Derivacija vektorske funkcije i primjene

Garaj, Sara

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET PRIMIJENJENE MATEMATIKE I INFORMATIKE

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Derivacija vektorske funkcije i primjene

ZAVRŠNI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Jelena Jankov Pavlović

Student:
Sara Garaj

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

U matematici i njenim primjenama, vektorske funkcije imaju važnu ulogu u razumijevanju i opisivanju različitih pojava. Jedan od najvažnijih pojmova vezanih uz vektorske funkcije je derivacija. Derivacija vektorske funkcije omogućava nam da mjerimo brzinu i smjer promjene funkcije u odnosu na promjenu nezavisne varijable. Kroz pojam derivacije, moguće je razumjeti kako male promjene u početnim varijablama mogu utjecati na promjene u konačnim vrijednostima funkcije.

U prvom dijelu rada ćemo, osim derivacije, definirati ključne pojmove koji su povezani s vektorskim funkcijama kao što su limes i neprekidnost. Ovi pojmovi su od velike važnosti za matematičku analizu i primjenu vektorskih funkcija. Nakon toga ćemo spomenuti geometrijsku interpretaciju vektorskih funkcija koja nam pruža vizualno razumijevanje kako se funkcije ponašaju u prostoru. Ovo je posebno važno u fizici i inženjerstvu, gdje je često potrebno intuitivno razumjeti kako se objekti kreću ili kako se polja sila raspoređuju u prostoru.

U drugom ćemo poglavlju uvesti pojam skalarnog i vektorskog polja, pomoću kojeg možemo proširiti analizu na sustave gdje svaka točka u prostoru ima pridružen vektor. Definirat ćemo gradijent, rotaciju i divergenciju koji predstavljaju ključne pojmove koji se primjenjuju uz vektorska polja, te ćemo navesti odgovarajuće primjere i svojstva. Gradijent nam pruža informaciju o smjeru i brzini najveće promjene skalarne funkcije, rotacija opisuje kružno kretanje vektorskog polja, dok divergencija mjeri koliko se vektorsko polje "širi" ili "skuplja" u određenoj točki.

U trećem poglavlju rada bavit ćemo se primjenama vektorskih funkcija koje se protežu kroz različita područja matematike i fizike. Zakrivljenost krivulje, koja opisuje kako se krivulja savija u prostoru, izravno je povezana s derivacijom vektorske funkcije koja predstavlja položaj duž krivulje. Pojmovi brzine i akceleracije, koji proizlaze iz derivacija vektorske funkcije položaja, temelji su klasične mehanike i osnova su za opisivanje kretanja objekata u prostoru. Ovi pojmovi su ključni za analizu i predviđanje dinamike tijela pod utjecajem različitih sila. Na kraju, Keplerovi zakoni, koji opisuju gibanje planeta oko Sunca, pružaju odličan primjer primjene derivacija vektorskih funkcija u astronomiji. Pomoću ovih zakona možemo matematički precizno opisati putanje planeta i njihovu međusobnu povezanost, što je od velike važnosti za razumijevanje svemira.

Kroz ovaj rad, teorijski koncepti derivacije vektorskih funkcija potkrijepljeni su praktičnim primjerima, čime se ilustrira njihova široka primjena i važnost u raznim istraživanjima.

2 | Vektorska funkcija

Skup svih radij-vektora u prostoru možemo opisati kao skup svih mogućih vektora koji idu od ishodišta do neke točke u prostoru.

Formalno, to je skup svih vektora oblika:

$$\{\overrightarrow{OP} : P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Definicija 2.0.1. Vektorska funkcija je svaka funkcija $\vec{r} : D \to K$, D $\subseteq R^n$, pri čemu K označava skup svih radij-vektora u pravokutnom koordinatnom sustavu.

U ovom poglavlju podrazumijevat ćemo da je n=1.

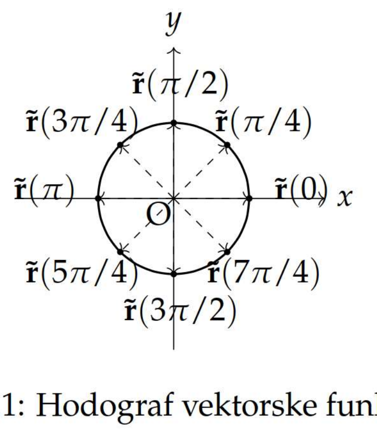
Za razliku od skalarnih funkcija koje imaju klasičan graf, za vektorske funkcije koristimo pojam hodografa ili traga. Hodograf vektorske funkcije sastoji se od svih točaka koje određuju vrhove radij-vektora $\vec{r}(t)$ za sve vrijednosti t iz domene D.

Definicija 2.0.2. Neka je $\vec{r} : D \to K$ vektorska funkcija. Hodograf ili trag vektorske funkcije je skup svih točaka $\vec{r}(t)$ za $t \in D$.

Primjer 2.0.1. *Promotrimo vektorsku funkciju* $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *koja opisuje kružno gibanje u ravnini:*

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Ova vektorska funkcija uzima skalarni parametar $t \in [0, 2\pi]$ *(na primjer vrijeme) i pridružuje mu vektor* $\vec{r}(t)$ *koji opisuje položaj točke koja se giba po jediničnoj kružnici.*



Slika 2.1: Hodograf vektorske funkcije $\vec{r}$.

Općenito, za svaku točku t $\in D$, $\vec{r}(t)$ je radij-vektor, stoga ga možemo rastaviti na komponente:

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\,\overrightarrow{i} + r_y(t)\,\overrightarrow{j} + r_z(t)\,\overrightarrow{k},$$

gdje su $r_x, r_y, r_z : D \to \mathbb{R}$ funkcije. Vektorske funkcije možemo zbrajati, oduzimati, množiti skalarom, množiti skalarno ili vektorski, te množiti skalarnom funkcijom.

Definicija 2.0.3. Ako su $\vec{r}_1, \vec{r}_2 : D \to K$ vektorske funkcije, $\lambda \in \mathbb{R}$ i $u : D \to \mathbb{R}$, onda definiramo:

a) $(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)$,

b) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)$,

c) $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)(t) = \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)$,

d) $(\lambda\,\vec{r}_1)(t) = \lambda\,\vec{r}_1(t)$,

e) $(u\,\vec{r}_1)(t) = u(t)\,\vec{r}_1(t)$.

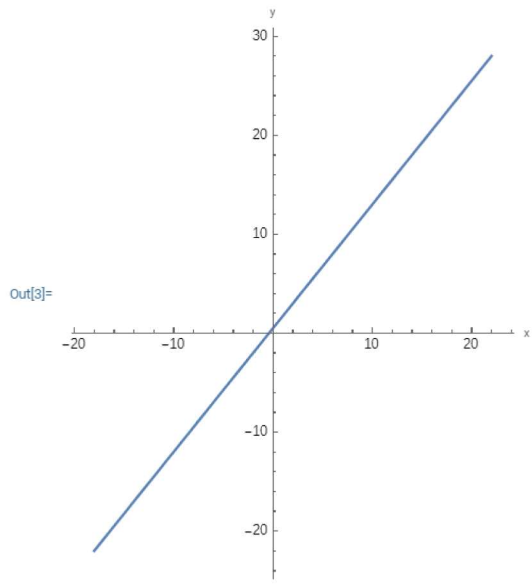
Primjer 2.0.2.

a) Za zadani vektor $\vec{c}$, vektorska funkcija $\vec{r} : D \to K$ zadana izrazom:

$$\vec{r}(t) = \vec{c},\ t \in D,$$

predstavlja konstantan vektor koji je neovisan o t. Vrijednosti ove funkcije su uvijek jednake vektoru $\vec{c}$, za svaki $t \in D$.

b) Za $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisne vektore, graf vektorske funkcije $\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t$, $t \in \mathbb{R}$, je pravac.



Slika 2.2: Graf vektorske funkcije $\vec{r}$.

Slika 2.2 prikazuje graf vektorske funkcije za konkretne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u našem slučaju $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$.

2.1 Limes vektorske funkcije

Definicija 2.1.1. Vektor $\vec{a}$ je limes vektorske funkcije $\vec{r} : D \to K$ u točki $t_0 \in D$ ako vrijedi

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \mid t - t_0 \mid < \delta \Longrightarrow \mid \vec{r}(t) - \vec{a} \mid < \epsilon,$$

pri čemu je $t \in \langle t_1, t_2 \rangle \subseteq D$ i pišemo

$$\vec{a} = \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t).$$

Teorem 2.1.1. *Neka je $\vec{r} : D \to K$ vektorska funkcija definirana izrazom $\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k}$, te $\vec{a} : D \to K$, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $t_0 \in D$. Tada je $\vec{a} = \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t)$ ako i samo ako vrijedi:*

$$a_1 = \lim_{t \to t_0} r_1(t), \quad a_2 = \lim_{t \to t_0} r_2(t), \quad a_3 = \lim_{t \to t_0} r_3(t).$$

Dokaz. Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} &\Longleftrightarrow \lim_{t \to t_0} \sqrt{(r_1(t) - a_1)^2 + (r_2(t) - a_2)^2 + (r_3(t) - a_3)^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow a_1 = \lim_{t \to t_0} r_1(t), \ a_2 = \lim_{t \to t_0} r_2(t), \ a_3 = \lim_{t \to t_0} r_3(t). \end{aligned}$$

□

Ovaj teorem nam govori kako se računanje limesa vektorske funkcije može svesti na računanje limesa njezinih komponenti, što su realne funkcije realne varijable:

$$\lim_{t \to t_0} \left(r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k} \right) = \lim_{t \to t_0} r_1(t)\vec{i} + \lim_{t \to t_0} r_2(t)\vec{j} + \lim_{t \to t_0} r_3(t)\vec{k}. \tag{2.1}$$

Formula (2.1) nam omogućava da teoreme za limes vektorskih funkcija dokazujemo analogno kao i teoreme za limes skalarnih funkcija.

