Blok-matrice

Sluganović, Helena

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Studij
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Blok-matrice

Završni rad

Mentor:
prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Student:
Helena Sluganović

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Tema ovog rada su blok-matrice, operacije s njima te njihov svojstveni i minimalni polinom.

Da bismo definirali blok-matrice, prvo ćemo definirati pojam podmatrice, u ovom dijelu opisno, dok ćemo se u sljedećem poglavlju upoznati s preciznim definicijama.

Podmatrica matrice A je matrica koju možemo dobiti uklanjanjem redaka i/ili stupaca matrice A. Blok-matrica B je matrica koja je (za neke pozitivne cijele brojeve r i c) podijeljena u rc podmatrice B_{ij} ($i = 1,\ldots,r$; $j = 1,\ldots,c$) koje nazivamo blokovi. Ovi koncepti se vrlo često pojavljuju u statistici i drugim disciplinama koje uključuju vjerojatnost. Blok-matrice možemo množiti skalarom, transponirati, zbrajati i međusobno množiti o čemu ćemo reći nešto detaljnije. Ukoliko je dana blok-matrica pozitivno semidefinitna onda možemo računati rang, determinantu i inverz dane matrice što ćemo vidjeti u primjerima.

Poseban oblik blok-matrica su blok-trokutaste matrice i blok-dijagonalne matrice. Blok-trokutaste matrice dijelimo na gornje i donje blok-trokutaste.

Ako je $A_{ij} = 0$ za $j < i = 1, \ldots, r$, tj. ako je

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{rr} \end{bmatrix}$$

tada se A naziva **gornja blok-trokutasta matrica**. Slično, ako je $A_{ij} = 0$ za $j > i = 1, \ldots, r$, tj. ako je

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \ldots & A_{rr} \end{bmatrix}$$

tada se A naziva **donja blok-trokutasta matrica**. Za blok-matricu A koja je gornje i/ili donje trokutasta jednostavnije kažemo da je blok-trokutasta matrica. Za matricu A koja je i gornje i donje blok-trokutasta kažemo da je **blok-dijagonalna matrica**. Primjerice:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{rr} \end{bmatrix}$$

što kraće zapisujemo kao diag(A_{11},A_{22},...,A_{rr}). Kod blok-trokutastih matrica tražit ćemo
svojstvene polinome, a kod blok-dijagonalnih matrica minimalne polinome.

U posljednjem poglavlju ovog rada navest ćemo nekoliko zadataka. Zadaci su preuzeti sa studentskih natjecanja IMC i Putnam ([5] i [6]).

International Mathematics Competition (IMC) je studentsko natjecanje koje organizira University College London. Na natjecanje može ići po nekoliko studenata za svakog sveučilišta koje sudjeluje u natjecanju i jedan ili više mentora koji su ujedno i članovi komisije. Studenti bez mentora također su dobrodošli. Natjecanje je planirano za studente koji su završili prvu, drugu, treću ili četvrtu godinu studija, a da u trenutku natjecanja nisu stariji od 23 godine. Istovremeno, ne postoji minimalna dobna granica. Natjecanje traje dva dana, svaki dan po pet sati, a problemi koji se pojavljuju su iz polja algebre, analize, geometrije i kombinatorike. Službeni jezik natjecanja je engleski, a na natjecanju ukupno sudjeluje oko 200 studenata iz cijeloga svijeta.
Matematičko natjecanje Williama Lowella Putnama najistaknutije je matematičko natjecanje za studente preddiplomskih studija u Sjedinjenim Državama i Kanadi. Natjecanje u Putnamu održava se svake godine prve subote u prosincu. Natjecanje se sastoji od dva trosatna zasjedanja, jednog ujutro i jednog popodne. Tijekom svake sesije sudionici individualno rade na 6 izazovnih matematičkih problema. Putnam je započeo 1938. godine kao natjecanje između matematičkih odsjeka na fakultetima i sveučilištima. Sada je natjecanje preraslo u vodeći svjetski ispit iz matematike na sveučilišnoj razini. Iako sudionici samostalno rade na problemima, u natjecanju postoji i timski aspekt. Institucije se rangiraju prema zbroju bodova njihova tri sudionika s najviše bodova. Nagrade se dodjeljuju sudionicima s najvišim ocjenama i odjelima za matematiku pet institucija čiji je zbroj tri najbolja rezultata najveći.

