Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe

Kovač, Silvija

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe

Diplomski rad

Mentor:
doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Student:
Silvija Kovač

Osijek, 2024.

Sadržaj

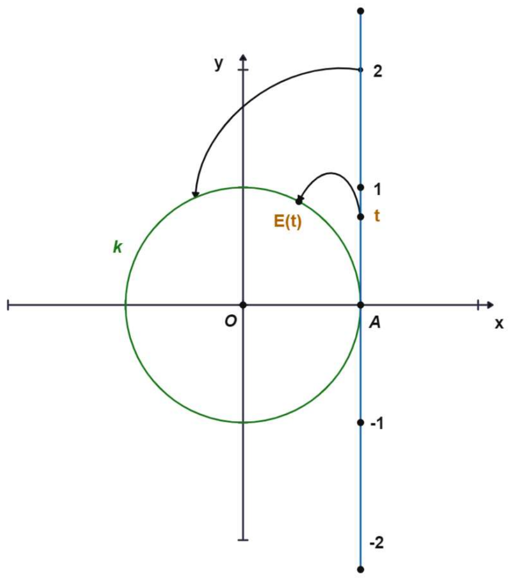
1 | Uvod

Riječ trigonometrija nastaje spajanjem grčkih riječi *trigonom* što znači trokut i *metron* što znači mjera. Počeci trigonometrije sežu još u doba Egipćana i Babilonaca koji su naišli na probleme prilikom rješavanja zadataka iz onoga što danas smatramo geometrijom. Mogli bismo reći kako je trigonometrija nastala kako bismo mogli izračunati nepoznate elemente raznih geometrijskih figura iz danih informacija o toj istoj figuri. Trigonometriju su nadograđivali Grci, a najistaknutiji učenjaci tog doba su Ptolomej (367. - 283. pr. Kr.), Aristarh (310. - 250. pr. Kr.), Iliparh (190. - 125. pr. Kr.) i Menelaj (70. - 140. n. e.). Ptolomej je proučavao pravokutni sferni trokut, Aristarh je nazvan "ocem astronomije", Iliparh je zapisao prve tablice duljina tetiva za neke središnje kutove a Menelaj je poznat po djelu *"Sferika"*. Veliki skok u razvoju trigonometrije događa se u srednjem vijeku kada Indijci definiraju sinus, izrađuju tablice vrijednosti za trigonometrijske omjere, poznaju trigonometrijski identitet $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, poznaju sinus i kosinus tupog kuta te je u 7. stoljeću poznat i sinusov poučak $a = 2R\sin\alpha$. Nadalje, Arapi nasljeđuju sve što su otkrili Grci i Indijci, ali uvode i ostale trigonometrijske funkcije. Arapi donose trigonometriju u Europu. U Europi trigonometriji najviše doprinose J. Müller sa svojim djelom *De triangulis omnimodis* i F. Viète koji povezuje algebru i trigonometriju. Važnu ulogu imao je hrvatski matematičar Ruđer Bošković koji je živio u 18. stoljeću, [2]. Važno je napomenuti kako trigonometrija osim u matematici ima važnu funkciju i u fizici. Trigonometrija se u fizici koristi u područjima optike i statike. Pomoću trigonometrije u području optike možemo izračunati potrebnu nepoznanicu koristeći zakon loma koji glasi $n_1\sin\alpha = n_2\sin\beta$, pri čemu su n_1, n_2 indeksi loma optičkog sredstva upadne, odnosno lomljene zrake te α, β kut upadne, odnosno lomljene zrake u optičko sredstvo. U području statike možemo računati moment sile M prema formuli $M = Fr\sin\phi$, pri čemu je F sila, r radij-vektor te ϕ kut između radij-vektora i sile.
U ovom radu proučavamo trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe kao nastavne cjeline s kojima se učenici susreću u srednjoškolskom obrazovanju. Preciznije, rad se sastoji od tri poglavlja kroz koja će se, uz matematičku teoriju trigonometrijskih funkcija, posebno analizirati na koje poteškoće učenici nailaze prilikom obrade navedenoga gradiva, te primjenom naučenoga gradiva pri rješavanju zadataka. U prvom poglavlju navedene su definicije i svojstva trigonometrijskih funkcija. U drugom poglavlju dana je definicija i pregled trigonometrijskih jednadžbi, te su opisane poteškoće s kojima se učenici susreću prilikom njihovog rješavanja. Posljednje, treće poglavlje posvećeno je trigonometrijskim nejednadžbama, gdje se one definiraju, navode načini njihovog rješavanja te se opisuju greške koje učenici najčešće čine pri rješavanju takvih zadataka.

2 | Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije su osnovni dio matematike. U ovom poglavlju uvodi se pojam brojevne kružnice koja je osnovni alat za razumijevanje odnosa između kutova i trigonometrijskih funkcija. Brojevna kružnica omogućava jednostavno izračunavanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija za različite kutove kao i njihovu vizualizaciju. Također, brojevna kružnica olakšava razumijevanje periodičnosti trigonometrijskih funkcija, ali i drugih osnovnih svojstava koja su navedena u nastavku. Osim toga, u ovom poglavlju navedeni su odgojno-obrazovni ishodi za učenje trigonometrijskih funkcija kroz četverogodišnji gimnazijski program.

Promotrimo u Kartezijevom sustavu $(O; x, y)$ kružnicu k radijusa 1 čije se središte nalazi u ishodištu sustava. Označimo točku presjeka kružnice i osi apscisa s $A = (1, 0)$. Prislonimo brojevni pravac uz kružnicu k na način da dira kružnicu u točki A svojim ishodištem i zamislimo kako se taj pravac, bez njegovog rastezanja i klizanja, namata oko kružnice k, što nam prikazuje Slika 2.1. Kako je opseg kružnice jednak 2π, interval pravca $[0, 2\pi\rangle$ se preslika na čitavu kružnicu k, isto kao i svaki drugi interval koji je duljine 2π. Na ovaj način učenicima uvodimo *brojevnu kružnicu*, te je važno naglasiti kako je duljina kružnog luka AE jednaka upravo t.

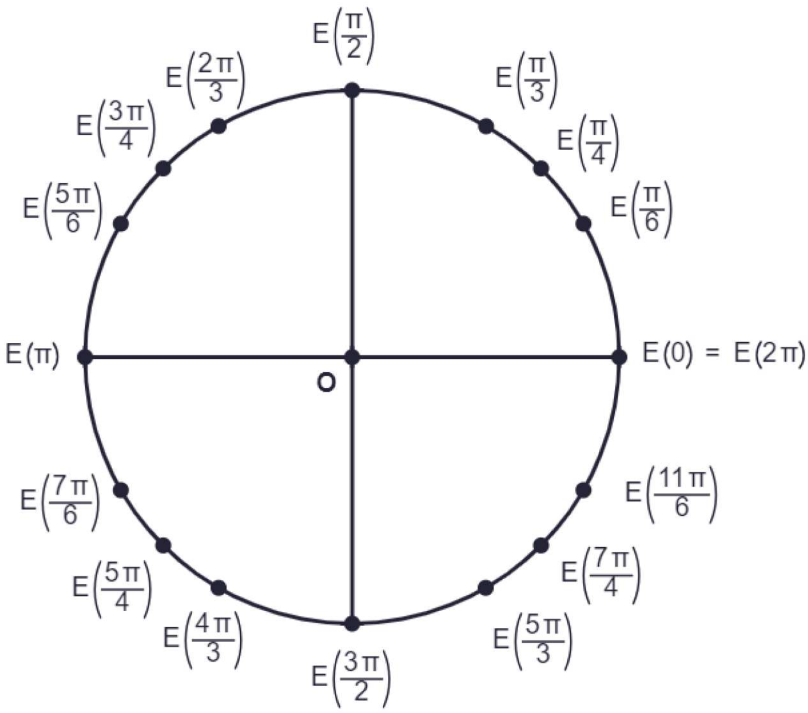


Slika 2.1: Namatanje pravca oko kružnice.