Lema 2.1.1. *Ako funkcija $\vec{r} : D \to K$ ima limes u točki $t_0 \in D$, onda postoji $\delta > 0$ takav da je $\vec{r}$ ograničena na skupu $K_\delta = \{x \in \mathbb{R} : t_0 - \delta < t < t_0 + \delta\}$.*

Dokaz. Za dokaz leme vidjeti [3]. □

Teorem 2.1.2. *Pretpostavimo da za vektorske funkcije $\vec{r}_1, \vec{r}_2 : D \to K$ i skalarnu funkciju $u : D \to \mathbb{R}$ postoje limesi*

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a}, \ \lim_{t \to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{b}, \ \lim_{t \to t_0} u(t) = A,$$

gdje su $\vec{a}, \vec{b} \in K$, te $A \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

a) $\lim_{t \to t_0} (\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)) = \vec{a} \pm \vec{b}$,

$b)$ $\lim\limits_{t\to t_0}(k\vec{r}_1(t)) = k\vec{a}, k \in \mathbb{R},$

$c)$ $\lim\limits_{t\to t_0}(u(t)\vec{r}_1(t)) = A\vec{a},$

$d)$ $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)) = \vec{a}\cdot\vec{b},$

$e)$ $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)) = \vec{a}\times\vec{b}.$

Dokaz. Tvrdnje se dokazuju korištenjem svojstava skalarnog i vektorskog produkta, te primjenom nejednakosti trokuta.

a) Pretpostavimo da je $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t) = \vec{a}$ i $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t) = \vec{b}$. Prema definiciji limesa, za vektorske funkcije $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ vrijedi:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta_1 > 0)\ |t - t_0| < \delta_1 \Longrightarrow |\vec{r}_1(t) - \vec{a}\ | < \epsilon,$$
$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta_2 > 0)\ |t - t_0| < \delta_2 \Longrightarrow |\vec{r}_2(t) - \vec{b}\ | < \epsilon.$$

Kako ϵ biramo proizvoljno, možemo ga u prethodnim formulama zamijeniti s $\frac{\epsilon}{2}$:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta_1 > 0)\ |t - t_0| < \delta_1 \Longrightarrow |\vec{r}_1(t) - \vec{a}\ | < \frac{\epsilon}{2},$$
$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta_2 > 0)\ |t - t_0| < \delta_2 \Longrightarrow |\vec{r}_2(t) - \vec{b}\ | < \frac{\epsilon}{2}.$$

Kako bismo dokazali tvrdnju trebamo pokazati da vrijedi:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)|t - t_0| < \delta \Longrightarrow |\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) - \vec{a} - \vec{b}\ | < \epsilon.$$

Ako za δ odaberemo manji od brojeva δ_1 i δ_2, tada je:

$$|\vec{r}_1(t) - \vec{a}| < \frac{\epsilon}{2} \text{ i } |\vec{r}_2(t) - \vec{b}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Primjenom nejednakosti trokuta slijedi:

$$\begin{aligned}|\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) - \vec{a} - \vec{b}| &= |\vec{r}_1(t) - \vec{a} + \vec{r}_2(t) - \vec{b}| \leq \\ &\leq |\vec{r}_1(t) - a| + |\vec{r}_2(t) - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Time smo pokazali da vrijedi:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0,\ \delta := min\{\delta_1, \delta_2\})|t - t_0| < \delta \Longrightarrow |\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) - \vec{a} - \vec{b}\ | < \epsilon,$$

iz čega slijedi tražena tvrdnja:

$$\lim_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \vec{a} + \vec{b}.$$

d) Pretpostavimo da je $\lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a}$ i $\lim_{t\to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{b}$. Prema definiciji limesa vrijedi:

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a} \Longleftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta_1 > 0) \mid t - t_0 \mid < \delta_1 \Longrightarrow \mid \vec{r}_1(t) - \vec{a} \mid < \epsilon,$$
$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{b} \Longleftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta_2 > 0) \mid t - t_0 \mid < \delta_2 \Longrightarrow \mid \vec{r}_2(t) - \vec{b} \mid < \epsilon.$$

Zatim, prema Lemi 2.1.1 postoji $M > 0$ takav da je

$$|\vec{r}_2(t)| < M. \tag{2.2}$$

Kako ϵ biramo proizvoljno, možemo odabrati $\epsilon = \frac{\epsilon}{2M}$ i $\epsilon = \frac{\epsilon}{2(1+|\vec{a}|)}$. Za tako izabrane ϵ, postoje $\delta_2, \delta_3 > 0$ takvi da vrijedi:

$$0 < |t - t_0| < \delta_2 \Longrightarrow |\vec{r}_1(t) - \vec{a}| < \frac{\epsilon}{2M}, \tag{2.3}$$
$$0 < |t - t_0| < \delta_3 \Longrightarrow |\vec{r}_2(t) - \vec{b}| < \frac{\epsilon}{2(1+|\vec{a}|)}. \tag{2.4}$$

Ako za δ odaberemo najmanji od brojeva δ_1, δ_2 i δ_3, tada vrijede implikacije (2.2), (2.3) i (2.4). Želimo pokazati da postoji limes umnoška funkcija $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$, tj. da postoji δ takav da za svaki ϵ vrijedi:

$$0 < |t - t_0| < \delta \Longrightarrow |\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) - \vec{a} \cdot \vec{b}| < \epsilon.$$

Proširimo izraz dodavanjem i oduzimanjem člana $\vec{a} \cdot \vec{r}_2(t)$:

$$|\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) - \vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) - \vec{a} \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{a} \cdot \vec{r}_2(t) - \vec{a} \cdot \vec{b}|$$

i zatim primijenimo nejednakost trokuta

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) - \vec{a} \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{a} \cdot \vec{r}_2(t) - \vec{a} \cdot \vec{b}| &\le |\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) - \vec{a} \cdot \vec{r}_2(t)| + |\vec{a} \cdot \vec{r}_2(t) - \vec{a} \cdot \vec{b}| \\ &= |\vec{r}_2(t) \cdot (\vec{r}_1(t) - \vec{a})| + |\vec{a} \cdot (\vec{r}_2(t) - \vec{b})| \\ &\le |\vec{r}_2(t)| \cdot |\vec{r}_1(t) - \vec{a}| + |\vec{a}| \cdot |\vec{r}_2(t) - \vec{b}|. \end{aligned}$$

Budući da vrijedi $|\vec{r}_1(t) - \vec{a}| < \frac{\epsilon}{2M}$, $|\vec{r}_2(t) - \vec{b}| < \frac{\epsilon}{2(1+|\vec{a}|)}$ i $|\vec{r}_2(t)| < M$, uvrštavanjem u gornji izraz dobivamo:

$$|\vec{r}_2(t)| \cdot |\vec{r}_1(t) - \vec{a}| + |\vec{a}| \cdot |\vec{r}_2(t) - \vec{b}| < M\frac{\epsilon}{2M} + |\vec{a}|\frac{\epsilon}{2(1+|\vec{a}|)} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Time smo dokazali traženu tvrdnju da je

$$\lim_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Preostale tvrdnje se dokazuju analogno (vidjeti [4]). □

Primjer 2.1.1. *Funkcija definirana izrazom* $\vec{r}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, 2, t\right)$, $t \in \langle 0, +\infty\rangle$, *ima u* $t = 0$ *limes* $(1, 2, 0)$ *jer je*

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}, \lim_{t\to 0} 2, \lim_{t\to 0} t\right) = (1, 2, 0).$$

2.2 Neprekidnost vektorske funkcije

Definicija 2.2.1. Vektorska funkcija $\vec{r} : D \to K$ je neprekidna u točki $t_0 \in D$ ako vrijedi

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Funkcija $\vec{r}$ je neprekidna na D ako je neprekidna u svakoj točki $t \in D$.

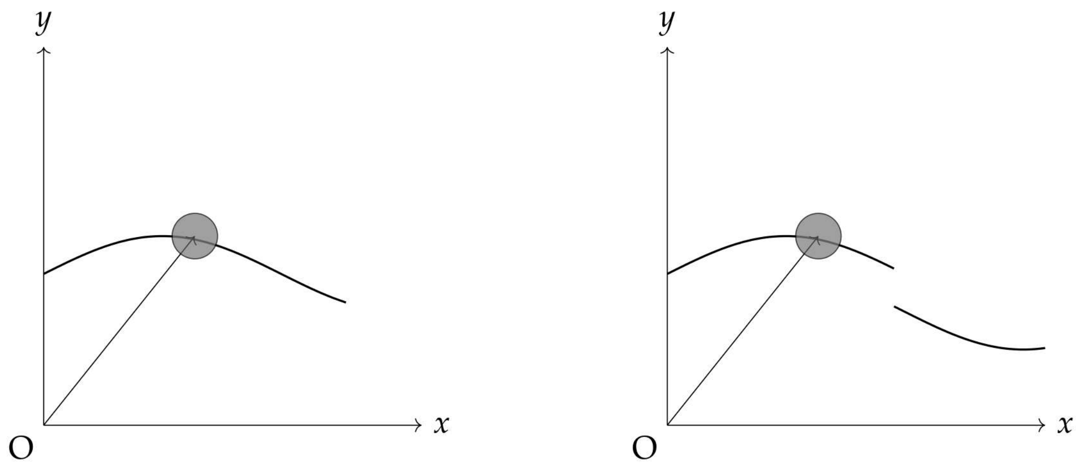
Napomena 2.2.1. Iz definicije slijedi da je funkcija neprekidna ako i samo ako su njezine komponente neprekidne funkcije.
Može se pokazati kako su zbroj, razlika, skalarni i vektorski produkt neprekidnih vektorskih funkcija također neprekidne funkcije.

