Dijagonalna i Jordanova forma matrice

Vukalović, Antonio

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika i računarstvo

Dijagonalna i Jordanova forma matrice

Završni rad

Mentor:

prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Komentor:

dr. sc. Darija Brajković Zorić

Student:

Antonio Vukalović

Osijek, 2024

Sadržaj

1 | Uvod

Dijagonalna i Jordanova forma predstavljaju bitne koncepte u linearnoj algebri, koji igraju važnu ulogu u razumijevanju strukture i ponašanja kvadratnih matrica. Ovi oblici omogućavaju transformaciju složenih matrica u jednostavniji oblik, što olakšava njihovu analizu i primjenu u različitim matematičkim problemima.

Dijagonalna forma matrice omogućava da se matrica svede na oblik u kojem su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli. Takav oblik je osobito koristan jer pojednostavljuje računanje potencija matrica i rješavanje sustava linearnih jednadžbi, a također omogućava izravan uvid u svojstvene vrijednosti matrice.

Jordanova forma, nazvana je po francuskom matematičaru Camilleu Jordanu[1], koji je u 19. stoljeću značajno doprinio razvoju teorije matrica i linearne algebre. Jordanova forma dodatno proširuje mogućnosti analize matrica koje se ne mogu dijagonalizirati. Ovaj kanonski oblik omogućava da se svaka kvadratna matrica transformira u oblik koji razotkriva njezinu unutarnju strukturu i pruža vrijedne uvide, osobito u analizi linearnih operatora.

U drugom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove iz linearne algebre. Upoznat ćemo se s pojmovima poput: *svojstvena vrijednost*, *svojstveni polinom* te *minimalni polinom*. Također, uvest ćemo i *matrični zapis linearnog operatora* te iskazati i dokazati nekoliko bitnih teorema. Navedeni pojmovi su važni za razumijevanje glavnog dijela ovoga rada, tj. dijagonalne i Jordanove forme matrice.

Treće i četvrto poglavlje su glavni dijelovi ovoga rada. U trećem poglavlju bavit ćemo se dijagonalizacijom matrica. Objasnit ćemo što su algebarska i geometrijska kratnost, riješiti nekoliko primjera te iskazati i dokazati teorem koji će nam pobliže objasniti kada se matrica može dijagonalizirati. U četvrtom poglavlju istražiti ćemo teorijsku osnovu koja se krije iza Jordanove forme matrice i metode za njeno pronalaženje. Iskazat ćemo i dokazati važan teorem, a potom ćemo rijesiti nekoliko primjera.

Analiza Jordanove forme matrice omogućava pojednostavljenje složenih problema te pruža važne uvide u rješavanje sustava linernih diferencijalnih jednadžbi. Također, ovaj koncept se koristi i u kvantnoj fizici te mnogim drugim područjima gdje je analiza linearnih sustava važna. Više o primjenama Jordanove forme zainteresirani čitatelj može pronaći u [2, 5, 6].

[1] Camille Jordan (1838-1922) francuski matematičar koji se istaknuo radovima iz područja algebre, teorije funkcija i teorije grupa

2 | Osnovni pojmovi

U ovome poglavlju definirat ćemo neke od osnovnih pojmova linearne algebre. Osim toga definirat ćemo svojstveni i minimalni polinom koji su važni za bolje razumjevanje ovoga rada. Pozabavit ćemo se i nekim važnim svojstvima tih polinoma za koje ćemo iskazati i dokazati nekoliko teorema.

2.1 Matrični zapis linearnog operatora

Linearni operator je preslikavanje koje prevodi vektore iz jednog vektorskog prostora u drugi (ili u isti) pri čemu je zadovoljeno svojstvo linearnosti. Preciznije, ako su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$ onda je preslikavanje $A : V \to W$ linearan operator ako zadovoljava uvjet:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

za svaki $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i za svaki $x, y \in V$.

Matrični zapis linearnog operatora kao što i sami naziv govori, omogućava zapis linearnog operatora u obliku matrice. Takav zapis nam uvelike olakšava računanje i analizu transformacija vektora u vektorskim prostorima, kao i svojstava samih operatora, poput svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza na V. Svaki vektor $x \in V$, prema fundamentalnom rezultatu linearne algebre, ima jedinstven prikaz oblika

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,$$

gdje su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Sada možemo formirati jednostupčanu matricu

$$[x]^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

koja predstavlja matrični zapis (prikaz) vektora x u bazi e (vidjeti [1, Poglavlje 5.4.]).