Definicija 1. *Svaki realni broj t s brojevnog pravca se preslikava u jednu točku $E(t)$ na kružnici k i tu kružnicu zovemo **brojevnom kružnicom**.*

Namatanjem pravca na kružnicu uočavamo da broju 0 odgovara točka A, dok ostale točke brojevne kružnice pridružene bitnim kutovima promatramo na Slici 2.2. Također ovdje možemo jednostavno uočiti kako općenito vrijedi

$$E(t) = E(t + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}.$$



Slika 2.2: Točke pridružene određenim kutovima.

Pomoću prethodne slike lako se mogu određivati traženi kutovi a skiciranje traje nekoliko sekundi, no učenici često razmišljaju i po nekoliko minuta ili se trude naučiti napamet vrijednosti osnovnih kutova te pri tome često pogriješe i daju pogrešni konačni odgovor.

Matematika je svuda oko nas te pomoću nje i njenih alata koje naučimo tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja razvijamo logičko razmišljanje, razne vještine rješavanja problema kao i snalaženje u životu. Prilikom promatranja kurikuluma nastavnog predmeta matematika može se uočiti kako se od prvog razreda srednje škole grade temelji trigonometrije. Svaku iduću godinu znanje učenika se nadopunjuje. Domene predmeta Matematika podijeljene su u pet skupina: Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje te Podatci, statistika i vjerojatnost.

Prema [4] navodimo odgojno-obrazovne ishode koji se odnose na učenje trigonometrijskih funkcija kroz četiri razreda srednje škole gimnazijskog programa.

1. razred:

- **Primjenjuje trigonometrijske omjere**.
  Učenik primjenjuje trigonometrijske omjere pri modeliranju problemskih situacija i rješavanju problema u planimetriji (trokut, kvadrat, pravokutnik, paralelogram, romb, trapez, mnogokut, deltoid).
  Navedeni ishod odnosi se na domenu Mjerenje.

2. razred:

- **Primjenjuje poučak o sinusima i poučak o kosinusu**.
  Učenik povezuje trigonometrijske omjere u pravokutnome trokutu s koordinatama točke na kružnici. Učenik primjenjuje poučak o sinusima, uočava mogućnost i nalazi dva rješenja. Učenik primjenjuje poučak o kosinusu te računa površinu proizvoljnog trokuta. Učenik primjenjuje poučke u planimetriji, stereometriji i problemskim zadatcima.
  Navedeni ishodi se odnose na domenu Oblik i prostor te Mjerenje.

3. razred:

- **Primjenjuje svojstva trigonometrijskih funkcija**.
  Učenik definira trigonometrijske funkcije broja na brojevnoj kružnici, otkriva svojstva i rabi ih za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Učenik se koristi džepnim računalom.
  Prošireni sadržaj: Učenik otkriva crtice iz povijesti - podrijetlo imena trigonometrijskih funkcija.
  Navedeni ishodi odnose se na domenu Algebra i funkcije te Oblik i prostor.

- **Primjenjuje trigonometrijske identitete**.
  Učenik računa, koristeći osnovni trigonometrijski identitet, vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija. Učenik primjenjuje i povezuje osnovne trigonometrijske identitete, adicijske poučke, trigonometrijske funkcije dvostrukog broja. Učenik dokazuje trigonometrijske tvrdnje primjenom trigonometrijskih identiteta.
  Prošireni sadržaj: Učenik primjenjuje formule za trigonometrijske funkcije polovičnog broja.
  Navedeni ishodi odnose se na domenu Algebra i funkcije.

- **Analizira graf trigonometrijske funkcije**.
  Učenik prepoznaje i opisuje grafove osnovnih trigonometrijskih funkcija. Učenik grafički prikazuje trigonometrijske funkcije: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $f(x) = A\sin(bx+c)+d$, $f(x) = A\cos(bx+c)+d$, $f(x) = A\operatorname{tg}(bx+c)+d$, $f(x) = A\operatorname{ctg}(bx+c)+d$.
  Navedeni ishodi odnose se na domenu Algebra i funkcije te Oblik i prostor.

- **Primjenjuje trigonometrijske funkcije**.
  Učenik analizira probleme opisane trigonometrijskom funkcijom i primjenjuje trigonometrijske funkcije za modeliranje.
  Navedeni ishod odnosi se na domenu Algebra i funkcije te Oblik i prostor.

- **Primjenjuje trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe**.
  Učenik trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe rješava grafički ili na brojevnoj kružnici.
  Navedeni ishod odnosi se na domenu Algebra i funkcije.

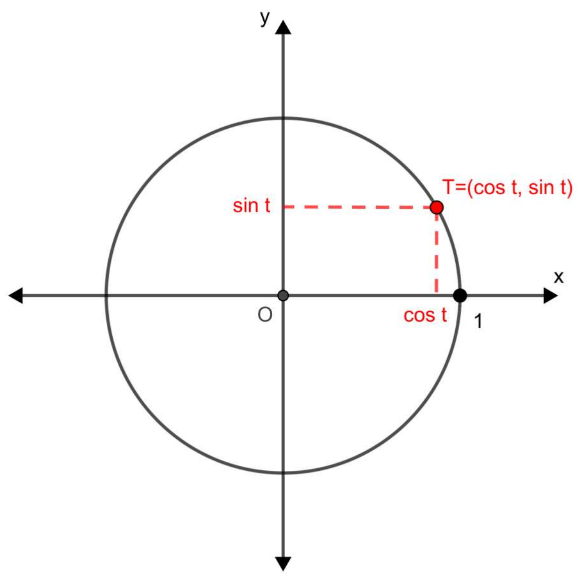
4. razred:

- **Računa s kompleksnim brojevima**.
  Učenik uočava potrebu proširenja skupova brojeva ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) skupom kompleksnih brojeva. Učenik zapisuje kompleksni broj u algebarskome i trigonometrijskome obliku. Učenik zbraja, oduzima, množi, potencira i korjenuje kompleksne brojeve u odgovarajućem obliku, primjenjujući De Moivreovu formulu.
  Navedeni ishodi odnose se na domenu Brojevi.

Prema [1], funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens nazivamo **trigonometrijske funkcije**. U nastavku su navedene njihove najosnovnije karakteristike i prikazani grafovi tih funkcija.

2.1 Sinus i kosinus

Neka je t realni broj odabran po volji i $T = E(t)$ njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici. Apscisa točke T zove se **kosinus broja t** i označava se s $\cos t$. Ordinata točke T zove se **sinus broja t** i označava se sa $\sin t$. Dakle, $T = (\cos t, \sin t)$. Najčešće prilikom rješavanja zadataka ili određivanja vrijednosti kuta dolazi do nesigurnosti koja funkcija pripada kojoj osi, zbog čega se često kosinus nađe na y-osi, a sinus na x-osi.