Primjer 2.2.1. *Promotrimo vektorsku funkciju $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R} \to K$ danu izrazom:*

$$\vec{r}(t) = e^t\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{4-t}}\,\vec{j} + \sin(t\pi)\,\vec{k}.$$

Njezine komponente su $r_1(t) = e^t$, $r_2(t) = \frac{1}{\sqrt{4-t}}$, $r_3(t) = \sin(t\pi)$. Na primjer, za vrijednost $t = 0$ dobivamo vektor $\vec{r}(0) = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$. Funkcija $\vec{r}$ definirana je za sve $t < 4$. Općenito, područje definicije vektorske funkcije obuhvaća sve realne brojeve za koje su definirane sve njezine komponente odnosno, domena vektorske funkcije je zajednički presjek domena svih njenih komponenti.

Primjer 2.2.2. *Na lijevoj slici možemo vidjeti neprekidnu vektorsku funkciju, dok se na desnoj slici nalazi funkcija koja ima prekid u nekoj točki.*



Slika 2.3: Primjer vektorske funkcije koja je neprekidna i vektorske funkcije koja ima prekid.

2.3 Derivacija vektorske funkcije

Definicija 2.3.1. Derivaciju vektorske funkcije $\vec{r} : D \to K$ u točki $t_0 \in D$ definiramo kao:

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0},$$

ukoliko taj limes postoji. U tom slučaju funkciju $\vec{r}\,'$ nazivamo derivacija funkcije $\vec{r}$. Za funkciju kažemo da je derivabilna na D ako ima derivaciju u svakoj točki $t \in D$.

Slično kao kod skalarne funkcije jedne varijable, derivaciju vektorske funkcije možemo zapisati i na drugi način:

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Sljedeći teorem pokazuje da se derivacija vektorske funkcije može računati pomoću derivacija njezinih komponenti.

Teorem 2.3.1. *Neka je $\vec{r} : D \to K$, $\vec{r} = r_1\vec{i} + r_2\vec{j} + r_3\vec{k}$ vektorska funkcija te r_1, r_2 i r_3 njezine komponente koje su derivabilne funkcije. Tada vrijedi*

$$\vec{r}\,'(t) = r_1{}'(t)\vec{i} + r_2{}'(t)\vec{j} + r_3{}'(t)\vec{k}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo pomoću definicije derivacije vektorske funkcije:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_1(t+\Delta t) - r_1(t)}{\Delta t}\right)\vec{i} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_2(t+\Delta t) - r_2(t)}{\Delta t}\right)\vec{j} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_3(t+\Delta t) - r_3(t)}{\Delta t}\right)\vec{k} \\
&= r_1{}'(t)\,\vec{i} + r_2{}'(t)\,\vec{j} + r_3{}'(t)\,\vec{k}.
\end{aligned}$$

□

Teorem 2.3.2. *Neka su $\vec{u}, \vec{v} : D \to K$ derivabilne vektorske funkcije i neka je $f : D \to R$ derivabilna skalarna funkcija. Tada vrijedi:*

a) $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})' = \lambda\vec{u}\,' + \mu\vec{v}\,'$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

b) $(f\vec{u})' = f'\vec{u} + f\vec{u}\,'$,

c) $\left(\frac{\vec{u}}{f}\right)' = \frac{f\vec{u}\,' - f'\vec{u}}{f^2}$,

d) $(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}\,' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}\,'$,

e) $(\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u}\,' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}\,'$.

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju pod *e*):

$$(\vec{u} \times \vec{v})'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\vec{u} \times \vec{v})(t+\Delta t) - (\vec{u} \times \vec{v})(t)}{\Delta t}.$$

Raspišemo li izraz u brojniku kao

$$\vec{u}(t+\Delta t) \times \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) \times \vec{v}(t+\Delta t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) \times \vec{v}(t),$$

imamo:

$$\begin{aligned}(\vec{u}\times\vec{v})'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{u}(t+\Delta t)\times\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)\times\vec{v}(t+\Delta t)}{\Delta t}\\ &+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{u}(t)\times\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)}{\Delta t}\\ &=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t))\times\vec{v}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{u}(t)\times(\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t))}{\Delta t}.\end{aligned}$$

Nadalje, primjenom definicije derivacije dobivamo traženu tvrdnju:

$$\begin{aligned}(\vec{u}\times\vec{v})'(t) &= \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)}{\Delta t}\right)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}\right)\\ &=\vec{u}\,'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}\,'(t).\end{aligned}$$

Za dokaz preostalih tvrdnji pogledati [1]. □

Primjer 2.3.1. *Odredite derivaciju vektorske funkcije $\vec{r}: D\to K$ definirane s*

$$\vec{r}(t)=t^2\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k}.$$

Da bismo izračunali derivaciju vektorske funkcije $\vec{r}$, trebamo izračunati derivacije svih njezinih komponenti. Derivacija prve komponente je $\frac{d}{dt}(t^2)=2t$, druge komponente $\frac{d}{dt}(\sin t)=\cos t$ i treće komponente $\frac{d}{dt}(\cos t)=-\sin t$.
Stoga, derivacija vektorske funkcije $\vec{r}$ je:

$$\vec{r}\,'(t)=2t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}-\sin t\,\vec{k}.$$

Derivacije višeg reda vektorske funkcije definiramo analogno kao i kod skalarnih funkcija.

2.4 Diferencijal vektorske funkcije

Pretpostavimo da imamo zadanu vektorsku funkciju $\vec{r}: D\to K$ s komponentama $r_1,\ldots,r_n$:

$$\vec{r}(t)=(r_1(t),\ldots,r_n(t))\,,\ t\in D.$$

Diferencijal funkcije $\vec{r}$ u točki $t\in D$ je:

$$d\vec{r}(t)=\vec{r}\,'(t)dt=\left(\frac{dr_1(t)}{dt},\ldots,\frac{dr_n(t)}{dt}\right).$$

Napomena 2.4.1. Ovdje $d\vec{r}$ predstavlja malu promjenu vektorske funkcije $\vec{r}$ kada se t promijeni za malu vrijednost dt.

Sljedeći teorem nam govori kako izračunati derivaciju funkcije koja je definirana kao kompozicija dviju funkcija.

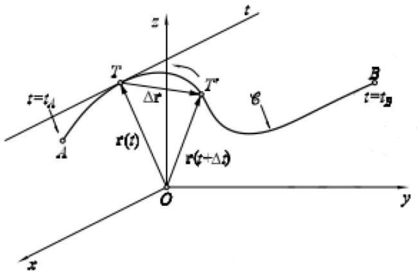
Teorem 2.4.1. *Neka su $\vec{r}: D\to K$ i $\vec{w}: D_1\to\mathbb{R}$ dvije vektorske funkcije, takve da vrijedi $\vec{w}[D_1]\subseteq D$. Ako su funkcije $\vec{r}$ i $\vec{w}$ derivabilne, onda je*

$$\frac{d(\vec{r}(\vec{w}(t)))}{dt}=\frac{d\vec{r}}{d\vec{w}}\cdot\frac{d\vec{w}}{dt}\equiv\vec{r}\,'(w)\cdot\vec{w}\,'(t).$$

Dokaz. Dokaz teorema se može pronaći u [2]. □

2.5 Geometrijska interpretacija derivacije

Derivacija vektorske funkcije ima značajno geometrijsko značenje, posebno kada se razmatra u kontekstu kretanja duž putanje u prostoru. Geometrijski, derivacija vektorske funkcije u određenoj točki opisuje smjer i brzinu promjene funkcije u toj točki.



Slika 2.4: Geometrijska interpretacija derivacije funkcije.

Slika 2.4 prikazuje geometrijsku interpretaciju derivacije vektorske funkcije $\vec{r}$ u trodimenzionalnom prostoru, gdje krivulja predstavlja putanju funkcije $\vec{r}$. Točke A i B označavaju vrijednosti funkcije u različitim trenutcima t_A i t_B, dok je točka T vrijednost funkcije u trenutku t. Tangencijalni vektor $\vec{r}\,'(t)$ predstavlja smjer i brzinu promjene funkcije u točki T, a $\Delta\vec{r}$ prikazuje promjenu vektorske funkcije za malu promjenu Δt. Uočimo, kako $\Delta t \to 0$, vektor $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ sve više se poklapa s tangencijalnim vektorom što potvrđuje da je smjer tangente određen derivacijom vektorske funkcije $\vec{r}$.

3 | Vektorska i skalarna polja

Skalarno polje je funkcija koja svakoj točki u prostoru pridružuje skalar, odnosno realan broj. Neki primjeri skalarnih polja su gustoća i temperatura.

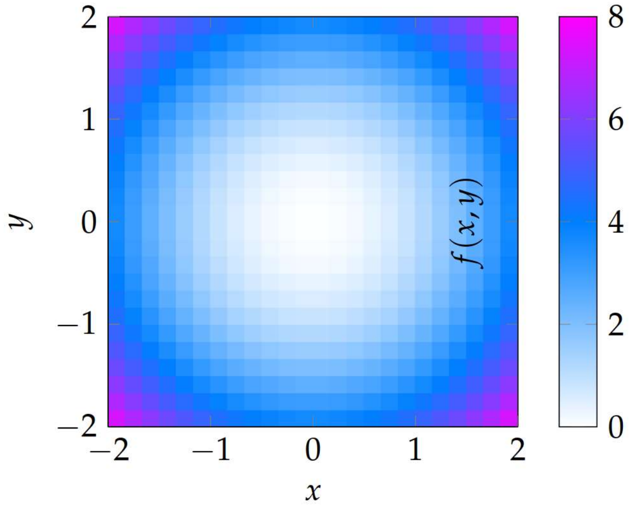
Definicija 3.0.1. Skalarno polje je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koja svakom $x \in D$ pridružuje skalar. Vrijednost skalarnog polja u točki $t \in D$ označavamo s $f(t)$.