Linearni operator $A \in L(V, W)$ gdje su V i W vektorski prostori je potpuno određen svojim djelovanjem na bazu. Ako znamo vektore $Ae_1, \dots, Ae_n$ onda je u potpunosti opisano djelovanje operatora A. Vektore $Ae_1, \dots, Ae_n$ možemo zapisati u obliku

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \ j = 1, \dots, n.$$

Tada matrični zapis operatora A u paru baza (e, f) izgleda ovako:

$$[A]_e^f = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F}).$$

Također, svakoj matrici možemo pridružiti linearni opeartor. Ako imamo kvadratnu matricu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, možemo je smatrati matricom linearnog operatora T koji kao domenu i kodomenu ima neki vektorski prostor V dimenzije n. Tada je operator T definiran tako da za svaki vektor $x \in V$, djelovanje operatora T na vektor x je ekvivalento množenju matrice A s vektorom x, tj.

$$T(x) = Ax.$$

2.2 Svojstvena vrijednost

Definicija 2.2.1 (vidjeti [1, Definicija 5.5.1.]). *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Kažemo da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$* ***svojstvena vrijednost*** *operatora A, ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je*

$$Ax = \lambda_0 x. \tag{2.1}$$

Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se ***spektar*** *(operatora A) i označava sa $\sigma(A)$.*

Svojstvenu vrijednost još nazivamo i karakteristična ili vlastita vrijednost. Uočimo kako su svojstvene vrijednosti samo oni skalari za koje jednadžba (2.1) ima netrivijalno rješenje. Vektor x iz Definicije 2.2.1 naziva se **svojstveni vektor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Svojstveni vektor nije jedinstven jer je i svaki vektor βx također svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0 i to za svaki $\beta \in \mathbb{F}$, $\beta \neq 0$. Vidimo da su svi svojstveni vektori βx, $\beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ međusobno linearno zavisni, no jednoj svojstvenoj vrijednosti može pripadati i više

linearno nezavisnih vektora.
Na primjer, ukoliko promatramo linearan operator $I \in L(V)$, $Ix = x$, za svaki $x \in V$, možemo uočiti da su svi vektori neke baze od V svojstveni vektori koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti 1.

2.3 Svojstveni polinom

Skup $V_A(\lambda_0) = \{x \in V : Ax = \lambda_0 x\}$ nazivamo svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Možemo primjetiti da se u takvom skupu nalaze svi svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti λ_0 kao i nulvektor. Taj skup je potprostor jer očito vrijedi $V_A(\lambda_0) = Ker(A - \lambda_0 I) \leq V$. Štoviše, on je potprostor od V za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$, ali svojstvene vrijednosti su samo oni skalari λ_0 za koje dani potprostor $V_A(\lambda_0)$ nije trivijalan.

Definicija 2.3.1 (vidjeti [1, Definicija 5.5.5.]). *Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Polinom*

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

naziva se svojstveni (karakteristični, vlastiti) polinom matrice A.

Iz definicije determinante direktno slijedi da je polinom $k_A(\lambda)$ polinom n-tog stupnja u varijabli λ, a koeficijenti su skalari iz polja $\mathbb{F}$.
Uzmimo na primjer proizvoljnu kvadratnu matricu $A = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$. Tada dobivamo svojstveni polinom drugog stupnja i on izgleda ovako:

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + detA,$$

odnosno, u našem slučaju

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (w + z)\lambda + wz - xy.$$

Propozicija 2.3.2 (vidjeti [1, Propozicija 5.5.6.]). *Slične matrice imaju jednake svojstvene polinome.*

Definicija 2.3.3 (vidjeti [1, Definicija 5.5.7.]). *Neka je V konačnodimenzionalni prostor, $A \in L(V)$ te neka je $[A]_e^e$ matrični zapis operatora A u nekoj bazi e prostora V. Svojstveni polinom operatora A, k_A definira se kao svojstveni polinom matrice $[A]_e^e$; odnosno $k_A(\lambda) = k_{[A]_e^e}(\lambda)$.*

Teorem 2.3.4 (vidjeti [1, Teorem 5.5.9.]). *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi $k_A(\lambda_0) = 0$.*

Iz Teorema 2.3.4 vidimo kako su svojstvene vrijednosti operatora upravo nultočke njegovog svojstvenog polinoma. Također, možemo uočiti kako prethodni teorem dijeli teoriju na realnu i kompleksnu.

Polje kompleksnih brojeva je algebarski zatvoreno, zato svaki operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru ima svojstvenu vrijednost. S druge strane, polje realnih brojeva nije algebarski zatvoreno, tj. postoje polinomi s realnim koeficijentima koji nemaju realne nultočke. Primjetimo, ako za polje $\mathbb{F}$ uzmemo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tada će naše svojstvene vrijednosti uvijek biti realni brojevi.

2.4 Minimalni polinom

Definicija 2.4.1. *Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Minimalni polinom matrice A je normirani polinom najmanjeg stupnja kojeg A poništava tj. normirani polinom μ_A za koji vrijedi:*

1. $\mu_A \neq 0$
2. $\mu_A(A) = 0$
3. *ako za polinom p vrijedi $p(A) = 0$ tada je*
$$st(p) \geq st(\mu_A).$$

Općenito, za $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ je $st(\mu_A) \leq n$.

Zanimljivo je da su nultočke svojstvenog polinoma također i nultočke minimalnog polinoma te ako su sve svojstvene vrijednosti jednostruke, tada je $\mu_A = k_A$, gdje je μ_A normiran. Također, važno je napomenuti kako slične matrice imaju isti minimalni polinom i on je jedinstven za svaki linearni operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru.

U četvrtom poglavlju, gdje ćemo se baviti Jordanovom formom matrice, vrlo korisna će nam biti neka od svojstava svojstvenog i minimalnog polinoma. Ta svojstva će nam uvelike olakšati računanje u nastavku ovoga rada zbog čega uvodimo sljedeća dva teorema.