Slika 2.3: Vrijednosti sinusa i kosinusa kao koordinate točke T

Napomena 1. *Za svaki realni broj t vrijedi* $|\sin t| \leq 1, |\cos t| \leq 1$, *što je lako za uočiti budući da je brojevna kružnica jedinična.*

Funkcije *sinus* i *kosinus* su **omeđene**. Učenici prilikom rješavanja zadataka često zaborave uzeti u obzir to svojstvo. Navedimo i ostala osnovna svojstva funkcija sinus i kosinus kojima bi se učenici trebali vješto koristiti u zadacima koji se nađu pred njima.

Svojstva funkcije *sin* su:

- nultočke funkcije su brojevi $k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
- maksimum funkcije se poprima za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
- minimum funkcije se poprima za $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
- funkcija je periodična s periodom 2π,
- ako promatramo interval $[0, 2\pi]$, funkcija je rastuća na intervalima $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rangle$ dok je na intervalima $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ i $\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \rangle$ funkcija padajuća.

Svojstva funkcije *cos* su:

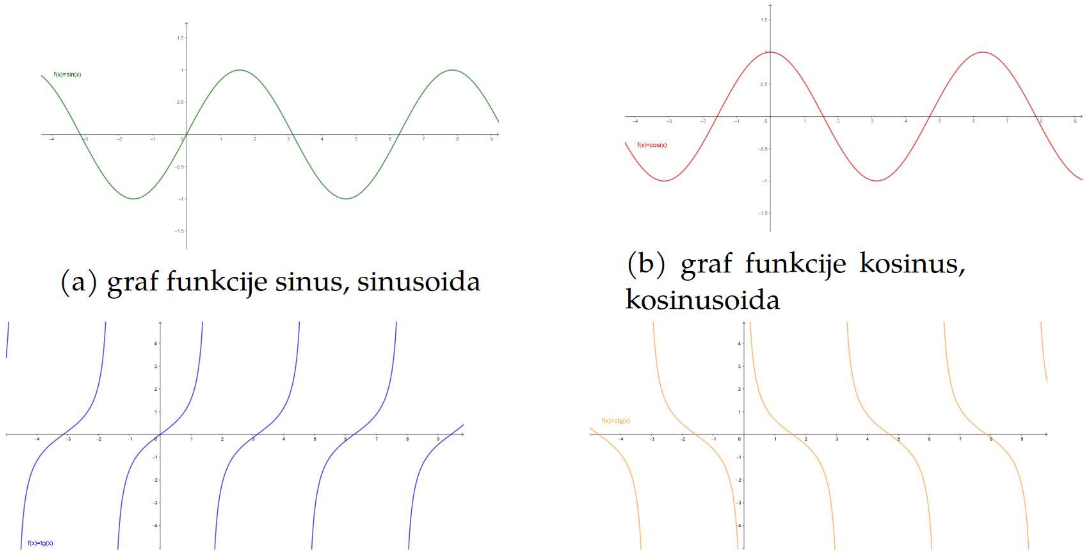
- nultočke funkcije su brojevi $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
- maksimum funkcije se poprima za $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
- minimum funkcije se poprima za $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$,
- funkcija je periodična s periodom 2π,
- ako promatramo interval $[0, 2\pi]$, funkcija je padajuća na intervalima $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ dok je na intervalima $\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \rangle$ i $\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rangle$ funkcija rastuća.

2.2 Tangens i kotangens

Funkcije tangens i kotangens definiraju se pomoću funkcija sinusa i kosinusa na sljedeći način: **tangens** $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, **kotangens** $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$.

Podrazumijeva se kako je tangens definiran za $t \in \mathbb{R}$ za koje je $\cos t \neq 0$, a kotangens za realne brojeve za koje je $\sin t \neq 0$.

Učenici prilikom pojavljivanja funkcija tangens i kotangens vrlo često zamijene njihovo pravilo pridruživanja te također zanemare provjeru područja definiranja. Spomenimo i kako su funkcije tangens i kotangens periodične s temeljnim periodom π, dok im učenici često pridruže temeljni period jednak kao i funkcijama sinus i kosinus, odnosno 2π.



(a) graf funkcije sinus, sinusoida

(b) graf funkcije kosinus, kosinusoida

(c) graf funkcije tangens

(d) graf funkcije kotangens

Slika 2.4: Grafovi osnovnih trigonometrijskih funkcija

Kod trigonometrijskih funkcija korisno je poznavati svojstvo parnosti, odnosno neparnosti koje se može uočiti sa Slike 2.4. Graf parne funkcije simetričan je s obzirom na os ordinata, dok je graf neparne funkcije centralno simetričan s obzirom na ishodište i prolazi njime. Prethodno navedene karakteristike učenici znaju iskoristiti ukoliko se u sklopu zadatka pojavljuje graf funkcije te je potrebno odrediti parnost, odnosno neparnost funkcija. Dakle, funkcija cos je parna, dok su sin, tg i ctg su neparne funkcije.

2.3 Arkus funkcije

Pored osnovnih trigonometrijskih funkcija potrebno je poznavati i njihove inverzne funkcije koje omogućavaju izračunavanje kuta kada su poznate vrijednosti trigonometrijskih funkcija. U nastavku su definicije arkus funkcija.

Definicija 2. *Arkus funkcijama* ili ***ciklometrijskim funkcijama*** *zovemo inverzne funkcije odgovarajućih restrikcija trigonometrijskih funkcija.*

Istaknimo da periodična funkcija ne može biti bijekcija. Podsjetimo se da je funkcija *bijekcija* ako svakom elementu iz kodomene odgovara točno jedan element iz domene. Stoga, niti jedna od trigonometrijskih funkcija nije bijekcija. Kako je navedeno u [2] i [3], prilikom primjene trigonometrijskih funkcija imamo potrebu za inverzom trigonometrijskih funkcija, pa shodno tome definiramo inverze za povoljno odabrane restrikcije koje su bijekcije. Kada kažemo povoljno odabrane mislimo pri tome na restrikcije na odgovarajući interval koji je najbliže ishodištu.

Imamo redom:

- funkcija **arkus sinus** definirana je s $\arcsin := \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$
- funkcija **arkus kosinus** definirana je s $\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$
- funkcija **arkus tangens** definirana je s $\mathrm{arctg} := \left(\mathrm{tg}|_{\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1}$
- funkcija **arkus kotangens** definirana je s $\mathrm{arcctg} := \left(\mathrm{ctg}|_{\langle 0,\pi\rangle}\right)^{-1}$

Arkus funkcije bitno je poznavati kako bi mogli doći do konačnih rješenja trigonometrijskih jednadžbi, odnosno nejednadžbi. Učenici tim funkcijama ne pridaju previše pažnje, njima je dovoljno znati da se nakon djelovanja arkus funkcije u jednadžbi, trigonometrijska funkcija "gubi".

3 | Trigonometrijske jednadžbe

Trigonometrijske jednadžbe su jednadžbe koje uključuju trigonometrijske funkcije o kojima se govorilo u prethodnom poglavlju. Na početku ovog poglavlja dana je definicija trigonometrijske jednadžbe te primjer jednadžbe takvog oblika.

