Kriteriji konvergencije redova realnih brojeva

Šeremet, Marija

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Kriteriji konvergencije redova realnih brojeva

Završni rad

Mentor:
doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović Ivičić

Student:
Marija Šeremet

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

U ovom završnom radu objašnjena je osnovna teorija koja je nužna za razumijevanje pojma redova realnih brojeva i njihove konvergencije. Također, navedena su i analizirana neka svojstva redova realnih brojeva te su navedeni neki primjeri takvih redova. Rad se sastoji od tri poglavlja: Osnovni pojmovi, Uspoređivanje redova, apsolutna konvergencija redova te Kriteriji konvergencije redova.
U prvom poglavlju smo definirali sam pojam niza realnih brojeva, pojam niza parcijalnih suma, pojam konvergencije niza te pojam reda realnih brojeva. Definirali smo kada je red konvergentan i divergentan te nužan uvjet konvergencije reda. Uz to smo iskazali teorem koji govori o konvergenciji linearne kombinacije konvergentnih redova, te naveli primjere redova, kao što su harmonijski red, geometrijski red i Dirichletov red.
U drugom poglavlju definirali smo red s pozitivnim članovima te osnovna svojstva za takve redove. Iskazali smo kako uspoređivati redove te definirali kada je red apsolutno, a kada uvjetno konvergentan, te osnovna svojstva za apsolutno konvergentne redove.
U posljednjem poglavlju naveli smo koji su to kriteriji konvergencije redova te pokazali na primjeru kako koristiti te kriterije.

2 | Osnovni pojmovi

Za potrebe razumijevanja u daljnjem radu uvest ćemo pojam niza realnih brojeva. Funkciju $a : \mathbb{N} \to S$ nazivamo niz u S. Sada za $n \in \mathbb{N}$ pišemo $a(n) = a_n$ i a_n nazivamo $n-$ti ili opći član niza a. Uobičajena oznaka za niz je $(a_n)_n$ ili samo (a_n). Za kodomenu niza možemo uzeti bilo koji neprazan skup. Mi ćemo promatrati slučajeve kada je kodomena skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Primjer 1. *Niz kojemu je opći član zadan s $a_n = \frac{1}{n}$ je niz realnih brojeva.*

Primjer 2. *Geometrijski niz definiramo na način da je kvocijent susjednih članova konstantan; točnije:*

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \Rightarrow a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}\,, \text{ za } n = 2, 3, \cdots$$

Dakle, svaki član (osim prvoga) u geometrijskom nizu (ako su mu članovi realni i pozitivni) je geometrijska sredina[1] susjednih članova.
Ako kvocijent dvaju susjednih članova označimo s q, očito će biti

$$a_2 = a_1 q, a_3 = a_2 q = a_1 q^2, \cdots, a_n = a_1 q^{n-1}, \cdots.$$

Izraz a_n predstavlja opći član geometrijskog niza.

Pojam konvergentnog niza jedan je od najvažnijih pojmova u ovom radu.
Za niz (a_n) realnih brojeva kažemo da je konvergentan ako postoji realan broj a_0, sa svojstvom da za svaki $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $|a_n - a_0| < \epsilon$ za svaki prirodan broj n za koji je $n > n_0$. Broj a_0 nazivamo limes niza (a_n), a za niz (a_n) kažemo da konvergira broju a_0 i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Primjer 3. [6, *str. 68*] *Niz $(\frac{1}{n})$ konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Zaista, za $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Odavde $n > n_0$ povlači $n > \frac{1}{\epsilon}$, što daje $\frac{1}{n} < \epsilon$; dakle*

$$(n > n_0) \Rightarrow \left(\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \right),$$

a to pokazuje da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

U nastavku bit će definiran red realnih brojeva, konvergencija reda te će biti navedeni neki primjeri redova.

[1] Za nenegativne brojeve a i b, broj $\sqrt{ab}$ nazivamo njihovom geometrijskom sredinom.