Teorem 2.4.2 (vidjeti [4, Teorem 9.18 i 9.19])**.** *Ako je A blok trokutasta matrica s dijagonalnim blokovima $A_1, \ldots, A_s$ tada je svojstveni polinom k_A jednak umnošku svojstvenih polinoma dijagonalnih blokova A_i*
$$k_A(\lambda) = k_{A_1}(\lambda) k_{A_2}(\lambda) \cdots k_{A_s}(\lambda).$$
Ako je A blok dijagonalna matrica s dijagonalnim blokovima $A_1, \ldots, A_s$ tada je minimalni polinom od A jednak najmanjem zajedničkom višekratniku minimalnih polinoma dijagonalnih blokova.

Dokaz. Neka je A blok trokutasta matrica s dijagonalnim blokovima $A_1, \dots, A_s$:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{bmatrix}.$$

Svojstveni polinom matrice A_i zadan je pomoću determinante matrice $(A_i - \lambda I)$, tj. $k_{A_i}(\lambda) = det(A_i - \lambda I)$, gdje je λ svojstvena vrijednost, a I jedinična matrica. Determinanta blok trokutaste matrice je umnožak determinanti njenih blokova na dijagonali pa imamo:

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} (A_1 - \lambda I) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (A_2 - \lambda I) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (A_s - \lambda I) \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$det(A - \lambda I) = det(A_1 - \lambda I) det(A_2 - \lambda I) \cdots det(A_s - \lambda I).$$

Dakle, svojstveni polinom matrice A je umnožak svojstvenih polinoma dijagonalnih blokova:

$$k_A(\lambda) = k_{A_1}(\lambda) k_{A_2}(\lambda) \cdots k_{A_s}(\lambda).$$

Pokažimo sada drugi dio teorema vezan uz minimalni polinom, koji ćemo provesti na nešto jednostavnijem slučaju.
Naime, pretpostavimo da A ima dva dijagonalna bloka A_1 i A_2:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Neka su μ_{A_1} i μ_{A_2} minimalni polinomi blokova A_1 i A_2. Kako je $\mu_A(\lambda)$ minimalni polinom od A, tada je $\mu_A(A) = 0$ pa imamo:

$$\mu_A(A) = \begin{bmatrix} \mu_A(A_1) & 0 \\ 0 & \mu_A(A_2) \end{bmatrix} = 0.$$

Dakle, $\mu_A(A_1) = 0$ i $\mu_A(A_2) = 0$, što implicira da je $\mu_A(\lambda)$ višekratnik i od $\mu_{A_1}(\lambda)$ i od $\mu_{A_2}(\lambda)$.

Neka je $f(\lambda)$ drugi višekratnik od μ_{A_1} i μ_{A_2}, tada imamo:

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{bmatrix} = 0.$$

Kako je $\mu_A(\lambda)$ minimalni polinom od A, $f(\lambda)$ je dijeljiv polinomom $\mu_A(\lambda)$ iz čega slijedi da je $\mu_A(\lambda)$ najmanji zajednički višekratnik minimalnih polinoma $\mu_{A_1}(\lambda)$ i $\mu_{A_2}(\lambda)$. Generalizacija teorema se lako pokaže indukcijom.

□

Teorem 2.4.3. *Matrica $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$ ima minimalni polinom prvog stupnja ako i samo ako je oblika aI_2, $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, gdje je I_2 jedinična matrica reda 2.*

Dokaz. Neka matrica A ima minimalni polinom prvog stupnja. Minimalni polinom matrice A je normirani polinom najmanjeg stupnja kojeg A poništava, odnosno

$$\mu_A(A) = A - aI_2 = 0,$$

iz čega slijedi da je $A = aI_2$, gdje je $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Dokažimo sada i obrat. Neka je $A = aI_2$, gdje je $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, te neka je μ_A minimalni polinom matrice A. Prema definiciji minimalnog polinoma vrijedi $\mu_A(A) = 0$. Pretpostavimo da je minimalni polinom $\mu_A(x)$ oblika:

$$\mu_A(x) = x - a.$$

Uvrstimo matricu A i provjerimo je li vrijedi $\mu_A(A) = 0$, imamo:

$$\mu_A(A) = A - aI_2 = aI_2 - aI_2 = 0.$$

Dakle, polinom $\mu_A(x) = x - a$ je polinom najmanjeg stupnja kojeg A poništava i njegov stupanj je 1.

□

3 | Dijagonalizacija matrice

U ovome poglavlju definirat ćemo algebarsku i geometrijsku kratnost, dokazati važan teorem koji govori o tome kada se matrica može dijagonalizirati te ćemo istražiti može li se uopće svaka matrica dijagonalizirati i što ako to nije moguće.

3.1 Algebarska i geometrijska kratnost

Definicija 3.1.1. *Neka je $V_A(\lambda_0)$ svojstveni potprostor, $\sigma(A)$ spektar linearnog operatora A te $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Tada se dimenzija svojstvenoga prostora $V_A(\lambda_0)$ naziva **geometrijska kratnost** (geometrijski multiplicitet) svojstvene vrijednosti λ_0 i označava se s $d(\lambda_0)$.*

Primjer 3.1.2. *Izračunajmo geometrijsku kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 ako je dana matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kako bismo izračunali geometrijsku kratnost, prema prethodnoj definiciji prvo trebamo izračunati svojstvene vrijednosti. Odredimo svojstveni polinom

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = 3$. Sada ćemo izračunati svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_1.