Skalarna polja se često vizualiziraju pomoću kontura ili boja koje predstavljaju različite vrijednosti skalara u prostoru, što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 3.0.1. *Pretpostavimo da imamo skalarno polje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadano izrazom:*

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Ovo polje svakoj točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pridružuje skalar koji predstavlja udaljenost te točke od ishodišta.

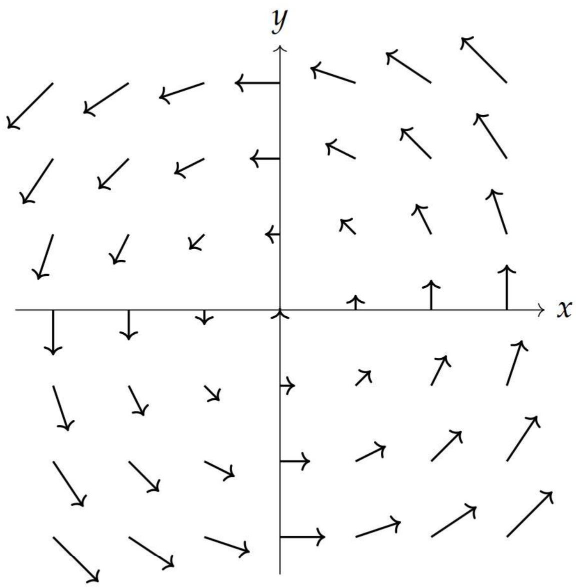


Slika 3.1: Skalarno polje.

Konture i boje predstavljaju vrijednosti skalarnog polja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Sa Slike 3.1 možemo primijetiti da boje postaju intenzivnije kako se udaljavamo od ishodišta, što pokazuje povećanje vrijednosti funkcije.

Definicija 3.0.2. Vektorsko polje je funkcija $\vec{a} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ (ili $\mathbb{R}^2$) koja svakoj točki u prostoru pridružuje vektor.

Primjer 3.0.2. *Vektorsko polje* $\vec{a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definirano izrazom* $\vec{a}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ *primjer je rotacijskog polja koje možemo vizualizirati pomoću strelica koje predstavljaju vektore u različitim točkama koordinatnog sustava. Svaka strelica pokazuje smjer i veličinu vektora vektorskog polja u određenoj točki. Smjer strelica ukazuje na rotacijsko gibanje u ravnini, dok duljina strelica daje informacije o veličini vektora.*



Slika 3.2: Vektorsko polje.

U ovom primjeru, u točki $(1, 2)$*, vektor će imati komponentu -2 po x osi i komponentu 1 po y osi što će biti prikazano kao strelica koja izlazi iz te točke u smjeru* $(-2, 1)$*, što vidimo iz Slike 3.2.*

Napomena 3.0.1. Općenito, vektorsko polje možemo zapisati kao $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, gdje su a_x, a_y, a_z skalarne funkcije koje definiraju komponente vektora u ortonormiranoj bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Također, vektorska polja često se prikazuju pomoću strelica koje pokazuju smjer i veličinu vektora u različitim točkama prostora.

3.1 Gradijent, rotacija i divergencija

Najprije ćemo definirati gradijent koji je od velike važnosti za razumijevanje ponašanja vektorskih polja.

Definicija 3.1.1. Gradijent skalarnog polja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je vektorska funkcija koja se sastoji od parcijalnih derivacija skalarnog polja f po svakoj varijabli:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Teorem 3.1.1. *Neka su* $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna skalarna polja,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabilna funkcija i* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*. Tada vrijedi:*

a) $\nabla c = 0,\ c \in \mathbb{R}$,

b) $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$,

c) $\nabla(f \cdot g) = g\nabla f + f \nabla g$,

d) $\nabla \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}, g \neq 0$,

e) $\nabla(\varphi \circ f) = \dfrac{d\varphi}{df}\nabla f$.

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnje b) i c), a dokazi ostalih tvrdnji mogu se pronaći u [7].
b) Neka su $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna skalarna polja i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Korištenjem Definicije 3.1.1 dobivamo:

$$\nabla(\lambda f + \mu g) = \left(\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x}, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y}, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z}\right).$$

Zatim, koristeći svojstvo linearnosti parcijalnih derivacija imamo:

$$\left(\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x}, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y}, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z}\right) = \left(\lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x}, \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\frac{\partial g}{\partial y}, \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

Izlučimo skalare λ i μ, te dobivamo izraz:

$$\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x}, \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\frac{\partial g}{\partial y}, \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\frac{\partial g}{\partial z}\right) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

Izrazi u zagradama predstavljaju gradijente polja f i g, pa stoga slijedi tražena tvrdnja:

$$\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \lambda\nabla f + \mu\nabla g.$$

c) Neka su $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna skalarna polja pri čemu je $g \neq 0$. Tada imamo:

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial y}, \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial z}\right).$$

Pomoću pravila za derivaciju kvocijenta dobivamo:

$$\left(\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial y}, \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial z}\right) = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}g - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}, \frac{\frac{\partial f}{\partial z}g - f\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}\right).$$

Nadalje, izlučimo $\frac{1}{g^2}$ kako bismo mogli primijeniti definiciju gradijenta:

$$\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}g - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}, \frac{\frac{\partial f}{\partial z}g - f\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}\right) = \frac{1}{g^2}\left(g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}, g\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial g}{\partial y}, g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z}\right),$$

te na kraju dobivamo tvrdnju $c)$:

$$\frac{1}{g^2}\left(g\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial g}{\partial x}, g\frac{\partial f}{\partial y}-f\frac{\partial g}{\partial y}, g\frac{\partial f}{\partial z}-f\frac{\partial g}{\partial z}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2},\ g\neq 0.$$

$\square$

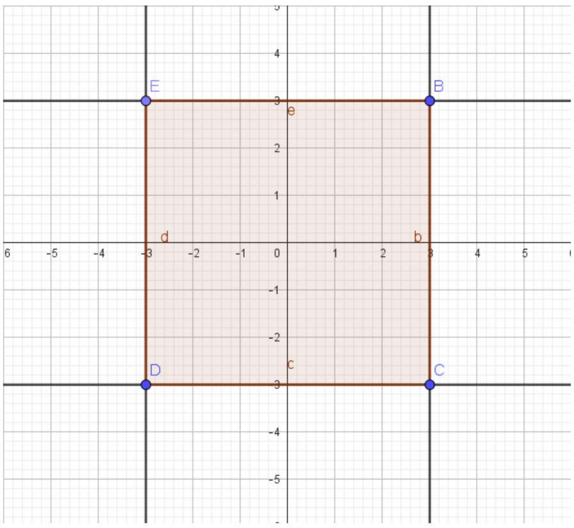
Definicija 3.1.2. Vektorsko polje $\vec{a}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ je potencijalno (ili konzervativno) ako postoji skalarno polje $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ takvo da je $\vec{a}$ gradijent tog skalarnog polja:

$$\vec{a}=\nabla f.$$

Definicija 3.1.3. Kažemo da je $U\subseteq\mathbb{R}^2$ jednostruko povezano područje ako se unutrašnjost svake jednostavne zatvorene krivulje unutar U u cijelosti nalazi unutar U. Ako neki podskup od $\mathbb{R}^2$ nije jednostruko povezano područje kažemo da je višestruko povezano područje.

Primjer 3.1.1. *Primjer jednostruko povezanog podučja je kvadrat koji možemo definirati kao:*

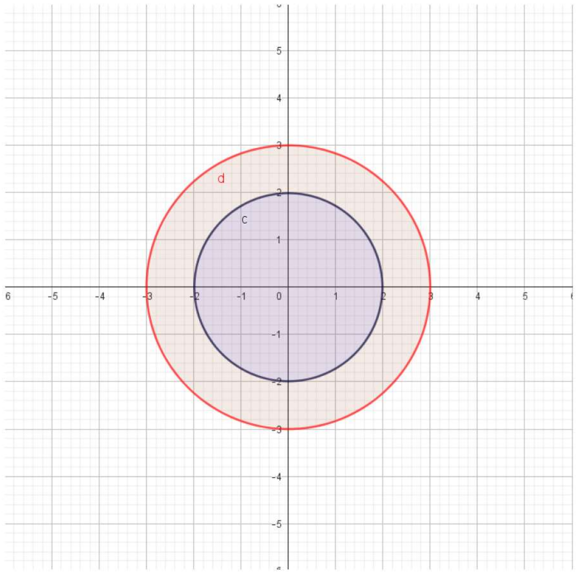
$$K=\{(x,y)\subseteq\mathbb{R}^2:-3\leq x\leq 3,-3\leq y\leq 3\}.$$



Slika 3.3: Jednostruko povezano područje.

Primjer 3.1.2. *Primjer višestruko povezanog područja je kružni vijenac koji definiramo kao skup svih točaka koje se nalaze između dva koncentrična kruga s različitim polumjerima:*

$$V = \{(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2 : 2^2 < x^2 + y^2 < 3^2\}.$$



Slika 3.4: Višestruko povezano područje.