2.1 Pojam reda

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Niz parcijalnih suma (s_n) definira se induktivno kao:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lako se vidi da je s_n suma prvih n članova niza (a_n).

Definicija 1. *Uređeni par nizova realnih brojeva $((a_n), (s_n))$ nazivamo redom realnih brojeva i označavamo s $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$. Pri tome a_n nazivamo općim članom, a s_n nazivamo $n-$tom parcijalnom sumom reda $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$.*

Još neke od oznaka za red su $\sum a_n$ ili $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ili $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$.

Primjer 4. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$ *je red.*

2.2 Konvergencija redova

Definicija 2. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Kažemo da je niz (a_n) sumabilan u $\mathbb{R}$ ili da je red $\sum a_n$ konvergentan u $\mathbb{R}$ ako je niz parcijalnih suma (s_n) reda $\sum a_n$ konvergentan u $\mathbb{R}$. Pri tome broj*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

zovemo sumom reda $\sum a_n$ i označavamo sa

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots . \tag{2.1}$$

Red $\sum a_n$ je divergentan ako je niz parcijalnih suma (s_n) divergentan.

Sad kada smo uveli definiciju konvergencije reda, možemo vidjeti da simbol $\sum a_n$ ima dvostruko značenje. S jedne strane to predstavlja uređen par dvaju nizova (a_n) i (s_n) i to značenje će za nas biti i primarno, dok s druge strane to označava i broj $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, ako niz (s_n) konvergira. Kad god budemo htjeli da nam taj simbol predstavlja broj, pisat ćemo „granice” sumacije, odnosno pisat ćemo $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Kako su nam od posebnog interesa konvergentni redovi, iskazat ćemo i dokazat nužan uvjet za konvergenciju reda.

Teorem 1. *(Nužan uvjet konvergencije reda)[3, str. 162] Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, onda niz* $(a_n)_n$ *konvergira k nuli, tj. vrijedi*

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira}) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} a_n = 0). \tag{2.2}$$

Dokaz. Ako red (2.1) konvergira k broju s, onda vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

Obrat implikacije (2.2) općenito nije istina, što je vidljivo iz sljedećeg primjera.

Primjer 5. [6, *str. 82*] *Harmonijski red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots , \tag{2.3}$$

divergira k $+\infty$.
Uočimo da vrijedi

$$s_{n+1} = 1 + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1} > s_n.$$

Time smo pokazali da niz (s_n) *parcijalnih suma reda (2.3) strogo raste. Tvrdimo da podniz* $s(2^n) = s_{2^n}, n \in \mathbb{N}$, *niza (2.3) divergira k* $+\infty$.
Koristeći $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ *za svaki* $k \in \mathbb{N}$, *dolazimo do*

$$s(1) = 1, s(2) = 1 + \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} s(2^2) = s(4) = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, \\ s(2^3) = s(8) = s(4) + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s(4) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \\ = s(4) + \frac{1}{2} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ako je

$$s(2^n) > 1 + n \cdot \frac{1}{2}, \tag{2.5}$$

onda je

$$\begin{aligned} s(2^{n+1}) = s(2^n) + \frac{1}{1+2^n} + \frac{1}{2+2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n + 2^n} > \\ > s(2^n) + \frac{1}{2^n+2^n} + \frac{1}{2^n+2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} = s(2^n) + 2^n \frac{1}{2 \cdot 2^n} > \\ > \left(1 + n \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + (n+1)\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Metodom matematičke indukcije zaključujemo da (2.5) *vrijedi za svaki* $n > 1$. *Budući da smo pokazali da podniz* $(s(2^n))$ *strogo rastućeg niza* (s_n) *divergira k* $+\infty$, *to znači da i niz* (s_n) *divergira k* $+\infty$, *odnosno* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. *Primijetimo, red divergira, a vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. *Možemo zaključiti da čak ako niz općih članova konvergira k nuli, pripadni red ne mora konvergirati, odnosno da ne vrijedi obrat Teorema 1.*

Sljedeći teorem govori o konvergenciji linearne kombinacije konvergentnih redova.

