and introduced as early as the 17th century, continued fractions quickly found their utility in the complex realm of mathematics. They are defined as functions of the form:

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

We divide continued fractions into finite and infinite. Finite continued fractions are given as the expansion of rational numbers into continued fractions, and they can be written in exactly two ways, with an even or odd number of terms. We have shown some properties of finite continued fractions, for example, that the terms are obtained recursively.

If we were to consider the continued fraction $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ up to a certain term, for example, $a_k,\ k \in \mathbb{N}$, then the expression $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ is called the k-th convergent of $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Convergents of continued fractions have numerous applications, such as in solving linear Diophantine equations and in approximating irrational numbers.

Infinite continued fractions are continued fractions of the form $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$. We have shown that every irrational number can be represented as an infinite continued fraction, and this representation is unique. Afterward, we demonstrated some of its properties. We have introduced the concept of a periodic continued fraction, a type of infinite continued fraction where, after a certain term, the sequence of previous terms repeats at regular intervals. Additionally, we showed the connection between quadratic irrationalities, solutions of quadratic equations of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$, and periodic continued fractions.

Finally, we explored the applications of continued fractions, namely the Pell equation and the linear Diophantine equation of the form $ax + by = (-1)^n$, where

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $(a, b) = 1$, which is closely related to convergents of continued fraction.

Keywords

finite continued fractions, convergent of continued fraction, infinite continued fractions, periodic continued fractions, quadratic irrationality, Pell equation, linear Diophantine equations

Životopis

Rođen sam 26. lipnja 2001. u Požegi. Osnovnu školu Dobriša Cesarić završio sam u Požegi 2016. godine, a 2020. godine završavam prirodoslovni-matematički smjer u Gimnaziji Požega. Iste godine upisujem i prijediplomski studij Matematike na tadašnjem Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, sadašnjem Fakultetu primijenjene matematike i informatike.