Definicija 3.1.4. Neka je $\vec{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ vektorsko polje, gdje su a_x, a_y, a_z derivabilne funkcije. Rotacija vektorskog polja $\vec{a}$ definira se kao:

$$rot\ \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Rotacija vektorskog polja $\vec{a}$ može se zapisati kao determinanta sljedeće matrice:

$$rot\ \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Definicija 3.1.5. Kažemo da je vektorsko polje $\vec{a} : D \to K$ diferencijabilno u točki $P_0 \in D$ ako postoji linearni operator $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takav da za proizvoljan $h \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{a}(P_0 + h) - \vec{a}(P_0) - L(h)}{||h||} = 0.$$

Teorem 3.1.2. *Neka su $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna skalarna polja, $\vec{u}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diferencijabilna vektorska polja, te $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

a) $rot\ \vec{c} = 0,\ \vec{c} = const.,$

b) $rot(\lambda\vec{w} + \mu\vec{u}) = \lambda rot\ \vec{w} + \mu rot\ \vec{u}\ ,$

$c)$ $rot\ (f\vec{w}) = (\nabla f) \times \vec{w} + f\ rot\vec{w}$,

$d)$ $rot\ (\nabla f) = 0$,

$e)$ $rot\ (f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$

Dokaz. Za dokaz teorema vidjeti [7]. □

Teorem 3.1.3. *Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferencijabilno skalarno polje koje ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda. Tada je:*

$$rot\, \nabla f = 0.$$

Dokaz. Za skalarno polje f, ∇f definiran je kao $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$, gdje su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori, a rotacija ∇f dana je izrazom $\nabla \times \nabla f$. Računanjem dane determinante dobivamo:

$$\nabla \times \nabla f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\vec{k}.$$

Kako su parcijalne derivacije drugog reda funkcije f neprekidne, možemo primjeniti Schwarzov teorem (teorem o miješanim derivacijama):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Dakle, svi članovi unutar zagrada su jednaki nuli, pa je rotacija gradijenta skalarnog polja jednaka nuli. □

Teorem 3.1.4. *Neka je $\vec{a} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ vektorsko polje, te neka a_x, a_y i a_z imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda. Vektorsko polje $\vec{a}$ je potencijalno ako i samo ako je $rot\ \vec{a} = 0$.*

Dokaz. Za dokaz vidjeti [5]. □

Primjer 3.1.3. *Odredimo rotaciju vektorskog polja*

$$\vec{a}(x, y, z) = y^2z^3\vec{i} + 3yx^2\vec{j} + xyz\vec{k}$$

i provjerimo je li ono potencijalno.

Kako bismo odredili rotaciju vektorskog polja $\vec{a}$, koristimo Definiciju 3.1.4:

$$rot\ \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 3yx^2 & xyz \end{vmatrix},$$

odnosno

$$rot\ \vec{a} = \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \frac{\partial(3yx^2)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(y^2z^3)}{\partial z} - \frac{\partial(xyz)}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(3x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2z^3)}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Zatim izračunamo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial(xyz)}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial(3yx^2)}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial(y^2z^3)}{\partial z} = 3y^2z^2, \quad \frac{\partial(xyz)}{\partial x} = yz,$$
$$\frac{\partial(3x^2y)}{\partial x} = 6xy, \quad \frac{\partial(y^2z^3)}{\partial y} = 2yz^3.$$

Tada dobivamo:

$$rot\,\vec{a} = (xz - 0)\vec{i} + (3y^2z^2 - yz)\vec{j} + (6xy - 2yz^3)\vec{k}.$$

Kako je $rot\,\vec{a} \neq 0$*, slijedi da vektorsko polje* $\vec{a}$ *nije potencijalno.*

Definicija 3.1.6. Neka je $\vec{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$ vektorsko polje, gdje su a_x, a_y i a_z derivabilne funkcije. Divergencija vektorskog polja $\vec{a}$ je skalarno polje definirano kao:

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Teorem 3.1.5. *Neka su* $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna skalarna polja,* $\vec{u}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *diferencijabilna vektorska polja, te* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*. Tada vrijedi:*

a) $div\,\vec{c} = 0,\ \vec{c} = const.,$

b) $div(\lambda\vec{w} + \mu\vec{u}) = \lambda div\,\vec{w} + \mu div\,\vec{u}$,

c) $div\,(\vec{w} \times \vec{u}) = (rot\,\vec{w}) \cdot \vec{u} - \vec{w} \cdot (rot\,\vec{u}),$

d) $div\,(f\vec{w}) = \nabla f \cdot \vec{w} + f\,div\,\vec{w},$

e) $div\,(rot\,\vec{w}) = 0.$

Dokaz. Dokaz provodimo slično kao kod svojstava rotacije i može se pronaći u [7]. □

Primjer 3.1.4. *Odredimo divergenciju vektorskog polja*

$$\vec{a}\,(x, y, z) = x^2\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}.$$

Divergencija vektorskog polja se definira kao:

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

U našem primjeru imamo:

$$a_x = x^2,\ a_y = xy^2,\ a_z = 3z.$$

Izračunajmo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{\partial (x^2)}{\partial x} = 2x,$$
$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{\partial (xy^2)}{\partial y} = 2xy,$$
$$\frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial (3z)}{\partial z} = 3.$$

Stoga je divergencija vektorskog polja $\vec{a}$:

$$div\, \vec{a} = 2x + 2xy + 3.$$

Definicija 3.1.7. Neka je $\vec{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. Polje $\vec{a}$ je solenoidalno ako postoji vektorsko polje $\vec{b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takvo da je

$$\vec{a} = rot\, \vec{b}.$$

4 | Primjene derivacije vektorske funkcije

4.1 Zakrivljenost krivulje

Zakrivljenost krivulje u određenoj točki predstavlja brzinu kojom krivulja mijenja smjer u toj točki. Ona nam pomaže izmjeriti koliko se krivulja "savija" u određenoj točki.

Definicija 4.1.1. Vektorsku funkciju $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ nazivamo parametrizacijom krivulje $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ ako krivulju $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ čine sve točke oblika:

$$\begin{aligned} x(t) &= r_1(t), \\ y(t) &= r_2(t), \\ z(t) &= r_3(t). \end{aligned}$$

Definicija 4.1.2. Parametrizirana krivulja $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ je regularna u točki $t \in D$ ako vrijedi $\vec{r}\,'(t) \neq 0$. Kažemo da je krivulja $\vec{r}$ regularna, ako je regularna u svakoj točki $t \in D$.

Definicija 4.1.3. Neka je $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ regularna krivulja u točki $t \in D$. Jedinični tangencijalni vektor u točki $t \in D$ definira se kao:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}. \tag{4.1}$$

Definicija 4.1.4. Neka je $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ regularna krivulja u točki $t \in D$. Vektor

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}\,'(t)}{|\vec{T}\,'(t)|} \tag{4.2}$$

nazivamo vektorom glavne normale, a vektor

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \tag{4.3}$$

vektorom binormale krivulje $\vec{r}$ u točki $t \in D$.

Definicija 4.1.5. Frenetov trobrid krivulje $\vec{r}$ u točki $t \in D$ je uređena trojka $(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$.

Definicija 4.1.6. Neka je $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ *dovoljno glatka krivulja* i $\vec{r} : [a,b] \to \Gamma$ njezina parametrizacija, te $P = \vec{r}(t_0), t_0 \in [a,b]$. Broj

$$\kappa(P) = \frac{|\vec{T}\,'(t_0)|}{|\vec{r}\,'(t_0)|} \tag{4.4}$$

nazivamo zakrivljenost krivulje Γ u točki P.

Propozicija 4.1.1. *Regularna krivulja je pravac ili dio pravca ako i samo ako je $\kappa = 0$ u svakoj točki te krivulje.*

Dokaz. Pokazat ćemo jedan smjer tvrdnje koji tvrdi ako je regularna krivulja pravac da je njegova zakrivljenost jednaka nuli.
Pretpostavimo da je krivulja $\vec{r}$ pravac zadan standardnom parametrizacijom $\vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$, gdje su $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ konstantni vektori. Tada je $\vec{r}\,'(t) = \vec{a}, \vec{r}\,''(t) = 0$, te je $\kappa = 0$. Drugi smjer tvrdnje može se pronaći u [6]. □

Primjer 4.1.1. *Odredimo zakrivljenost pravca, čija je parametrizacija dana s*

$$\vec{r}(t) = at\vec{i} + b\vec{j},$$

pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$.
Da bismo odredili zakrivljenost pravca potrebna nam je derivacija vektora položaja $\vec{r}$ i njegova norma:

$$\vec{r}\,'(t) = a\vec{i}, \ \ |\vec{r}\,'(t)| = a.$$

Pomoću izraza (4.1) dobivamo jedinični tangencijalni vektor

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \vec{i}.$$

Deriviranjem prethodnog izraza slijedi $\vec{T}\,'(t) = 0$, pa je i $|\vec{T}\,'(t)| = 0$.
Uvrštavanjem u (4.4) slijedi da je zakrivljenost pravca u svakoj točki jednaka $\kappa = 0$, što je u skladu s Propozicijom 4.1.1.