Definicija 3. ***Trigonometrijske jednadžbe*** *su jednadžbe oblika* $f(\sin x, \cos x) = 0$, *gdje je* f *bilo koja realna funkcija dviju varijabli.*

Primjer trigonometrijske jednadžbe je jednadžba $\sin x + 2\cos x = 1$ što možemo zapisati u obliku $\sin x + 2\cos x - 1 = 0$.

U nastavku poglavlja navodimo s kojim se vrstama trigonometrijskih jednadžbi učenici susreću tijekom obrazovanja te navodimo metode njihovog rješavanja. Nadalje, promotramo primjere u kojima se navode problemi i poteškoće s kojima se učenici susreću prilikom njihovog rješavanja kroz sami postupak rješenja.

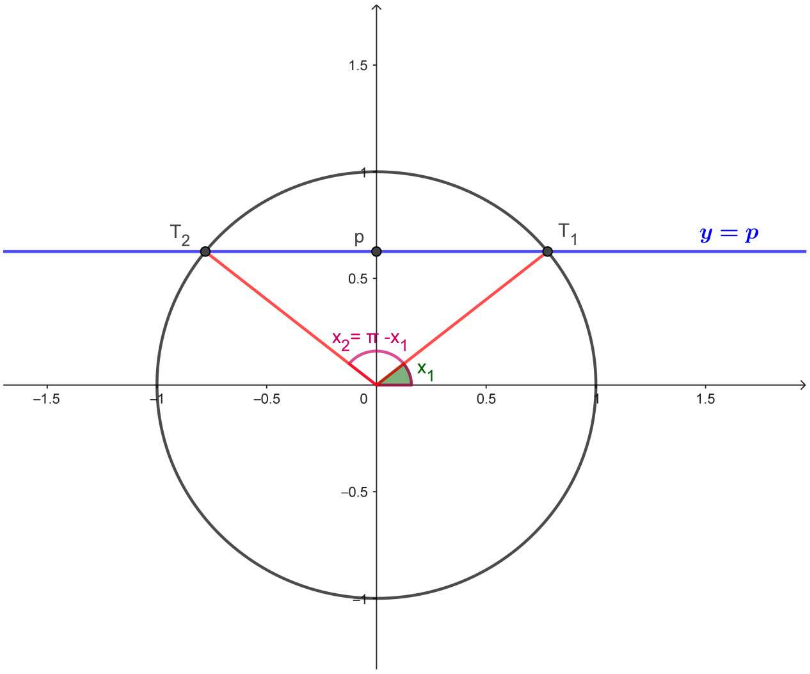
3.1 Osnovne trigonometrijske jednadžbe

Prema [2] rješavanje trigonometrijskih jednadžbi svodi se na osnovne trigonometrijske jednadžbe čije su jednadžbe i pripadajuća rješenja dana u Tablici 3.1.

Jednadžba	**Pripadajuća rješenja**
$\sin x = p, \lvert p\rvert \leq 1$	$x_k = (-1)^k \arcsin p + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = p, \lvert p\rvert \leq 1$	$x_k = \pm \arccos p + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = r, r \in \mathbb{R}$	$x_k = \operatorname{arctg} r + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = r, r \in \mathbb{R}$	$x_k = \operatorname{arcctg} r + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

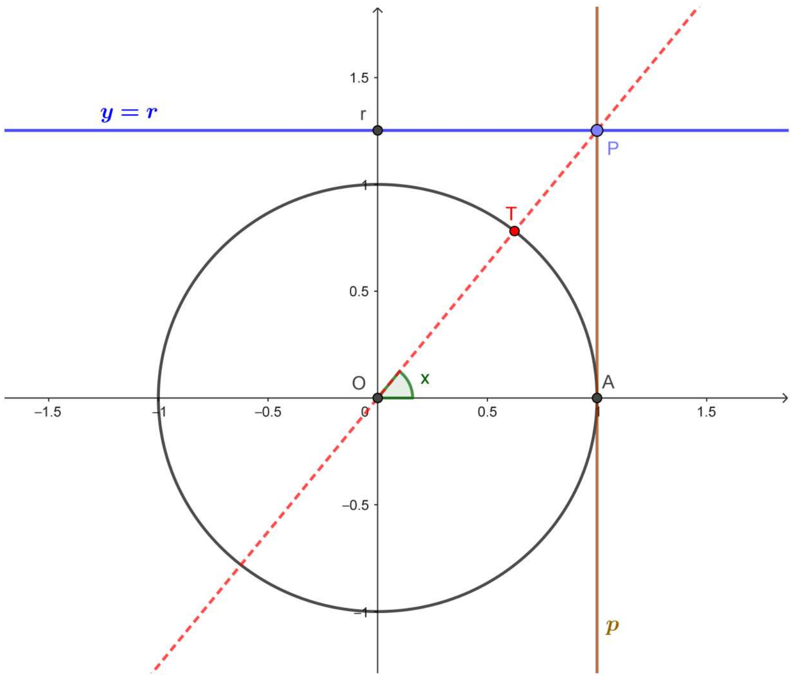
Tablica 3.1: Osnovne trigonometrijske jednadžbe

Ukoliko brojevnu kružnicu presiječemo pravcem $y = p$, pri čemu je $|p| < 1$, pravac kružnicu siječe u dvije točke (vidjeti Sliku 3.1.) kojima su pridruženi realni brojevi x_1 i $x_2 = \pi - x_1$ za koje vrijedi $\sin x_1 = \sin x_2 = p$. Znamo da je sinus periodična funkcija, njena rješenja možemo zapisati u obliku $x_1 = \arcsin p + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ te $x_2 = \pi - \arcsin p + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. U slučaju $p = \pm 1$ slijedi $x_1 = x_2$.
Prethodno navedene dvije formule mogu se zapisati jedinstvenom formulom
$x_k = (-1)^k \arcsin p + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Na analogni način se mogu uočiti rješenja jednadžbe $\cos x = p$, pri čemu također postoje dva rješenja.



Slika 3.1: Rješenja jednadžbe $\sin x = p$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

Na brojevnu kružnicu povucimo tangentu u točki $A = (1, 0)$ i potom označimo sjecište tangente p i pravca $y = r$, pri čemu je $r \in \mathbb{R}$, točkom P (vidjeti Sliku 3.2). Ukoliko povučemo pravac OP, pravac siječe kružnicu u točki T što je jedno rješenje jednadžbe $\operatorname{tg} x = r$ na intervalu $[0, \pi]$.
Na analogni način se može uočiti rješenje jednadžbe $\operatorname{ctg} x = r$.



Slika 3.2: Rješenje jednadžbe $\operatorname{tg} x = r$ na intervalu $[0, \pi]$.

Jednadžbe sljedećih navedenih oblika se mogu svesti na osnovne jednadžbe:

- $\sin(ax+b) = p$,
- $\cos(ax+b) = p$,
- $\operatorname{tg}(ax+b) = r$,
- $\operatorname{ctg}(ax+b) = r$.

Učenici su često uvjerenja da će se u zadacima jednadžba uvijek pojaviti u točno onakvom obliku kao što je u primjeru gdje se objašnjava postupak rješavanja. Tek tijekom rješavanja većeg broja zadataka, pogotovo kada se nađu na koraku rješenja kada više ne znaju što iskoristiti od naučenih svojstava, pokušaju ispočetka riješiti drugom metodom i tada uoče da se i drugi oblici jednadžbe svode na osnovne trigonometrijske jednadžbe čija rješenja znaju.