Teorem 2. [3, *str.* 163] *Neka su* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentni redovi sa sumama A i B. Za svaki par* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *je red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ *konvergentan i vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dokaz. Označimo $A_n = a_1 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + \cdots + b_n$, $C_n = (\lambda a_1 + \mu b_1) + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n)$. Kako je $C_n = (\lambda A_n + \mu B_n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$, imamo $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} A_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} B_n$. Sada se lako vidi da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. □

2.3 Primjeri redova realnih brojeva

Kako bi bile jasnije prethodne definicije i teorem, promotrit ćemo nekoliko primjera redova te pokazati njihovu konvergenciju.

Primjer 6. [2, *str.* 280] *Geometrijski niz je niz realnih brojeva sa svojstvima definiranim u Primjeru 2. Pripadni geometrijski red je*

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}.$$

Ako je $q \neq 1$, *onda je*

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}. \tag{2.6}$$

Ako se relacija (2.6) *pomnoži sa q, dobiva se izraz:*

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n. \tag{2.7}$$

Sada oduzimanjem relacija (2.7) *i* (2.6) *dobijemo*

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n = a_1(1-q^n),$$

iz čega slijedi:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n. \tag{2.8}$$

Promatramo konvergenciju izraza (2.8) za netrivijalne slučajeve. Ako je $a_1 \neq 0$ i $|q| < 1$, dobijemo:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ako je $a_1 \neq 0$ i $|q| > 1$, dobijemo:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} (1-q^n) = \infty,$$

dok za $q < -1$ neparni članovi niza divergiraju u $+\infty$, a parni u $-\infty$.
Ako je $|q| = 1$, razlikujemo još dva slučaja:

Za $q = 1$ je $S_n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$ te $S = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, red divergira.

Za $q = -1$, niz parcijalnih suma (S_n) je $1, 0, 1, 0, \cdots$, pa niz (S_n) divergira.

Dakle, geometrijski red konvergira za $|q| < 1$ i suma mu je $S = \frac{a_1}{1-q}$, a divergira za $|q| \geq 1$.

Evo još nekoliko primjera redova:

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$ konvergira i ima sumu 1, [6, str. 81].

Hiperharmonijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$, konvergira onda i samo onda ako je $\alpha > 1$.

Primjerice redovi:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ konvergiraju,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ divergiraju, [1, str. 176].

Dirichletov red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$, $p \in \mathbb{R}$, za

a) $p > 1$, konvergira,

b) $p \leq 1$, divergira.

Za $p = 1$ Dirichletov red je zapravo harmonijski red za koji smo već pokazali da divergira, [8, str. 345].

Na idućem primjeru pokazat ćemo kako primijeniti nužan uvjet konvergencije i na taj način ubrzati provjeru određivanja konvergira li određeni red ili ne. Ukoliko neki red ne zadovoljava nužan uvjet konvergencije, odmah možemo zaključiti da je divergentan.

Primjer 7. *[5, str. 116] Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n^2+4}$ je divergentan jer nije ispunjen nužan uvjet konvergencije, odnosno:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n^2+4} = 1 \neq 0.$$

Kako bismo jednostavnije mogli provjeriti konvergenciju i drugih složenijih redova, u idućoj cjelini promotrit ćemo još neke od načina provjere konvergencije.

3 | Uspoređivanje redova, apsolutna konvergencija redova

Kako bismo ispitali konvergenciju reda $\sum a_n$, možemo promatrati red apsolutnih vrijednosti članova polaznog reda $\sum |a_n|$, odnosno red s pozitivnim članovima. Zatim taj red apsolutnih vrijednosti uspoređujemo s nekim poznatim redom čiju konvergenciju znamo, npr. geometrijski red za koji smo u Primjeru 6. razjasnili konvergenciju.