Često je korisno izraziti zakrivljenost krivulje isključivo u terminima njezine parametrizacije. Da bismo to postigli, za zadanu parametrizaciju krivulje $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ računamo njezinu derivaciju:

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{r_1{}'(t)^2 + r_2{}'(t)^2 + r_3{}'(t)^2}. \tag{4.5}$$

Zatim, derivacijom funkcije (4.5) dobivamo:

$$\frac{d}{dt}|\vec{r}\,'(t)| = \frac{1}{2}\frac{2r_1'(t)r_1''(t) + 2r_2'(t)r_2''(t) + 2r_3'(t)r_3''(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}.$$

Korištenjem svojstava vektorskog produkta i pravila deriviranja, možemo izračunati derivaciju jediničnog tangencijalnog vektora $\vec{T}(t)$:

$$\begin{aligned}\vec{T}\,'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right) = -1\cdot\frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|^2}\cdot\frac{\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,'(t)|^2}\vec{r}\,'(t)+\frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}\vec{r}\,''(t)\\ &= \frac{|\vec{r}\,'(t)|^2\vec{r}\,''(t)-(\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,''(t))\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|^3}\\ &= \frac{\vec{r}\,'(t)\times(\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t))}{|\vec{r}\,'(t)|^3}.\end{aligned}$$

Daljnjim računom imamo da je

$$\begin{aligned}|\vec{T}\,'(t)| &= \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|^3}\cdot|\vec{r}\,'(t)||\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)|\sin\sphericalangle(\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t))\\ &= \frac{|\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|^2}.\end{aligned}$$

Na kraju, konačna formula za zakrivljenost krivulje je:

$$\kappa = \frac{|\vec{T}\,'(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{|\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|^3}.$$

Primjer 4.1.2. *Neka je krivulja $\vec{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ zadana s $\vec{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$. Odredite Frenetov trobrid i zakrivljenost dane krivulje.*

Trebamo izračunati prvu i drugu derivaciju krivulje $\vec{r}$ kako bismo dalje mogli odrediti jedinični tangencijalni vektor, te vektor glavne normale i binormale. Jednostavnim računom slijedi da je

$$\begin{aligned}\vec{r}\,'(t) &= (e^t\cos t - e^t\sin t, e^t\sin t + e^t\cos t, e^t)\\ &= e^t(\cos t-\sin t, \sin t+\cos t, 1),\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}|\vec{r}\,'(t)| &= e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1}\\ &= e^t\sqrt{\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t+\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t+1}\\ &= e^t\sqrt{3},\end{aligned}$$

iz čega imamo,

$$\vec{T}(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos t-\sin t, \sin t+\cos t, 1).$$

Zatim računamo drugu derivaciju funkcije $\vec{r}$:

$$\begin{aligned}\vec{r}\,''(t) &= e^t(\cos t-\sin t, \sin t+\cos t, 1)+e^t(-\sin t-\cos t, \cos t-\sin t, 0)\\ &= e^t(-2\sin t, 2\cos t, 1).\end{aligned}$$

Sada trebamo izračunati vektorski produkt prve i druge derivacije funkcije $\vec{r}$:

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = e^{2t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2\sin t & 2\cos t & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= e^{2t}(\sin t - \cos t, -\cos t - \sin t, 2).$$

Zatim, izračunamo normu gornjeg izraza

$$|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)| = e^{2t}\sqrt{(\sin t - \cos t)^2 + (-\cos t - \sin t)^2 + 4} =$$
$$= e^{2t}\sqrt{\sin^2 t - 2\sin t\cos t + \cos^2 t + \cos^2 + 2\sin t\cos t + \sin^2 t + 4} =$$
$$= e^{2t}\sqrt{6},$$

pa dobivamo $\vec{B}(t)$:

$$\vec{B}(t) = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sin t - \cos t, -\cos t - \sin t, 2).$$

Sada ćemo odrediti vektor glavne normale $\vec{N}(t)$:

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ \sin t - \cos t & -\cos t - \sin t & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{6}(3(\sin t + \cos t), 3(\sin t - \cos t), 0) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t, \sin t - \cos t, 0).$$

Preostaje nam još odrediti zakrivljenost krivulje.

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|^3} = \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}.$$

Propozicija 4.1.2. *Zakrivljenost κ ne ovisi o izboru parametrizacije.*

Dokaz. Neka je zadana glatka krivulja Γ i neka su $\vec{r} : I \to \Gamma$, te $\vec{\tilde{r}} : J \to \Gamma$ dvije glatke parametrizacije te krivulje. Tada postoji glatka bijekcija $\varphi : I \to J$ takva da je $\vec{r}(t) = \vec{\tilde{r}} \circ \varphi$ i $\varphi'(t) \geq 0$, za svaki $t \in J$. Vrijedi da je:

$$\vec{T}_1(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{\vec{\tilde{r}}\,'(\varphi(t))\varphi'(t)}{|\vec{\tilde{r}}\,'(\varphi(t))\varphi'(t)|} = \pm\frac{\vec{\tilde{r}}\,'(\varphi(t))}{|\vec{\tilde{r}}\,'(\varphi(t))|} = \pm\vec{T}_2(\varphi(t)),$$

pa deriviranjem izraza dobivamo:

$$\vec{T}\,'_1(t) = \pm\vec{T}\,'_2(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Zatim slijedi:

$$\kappa_1(P) = \frac{|\vec{T}\,'_1(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{|\pm\vec{T}\,'_2(\varphi(t))\varphi'(t)|}{|\vec{\tilde{r}}\,'(\varphi(t))\varphi'(t)|} = \frac{|\vec{T}\,'_2(\varphi(t))|}{|\vec{\tilde{r}}\,'(\varphi(t))|} = \kappa_2(P).$$

□

Definicija 4.1.7. Neka je $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana krivulja, te $t_0 \in [a,b]$. Ravnina koja prolazi točkom $\vec{r}(t_0)$, a vektor normale joj je $\vec{B}(t_0)$ naziva se oskulacijska ravnina krivulje $\vec{r}$ u točki $\vec{r}(t_0)$. Ravnina koja prolazi točkom $\vec{r}(t_0)$, a vektor normale joj je $\vec{N}(t_0)$ naziva se rektifikacijska ravnina krivulje $\vec{r}$ u točki $\vec{r}(t_0)$. Ravnina koja prolazi točkom $\vec{r}(t_0)$, a vektor normale joj je $\vec{T}(t_0)$ naziva se normalna ravnina krivulje $\vec{r}$ u točki $\vec{r}(t_0)$.

Primjer 4.1.3. *Odredite sve točke na krivulji $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (t^3, t, t^2)$, u kojima oskulacijska ravnina na krivulju sadrži točku $(-6, 2, -\frac{1}{3})$.*

Jednadžba oskulacijske ravnine u točki $\vec{r}(t_0)$ je oblika

$$((x,y,z) - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{B}(t_0) = 0.$$

Tražimo sve točke $\vec{r}(t_0) = (t_0^3, t_0, t_0^2)$ takve da vrijedi

$$\left(\left(-6, 2, -\frac{1}{3}\right) - (t_0^3, t_0, t_0^2)\right) \cdot \vec{B}(t_0) = 0.$$

Kako bismo odredili sve takve točke na krivulji, moramo odrediti vektor $\vec{B}$. U tu svrhu ćemo izračunati prvu i drugu derivaciju funkcije $\vec{r}$

$$\vec{r}\,'(t) = (3t^2, 1, 2t), \;\; \vec{r}\,''(t) = (6t, 0, 2),$$

njihov vektorski produkt,

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 & 1 & 2t \\ 6t & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 6t^2, -6t),$$

te normu

$$|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)| = \sqrt{4 + 36t^4 + 36t^2},$$

iz čega slijedi da je

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{4 + 36t^4 + 36t^2}}(2, 6t^2, -6t) = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}(1, 3t^2, -3t).$$

Iz jednadžbe oskulacijske ravnine dobivamo jednadžbu:

$$\left(\left(-6, 2, -\frac{1}{3}\right) - (t_0^3, t_0, t_0^2)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{9t_0^4 + 9t_0^2 + 1}}(1, 3t_0^2, -3t_0) = 0,$$

odnosno

$$-t_0^3 + 6t_0^2 + t_0 - 6 = 0,$$

iz čega imamo da je

$$t_{0_1} = 6, \;\; t_{0_2} = 1, \;\; t_{0_3} = -1.$$

Dakle, tražene točke su:

$$\vec{r}(6) = (216, 6, 36), \;\; \vec{r}(1) = (1, 1, 1), \;\; \vec{r}(-1) = (-1, -1, 1).$$

4.2 Brzina i akceleracija

Gibanje točkaste mase u prostoru možemo precizno opisati pomoću vektorske funkcije položaja $\vec{r}$. Za tu funkciju definiramo brzinu, akceleraciju i trzaj kao prvu, drugu i treću derivaciju funkcije položaja s obzirom na vrijeme, redom:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h} = \vec{r}\,'(t),\\
\vec{a}(t) &= \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t),\\
\vec{j}(t) &= \vec{a}\,'(t) = \vec{v}\,''(t) = \vec{r}\,'''(t).
\end{aligned}$$

Primjer 4.2.1. *Promotrimo česticu čiji je položaj opisan vektorskom funkcijom koja je zadana izrazom $\vec{r}(t) = (t^3, e^t, te^t)$. Odredimo brzinu i akceleraciju čestice u trenutku $t = 1$.*

Odredimo prvo brzinu i akceleraciju čestice u proizvoljnom trenutku t:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \vec{r}\,'(t) = (3t^2, e^t, (1+t)e^t),\\
\vec{a}(t) &= \vec{v}\,'(t) = (6t, e^t, (2+t)e^t).
\end{aligned}$$

U trenutku $t = 1$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(1) &= (3, e, 2e),\\
\vec{a}(1) &= (6, e, 3e).
\end{aligned}$$

Ako poznajemo silu $\vec{F}$ koja djeluje na tijelo, tada možemo pronaći akceleraciju iz drugog Newtonovog zakona koji je dan izrazom $\vec{F} = m\vec{a}$. Označimo s $v(t)=|\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{t})|$ brzinu čestice. Tada iz izraza (4.1) za jedinični tangencijalni vektor slijedi:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{t})}{v(t)},$$

pa možemo izraziti

$$\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{t}) = v(t)\vec{T}(t). \tag{4.6}$$

Zatim, deriviranjem prethodnog izraza slijedi:

$$\vec{a}(t) = \vec{\mathrm{v}}\,'(\mathrm{t}) = v\,'(t)\vec{T}(t) + v(t)\vec{T}\,'(t). \tag{4.7}$$

Ako iskoristimo izraz za vektor glavne normale $N(t) = \dfrac{\vec{T}\,'(t)}{|\vec{T}\,'(t)|}$ i definiciju zakrivljenosti $\kappa = \dfrac{|\vec{T}\,'(t)|}{v(t)}$ dobivamo:

$$\vec{T}\,'(t) = \kappa(t)v(t)\vec{N}(t).$$

Uvrštavanjem izraza za $\vec{T}\,'(t)$ u gornji izraz za akceleraciju (4.7) slijedi:

$$\vec{a}(t) = v\,'(t)\vec{T}(t) + \kappa(t)v\,^2(t)\vec{N}(t).$$

Uz oznake tangencijalne i normalne komponente ubrzanja imamo:

$$\vec{a}(t) = a_T(t)\vec{T}(t) + a_N(t)\vec{N}(t).$$

Primijetimo kako se u izrazu za akceleraciju ne pojavljuje binormalni vektor $\vec{B}(t)$, što znači da vektor akceleracije $\vec{a}(t)$ leži u oskulacijskoj ravnini (koja je razapeta vektorima $\vec{T}$ i $\vec{N}$). Uočavamo kako se uz tangencijalnu komponentu ubrzanja nalazi mjera promjene brzine, dok je uz normalnu komponentu ubrzanja dan umnožak zakrivljenosti i kvadrata brzine.