Promotrimo sada primjer rješavanja osnovne trigonometrijske jednadžbe s detaljnim objašnjenjem te navedenim greškama koje se mogu pojaviti kod učenika u ovakvom zadatku.

Primjer 1. *Riješimo trigonometrijsku jednadžbu* $2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=0$.

Na početku se jednakosti dodaje -1, odnosno jednostavnije rečeno: slobodan član prebacuje se s lijeve na desnu stranu. Prilikom prebacivanja učenici često zaborave promijeniti predznak "prelaskom preko jednakosti".
U tom koraku dobivamo $2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$.

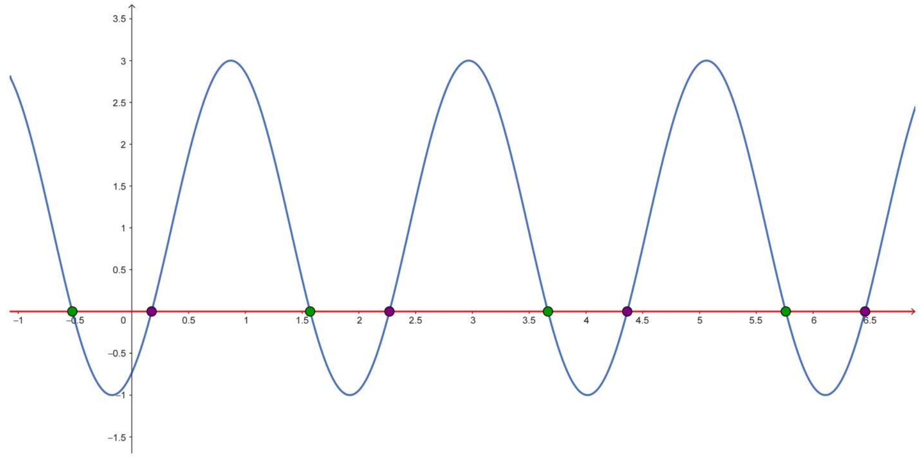
U idućem koraku jednadžba se podijeli s brojem 2 koji se nalazi ispred funkcije sinus, time je $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Može se uočiti da smo dobili oblik koji se nalazi u Tablici 3.1, te znamo da su prema tablici rješenja dana kao $3x_1-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ i $3x_2-\dfrac{\pi}{3}=\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+2k\pi$.
Nadalje je najvažnije točno ispisati pripadna rješenja i pri tome ne izostaviti neki od članova u jednadžbi. Moguća pogreška je izostavljanje jednog rješenja, odnosno navođenje samo jednog umjesto oba pripadajuća rješenja.

Zatim je potrebno prebaciti slobodan član s lijeve na desnu stranu pa je $3x_1=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ i $3x_2=\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi$.

Potrebno je još podijeliti dobivene jednadžbe brojem 3 kako bi dobili konačna rješenja početne trigonometrijske jednadžbe. U konačnici ona glase:
$x_1=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2}{3}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ i $x_2=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{3}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Na Slici 3.3 nalazi se grafički prikaz Primjera 1. pri čemu je plavom bojom prikazan graf funkcije $f(x)=2\sin(3x-\frac{\pi}{3})+1$, crvenom bojom je istaknut pravac $y=0$, odnosno x-os. Na slici se uočavaju dvije vrste točaka koje su sjecišta grafa funkcije s x-osi, pri čemu se ljubičastom bojom prikazuju točke oblika x_1, dok točke zelene boje prikazuju točke oblika x_2.



Slika 3.3: Grafički prikaz Primjera 1.

Nastavnici i učenici koji se znaju služiti interaktivnim alatom kao što je na primjer GeoGebra ili njemu slični, mogu jednostavno izraditi prikaz pojedinog zadatka čime se olakšava provjera točnosti dobivenih rješenja, te često pomaže pri pojašnjavanju zašto rješenje trigonometrijske jednadžbe nije jedinstveno. Također se lakše uočava zašto je dovoljno odrediti dva rješenja koja se nalaze u jednom intervalu duljine 2π da bismo odredili sva preostala rješenja jednadžbe.

3.2 Homogene trigonometrijske jednadžbe

Definicija 4. *Jednadžbe oblika*

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + ... + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0, \tag{3.1}$$

u kojoj su a_0, a_1, ..., a_n realni brojevi i $a_n \neq 0$ nazivamo ***homogene trigonometrijske jednadžbe****.*

Jednadžbe oblika (3.1) rješavamo tako da ih podijelimo s $\cos^n x$ te dobijemo

$$a_n \operatorname{tg}^n x + a_{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x + ... + a_1 \operatorname{tg} x + a_0 = 0.$$

Ako je $\cos^n x = 0$, onda je i $\cos x = 0$, pa nultočka glasi $x_l = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbb{Z}$.
Iz jednadžbe (3.1) slijedi $a_n \sin^n x = 0$ i $a_n \neq 0$ iz čega je $\sin^n x = 0$, pa je i $\sin x = 0$, a kako je $\sin x_l \neq 0$, x_l nije rješenje polazne jednadžbe (3.1) i vidimo da je dijeljenje jednadžbe s $\cos^n x$ dozvoljeno.

U nastavku navodimo primjer homogene trigonometrijske jednadžbe s detaljnim rješenjem pri čemu su navedeni koraci u kojima bi se mogla dogoditi pogreška u rješavanju.

Primjer 2. *Riješimo trigonometrijsku jednadžbu* $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

Prepoznavanje oblika trigonometrijske jednadžbe, iako jednostavan, jedan je od najvažnijih koraka pri rješavanju zadataka jer za različite oblike koristimo različite metode rješavanja. Nakon prepoznavanja homogene trigonometrijske jednadžbe, podijelimo ju s $\cos^2 x$ te dobivamo

$$2\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - 5\frac{\sin x}{\cos x} + 3 = 0,$$

nakon čega se uvodi supstitucija $t = \operatorname{tg} x$ te dobiva $2t^2 - 5t + 3 = 0$, što je kvadratna jednadžba po t čija su rješenja $t_1 = 1$ i $t_2 = \frac{3}{2}$.
Dobivena su dva rješenja, $\operatorname{tg} x_1 = 1$ i $\operatorname{tg} x_2 = \frac{3}{2}$.
Konačna rješenja polazne trigonometrijske jednadžbe su $x_{1k} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_{2k} = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3.3 Linearne trigonometrijske jednadžbe

Definicija 5. ***Linearne trigonometrijske jednadžbe*** *su jednadžbe oblika*

$$a\sin x + b\cos x = c, \tag{3.2}$$

u kojoj su a, b, i c realni brojevi i a, b $\neq 0$.

Linearne trigonometrijske jednadžbe možemo riješiti pomoću neke od sljedećih metoda:

1. METODA POMOĆNOG KUTA

   Podijelimo li polaznu jednadžbu s $\sqrt{a^2+b^2}$ dobivamo:

   $$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

   Kako je apsolutna vrijednost izraza $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ manja ili jednaka od 1, pri čemu je zbroj njihovih kvadrata jednak 1, postoji kut ϕ takav da vrijedi $\cos\phi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\phi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

   Dokaz navedenoga moguće je naći u [2].