Kako je

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

rješavanjem sustava $(A - 4I)v = 0$, gdje je $v = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, slijedi

$$\begin{cases} 0x + 1y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y - 1z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Zaključujemo kako x može biti bilo koji realan broj različit od nule, dok je $y = z = 0$ pa je rješenje sustava

$$v = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1 je $v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, a dimenzija svojstvenog potprostora $V_A(4)$ je 1. Dakle, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_1 je $d(4) = 1$. Postupak se provodi analogno za svojstvenu vrijednost λ_2, te dobivamo da je $dim V_A(3) = 1$. △

Definicija 3.1.3 (vidjeti [1, Definicija 5.5.14.]). *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda)$, $p(\lambda) \neq 0$, $l \in \mathbb{N}$. Broj l zovemo* ***algebarskom kratnošću*** *svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$.*

Primjer 3.1.4. *Izračunajmo algebarsku kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 ako je dana matrica A iz prethodnog primjera*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Već smo dobili svojstveni polinom

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)^2 (3 - \lambda),$$

te pripadne svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = 3$. Iz definicije algebarske kratnosti možemo primjetiti kako je algebarska kratnost zapravo broj ponavljanja svojstvene vrijednosti λ_0 kao nultočke svojstvenog polinoma $k_A(\lambda)$.

Kako je λ_1 dvostruka svojstvena vrijednost, algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_1 je $l(4) = 2$. Svojstvena vrijednost λ_2 se pojavljuje samo jednom pa je $l(3) = 1$. △

3.2 Teoremi o dijagonalizaciji matrice

U nastavku ćemo dati iskaz i dokaz vrlo važnog teorema koji tvrdi u kojem slučaju dani operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru možemo dijagonalizirati. Osim toga, pokazat ćemo i još nekoliko zanimljivih rezultata vezanih uz dijagonalizaciju matrice.

Teorem 3.2.1 (vidjeti [1, Korolar 5.5.19.]). *Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$ te $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Operator A se može dijagonalizirati (tj. postoji baza od V u kojoj je matrični prikaz operatora A dijagonalna matrica) ako i samo ako su geometrijska i algebarska kratnost svih svojstvenih vrijednosti od A jednake.*

Dokaz. Ako je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 strogo manja od algebarske kratnosti, tj. $d(\lambda_0) < l(\lambda_0)$, onda je očito nemoguće naći bazu u kojoj bi takav operator imao dijagonalnu formu matrice. Na primjer, ako je matrični zapis operatora prikazan u dijagonalnoj formi matrice, onda se na dijagonali te matrice, svojstvena vrijednost λ_0 mora pojaviti točno onoliko puta kolika je njezina algebarska kratnosti $l(\lambda_0)$. Odnosno, mora postojati točno $l(\lambda_0)$ linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ_0. Dakle, jednakost algebarskih i geometrijskih kratnosti je nužan uvjet dijagonalizacije, tj. $d(\lambda) = l(\lambda)$, za svaki $\lambda \in \sigma(A)$.

Obratno, kako je vektorski prostor V kompleksan, svojstveni polinom operatora A možemo zapisati u obliku:

$$k_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{l_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{l_k},$$

pri čemu je $l_1 + \dots + l_k = n = dimV$. Nadalje, unija baza svojstvenih potprostora je linearno nezavisan skup (vidjeti [1, Teorem 5.5.18.]), a zbog pretpostavke teorema o jednakosti algebarske i geometrijske kratnosti, imamo točno n elemenata što upravo čini bazu vektorskog prostora V, a matrica operatora A u toj bazi je dijagonalna. □

Primjer 3.2.2. *Pokažimo da se matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ može dijagonalizirati.*

U primjerima 3.1.2 i 3.1.4 smo se već upoznali s određivanjem algebarske i geometrijske kratnosti pa ćemo u nastavku izostaviti postupak. Prvo određujemo svojstveni polinom za danu matricu A. Dobivamo,

$$k_A(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda),$$

iz čega su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

Sada rješavamo sustav $(A - \lambda I)v = 0$ za svaku svojstvenu vrijednost iz čega dobivamo sljedeće svojstvene vektore:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Za $\lambda_1 = 3$ imamo $d(3) = 1, l(3) = 1$, a za $\lambda_2 = 2$ imamo $d(2) = 1, l(2) = 1$.