Iako imamo izraze za tangencijalnu i normalnu komponentu akceleracije, želimo ih prikazati samo pomoću vektora položaja $\vec{r}$, te njegove prve i druge derivacije kako bismo pojednostavili računanje. Množenjem izraza (4.6) s $\vec{a}$ slijedi:

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{a} &= v(t)\vec{T}(t) \cdot (v\,'(t)\vec{T}(t) + \kappa v^2(t)\vec{N}(t)) \\ &= v(t)v'(t)\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) + \kappa v^3(t)\vec{T}(t) \cdot \vec{N}(t) \\ &= v(t)v'(t).\end{aligned}$$

Sada za tangencijalnu komponentu ubrzanja dobivamo:

$$a_T(t) = v\,'(t) = \frac{\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{a}}{v} = \frac{\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}, \tag{4.8}$$

a normalna komponenta ubrzanja je dana s:

$$a_N(t) = \kappa v^2(t) = \frac{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|^3}|\vec{r}\,'(t)|^2 = \frac{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|}. \tag{4.9}$$

Time smo dobili izraze za tangencijalnu i normalnu komponentu ubrzanja koji ovise samo o vektoru položaja i njegovim derivacijama.

Primjer 4.2.2. *Čestica se giba funkcijom položaja $\vec{r}(t) = (t^2, t^2, t^3)$. Odredite tangencijalnu i normalnu komponentu akceleracije.*

Imamo da je

$$\begin{aligned}\vec{r}\,'(t) &= 2t\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}, \\ \vec{r}\,''(t) &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + 6t\vec{k}, \\ |\vec{r}\,'(t)| &= \sqrt{8t^2 + 9t^4}.\end{aligned}$$

Tangencijalnu komponentu ubrzanja možemo izračunati prema formuli (4.8):

$$a_T(t) = \frac{\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}.$$

Kako bismo odredili normalnu komponentu ubrzanja, izračunat ćemo vektorski produkt prve i druge derivacije funkcije položaja $\vec{r}$:

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\vec{i} - 6t^2\vec{j},$$

te njegovu normu $|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)| = 6\sqrt{2}t^2$.

Uvrštavanjem u izraz (4.9)*, za normalnu komponentu dobivamo:*

$$a_N(t) = \frac{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}.$$

Kako bismo bolje shvatili dane pojmove, navodimo sljedeće primjere.

Primjer 4.2.3. *Čestica mase m giba se kružno konstantnom kutnom brzinom ω pri čemu je vektorska funkcija položaja dana s $\vec{r}(t) = 2\cos\omega t\vec{i} + 3\sin\omega t\vec{j}$. Odredite silu koja djeluje na česticu i dokažite da je usmjerena prema ishodištu koordinatnog sustava.*

Kako bismo odredili silu koja djeluje na česticu, moramo odrediti vektor ubrzanja $\vec{a}$. Prvo trebamo derivirati vektor položaja kako bismo odredili brzinu čestice, a zatim derivirati brzinu da bismo dobili akceleraciju:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{r}\,'(t) = -2\omega\sin\omega t\vec{i} + 3\omega\cos\omega t\vec{j}, \\ \vec{a}(t) &= \vec{v}\,'(t) = -2\omega^2\cos\omega t\vec{i} - 3\omega^2\sin\omega t\vec{j}. \end{aligned}$$

Sada korištenjem drugog Newtonovog zakona dobivamo traženu silu:

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) = -m\omega^2(2\cos\omega t\vec{i} + 3\sin\omega t\vec{j}).$$

Uočimo kako izraz u zagradi predstavlja upravo vektor položaja $\vec{r}(t)$ pa silu možemo zapisati u obliku $F(t) = -m\omega^2\vec{r}(t)$. Minus nam ukazuje na to da sila djeluje u smjeru suprotnom od smjera vektora, odnosno prema ishodištu.

Primjer 4.2.4. *Projektil je ispaljen pod kutom α i početnom brzinom $\vec{v}_0$. Ako pretpostavimo da je otpor zraka zanemariv i da je jedina vanjska sila koja djeluje na tijelo posljedica gravitacije, odredimo funkciju položaja projektila.*

Zbog jednostavnosti zamišljamo da se projektil na početku nalazi u ishodištu koordinatnog sustava. Kako gravitacijska sila djeluje prema dolje, tada imamo:

$$F = m\vec{a} = -mg\vec{j}, \tag{4.10}$$

te ako podijelimo izraz (4.10) *s m dobivamo:*

$$\vec{a} = -g\vec{j}.$$

Prema definiciji vrijedi $\vec{a} = \vec{v}\,'(t)$, pa stoga integriranjem akceleracije dobivamo brzinu projektila:

$$\vec{v}(t) = -gt\vec{j} + C,$$

pri čemu je $C = \vec{v}(0) = \vec{v}_0$. Tada izraz za brzinu postaje:

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = -gt\vec{j} + \vec{v}_0,$$

Ponovno integriramo, te dobivamo vektor položaja $\vec{r}$:

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{j} + t\vec{v}_0 + D,$$

gdje je $D = \vec{r}(0) = 0$, pa je konačno vektor položaja projektila dan izrazom:

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{j} + t\vec{v}_0.$$

Kada bismo vektor brzine zapisali pomoću njegovih komponenti u obliku:

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\vec{i} + v_0 \sin\alpha\vec{j},$$

tada bi vektor položaja bio dan s:

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\alpha)t\vec{i} + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\vec{j}, \tag{4.11}$$

gdje su $x = (v_0 \cos\alpha)t$ i $y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ njegove komponente.

Primjer 4.2.5. *Loptica je ispaljena početnom brzinom $210\,m/s$ pod kutom od $30°$, na visini od 8m iznad površine tla. Na kojoj udaljenosti loptica pogađa tlo i kojom brzinom?*

Zadani su nam podatci o početnoj brzini loptice $v_0 = 210\,m/s$ i kut $\alpha = 30°$ pod kojim je loptica ispaljena, te gravitacijska konstanta koja iznosi $g = 9.81\ m/s^2$. Prema prethodnom primjeru, računamo komponente vektora položaja:

$$x = 210 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)t = 105\sqrt{3}t. \tag{4.12}$$

Kako se loptica nalazi na visini od 8m, moramo vrijednosti y dodati 8:

$$y = 8 + 210 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)t - \frac{1}{2}(9.81)t^2 = 8 + 105t - 4.9t^2.$$

Kada loptica padne na tlo, y komponenta poprima vrijednost 0, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$4.9t^2 - 105t - 8 = 0.$$

Kako nam t predstavlja vrijeme, nema smisla gledati negativnu vrijednost, stoga ćemo uzeti samo pozitivno rješenje jednadžbe:

$$t = \frac{105 + \sqrt{11025 + 156.8}}{9.8} \approx 21.5\,s.$$

Uvrštavanjem u izraz (4.12) dobivamo vrijednost za $x \approx 105\sqrt{3} \cdot 21.5 \approx 3910\,m$. *Zatim, deriviramo izraz (4.11) i uvrstimo* t*, pa dobivamo vektor brzine loptice*

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = 105\sqrt{3}\,\vec{i} + (105 - 9.81t)\vec{j},$$

čiji je iznos:

$$|\vec{v}(21.5)| = \sqrt{(105\sqrt{3})^2 + (105 - 9.81 \cdot 21.5)^2} \approx 210.5\,m/s.$$

4.3 Keplerovi zakoni

Njemački matematičar i astronom Johannes Kepler (1571.–1630.) radio je kao asistent danskog astronoma Tycha Brahea (1546.-1601.), koji je posjedovao najpreciznije astronomske podatke svog vremena. Kepler je koristio ove podatke za proučavanje gibanja Marsa i drugih planeta, što ga je dovelo do otkrića triju zakona koji nose njegovo ime:

1. Svi planeti gibaju se po elipsama, kojima je Sunce jedno od žarišta.

2. Radij-vektor planet-Sunce opisuje jednake površine u istim vremenskim intervalima.

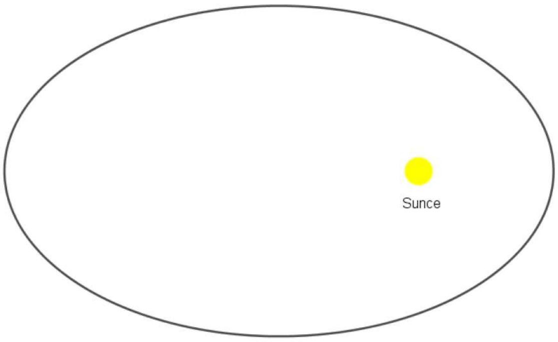
3. Kvadrati ophodnih vremena planeta odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti.