   Iskoristimo li izraz za sinus zbroja kutova, početnu jednadžbu (3.2) sada možemo zapisati u obliku $\sin(x+\phi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2. METODA SUPSTITUCIJE

Jednadžbu oblika (3.2) možemo riješiti i uvođenjem univerzalne supstitucije $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Pri tome moramo provjeriti je li $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ rješenje jednadžbe jer je $\cos \frac{x}{2} = 0$ za $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tada je $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ te se jednadžba svodi na kvadratnu jednadžbu koju rješavamo po nepoznanici t.

U nastavku navodimo primjer rješavanja linearne trigonometrijske jednadžbe i probleme koji se pritom mogu pojaviti.

Primjer 3. *Riješimo trigonometrijsku jednadžbu* $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$.

Polaznu jednadžbu moguće je riješiti jednom od ranije navedenih metoda. U sljedećem primjeru prikazat ćemo primjenu metode pomoćnog kuta. Učenici se često muče prilikom odabira metode rješavanja zadataka. Pri odabiru im može pomoći kratka provjera koliko iznosi $\sqrt{a^2+b^2}$, te ukoliko je cijeli broj, lako je s njime računati. U slučaju da nije cijeli broj, moguće je da je lakše koristiti metodu supstitucije, ali odluka u potpunosti pripada osobi koja rješava dani zadatak.

Dakle, polaznu jednadžbu podijelimo s $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$, odnosno brojem 2.

Nakon dijeljenja imamo $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$. Umjesto trigonometrijskih vrijednosti $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $-\frac{1}{2}$ zapisujemo trigonometrijsku funkciju pripadnih kutova. Za prvu vrijednost zapisujemo sinus funkciju, odnosno $\sin \frac{2\pi}{3}$, dok za drugu vrijednost zapisujemo kosinus funkciju, odnosno $\cos \frac{2\pi}{3}$.
U ovom koraku može se pojaviti nesigurnost kod učenika pri odabiru što koristiti u daljnjem rješavanju, no ukoliko uoče pojavljivanje jednakog kuta kod obje funkcije i uvježbavanjem uvide da im to koristi, vrlo lako će u novim zadacima tražiti upravo kutove čije funkcijske vrijednosti su povoljan izbor. Korištenjem džepnih računala, koja su im dozvoljena, učenici mogu potražiti vrijednost koja im koristi ili uz pomoć brojevne kružnice lako mogu odrediti da ta vrijednost u ovom slučaju iznosi $\frac{2\pi}{3}$.

Nakon ovog koraka je $\sin \frac{2\pi}{3}\cos x + \cos \frac{2\pi}{3}\sin x = 0$. Na lijevoj strani pojavljuje se izraz koji se pomoću adicijskog teorema može zapisati kao $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.
Na ovom mjestu iskoristili smo formulu za sinus zbroja koja glasi $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Nadalje je $x + \frac{2\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, odnosno $x_k = -\frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, što je jednako $x_k = \frac{\pi}{3} + (k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Konačno rješenje zadane jednadžbe glasi $x_k = \frac{\pi}{3} + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$.

3.4 Simetrične trigonometrijske jednadžbe

Definicija 6. *Jednadžbu oblika*

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0, \tag{3.3}$$

u kojoj su a, b, i c realni brojevi nazivamo ***simetrična trigonometrijska jednadžba****.*

Jednadžbe oblika (3.3) rješavamo uvođenjem supstitucije $t = \sin x + \cos x$. Kvadriranjem gornje jednakosti dobivamo $t^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2 \sin x \cos x$ iz čega vrijedi jednakost $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.
Nakon toga, polazna jednadžba je oblika $at + b\frac{t^2-1}{2} + c = 0$, gdje je $t \in \langle -2, 2\rangle$ zbog $t = \sin x + \cos x$, pri čemu je $-1 < \sin x, \cos x < 1$.

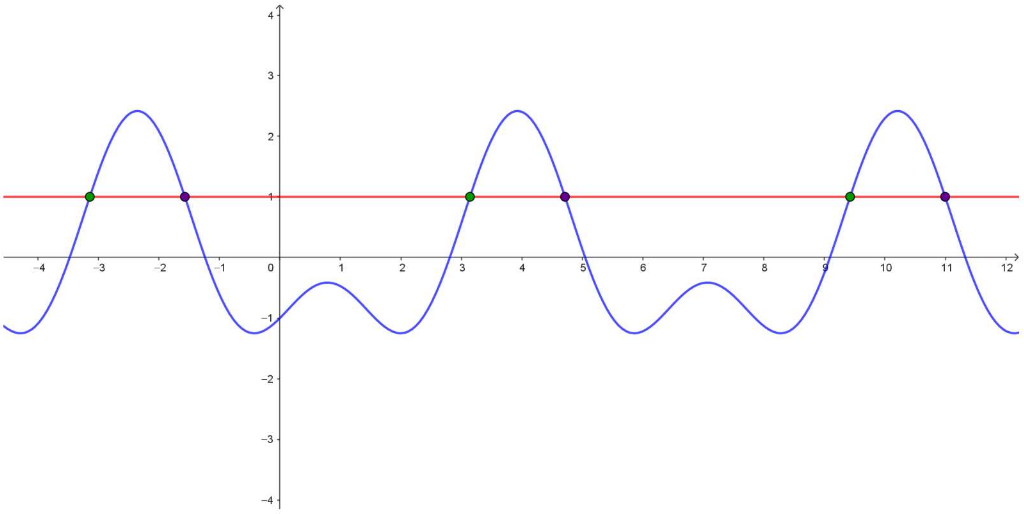
U nastavku navodimo primjer rješavanja simetrične trigonometrijske jednadžbe uz navođenje grešaka koje učenici mogu napraviti u računu.

Primjer 4. *Riješimo trigonometrijsku jednadžbu* $2 \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 1$.

Uvodimo supstitucije $t = \sin x + \cos x$ i $\frac{t^2-1}{2} = \sin x \cos x$ jer smo prepoznali kako se radi o primjeru simetrične trigonometrijske jednadžbe pri čemu je $a = -1$, $b = 2$ i $c = -1$. Zadana jednadžba prelazi u jednadžbu $t^2 - 1 - t = 1$ što je ekvivalentno $t^2 - t - 2 = 0$. Dobije se kvadratna jednadžba koja se može zapisati u obliku $(t+1)(t-2) = 0$ iz kojeg je vidljivo da su rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = 2$.
Učenik vrlo često nakon pronalaska rješenja kvadratne jednadžbe zaboravi dalje izračunati početno rješenje, odnosno vratiti se u supstituciju s početka rješenja.

Promotrimo najprije drugi slučaj. Na početku imamo $\sin x + \cos x = 2$ iz čega nakon dijeljenja s $\sqrt{2}$ dobivamo $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \sqrt{2}$. Prvotna jednadžba je linearna trigonometrijska jednadžba zbog čega se koristila metoda pomoćnog kuta prilikom rješavanja. Koristeći formulu za sinus zbroja kao i u prethodnom primjeru, tražimo vrijednost kuta za koji funkcije sinus i kosinus daju $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a tražena vrijednost je $\frac{\pi}{4}$. Zbog toga imamo: $\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \sqrt{2}$. Konačno dobivamo $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, što je veće od 1 i dobivamo kontradikciju.