2 | Osnovni pojmovi

2.1 Podmatrice i blok-matrice

Sljedeći pojmovi i primjeri su nužni za razumijevanje ovog rada. Sve definicije su preuzete iz [2], [3] ili [4].

Definicija 1 (Podmatrica)**.** *Podmatrica matrice A je matrica koju dobijemo uklanjanjem redaka i/ili stupaca matrice A.*

Primjerice, neka je dana 4×5 matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

te ako uklonimo 2. i 3. redak i 3. stupac dobijemo 2×4 matricu

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjetimo da je svaka matrica sama sebi podmatrica dobivena uklanjanjem 0 redaka i 0 stupaca. Podmatrica kvadratne matrice reda n naziva se **glavna podmatrica** ako je dobivena uklanjanjem istih redaka i stupaca (tj. uklonimo i-ti redak svaki put kad uklonimo i-ti stupac, i obrnuto). Lako se pokaže da je glavna podmatrica simetrične matrice simetrična, dijagonalne matrice dijagonalna, gornje/donje-trokutaste matrice gornje/donje trokutasta.

Matrica može biti podijeljena na podmatrice na različite načine horizontalnim i/ili vertikalnim isprekidanim linijama, npr.

$$A = \left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 4 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

a dobivene podmatrice zovemo **blokovi** iz čega prirodno slijedi iduća definicija:

Definicija 2 (Blok-matrica)**.** *Blok-matrica je matrica koja je (isprekidanim) horizontalnim i vertikalnim linijama između redaka i stupaca podijeljena u manje podmatrice, odnosno, blokove.*

Drugim riječima, $m \times n$ blok-matrica je $m \times n$ matrica $A = [A_{ij}]$ koja je zadana u općem obliku kao:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1c} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rc} \end{bmatrix}$$

pri čemu je A_{ij} matrica tipa $m_i \times n_j$ $(i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, c)$, a $m_1, \dots, m_r$ i $n_1, \dots, n_c$ su pozitivni cijeli brojevi takvi da vrijedi $m_1 + \dots + m_r = m$ i $n_1 + \dots + n_c = n$. Dakle, blok-matricu možemo smatrati matricom čiji su elementi matrice.

Primjer 1. *Neka je dana matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matrice B i C prikazuju različitu podjelu matrice A na blokove:

$$B = \left[\begin{array}{ccc:cc} 2 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ \hdashline 3 & 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 3 \end{array}\right], \qquad C = \left[\begin{array}{cc:cc:c} 2 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ \hdashline 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 4 & 3 & 7 & 3 \end{array}\right].$$

Definicija 3. *Neka je zadana blok-matrica M. Kažemo da je M kvadratna blok-matrica ako:*

1. *blokovi formiraju kvadratnu matricu,*
2. *dijagonalni blokovi su kvadratne matrice.*

Iz posljednja dva uvjeta zaključujemo da je blok-matrica kvadratna ako i samo ako je podijeljena jednakim brojem horizontalnih i vertikalnih linija i one su simetrične.

Primjer 2. *Neka su dane blok-matrice*

$$A = \left[\begin{array}{cc:c:cc} 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ \hdashline 3 & 7 & 5 & 4 & 1 \\ \hdashline 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 7 & 3 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{cc:cc:c} 2 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ \hdashline 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 3 \end{array}\right].$$

Jesu li A i B kvadratne blok-matrice?

Prema prethodnoj definiciji zaključujemo da je A kvadratna blok-matrica, a B nije jer joj 1. i 3. dijagonalni blok nisu kvadratne matrice.