Budući da su algebarska i geometrijska kratnost jednake za sve svojstvene vrijednosti, prema prethodnom teoremu, matrica A se može dijagonalizirati. Pripadna dijagonalna forma je

$$A_D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Konstruiramo matricu P sa svojstvenim vrijednostima kao stupcima:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

te izračunamo inverz matrice P:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tada dobivamo, $A = PA_D P^{-1}$. △

Primjer 3.2.3. *Pokažimo da se matrica* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *ne može dijagonalizirati.*

Odredimo najprije svojstveni polinom za danu matricu A. Dobivamo,

$$k(\lambda) = (3 - \lambda)^2,$$

te je svojstvena vrijednost $\lambda_1 = 3$*, a pripadni svojstveni vektor je*

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je λ_1 *dvostruka svojstvena vrijednost, imamo* $d(3) = 2$ *dok je* $l(3) = 1$*. Uočimo kako geometrijska i algebarska kratnost nisu jednake za svojstvenu vrijednost* λ_1 *pa prema Teoremu 3.2.1 matrica A se ne može dijagonalizirati.*

△

U prethodna dva primjera, primjenom Teorema 3.2.1 dali smo primjer jednog operatora koji se može dijagonalizirati, ali smo naveli i primjer operatora koji se ne može dijagonalizirati, tj. ne možemo naći njegovu dijagonalnu formu. Nameće se pitanje, što kada se operator ne može prikazati u dijagonalnoj formi? Možemo li tada odrediti formu operatora koja će nam olakšati njegovo daljnje korištenje, tj. njegovu daljnju primjenu? Odgovor na to pitanje potražit ćemo u sljedećem poglavlju. No prije toga promotrimo još nekoliko zanimljivih rezultata vezanih uz dijagonalizaciju operatora.

Teorem 3.2.4 (vidjeti [3, Teorem 1, 10.10])**.** *Linearni operator* $A : V \longrightarrow V$ *se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza B vektorskog prostora V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A.*

Dokaz. Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ baza vektorskog prostora V i b_i svojstveni vektori operatora A pridruženi svojstvenim vrijednostima λ_i (koje ne moraju sve biti različite), za svaki $i = 1, \ldots, n$. Tada je $A(b_i) = \lambda_i b_i$, a operator A u bazi B je oblika

$$A_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

tj. operator A je prikazan u dijagonalnoj formi matrice.

Pokažimo sada i obrat. Ako za linearni operator A postoji baza $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ vektorskog prostora V u kojem je operator prikazan u dijagonalnoj formi

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix},$$

tada je $A(b_i) = \alpha_i b_i$, za $i = 1, \ldots, n$, što znači da su vektori baze B upravo svojstveni vektori operatora A, a skalari α_i, svojstvene vrijednosti operatora A. □

Korolar 3.2.5 (vidjeti [3, Korolar 3, 10.10])**.** *Ako operator $A : V \longrightarrow V$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti, gdje je $n = dimV$, onda se operator A može dijagonalizirati.*

Dokaz. Ako imamo međusobno različite svojstvene vrijednosti te ako vektore odaberemo na način da pripadaju svojstvenim vrijednostima onda je skup odabranih svojstvenih vektora linearno nezavisan (vidjeti [3, Teorem 5, 10.9.]). Kako imamo n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, onda oni čine bazu za V pa tvrdnja slijedi direktno iz Teorema 3.2.4. □

Prethodni korolar nam daje dovoljan uvjet dijagonalizacije, ali i brz i efikasan način da lako prepoznamo operatore koji se mogu dijagonalizirati. U praksi, za proizvoljan operator lako možemo očekivati da će sve svojstvene vrijednosti biti različite. Ipak, prethodni korolar ne možemo primijeniti ako imamo višestruke svojstvene vrijednosti ili ako nultočke svojstvenog polinoma nisu iz odgovarajućeg polja.

4 | Jordanova forma matrice

U prethodnom poglavlju, primjenom teorema 3.2.1 pokazali smo kako se određuje dijagonalna forma operatora, ali isto tako, vidjeli smo da za neke operatore nije moguće naći dijagonalnu formu. Međutim, spomenili smo kako svaki operator kojemu je matrični prikaz nad algebarski zatvorenim poljem, možemo prikazati u Jordanovoj formi, čime ćemo se baviti u ovome poglavlju.

Blok dijagonalna matrica

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

koja na dijagonali ima tzv. Jordanove klijetke koje još nazivamo i osnovnim Jordanovim blokovima naziva se Jordanova forma matrice. Jordanova klijetka na glavnoj dijagonali ima svojstvene vrijednosti, a iznad glavne dijagonale nalaze se jedinice. Svi ostali elementi su 0. Preciznije, Jordanova klijetka općenito je oblika

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 4.0.1. *Za danu matricu*

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc:c} 3 & 2 & & & \\ 0 & 3 & & & \\ \hdashline & & -4 & 1 & \\ & & 0 & -4 & \\ \hdashline & & & & -4 \end{array}\right]$$

odredite svojstveni i minimalni polinom, svojstvene vrijednosti te algebarsku i geometrijsku kratnost za svaku svojstvenu vrijednost.

Prvo odredimo svojstveni polinom matrice A koristeći Teorem 2.4.2.

Možemo zaključiti da je

$$det(A-\lambda I) = det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & & & \\ 0 & 3-\lambda & & & \\ & & -4-\lambda & 1 & \\ & & 0 & -4-\lambda & \\ & & & & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \cdot det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 \\ 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} \cdot det(-4-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)^2 \cdot (-4-\lambda)^3.$$

Dakle, svojstveni polinom matrice A je $k_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 \cdot (-4-\lambda)^3$. Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -4$. Odredimo sada minimalni polinom. Minimalni polinom mora imati sve svojstvene vrijednosti kao i svojstveni polinom, ali s najnižim stupnjem tako da ga A poništi, pa je $\mu_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 \cdot (-4-\lambda)^2$, u što se lako možemo uvjeriti uvrštavanjem matrice A.