Definicija 3. *Red $\sum a_n$ nazivamo redom s pozitivnim članovima ako je $a_n \geq 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Teorem 3. [3, *str. 164*]

1. *Red $\sum a_n$ s pozitivnim članovima konvergira ako i samo ako je njegov niz parcijalnih suma $(s_n)_n$ ograničen. Tada je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

2. *Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s pozitivnim članovima konvergira, onda njegova suma ne ovisi o poretku članova, tj. vrijedi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, gdje je $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcija (permutacija).*

Dokaz. :

1. Neka je $(s_n)_n$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Znamo da je $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$, te je i $(s_n)_n$ rastući. Ovakav niz je konvergentan onda i samo onda ako je ograničen.

2. Označimo sa $(s'_n)_n$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$, pri čemu je $a'_n = a_{\sigma(n)}$. Ako uzmemo proizvoljni $n \in \mathbb{N}$ postoje $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sigma(1) < p, \sigma(2) < p, \cdots, \sigma(n) < p, \tau(1) < q, \tau(2) < q, \cdots, \tau(n) < q$, pri čemu je $\tau = \sigma^{-1}$, iz čega vidimo kako je $s'_n = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \cdots + a_{\sigma(n)} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_p = s_p$ i $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{\sigma(\tau(1))} + a_{\sigma(\tau(2))} + \cdots + a_{\sigma(\tau(n))} \leq a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \cdots + a_{\sigma(q)} = s'_q$. Rezultat toga je $\sup\{s'_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{s_m : m \in \mathbb{N}\}$, odnosno $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{m\to\infty} s'_m = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a'_m$.

□

Primjer 8. [8, *str.* 331] *Pokažimo da je red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$ *konvergentan za* $p > 1$.
Kako je u pitanju red sa pozitivnim članovima, niz $n-$*tih parcijalnih suma* (s_n) *je rastući.*
Dokažimo da je niz (s_n) *odozgo ograničen.*
Stavimo $p = 1 + q$, *gdje je* $q > 0$.
Ako u nejednakost

$$\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} < n \cdot \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^q},$$

stavimo redom $n = 2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}, \cdots$, *dobijemo nejednakosti*

$$\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} < 2 \cdot \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^q},$$

$$\frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} < 4 \cdot \frac{1}{4^p} = \left(\frac{1}{2^q}\right)^2,$$

$$\frac{1}{9^p} + \frac{1}{10^p} + \cdots + \frac{1}{16^p} < 8 \cdot \frac{1}{8^p} = \left(\frac{1}{2^q}\right)^3,$$

$$\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \frac{1}{(2^{k-1}+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^p} < 2^{k-1} \cdot \frac{1}{(2^{k-1})^p} = \left(\frac{1}{2^q}\right)^{k-1},$$

$$, \cdots ,$$

iz čega slijedi da za parcijalnu sumu s_{2^k} *vrijedi*

$$s_{2^k} < 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} + \left(\frac{1}{2^q}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^q}\right)^{k-1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2^q}\right)^{k-1}}{1 - \frac{1}{2^q}} < 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{\frac{1}{2^q}}{1 - \frac{1}{2^q}}.$$

No ovo znači da je niz $n-$*tih parcijalnih suma* (s_n) *ograničen odozgo, tj. da je*

$$s_n < 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{\frac{1}{2^q}}{1 - \frac{1}{2^q}}.$$

Stoga, na temelju Teorema 3 slijedi da je dani red konvergentan za $p > 1$.

3.1 Uspoređivanje redova

Lema 1. (*Uspoređivanje redova*)[4, *str.* 76] *Neka su* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *redovi s pozitivnim članovima i neka postoji takav broj* $c > 0$, *da vrijedi* $a_n < c \cdot b_n, n \in \mathbb{N}$.

1. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergira, onda konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i vrijedi:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, onda divergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz. Za parcijalne sume tih redova vrijedi:

$$\sigma_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq c \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = c \cdot s_n, \text{ tj. } \sigma_n \leq c \cdot s_n.$$

Nizovi (σ_n) i (s_n) su monotono rastući, i ako je $b = \sup s_n$, onda je $s_n \leq b$ i $\sigma_n \leq c \cdot b$, tj. niz (σ_n) je monotono rastući i ograničen odozgo. Prema tome, postoji $\lim \sigma_n = a \leq c \cdot b$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira i $\sigma_n \leq c \cdot s_n$, onda očito divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. □

Teorem 4. [3, *str. 166*] *Neka je* $(a_n)_n$ *niz u* $\mathbb{C}$.

1. *Ako konvergira red*
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \tag{3.1}$$
onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i vrijedi* $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
2. *Ako konvergira red* (3.1) *i ako je* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekcija, onda konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *i vrijedi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Dokaz. I. Ako pretpostavimo da je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{R}$ te definirajmo

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{ako je } a_n < 0 \end{cases}, \qquad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{ako je } a_n < 0 \end{cases}.$$

Za nizove $(a_n^+)_n$ i $(a_n^-)_n$ s pozitivnim članovima vrijedi

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-, \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Prema pretpostavci red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira i kako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n^+ \leq |a_n|, a_n^- \leq |a_n|$, po Lemi 1. redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergiraju. Označimo s A^+ i A^- njihove sume. Tada po Teoremu 2. vrijedi

$$A^+ - A^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

tj. red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan. Teorem 3. nam govori kako imamo $A^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+$ i $A^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-$, te dolazimo do

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A^+ - A^- = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)}^+ - a_{\sigma(n)}^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

II. Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$, $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Kako imamo da je $|\alpha_n| \leq |a_n|, |\beta_n| \leq |a_n|$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada su redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$, konvergentni, a odatle konvergiraju i redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$, iz čega ponovo slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Nadalje, za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo $|\sum\limits_{n=1}^{k} a_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{k} |a_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pa za $k \to \infty$ dobivamo $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Konačno, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(n)} + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_{\sigma(n)} + i\beta_{\sigma(n)}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

□

Primjer 9. [4, *str. 77*] *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \cdots$ *Kako red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$ *konvergira, po Teoremu 4 konvergira i zadani red.*

3.2 Apsolutno konvergentni redovi

Definicija 4. *Za red realnih brojeva $\sum a_n$ kažemo da je apsolutno konvergentan ako je red apsolutnih vrijednosti $\sum |a_n|$ konvergentan.*

Definicija 5. *Red realnih brojeva $\sum a_n$ je uvjetno konvergentan ako $\sum a_n$ konvergira, ali red apsolutnih vrijednosti $\sum |a_n|$ divergira.*

Uz ove definicije Teorem 4. možemo iskazati i ovako: *apsolutno konvergentan red je konvergentan; članove apsolutno konvergentnog reda možemo po volji permutirati, a da se suma reda ne promijeni, tj. za apsolutno konvergentan red vrijedi komutativnost zbrajanja* [6].

Teorem 5. [3, *str. 167*] *Neka su $\sum a_n, \sum b_n$ redovi u $\mathbb{C}$ i neka postoji $K > 0$ tako da je*

$$|a_n| \leq K|b_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ako red $\sum b_n$ apsolutno konvergira, onda apsolutno konvergira i red $\sum a_n$.
Ako red $\sum a_n$ ne konvergira apsolutno, onda niti red $\sum b_n$ ne konvergira apsolutno.

Primjer 10. [9, *str. 376*] *Primjenom Teorema 5 ispitat ćemo konvergenciju reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}.$$

Vrijedi

$$\left| \frac{\sin^2(nx)}{n^2} \right| \leq \left| \frac{1}{n^2} \right|, \textit{ za svaki } n \in \mathbb{N}, \textit{ tj.}$$

$$0 \leq \frac{\sin^2(nx)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}$$

i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konvergira, stoga i početni red konvergira.*

4 | Kriteriji konvergencije redova

4.1 Dovoljni uvjeti za konvergenciju reda

U prethodnom poglavlju pokazali smo kako odrediti konvergenciju reda usporedbom s nekim drugim konvergentnim redom. Sada ćemo pojasniti neke od osnovnih kriterija za određivanje konvergencije redova.