3 | Blok-matrice

U ovom poglavlju ćemo se upoznati s operacijama koje možemo vršiti nad blok-matricama.

3.1 Računske operacije s blok-matricama

3.1.1 Množenje skalarom blok-matrica

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1c} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rc} \end{bmatrix}$$

blok-matrica $m \times n$ čiji je ij-ti blok A_{ij} tipa $m_i \times n_j$. Tada je, za bilo koji skalar k,

$$kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \dots & kA_{1c} \\ kA_{21} & kA_{22} & \dots & kA_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kA_{r1} & kA_{r2} & \dots & kA_{rc} \end{bmatrix}.$$

Posebno, ako je $k{=}-1$, tada je

$$-A = \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1c} \\ -A_{21} & -A_{22} & \dots & -A_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_{r1} & -A_{r2} & \dots & -A_{rc} \end{bmatrix}.$$

Primjer 3. *Neka je dana blok-matrica*

$$A = \left[\begin{array}{cc:c:cc} 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ \hdashline 3 & 7 & 5 & 4 & 1 \\ \hdashline 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

i skalar $k = 2$. *Tada je*

$$2A = \left[\begin{array}{cc:c:cc} 4 & 0 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 0 & 6 \\ \hdashline 6 & 14 & 10 & 8 & 2 \\ \hdashline 2 & 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 16 & 6 & 14 & 6 \end{array}\right].$$

3.1.2 Transponiranje blok-matrica

Transponiranu matricu blok-matrice A označavamo s A^T. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1c} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rc} \end{bmatrix}$$

onda je njezina transponirana matrica

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \dots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \dots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1c}^T & A_{2c}^T & \dots & A_{rc}^T \end{bmatrix}.$$

Drugim riječima, ako je A $m \times n$ blok-matrica koja se sastoji od rc blokova, onda je A^T blok-matrica koja sadrži cr blokova pri čemu je svaki ji-ti blok matrice A^T jednak transponiranom ij-tom bloku matrice A.

Primjer 4. *Neka je dana blok-matrica*

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 3 & 7 & 5 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 7 & 3 \end{array}\right].$$

Tada je

$$A^T = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

3.1.3 Zbrajanje blok-matrica

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1c} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rc} \end{bmatrix}$$

blok-matrica $m \times n$ čiji je ij-ti blok A_{ij} tipa $m_i \times n_j$ i neka je

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1v} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{u1} & B_{u2} & \dots & B_{uv} \end{bmatrix}$$

blok-matrica $p \times q$ čiji je ij-ti blok B_{ij} tipa $p_i \times q_j$. Matrice A i B možemo zbrajati pod uvjetom da su istog tipa, odnosno, ako je $p = m$ i $q = n$. Ako je $u = r$, $v = c$, $p_i = m_i$ (za $i = 1, \dots, r$) i $q_j = n_j$ (za $j = 1, \dots, c$), tj. ako su, osim toga što je zbrajanje dobro definirano za matrice A i B, retci i stupci matrice B podijeljeni na isti način kao kod matrice A. Tada vrijedi

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1c} + B_{1c} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \dots & A_{2c} + B_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} + B_{r1} & A_{r2} + B_{r2} & \dots & A_{rc} + B_{rc} \end{bmatrix}.$$

Prethodni rezultat možemo proširiti na zbrajanje konačnog broja blok-matrica.

Primjer 5. *Neka su dane blok-matrice*

$$A = \left[\begin{array}{cc:c:cc} 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ \hdashline 3 & 7 & 5 & 4 & 1 \\ \hdashline 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 7 & 3 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{cc:c:cc} 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 4 & -5 & 2 \\ \hdashline -6 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ \hdashline 2 & 0 & 4 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Tada je

$$A + B = \left[\begin{array}{cc:c:cc} 5 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 12 & 4 & 5 & -5 & 5 \\ \hdashline -3 & 8 & 6 & 2 & 4 \\ \hdashline 3 & 3 & 4 & -2 & 6 \\ -3 & 10 & 4 & 9 & 4 \end{array}\right].$$

3.1.4 Množenje blok-matrica

Kako bismo mogli definirati množenje blok-matrica, matrice moraju biti takve da je operacija množenja dobro definirana.