Učenici prilikom rješavanja drugog slučaja mogu naići na sljedeće prepreke: nemogućnost prepoznavanja vrste dobivene trigonometrijske jednadžbe, krivo korištenje metode za njeno rješavanje, pogrešno racionaliziranje racionalnoga broja, određivanje krive vrijednosti traženog kuta, korištenje krive formule za sinus zbroja, zanemarivanje svojstva omeđenosti sinus funkcije koja je navedena u Napomeni 1.
U prvom slučaju imamo također linearnu trigonometrijsku jednadžbu $\sin x + \cos x = -1$ pa ćemo koristiti metodu pomoćnog kuta i polaznu jednadžbu podijeliti brojem $\sqrt{2}$ nakon čega dobivamo $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Analogno drugom slučaju nastavljamo postupak rješavanja jednadžbe iz čega proizlazi $\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nadalje, korištenjem formule za sinus zbroja vrijedi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Slijedi $x_1 + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ te konačno tražena rješenja glase $x_{1k} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ i $x_{2k} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Slika 3.4: Grafički prikaz Primjera 4.

Na Slici 3.4 nalazi se grafički prikaz Primjera 4. pri čemu je plavom bojom prikazan graf funkcije $f(x) = 2\sin x\cos x - \sin x - \cos x$, crvenom bojom prikazan je pravac $y = 1$. Na slici se nalaze dvije vrste točaka koje dobivamo kao presjek grafa funkcije s pravcem $y = 1$ čije x-koordinate predstavljaju konačna rješenja, od kojih se ljubičastom bojom prikazuju točke oblika x_{1k}, dok zelene točke prikazuju točke oblika x_{2k}.

Prilikom rješavanja trigonometrijskih jednadžbi učenici se mogu zbuniti ukoliko moraju pamtiti trigonometrijske identitete, adicijske formule, formule pretvorbe i slično, mogu dvojiti što iskoristiti u kojem trenutku ili krivo zapisati pojedinu formulu. Iz tog razloga, mnogi učitelji i nastavnici učenicima dopuštaju korištenje tiskanih formula ili formula s državne mature prilikom pisanja pismene provjere znanja. Na ovaj način učenicima su formule dostupne i mogu uvježbavati zadatke kod kuće s njima te je takav pristup vrlo prihvatljiv jer se tijekom školovanja nesvjesno već pripremaju na ispit državne mature koji ih čeka na kraju srednjoškolskog obrazovanja.

4 | Trigonometrijske nejednadžbe

Za razliku od trigonometrijskih jednadžbi gdje tražimo točne vrijednosti kuta koje zadovoljavaju jednakost, kod trigonometrijskih nejednadžbi nas zanimaju intervali vrijednosti za koje je nejednakost ispunjena. Zbog periodičnosti trigonometrijskih funkcija, rješenja nejednadžbi uglavnom dolaze u obliku intervala koji se ponavljaju periodično. Kroz ovo poglavlje bavimo se trigonometrijskim nejednadžbama te poteškoćama s kojima se učenici susreću prilikom rješavanja takvih nejednadžbi.

Definicija 7. *Nejednadžbu u kojoj je nepoznanica varijabla neke trigonometrijske funkcije nazivamo* ***trigonometrijska nejednadžba****.*

Svaku trigonometrijsku nejednadžbu možemo svesti na *osnovnu nejednadžbu* čiji je oblik:

$$\sin x < a; \quad \cos x < b; \quad \operatorname{tg} x < c; \quad \operatorname{ctg} x < d.$$

Najbolji pristup rješavanju takvih trigonometrijskih nejednadžbi pomoću brojevne kružnice ili pak rješavanje pomoću crtanja grafa funkcije koja se pojavljuje u nejednakosti.

Prilikom rješavanja trigonometrijskih nejednadžbi potrebno je upotrebljavati svojstva periodičnosti trigonometrijskih funkcija, ali i svojstva neprekidnosti te monotonosti na odgovarajućim intervalima. Učenici često smetnu s uma primijeniti neko od svojstava pa ne dobiju potpuno rješenje ili čak u skupu budu rješenja koja ne zadovoljavaju zadanu nejednakost.

Promotrimo primjer osnovne trigonometrijske nejednadžbe i njezinoga rješavanja.

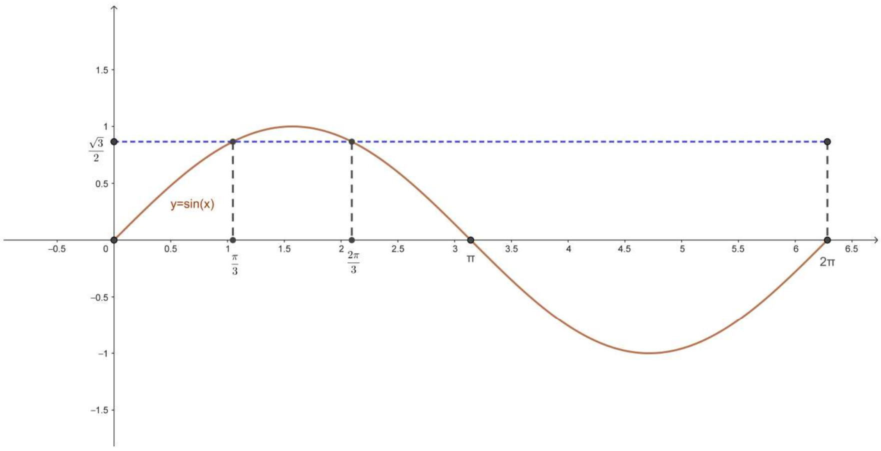
Primjer 5. *Riješimo trigonometrijsku nejednadžbu* $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanu nejednadžbu riješit ćemo pomoću grafa funkcije. Učenici se nerijetko zbune pri odabiru metode rješavanja osnovne nejednadžbe što bi moglo ukazivati na slabu uvježbanost zadataka.
Skiciramo graf funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$. Funkcija $f(x) = \sin x$ poprima vrijednost $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ na tom intervalu za točke $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ i $x_2 = \dfrac{2\pi}{3}$. Promatranjem Slike 4.1. uočavamo da su vrijednosti funkcije veće ili jednake od $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ na

intervalu $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. U konačnici, zbog periodičnosti funkcije sinus skup rješenja zadane nejednadžbe je unija skupova oblika

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

Tijekom rješavanja prethodnog primjera, učenici bi mogli u jednom trenutku umjesto znaka nejednakosti prepisati znak jednakosti i time dobiti pogrešno konačno rješenje. Isto tako mogli bi uzeti krivi interval za rješenje, pogrešno promatrati graf funkcije i slično. Također učenici bi mogli zaboraviti na periodičnost funkcije te zapisati samo jedan interval za konačno rješenje.



Slika 4.1: Grafički prikaz Primjera 5.

U nastavku navodimo primjer rješavanja složenije trigonometrijske nejednadžbe u kojem se primjenjuje postupak rješavanja različit od prethodno pokazanoga. Jasno je da način rješavanja nije jedinstveno određen i pri rješavanju je najvažnija matematička točnost ali korisna je i primjena svojstava i formula koje nam pomažu skratiti postupak do konačnog rješenja.

Primjer 6. *Riješimo nejednadžbu* $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 8\sin x\cos x > 0$.