Teorem 6. (*D'Alembertov kriterij*)[3, *str. 167*]
Neka je $(a_n)_n$ *niz u* $\mathbb{C}$ *i* $a_n \neq 0$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Ako postoje prirodan broj* m *i realan broj* $q \in \langle 0, 1\rangle$, *takvi da vrijedi* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ *za svaki* $n \geq m$, *onda red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *apsolutno konvergira.*

2. *Ako postoji* $m \in \mathbb{N}$ *takav da vrijedi* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ *za svaki* $n \geq m$, *onda red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

Dokaz. 1. Za $n = m + k, k \in \mathbb{N}$, imamo $|a_{m+k}| \leq q|a_{m+k-1}| \leq \cdots \leq q^k|a_m|$, iz čega dolazimo do $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{m+k}| \leq |a_m| \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$, te red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{m+k}|$ konvergira (jer je majoriziran s konvergentnim geometrijskim redom). Tada konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, točnije $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

2. Prema drugom dijelu dobivamo $|a_n| \geq |a_m| > 0, \forall n \geq m$, i niz $(a_n)_n$ ne teži k nuli, tj. ne ispunjava nužan uvjet konvergencije reda.

□

Teorem 7. (*D'Alembertov kriterij u formi limesa*)[5, *str. 119*]
Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, *tada je red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan za* $L < 1$ *i divergentan za* $L > 1$.

Dokaz. Za dokaz vidjeti [5, str. 119]. □

Teorem 8. (*Cauchyjev kriterij*)[6, *str. 95*] *Neka je* (a_n) *niz kompleksnih brojeva.*

1. *Ako postoje prirodni broj* m *i realni broj* q, $0 < q < 1$ *takvi da je*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q, \quad \forall n \geq m,$$

onda red $\sum a_n$ *apsolutno konvergira.*

2. *Ako je*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$$

za beskonačno indeksa n, onda red $\sum a_n$ divergira.

Dokaz. 1. Iz $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ dobijemo $|a_n| \leq q^n$ za $n \geq m$; dakle vrijedi

$$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} q^n = \frac{q^n}{1-q}.$$

Prema tome red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

2. Uzmemo li da $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ ispunjava uvjete za beskonačno indeksa n, tada opći član reda $\sum a_n$ neće konvergirati k nuli, pa će red $\sum a_n$ divergirati, jer nužan uvjet konvergencije reda nije ispunjen.

□

Napomena 1. *Cauchyjev kriterij će dati konvergenciju reda kad god daje i D'Alembertov kriterij, dok obratno ne vrijedi.*

Teorem 9. (*Cauchyjev kriterij u formi limesa*)[5, *str. 121*]
Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, onda red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira za $L < 1$ i divergira za $L > 1$.

Dokaz. Za dokaz vidjeti [5, str. 121]. □

Teorem 10. (*Integralni Cauchyjev kriterij*)[3, *str. 170*]
Neka je $f : [1, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ neprekidna i padajuća funkcija na domeni.

1. *Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira ako i samo ako integral $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ konvergira.*

2. *Ako red konvergira onda vrijedi $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.*

Dokaz. Neka je $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ parcijalna suma reda te označimo s $F(x)$ sljedeće $F(x) = \int\limits_{1}^{x} f(t)dt, \forall x \in [1, +\infty\rangle$.
Funkcija f padajuća je te $\forall k \in \mathbb{N}$ i $\forall t \in [k, k+1]$ imamo $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.
Odatle dalje slijedi $f(k+1) \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(t)dt \leq f(k), \forall k \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$F(n+1) = \int_{1}^{n+1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n \leq$$

$$\leq f(1) + \int_{1}^{2} f(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(t)dt = f(1) + F(n).$$

Dakle, $\forall n \in \mathbb{N}$ je $F(n+1) \leq s_n \leq f(1) + F(n)$.