Definicija 4. *Neka su $X = [X_{ik}]$ i $Y = [Y_{kj}]$ blok-matrice takve da je broj stupaca svakog bloka X_{ik} jednak broju redaka svakog bloka Y_{kj} (time je svaki produkt $X_{ik}\, Y_{kj}$ dobro definiran). Tada je*

$$XY = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mn} \end{bmatrix}$$

gdje je $Z_{ij} = X_{i1}Y_{1j} + X_{i2}Y_{2j} + \cdots + X_{ip}Y_{pj}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

Primjer 6. *Neka su dane blok-matrice*

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \\ \hdashline -2 & -6 & 3 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ \hdashline 2 & 1 \end{array}\right]$$

pri čemu je blok-matrica A tipa 2×2, a blok-matrica B tipa 2×1. Neka su $A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ i $B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$ redom blokovi matrice A i B. Tada je produkt AB blok-matrica tipa 2×1 čiji su blokovi jednaki:

$[AB]_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ i $[AB]_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 22 & -25 \end{bmatrix}$ pa je blok-matrica AB jednaka $AB = \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ -3 & 2 \\ \hdashline 22 & -25 \end{array}\right]$.

3.2 Rang, inverz, determinanta

Da bismo odredili rang, inverz i determinantu potrebne su nam iduće tvrdnje preuzete iz [2] koje ćemo iskazati bez dokaza.

Teorem 1. *Neka je kvadratna blok-matrica A dana izrazom*

$$A = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix},$$

gdje su T i W kvadratne matrice reda m i n, U matrica tipa $m \times n$ i V matrica tipa $n \times m$. Ako je $rang(T) = m$, tj. ako je T nesingularna tada je

$$rang(A) = rang \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix} = m + rang[W - VT^{-1}U].$$

Teorem 2. *Neka je kvadratna blok-matrica A dana izrazom*

$$A = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix},$$

gdje su T i W kvadratne matrice reda n, U matrica tipa $m \times n$ i V matrica tipa $n \times m$. Pretpostavimo da je T nesingularna. Tada je A nesingularna ako i samo ako je matrica reda n oblika $Q = W - VT^{-1}U$ nesingularna i u tom slučaju je

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} T^{-1} + T^{-1}UQ^{-1}VT^{-1} & -T^{-1}UQ^{-1} \\ -Q^{-1}VT^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T^{-1}U \\ I_n \end{bmatrix} Q^{-1}[-VT^{-1} \quad I_n]. \end{aligned}$$

Teorem 3. *Neka je kvadratna blok-matrica A dana izrazom*

$$A = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix},$$

gdje su T i W kvadratne matrice reda m i n, U matrica tipa $m \times n$ i V matrica tipa $n \times m$. Ako je T nesingularna, tada je

$$|A| = \begin{vmatrix} T & U \\ V & W \end{vmatrix} = |T||W - VT^{-1}U|.$$

Ukoliko imamo blok-matricu koja je gornje (donje) trokutasta, onda njezinu determinantu računamo pomoću idućeg teorema (preuzetog iz [4]).

Teorem 4. *Neka je A gornje (donje) blok-trokutasta matrica s dijagonalnim blokovima $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$. Tada je*

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \dots \det(A_{nn}).$$

3.3 Blok-dijagonalna i blok-trokutasta matrica

Poseban oblik blok-matrica su blok-dijagonalne i blok-trokutaste matrice za koje ćemo na jednostavan način računati svojstveni i minimalni polinom o čemu ćemo reći nešto detaljnije u idućem potpoglavlju.