Algebarska kratnost je eksponent u svojstvenom polinomu pa je $l(\lambda_1) = 2$ i $l(\lambda_2) = 3$. Sada ćemo izračunati geometrijsku kratnost za svaku svojstvenu vrijednost. Geometrijska kratnost je dimenzija svojstvenog prostora, odnosno broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih odgovarajućoj svojstvenoj vrijednosti.

Svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 3$ je $v = [1\,0\,0\,0\,0]^T$ pa je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_1 jednaka 1, tj. $d(\lambda_1) = 1$. Za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = -4$ imamo dva svojstvena vektora, $v_1 = [0\,0\,1\,0\,0]^T$ i $v_2 = [0\,0\,0\,0\,1]^T$ pa je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_2 jednaka 2, tj. $d(\lambda_2) = 2$. $\triangle$

Naime, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_i ne govori samo o broju linearno nezavisnih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ_i već i o broju blokova u Jordanovoj formi matrice koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti λ_i. Isto tako, algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_i predstavlja broj ponavljanja te svojstvene vrijednosti na dijagonali matrice koja predstavlja Jordanovu formu.

Općenito, ako je

$$k_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{l_k},\ l_1+\cdots+l_k = n,\ st(k_A) = n$$
$$\mu_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k},\ m_1 \le l_1,\ldots,m_k \le l_k$$

onda se matrica A može dijagonalizirati ako i samo ako je $m_1 = \cdots = m_k = 1$, gdje je m_i dimenzija najveće Jordanove klijetke za svojstvenu vrijednost λ_i.

Dakle, Jordanova forma matrice nam daje mogućnost da iz nje iščitamo i svojstveni i minimalni polinom.

Oznaka $GL(n,\mathbb{F})$ koju ćemo koristiti u sljedećem teoremu predstavlja skup svih regularnih matrica n-tog reda s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Ponekad se umjesto regularna kaže i invertibilna matrica.

Teorem 4.0.2. *Ako matrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ ima k linearno nezavisnih svojstvenih vektora, tada je ona slična matrici koja ima Jordanovu formu sa k osnovnih Jordanovih blokova, tj. postoji matrica $M \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je*

$$M^{-1}AM = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_k \end{bmatrix}.$$

Dokaz. (vidjeti [5, Dodatak B])

Pretpostavimo da matrica A ima k svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ i njima pripadne svojstvene vektore $v_1, v_2, \ldots, v_k$, tim redom, koji su linearno nezavisni prema Teoremu 3.2.4. Tada vrijedi

$$A_i v_i = \lambda_i v_i,$$

za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ako je λ_i jednostruka svojstvena vrijednost, tada je odgovarajući Jordanov blok J_i matrica 1x1, tj. $[\lambda_i]$. Međutim, ako je λ_i višestruka svojstvena vrijednost, tada ćemo uz svojstvene vektore v_i imati i Jordanove *lančane* vektore u_{ij} takve da vrijedi

$$(A - \lambda_i I)u_{ij} = u_{i(j-1)},$$

pri čemu je $u_{i0} = v_i$, za neki $j \geq 1$. Tada je Jordanov blok oblika

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije po dimeniziji matrice. Za $n = 1$, tvrdnja vrijedi jer je svaka matrica 1x1 već u Jordanovoj formi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi i za sve matrice dimenzije manje od n, te dokažimo tvrdnju za matricu dimenzije n. Postupak ćemo provesti u tri koraka.

Kako smo već uočili da svakom linearnom operatoru možemo pridružiti odgovarajuću matricu dok isto tako poznajemo i obratni postupak, u nastavku ćemo pod pojmom slike i jezgre dane matrice A smatrati sliku i jezgru pripadnog linearnog operatora s obzirom da smo dobro upoznati s njihovom definicijom i s postupkom njihovog određivanja.

Prvi korak. Neka je matrica A singularna. Tada je slika matrice A dimenzije $r < n$, tj. $dim(ImA) = r < n$. To znači da se u slici matrice A mora nalaziti r linearno nezavisnih vektora w_i takvih da vrijedi

$$Aw_i = \lambda_i w_i \text{ ili } Aw_i = \lambda_i w_i + w_{i-1}. \tag{4.1}$$

Drugi korak. Pretpostavimo da je dimenzija presjeka slike i jezgre matrice A jednaka p, tj. $dim(ImA \cap KerA) = p$. To znači da postoji p različitih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 0$ pa je svaki vektor iz jezgre matrice A svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 0$. Zbog toga je u prethodnom koraku moralo postojati p Jordanovih lanaca koji počinju sa svojstvenom vrijednosti $\lambda = 0$, ali nas zanimaju vektori w_i koji se nalaze na kraju tih lanaca. Kako je svaki od tih p vektora i iz slike matrice A, onda je svaki od njih linearna kombinacije stupaca matrice A, odnosno

$$w_i = Ay_i \text{ za neki } y_i.$$

Vektori w_i zajedno s drugim vektorima u Jordanovom lancu definiraju strukturu Jordanove forme matirce, tj. određuju kako se slažu blokovi u Jordanovoj formi.