1. Neka konvergira $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, tj. postoji $\lim_{x\to\infty} F(x)$. Pošto je F rastuća funkcija, takav limes egzistira onda i samo onda ako je F ograničena, točnije ako postoji $\sup F$. U tom slučaju vrijedi $s_n \leq f(1) + \sup F$, tada je i rastući niz $(s_n)_n$ ograničen, tj. red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, konvergentan. Obratno, ako red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira, tada je niz $(s_n)_n$ ograničen šo povlači kako je i niz $(F(n))_n$ ograničen. Zbog rasta funkcije F je i ta funkcija ograničena te postoji $\sup F = \lim_{x\to\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} f(x)dx$.

□

4.2 Alternirajući (izmjenični) redovi

Definicija 6. *Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ čiji članovi naizmjence mijenjaju predznak, zove se alternirajućim ili izmjeničnim redom.*

Općenito alternirajući red zapisujemo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n,$$

gdje je $a_n > 0$ za svaki n.
Za alternirajući red vrijedi sljedeći kriterij:

Teorem 11. (*Leibnizov kriterij*)[3, *str. 167*]
Ako niz $(a_n)_n$ realnih pozitivnih brojeva strogo pada i konvergira k nuli, tada alternirajući red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n$ konvergira k broju A za koji vrijedi $0 < A < a_1$.

Dokaz. Uzmimo da je $(s_n)_n$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n$. To povlači da vrijedi $s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$, tj. podniz $(s_{2m})_m$ je strogo rastući. Također vidimo kako je $s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1$, te je podniz $(s_{2m})_m$ ograničen odozgo. Podniz $(s_{2m})_m$ je konvergentan; neka je $A = \lim_m s_{2m}$. Iz $s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1}$ vidimo da je $\lim_m s_{2m+1} = A$, pa je također i $\lim_n s_n = A$. Iz prethodnog slijedi ocjena $s_{2m} < A < s_{2m-1}, \forall m \in \mathbb{N}$. □

4.3 Primjena kriterija za određivanje konvergencije

Pogledajmo na primjerima kako se koriste kriteriji za određivanje konvergencije redova realnih brojeva.

Primjer 11. [9, *str. 377*] *Koristeći D'Alembertov kriterij konvergencije ispitat ćemo konvergenciju redova:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4};\qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}(n!)^3}{(3n)!}.$$

Rješenje:
(a) Red divergira pošto je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^4}\cdot\frac{n^4}{2^n}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^4=2>1.$$

(b) Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{2n+2}((n+1)!)^3}{(3n+3)!}}{\frac{4^{2n}(n!)^3}{(3n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{16(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16(n+1)^2}{3(3n+1)(3n+2)}=\frac{16}{27}<1,$$

slijedi da je red konvergentan.

Primjer 12. [9, *str. 378*] *Koristeći Cauchyjev kriterij konvergencije ispitat ćemo konvergenciju redova:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2};\qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+3)}.$$

Rješenje:
(a) Red divergira, jer je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e>1.$$

(b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+3)}=0<1$, *dakle red konvergira.*

Primjer 13. [8, *str. 347*] *Ispitajmo konvergenciju reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Rješenje:
Ovdje je $b_n=\frac{1}{n}, b_n\to 0(n\to\infty)$. *Kako je* $n<n+1$, *tj.* $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$, *dobivamo* $b_n>b_{n+1}$ *za svaki* $n\in\mathbb{N}$, *tj. niz* $(b_n)_n$ *je padajući i teži nuli kad n ide u beskonačno. Sada, na osnovu Leibnizova kriterija slijedi konvergencija reda.*