Definicija 5 (Blok-dijagonalna matrica)**.** *Blok-matrica oblika*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

(čiji su svi nedijagonalni elementi nul-matrice) zove se blok-dijagonalna matrica i može se kraće zapisati kao

$$A = diag(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}).$$

Lema 1. *Neka A_{ii} predstavlja matricu reda n_i $(i = 1, \dots, n)$, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_n$ i neka je A blok-dijagonalna matrica reda n, $A = diag(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn})$. Tada vrijedi:*

1. *A je pozitivno semidefinitna ako i samo ako su A_{11},A_{22},...,A_{nn} pozitivno semidefinitne;*

2. *A je pozitivno definitna ako i samo ako su $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ pozitivno definitne.*

Dokaz prethodne tvrdnje može se pronaći u [2].
Idući rezultat preuzet je iz [3].

Primjer 7. *Neka*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{rr} \end{bmatrix}$$

predstavlja gornju blok-trokutastu matricu reda n čiji je ij-ti blok A_{ij} tipa $n_i \times n_j$ $(j \geq i = 1, \dots, r)$. Pokažimo da je A gornje-trokutasta ako i samo ako je svaki od njezinih dijagonalnih blokova gornje-trokutast.

Rješenje.
Neka a_{ts} predstavlja ts-i element od A $(t, s = 1, \ldots, n)$. Neka je

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1, n_1+\cdots+n_{j-1}+1} & \cdots & a_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1, n_1+\cdots+n_{j-1}+n_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i, n_1+\cdots+n_{j-1}+1} & \cdots & a_{n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i, n_1+\cdots+n_{j-1}+n_j} \end{bmatrix}$$

$(j \geq i, i = 1, \ldots, r)$. Pretpostavimo da je A gornje-trokutasta. Tada je, prema definiciji gornje-trokutaste matrice $a_{ts} = 0$ za $s < t$, $t = 1, \ldots, n$. Stoga, $a_{n_1+\cdots+n_{i-1}+k, n_1+\cdots+n_{i-1}+l}$ (što je kl-ti element i-tog dijagonalnog bloka A_{ii}) je jednako 0 za $l < k$, $k = 1, \ldots, n_i$ što implicira da je A_{ii} gornje trokutasta $(i = 1, \ldots, r)$.

Obratno, pretpostavimo da su A_{11}, $A_{22}, \ldots$, A_{rr} gornje-trokutaste. Neka su t i s cijeli brojevi $(1 \leq t, s \leq n)$ takvi da je $a_{ts} \neq 0$. Tada je, očito, za neke cijele brojeve i i $j \geq i$, a_{ts} element podmatrice A_{ij}, recimo kl-ti element, u kojem slučaju je $t = n_1 + \cdots + n_{i-1} + k$ i $s = n_1 + \cdots + n_{j-1} + l$. Ako je $j > i$, tada (obzirom $k \leq n_i$) $t < s$. Štoviše, ako je $j = i$, tada (obzirom da je A_{ii} gornje-trokutasta) $k \leq l$ što implicira $t \leq s$. Stoga je, u svakom slučaju, $t \leq s$. Zaključujemo da je A gornje-trokutasta.

3.4 Svojstveni i minimalni polinom

U ovom dijelu promotrit ćemo kako odrediti svojstveni i minimalni polinom. Prisjetimo se definicije svojstvenog polinoma:

Definicija 6. *Neka je A kvadratna matrica reda n. Polinom*

$$\kappa_\lambda = \det(\lambda I - A)$$

zove se svojstveni polinom matrice A. Nultočke svojstvenog polinoma su svojstvene vrijednosti matrice A.

Ako su A i B slične matrice, tj. ako postoji proizvoljna nesingularna matrica S takva da vrijedi $B = S^{-1}AS$, onda A i B imaju jednake svojstvene polinome.