Početnu nejednadžbu podijelit ćemo s $\cos^2 x \neq 0$ te kasnije provjeriti jesu li nultočke funkcije cos rješenja nejednadžbe. Učenici često ovaj korak zaborave provesti što može dovesti do nepotpunog rješenja nejednadžbe. Također se može dogoditi da učenici ne podijele svaki član nejednadžbe što se lako uoči kao pogreška budući da se nejednadžba ne bi svela na kvadratnu nejednadžbu s jednom nepoznanicom.
Polazna nejednadžba je svedena na nejednadžbu oblika $3\operatorname{tg}^2 x + 5 - 8\operatorname{tg} x > 0$.
U idućem koraku uvodimo supstituciju $t = \operatorname{tg} x$ nakon koje dobivamo kvadratnu nejednadžbu $3t^2 - 8t + 5 > 0$. Rješenja pripadne kvadratne jednadžbe su $t_1 = 1$ i $t_2 = \frac{5}{3}$. Kako je otvor parabole pripadne kvadratne funkcije okrenut prema gore slijedi da je rješenje kvadratne nejednadžbe $t \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right\rangle$. Učenicima se može dogoditi da pogrešno zaključe kako je dobiveni skup rješenje polazne nejednadžbe ili mogu krivo odrediti intervale rješenja što za sobom povlači netočnost

ostatka zadatka.
Nadalje, izvođenje trigonometrijske nejednadžbe za dobiveni interval rješenja kvadratne nejednadžbe također učenicima stvara poteškoće.
Za dani primjer razlikujemo dva slučaja, odnosno imamo dvije različite trigonometrijske nejednadžbe. Prvi slučaj je nejednadžba $\operatorname{tg} x < 1$ čije rješenje glasi

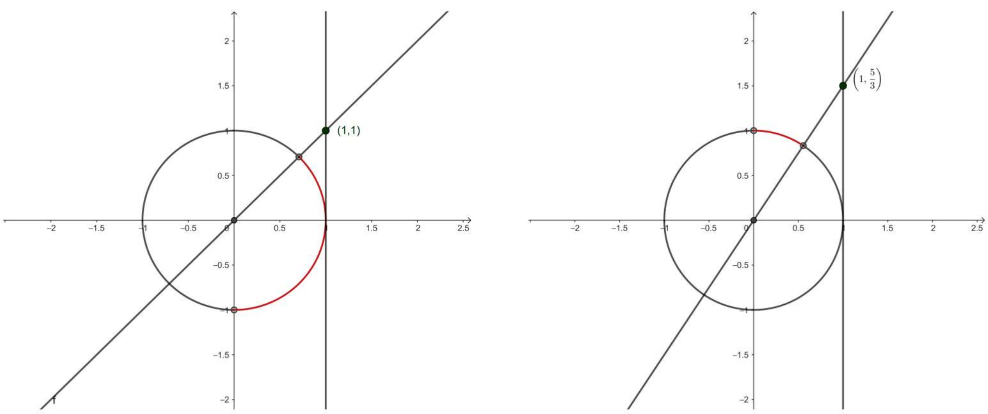
$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle.$$

Rješenje je moguće odrediti pomoću brojevne kružnice sa Slike 4.2. ili uz pomoć džepnog računala. Poželjno je da učenici odmah naprave provjeru računa kako bi rješenje sigurno bilo točno.
Drugi slučaj je nejednadžba $\operatorname{tg} x > \frac{5}{3}$ čije rješenje glasi (pogledati Sliku 4.2.)

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle.$$

Na kraju je još potrebno provjeriti je li $x \in \mathbb{R}$ za koji je $\cos^2 x = 0$ također rješenje polazne nejednadžbe. Ako vrijedi $\cos^2 x = 0$, onda je $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem u polaznu nejednadžbu dobivamo $3\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2} > 0$, to jest $\forall k \in \mathbb{Z}$ je nejednakost istinita pa slijedi da je $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ također rješenje nejednadžbe te ga je potrebno uključiti u konačno rješenje. Konačno imamo:

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle \cup \left\langle \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right] \right).$$



(a) rješenje prvog slučaja (b) rješenje drugog slučaja

Slika 4.2: Grafički prikaz Primjera 6.

Nakon svega navedenoga, možemo reći kako matematika sigurno nije predmet koji se može učiti napamet. To je predmet pun izazova i raznih načina rješavanja zadataka. Gradivo se treba razumjeti, a zatim se postupci rješavanja trebaju uvježbati. Što više rješavamo zadatke, otkrivamo razne načine rješavanja i postajemo sve sigurniji u same postupke, pravila i svojstva koja se koriste. Gradivo trigonometrijskih jednadžbi i nejednadžbi pojavljuje se u trećem razredu srednje škole kada se od učenika očekuje da su dovoljno mudri i matematički zreli za takve tipove zadataka. Gradivo je nekima zanimljivije, nekima malo manje, ali je svima potrebno znanje koje će pokazati i iz ovog dijela gradiva na ispitu državne mature.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika u 24 lekcije, priručnik za pripremu državne mature, programi A i B*, 1. izdanje, Zagreb, 2009.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[3] A. Pletikosić, I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Njerš, R. Gortan, T. Srnec, Ž. Dijanić, *Matematika 3, 1. dio, udžbenik matematike u trećem razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[4] *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2.*, dostupno na `https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf`.

Sažetak

U ovom radu bavimo se trigonometrijskim jednadžbama i nejednadžbama te posebno ističemo poteškoće na koje učenici nailaze pri njihovom rješavanju. Navedeno je nekoliko vrsta trigonometrijskih jednadžbi, za svaku od njih navedene su metode rješavanja i dan je primjer uz koji se navode mogući problemi prilikom njihovog rješavanja. Zatim su definirane trigonometrijske nejednadžbe te su dana primjeri prilikom čijeg rješavanje su spomenute najčešće greške koje učenici naprave pri rješavanju takvih nejednadžbi.

Ključne riječi

brojevna kružnica, trigonometrijske funkcije, arkus funkcije, trigonometrijske jednadžbe, trigonometrijske nejednadžbe

Trigonometric equations and inequalities

Summary

In this work, we deal with trigonometric equations and inequalities, and we especially highlight the difficulties that students encounter when solving them. We list several types of trigonometric equations, for each of them we list methods of solving and we give an example along with problems that may occur when solving them. Next we define trigonometric inequalities and present examples also mentioning the most common mistakes that students make when solving trigonometric inequalities.

Keywords

number circle, trigonometric functions, arc functions, trigonometric equations, trigonometric inequalities

Životopis

Rođena sam 26.6.1998. u Čakovcu. Osnovnu školu pohađala sam u Osnovnoj školi Hugo Badalić u Slavonskom Brodu, a nakon završetka osnovnoškolskog obrazovanja upisala sam prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Gimnaziji Matija Mesić u Slavonskom Brodu. Maturirala sam 2017. godine i upisala preddiplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku, a sadašnjem Fakultetu primijenjene matematike i informatike. Akademski naziv Sveučilišna prvostupnica matematike (univ. bacc. math.) stekla sam 2022. godine s temom završnog rada *Primjene linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima*. Daljnje obrazovanje nastavila sam upisom diplomskog studija nastavničkog studija matematike i informatike. Tijekom akademskog obrazovanja obavljala sam školsku praksu iz matematike i informatike u osnovnim i srednjim školama.