Treći korak. Jezgra matrice A je dimenzije $n - r$. Dakle, neovisno o presijeku sa slikom matrice A, jezgra mora sadržavati dodatne bazne vektore z_i koji su izvan toga presjeka, a takvih vektora ima $n - r - p$.

Dakle, vektori w_i, y_i i z_i, za koje prešutno pretpostavljamo da su linearno nezavisni formiraju Jordanove lance za matricu A, a na taj način formiramo stupce matrice M iz čega dobivamo Jordanovu formu matrice A, odnosno

$$J = MAM^{-1}.$$

Sada pretpostavimo da je linearna kombinacija vektora w_i, y_i i z_i jednaka nuli, odnosno

$$\sum \alpha_i w_i + \sum \beta_i y_i + \sum \gamma_i z_i = 0. \tag{4.2}$$

Ako pomnožimo dani izraz matricom A te iskoristimo (4.1) i $Az_i = 0$, dobivamo

$$\sum \alpha_i \begin{bmatrix} \lambda_i w_i \\ \text{ili} \\ \lambda_i w_i + w_{i-1} \end{bmatrix} + \sum \beta_i A y_i = 0. \tag{4.3}$$

Primjetimo kako su Ay_i zapravo posebni vektori w_i koji se nalaze na krajevima lanaca, a pridruženi su svojstvenoj vrijednosti $\lambda_i = 0$. To znači da se oni ne mogu pojaviti u prvoj sumi jer su pomnoženi s nulom u $\lambda_i w_i$.

Jednadžba (4.3) je linearna kombinacija vektora w_i, a kako oni ne ovise o pretpostavci indukcije, upravo oni osiguravaju Jordanovu formu unutar slike matrice A. Stoga, zaključujemo da svi β_i moraju biti nula. Sada imamo, iz (4.2) da je

$$\sum \alpha_i w_i = -\sum \gamma_i z_i.$$

Budući da su vektori w_i iz slike matrice A, a vektori z_i su dodatni bazni vektori koji ne ovise o slici, onda svi γ_i moraju biti jednaki nuli, iz čega slijedi

$$\sum \alpha_i w_i = 0.$$

Kako su w_i linearno nezavisni, slijedi da je $\alpha_i = 0$, čime smo pokazali da su vektori w_i, y_i i z_i linearno nezavisni.

Ako matrica A nije singularna onda prethodna tri koraka provodimo na matrici $A' = A - kI$, gdje konstanta k osigurava da matica A' bude singularna. Također, konstanta k može biti i bilo koja svojstvena vrijednost matrice A. Algoritam pretvara matricu A' u njezinu Jordanovu formu $M^{-1}A'M = J'$, a Jordanovi lanci x_i su izgrađeni od vektora w_i, y_i i , z_i pa Jordanova forma matrice A koristi iste Jordanove lance i istu matricu M, odnosno

$$M^{-1}AM = M^{-1}A'M + M^{-1}kM = J' + kI = J.$$

□

Primjetimo, osim redoslijeda blokova, matrica A je slična samo jednoj matrici J, odnosno, Jordanova forma matrice A je jedinstena. Dakle, skup svih matrica je podjeljen u familije sa svojstvima da sve matrice iz iste familije imaju istu Jordanovu formu i one su sve međusobno slične, ali nijedna matrica iz različitih familija nije slična. Možemo reći kako je matrica J, tj. Jordanova forma *najljepša* matrica u svakoj familiji, ako želimo da matrice budu *najbliže* dijagonalnim.

U sljedećim primjerima pokazat ćemo na koji način možemo dizajnirati Jordanovu formu ako su zadani svojstveni i minimalni polinom linearnog operatora te obratni postupak, tj. iščitavanje svojstvenog i minimalnog polinom iz zadane Jordanove forme. Ovi primjeri su vrlo korisni i često se koriste u praksi.

Primjer 4.0.3. *Odredite Jordanovu formu operator $A \in L(\mathbb{C}^8)$ ako je poznato da vrijedi:*

$$\begin{aligned}
&k_A(\lambda) = (\lambda+3)^4(\lambda-2)^4,\\
&\mu_A(\lambda) = (\lambda+3)^2(\lambda-2)^3,\\
&d(-3) = 3.
\end{aligned}$$

Prvo ćemo odrediti svojstvene vrijednosti operatora A, a njih možemo iščitati iz svojstvenog ili minimalnog polinoma pa imamo

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2.$$

Algebarska kratnost svake svojstvene vrijednosti jednaka je 4 pa se svaka svojstvena vrijednost pojavljuje 4 puta na glavnoj dijagonali. Imamo

$$J = \begin{bmatrix}
-3 & & & & & & & \\
 & -3 & & & & & & \\
 & & -3 & & & & & \\
 & & & -3 & & & & \\
 & & & & 2 & & & \\
 & & & & & 2 & & \\
 & & & & & & 2 & \\
 & & & & & & & 2
\end{bmatrix}.$$