Ako matricu svedemo na blok-trokutastu matricu onda njezin svojstveni polinom računamo na sljedeći način:

Lema 2. *Neka je M blok-trokutasta matrica oblika*

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & B \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

gdje su A_{11} i A_{22} kvadratne matrice. Tada je $tI - M$ također blok-trokutasta matrica s dijagonalnim blokovima $tI - A_{11}$ i $tI - A_{22}$, a svojstveni polinom matrice M je produkt svojstvenih polinoma njezinih dijagonalnih blokova A_{11} i A_{22}, tj.

$$\begin{aligned} \kappa_M(t) = \det(tI - M) &= \begin{vmatrix} tI - A_{11} & -B \\ 0 & tI - A_{22} \end{vmatrix} \\ &= \det(tI - A_{11}) \det(tI - A_{22}) \\ &= \kappa_{A_{11}}(t)\kappa_{A_{22}}(t). \end{aligned}$$

Prethodne tvrdnje i nešto više o njima možemo pronaći u [1].
Sljedeći teorem dokazuje se na induktivan način primjenom prethodne leme:

Teorem 5 (Svojstveni polinom)**.** *Neka je M blok-trokutasta matrica s dijagonalnim blokovima $A_{11}, \dots, A_{rr}$. Tada je svojstveni polinom matrice M jednak produktu svojstvenih polinoma dijagonalnih blokova A_{ii}, tj. $\kappa_M(t) = \kappa_{A_{11}}(t)\kappa_{A_{22}}(t) \cdots \kappa_{A_{rr}}(t)$.*

Uz svojstveni polinom, važno je spomenuti i minimalni polinom. Minimalni polinom matrice A je normirani polinom μ_A najmanjeg mogućeg stupnja takav da je $\mu_A(A) = 0$, a nešto više o njemu spominje se u [1].

Teorem 6 (Minimalan polinom)**.** *Neka je M blok-dijagonalna matrica s dijagonalnim blokovima $A_{11}, \dots, A_{rr}$. Minimalni polinom matrice M jednak je najmanjem zajedničkom višekratniku (NZV) minimalnih polinoma od dijagonalnih blokova A_{ii}.*

Primjetimo da se Teorem 3.9. odnosi samo na blok-dijagonalne matrice, a Teorem 3.8. na blok-trokutaste matrice.

4 | Zadaci s međunarodnih natjecanja

U ovom poglavlju riješit ćemo nekoliko zadataka sa studentskih natjecanja [5] i [6].

Zadatak 1. Neka je n prirodan broj. Pretpostavimo da su A, B i M realne matrice reda n takve da je $AM = MB$ i da A i B imaju jednake svojstvene polinome. Pokažite da je $\det(A - MX) = \det(B - XM)$ za svaku realnu matricu X reda n.

Rješenje. Koristeći transformacije nad retcima i stupcima matrice M, možemo konstruirati regularne matrice U i V takve da je $U^{-1}MV$ blok dijagonalna matrica oblika

$$M' = U^{-1}MV = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Označimo s $A' = U^{-1}AU$, $B' = V^{-1}BV$, $X' = V^{-1}XU$. Vrijedi $A'M' = M'B'$,

$$\det(A - MX) = \det(U^{-1}(A - MX)U) = \det(A' - M'X')$$

i

$$\det(B - XM) = \det(V^{-1}(B - XM)V) = \det(B' - X'M').$$

Odredimo pripadajuće blok dekompozicije matrica A', B' i X':

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B' = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \qquad X' = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}.$$

Imamo

$$A'M' = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}, \qquad M'B' = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa je $A_{11} = B_{11}$ i $A_{21} = B_{12} = 0$ iz čega slijedi da je svojstveni polinom matrice A umnožak svojstvenih polinoma matrica A_{11} i A_{22} i svojstveni polinom matrice B je umnožak svojstvenih polinoma matrica B_{11} i B_{22}. Kako je $A_{11} = B_{11}$, slijedi da A_{22} i B_{22} imaju jednake svojstvene polinome, te i jednake determinante. Kako je

$$X'M' = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{bmatrix}, \qquad M'X' = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
\det(A - MX) &= \det(A' - M'X') = \det \begin{bmatrix} A_{11} - X_{11} & A_{12} - X_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \det(A_{11} - X_{11}) \det(A_{22}) = \det(B_{11} - X_{11}) \det(B_{22}) \\
&= \det \begin{bmatrix} B_{11} - X_{11} & 0 \\ B_{21} - X_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \det(B' - X'M') \\
&= \det(B - XM)
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Zadatak 2. Neka je M invertibilna blok-matrica reda $2n$ dana izrazom

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad i \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je $\det(M)\det(H) = \det(A)$.