Ovi zakoni su omogućili Sir Isaacu Newtonu da formulira zakon gravitacije, koji je dodatno objasnio uzroke planetarnih gibanja i povezao ih s univerzalnim zakonima fizike.
U nastavku ćemo detaljnije pojasniti Keplerove zakone, a njihovi dokazi mogu se pronaći u [8].

4.3.1 Prvi Keplerov zakon

Prvi Keplerov zakon odnosi se na zakonitost gibanja planeta, tj. na oblik njihovih putanja. Johannes Kepler otkrio je da se svi planeti gibaju po eliptičnim putanjama oko Sunca, koje se nalazi u jednom od žarišta tih elipsi. Ovaj zakon predstavlja značajan pomak u razumijevanju planetarnih orbita jer je dotadašnje vjerovanje bilo da se planeti kreću po savršenim kružnicama.

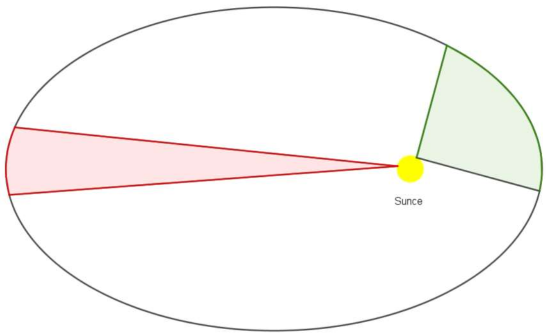
Kepler je zaključio da je djelovanje sile, koja se širi iz Sunca (kasnije prepoznata kao gravitacijska sila), uzrok gibanja planeta po eliptičnim stazama. Međutim, u to vrijeme nije imao potrebne matematičke alate da bi precizno opisao prirodu te sile. On je samo mogao zaključiti da postoji neka vrsta privlačne sile koja djeluje između Sunca i planeta, ali nije uspio zakonima fizike objasniti tu privlačnu silu među tijelima.



Slika 4.1: Prvi Keplerov zakon.

4.3.2 Drugi Keplerov zakon

Drugi Keplerov zakon odnosi se na brzinu gibanja planeta oko Sunca. Prema ovom zakonu, radij-vektor koji spaja Sunce i planet opisuje jednake površine u jednakim vremenskim intervalima. Ovaj zakon također je poznat kao Zakon jednakih površina.



Slika 4.2: Drugi Keplerov zakon.

Prema drugom Keplerovom zakonu, planet se giba brže kada je bliže Suncu i sporije kada je dalje od Sunca. To znači da planet prijeđe veći put duž svoje putanje kada je bliže Suncu u istom vremenskom intervalu u usporedbi s putom kada je dalje od Sunca. Ovaj zakon je posljedica očuvanja kutnog momenta u gravitacijskom polju.

4.3.3 Treći Keplerov zakon

Prema trećem Keplerovom zakonu, kvadrati ophodnih vremena planeta odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti. Matematički, treći Keplerov zakon možemo zapisati u obliku:

$$\frac{T^2}{a^3} = konstanta, \tag{4.13}$$

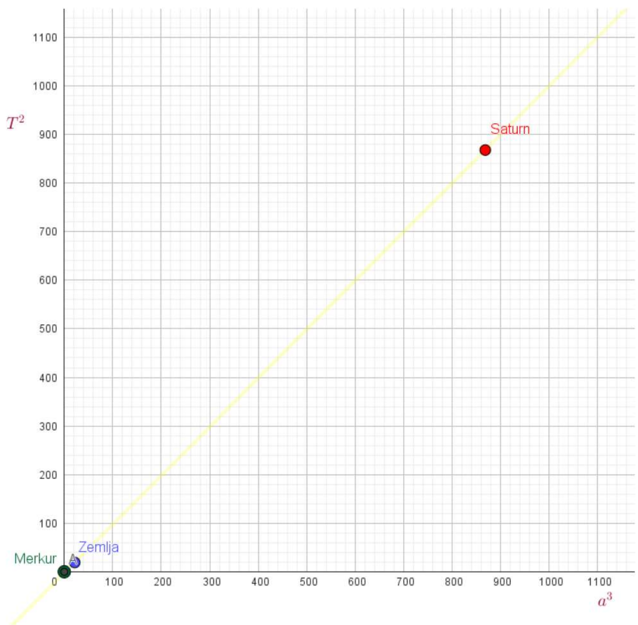
pri čemu T predstavlja vrijeme potrebno da planet jednom obiđe krug oko Sunca (ophodno vrijeme), dok je a srednja udaljenost planeta do Sunca koju mjerimo astronomskim jedinicama (AU). Astronomska jedinica je u povijesti bila definirana na temelju prosječne udaljenosti Zemlje od Sunca, a danas se koristi kao standardna jedinica mjere za izražavanje udaljenosti planeta, kometa i drugih objekata unutar Sunčavog sustava:

$$1AU = 149,597,870.7 \textit{ kilometara}.$$

Primjer 4.3.1. *Promotrimo tablicu koja sadrži podatke o ophodnom vremenu i udaljenosti do Sunca za planete Merkur, Zemlju i Saturn.*

	Merkur	*Zemlja*	*Saturn*
T (*godina*)	0,24	1	29,46
a (*AU*)	0,39	1	9,54

Prikažimo grafički zadane podatke. X-os označava kub prosječne udaljenosti planeta do Sunca (a^3), a y-os predstavlja kvadrat ophodnog vremena (T^2). Svaka točka na grafu odgovara jednom planetu.



Slika 4.3: Treći Keplerov zakon.

Iz Slike 4.3 naslućujemo linearnu vezu između kvadrata ophodnog vremena i kuba udaljenosti planeta do Sunca. Točke planeta gotovo savršeno leže na pravcu što pokazuje da bez obzira na udaljenost od Sunca, odnos između T^2 i a^3 ostaje konstantan.

Primjer 4.3.2. *Neka je zadano ophodno vrijeme Zemlje od dvije godine i neka srednja udaljenost od Sunca iznosi 1 AU. Pomoću trećeg Keplerovog zakona izračunajmo ophodno vrijeme za Mars koji ima srednju udaljenost od Sunca 1.524 AU.*

Uvrštavanjem pripadnih vrijednosti u izraz (4.13) dobivamo jednadžbu:

$$\frac{T_{mars}^2}{1.524^3} = 2,$$
$$T_{mars}^2 = 2 \cdot 1.524^3,$$

iz koje dobivamo približno ophodno vrijeme za Mars:

$$T_{mars} \approx \sqrt{2 \cdot 1.524^3} \approx 2.66 \; godina.$$

Literatura

[1] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[2] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I* (*Prepravljeno izdanje*), Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[3] S. Krešić-Jurić, *Diferencijalni i integralni račun I*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, 2017.

[4] S. Kurepa, *Matematička analiza 2* (*diferenciranje i integriranje*), Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[5] I. Matić, *Funkcije više varijabli*, online dostupna skripta s predavanja, Osijek, 2023. (javno dostupno na: https://oldwww.mathos.unios.hr/images/homepages/imatic/Matematika_II_predavanja.pdf)

[6] J. Sedlar, *Diferencijalna geometrija*, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, 2016.

[7] I. Slapničar, *Matematika 3*, online dostupna prezentacija, Split, 2019. (javno dostupno na: http://lavica.fesb.unist.hr/matematika3/PDF/predavanja.pdf)

[8] J. Stewart, *Calculus 7th Edition*, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.

[9] A. Žgaljić Keko, A. Aglić Alinović, L. Horvat Dmitrović, *Funkcije više varijabla*, online dostupna prezentacija, Zagreb, 2019. (javno dostupno na: https://element.hr/wp-content/uploads/2020/06/unutra-13544.pdf)

Sažetak

U ovom radu istražit ćemo osnovne pojmove vezane uz vektorske funkcije. Na početku ćemo definirati vektorsku funkciju, njezin limes, derivaciju i neprekidnost. Nadalje, prikazat ćemo i objasniti geometrijsku interpretaciju vektorskih funkcija. U drugom dijelu rada definirat ćemo ključne pojmove kao što su skalarno polje, vektorsko polje, gradijent, rotacija i divergencija te iskazati i pokazati neka njihova svojstva. Nakon toga, u trećem poglavlju bavit ćemo se primjenama vektorske funkcije u različitim područjima matematike i fizike. Analizirat ćemo zakrivljenost krivulje te uvesti pojam brzine i akceleracije kao derivacije vektorske funkcije položaja. Na kraju, proučit ćemo Keplerove zakone koji imaju iznimnu važnost u astronomiji.

Ključne riječi

derivacija, vektorska funkcija, vektorsko polje, skalarno polje, gradijent, rotacija, divergencija, vektor položaja

Derivatives of vector functions and applications

Summary

In this paper, we will explore basic concepts related to vector functions. At the beginning, we will define the vector function, its limes, derivative and continuity. Furthermore, we will show and explain the geometric interpretation of vector functions. In the second part of the paper, we will define key terms such as scalar field, vector field, gradient, rotation and divergence, and state and show some of their properties. After that, in the third chapter, we will deal with the applications of the vector function in different areas of mathematics and physics. We will analyze the curvature of the curve and introduce the concept of speed and acceleration as derivatives of the position vector function. Finally, we will study Kepler's laws, which are extremely important in astronomy.

Keywords

derivative, vector function, vector field, scalar field, gradient, rotation, divergence, position vector

Životopis

Rođena sam 10. listopada 2002. godine u Virovitici gdje sam pohađala Osnovnu školu Ivane Brlić-Mažuranić. Nakon osnovnoškolskog obrazovanja upisujem prirodoslovno-matematički smjer u Gimnaziji Petra Preradovića Virovitica koju završavam 2021. godine. Odmah po završetku srednje škole upisujem prijediplomski studij Matematika na Fakultetu primijenjene matematike i informatike u Osijeku.