Iz kratnosti pojedine svojstvene vrijednosti kao nultočke minimalnog polinoma iščitavamo veličinu najvećeg bloka za svaku svojstvenu vrijednost. Tako je za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = -3$ *najveći blok veličine 2, dok je za* $\lambda_2 = 2$ *najveći blok veličine 3. Imamo*

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & & & & \\ & -3 & & & & & & \\ & & -3 & & & & & \\ & & & -3 & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Kako je $d(-3) = 3$*, odnosno, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti* λ_1 *je 3, zaključujemo da su svojstvenoj vrijednosti* λ_1 *pridružena tri bloka. Tada je Jordanova forma operatora A oblika*

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & & & & \\ & -3 & & & & & & \\ & & -3 & & & & & \\ & & & -3 & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo kako je Jordanova forma operatora A jedinstvena do na poredak blokova.

△

Primjer 4.0.4. *Odredite minimalni i svojstveni polinom operatora A ako mu je poznata Jordanova forma*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jordanova forma na glavnoj dijagonali ima svojstvene vrijednosti operatora A pa imamo $\lambda_1 = 4$ *i* $\lambda_2 = 1$.

Odredimo svojstveni polinom operatora A. Kako se λ_1 *pojavljuje tri puta na glavnoj dijagonali Jordanove forme, zaključujemo da je algebarska kratnost svojstvene vrijednosti* λ_1 *jednaka 3, tj.* $l(\lambda_1) = 3$*. Na isti način možemo zaključiti za svojstvenu vrijednost* λ_2 *pa imamo* $l(\lambda_2) = 2$*. Tada je svojstveni polinom operatora A oblika*

$$k_A(\lambda) = (\lambda - 4)^3(\lambda - 1)^2.$$

Odredimo sada i minimalni polinom. Kako na sporednoj dijagonali nemamo niti jednu jedinicu, znači da je veličina najvećeg bloka jednaka 1 i to za obje svojstvene vrijednosti. Tada je minimalni polinom operatora A oblika

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 1).$$

$\triangle$

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] H. K. Dass, *Advanced Engineering Mathematics*, S. Chand Publishing, New Delhi, 2018.

[3] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[4] S. S. Lipschutz, M. Lipson, *Linear Algebra, 4th Edition*, McGraw-Hill, New York, 2009.

[5] G. Strang, *Linear algebra and its applications, 3rd Edition*, Harcourt, Brace, Jovanovich, San Diego, 1988.

[6] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Student Solutions Manual: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, CRC Press, Boca Raton, 2018.

Sažetak

Tema ovog završnog rada je Dijagonalna i Jordanova forma matrice. U radu smo definirali osnovne pojmove linearne algebre, uključujući matrični zapis linearnog operatora, svojstvene vrijednosti, te svojstveni i minimalni polinom. Posebno smo analizirali kako algebarska i geometrijska kratnost svojstvenih vrijednosti utječu na mogućnost dijagonalizacije matrice, te smo kroz primjere prikazali postupak dijagonalizacije. Dokazali smo teorem o tome kada se matrica može dijagonalizirati, kao i druge važne teoreme vezane uz ovu temu. Detaljno smo objasnili teorijsku osnovu Jordanove forme matrice, prikazali metode za njeno određivanje i primijenili ih na konkretne primjere.

Ključne riječi

matrični zapis linearnog operatora, svojstvena vrijednost, svojstveni polinom, minimalni polinom, algebarska kratnost, geometrijska kratnost, dijagonalna forma matrice, Jordanovi blokovi, Jordanova forma matrice

The diagonal and Jordan form of a matrix

Summary

The topic of this final paper is the Diagonal and Jordan Form of a Matrix. In this paper, we defined the basic concepts of linear algebra, including the matrix representation of a linear operator, eigenvalues, and the characteristic and minimal polynomials. We specifically analysed how the algebraic and geometric multiplicity of eigenvalues affects the possibility of diagonalising a matrix, and we demonstrated the diagonalisation process through examples. We proved the theorem on when a matrix is diagonalisable, as well as other important theorems related to this topic. In the main part of the paper, we thoroughly explained the theoretical foundation of the Jordan form of a matrix, presented methods for its determination, and applied them to specific examples.

Keywords

matrix representation of a linear operator, eigenvalue, characteristic polynomial, minimal polynomial, algebraic multiplicity, geometric multiplicity, diagonal form of a matrix, Jordan blocks, Jordan matrix

Životopis

Rođen sam 3. prosinca 1991. godine u Varaždinu. Osnovnu školu Ivana Filipovića pohađao sam u Osijeku, nakon čega sam upisao I. Gimnaziju Osijek. Srednju školu završio sam u svibnju 2010. godine, nakon čega sam se ozbiljno počeo baviti glazbom. Kao autor glazbe i teksta, te kao izvođač u hip-hop dvojcu "Shomy i Vuki", postigao sam značajan uspjeh izdavanjem većeg broja singlova te album u izdanju Croatia Records-a. Prijediplomski sveučilišni studij Matematika na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku upisao sam 2016. godine. Već sljedeće godine prebacio sam se na novonastali prijediplomski sveučilišni studij Matematika i računarstvo na Fakultetu primijenjene matematike i informatike (tada Odjel za matematiku) Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.