Rješenje.

Neka je I jedinična matrica reda n. Tada je

$$\det(M)\det(H) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & H \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} = \det(A).$$

Zadatak 3. Neka su A i B realne matrice takve da je A 4×2 matrica i B 2×4 matrica i neka je

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pronađite BA.

Rješenje.

Neka je $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ gdje su A_1, A_2, B_1 i B_2 matrice reda 2. Tada je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{bmatrix}$$

iz čega slijedi da je $A_1B_1 = A_2B_2 = I_2$ i $A_1B_2 = A_2B_1 = -I_2$. Tada je $B_1 = A_1^{-1}$, $B_2 = -A_1^{-1}$ i $A_2 = B_2^{-1} = -A_1$. Konačno je

$$BA = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = B_1A_1 + B_2A_2 = 2I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4. Neka su A, B, C i D realne matrice reda n takve da su matrice AB^T i CD^T simetrične i $AD^T - BC^T = I$. Dokažite da je $A^TD - C^TB = I$.

Rješenje. Uvjeti koje zapravo imamo su:

$$AD^T - BC^T = I, -AB^T + BA^T = 0$$

$$CD^T - DC^T = 0, -CB^T + DA^T = I$$

što je ekvivalentno

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

pa slijedi

$$\begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Donji desni blok nam daje $A^TD - C^TB = I$.

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] D. A. Harville, *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] D. A. Harville, *Matrix Algebra: Exercises And Solutions*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[4] S. Lipschutz, M. L. Lipson, *Linear algebra (4th Edition)*, The McGraw-Hill Companies, New York, 2009.

[5] Internacionalno studentsko natjecanje IMC, dostupno na `https://www.imc-math.org.uk`

[6] Matematičko natjecanje Putnam, dostupno na `https://www.maa.org/math-competitions/putnam-competition`

Sažetak

U ovom završnom radu proučavali smo pojam podmatrica, definirali blok-matrice i naveli nekoliko primjera blok-matrica. Također smo proučili množenje blok-matrica skalarom, transponiranje, zbrajanje i množenje blok-matrica uz odgovarajuće primjere. Definirali smo rang, inverz i determinantu blok-matrice te zatim i blok-dijagonalnu i blok-trokutastu matricu te smo naveli neka svojstva i objasnili način kako pronaći svojstveni i minimalni polinom blok-matrice. Na kraju smo naveli primjere riješenih zadataka s matematičkih natjecanja.

Ključne riječi

podmatrica, blok-matrica, svojstveni polinom, minimalni polinom

Partitioned matrices

Summary

In this final paper we have studied the concept of submatrices, defined partitioned matrices (block matrices) and gave some examples of partitioned matrices. Also, we have studied multiplication of partitioned matrices by a scalar, transposes, sums and products of partitioned matrices with appropriate examples. We have defined rank, inverse and determinant of partitioned matrix and then we've defined partitioned-diagonal matrix and partitioned-triangular matrix and some of their properties and explained how to find characteristic and minimal polynomial. At the end, we listed some examples of solved tasks from math competitions.

Keywords

submatrix, partitioned matrix (block-matrix), characteristic polynomial, minimal polynomial

Životopis

Zovem se Helena Sluganović. Rođena sam 21.rujna 1994. u Vinkovcima gdje sam i odrasla. Pohađala sam Osnovnu školu Ivana Mažuranića, zatim Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića, smjer matematički. Tokom školovanja sam redovito sudjelovala na učeničkim natjecanjima iz matematike i kemije. Nakon srednje škole, upisala sam Fakultet primijenjene matematike i informatike u Osijeku.