Primjer 14. [2, *str. 284*] *Ispitat ćemo konvergenciju reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n},\ \textit{uspoređivanje}.$$

Rješenje:
Budući da je $\sin\frac{\pi}{2^n} < \pi \cdot \frac{1}{2^n}, \forall n$*, opći član zadanog reda manji je od pripadnog reda s općim članom* $\pi \cdot \frac{1}{2^n}$*. Taj red je ujedno geometrijski red s kvocijentom* $q = \frac{1}{2}$*, pa je konvergentan. Dakle, polazni red konvergira.*

Primjer 15. [2, *str. 289*] *Ispitat ćemo konvergenciju reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

pomoću Cauchyjevog integralnog kriterija.
Rješenje:

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty} \arctan(x)\Big|_{1}^{t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\arctan t - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Slijedi da polazni red konvergira.

Literatura

[1] D. Blanuša, *Viša matematika*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1970.

[2] T. Bradić, J. Pečarić, R. Roki, M. Strunje, *Matematika za tehnološke fakultete*, Element, Zagreb, 1998.

[3] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2*, Zagreb, 2018., skripta, dostupno na `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/MATANALuR.pdf`

[4] P. Javor, *Uvod u matematičku analizu*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika 1*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2017., dostupno na `http://www.mathos.unios.hr/images/uploads/707.pdf`

[6] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[7] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, Prvi dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[8] M. Miličić, *Matematička analiza*, Akademska misao, Beograd, 2012.

[9] M. Miličić, *Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize*, Akademska misao, Beograd, 2013.

Sažetak

Tema ovog završnog rada su kriteriji konvergencije redova realnih brojeva. Za potrebe njihovog definiranja, u prvom dijelu rada navedene su definicije i rezultati vezani uz osnovne pojmove kao što su red i konvergencija reda. Potom, za razumijevanje kriterija konvergencije u drugom dijelu rada je definirano i na primjerima prikazano uspoređivanje redova te apsolutna konvergencija redova. U posljednjem poglavlju iskazani su i dokazani uvjeti za određivanje konvergencije redova, a kako bismo iskazali sve kriterije bilo je potrebno uvesti i definiciju alternirajućeg reda. Dodatno, na primjerima je prikazano korištenje nekoliko važnih kriterija za određivanje konvergencije redova.

Ključne riječi

red, suma reda, divergencija, apsolutna konvergencija, kriteriji konvergencije, uspoređivanje redova

Convergence criteria for series of real numbers

Summary

The topic of this final paper is convergence criteria for sequences of real numbers. For the purpose of defining them, the first part of the paper presents definitions and results related to fundamental concepts such as series and the convergence of a series. Then, in the second part of the paper, in order to understand the convergence criteria, comparisons of series and the absolute convergence of series are defined and illustrated with examples. In the last chapter, conditions for determining the convergence of series are stated and proven. To encompass all criteria, it was necessary to introduce the definition of an alternating series. Additionally, examples are provided to demonstrate the use of several important criteria for determining the convergence of series.

Key words

series, sum of a series, divergence, absolute convergence, convergence criteria, comparison of series

Životopis

Marija Šeremet rođena je u Vinkovcima 10. kolovoza 1999. godine. Trenutno živi u Ivankovu gdje je i pohađala Osnovnu školu "August Cesarec". Nakon toga svoj školski put nastavila je u Gimnaziji Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, smjer Prirodoslovno-matematička gimnazija. Srednju školu završava 2018. godine, te nakon toga upisuje Sveučilišni prijediplomski studij Matematika na Fakultetu primijenjene matematike i informatike, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Aktivna i izvan fakulteta, Marija je 2024. godine postala predsjednica Savjeta mladih Općine Ivankovo kako bi mogla pomagati mladima da se i njihov glas čuje u lokalnoj zajednici. Kao višegodišnje aktivna članica Udruge DUHOS, 2024. godine je postala voditeljicom medijskog tima.