L'Hopitalovo pravilo i primjene

Lucić, Ivan

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

L'Hôpitalovo pravilo i primjene

Završni rad

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Student:
Ivan Lucić

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

U ovom radu obradit ćemo poznati teorem iz matematičke analize poznat pod imenom "L'Hôpitalovo pravilo". Teorem je dobio ime po francuskom matematičaru Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital (1661.-1704.). L'Hôpital je teorem objavio u knjizi "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" 1696. godine koja pokriva područje diferencijalnog računa. Tek se nakon L'Hôpitalove smrti saznalo da je L'Hôpital plaćao švicarskom matematičaru Johannu Bernoulliju za poduke u matematici, koje je L'Hôpital mogao koristiti u svojim djelima, tj. da je Bernoulli zapravo otkrio taj teorem. Zato se teorem još zove Bernoullijevo pravilo.

Prije obrade tog teorema najprije trebamo razumjeti tri pojma koji su također iz matematičke analize. U prvom poglavlju definirat ćemo o limesu funkcije i neprekidnosti funkcije, a u drugom poglavlju će se obraditi derivacija funkcije. L'Hôpitalovo pravilo i njegove primjene će se detaljno obraditi u trećem poglavlju. Pomoću tog teorema možemo izračunati limese neodređenih oblika.

2 | Limes funkcije i neprekidnost funkcije

2.1 Limes funkcije

U ovom podpoglavlju ćemo govoriti o limesu funkcije pomoću kojega se definiraju ostali pojmovi u radu.

Definicija 1 (Heineova definicija limesa funkcije)**.** *Neka je*

(i) $x_0 \in [a,b]$ i
(ii) $f : D \to \mathbb{R}$, *gdje je* $D = [a,b]$ ili $D = [a,b] \setminus \{x_0\}$.

Kažemo da je granična vrijednost (ili limes) funkcije f u točki x_0 jednaka L i pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

ako za svaki niz (x_n) iz D $(x_n \neq x_0)$ koji konvergira prema x_0, niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ konvergira prema L.

Pogledajmo na sljedećem primjeru kako se određuje limes funkcije f pomoću prethodne definicije:

Primjer 1. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{-3\}, f(x) = \frac{2x^3+10x^2+19x+21}{x+3}$. *Odredimo* $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$.

Rješenje. *Neka je (x_n) bilo koji niz za koji $x_n \neq -3$ i $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -3$.*

Sada je:

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} f(x_n) &= \lim_{n \to \infty} \frac{2x_n^3 + 10x_n^2 + 19x_n + 21}{x_n + 3} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{(2x_n^2 + 4x_n + 7)(x_n + 3)}{x_n + 3} = \lim_{n \to \infty} (2x_n^2 + 4x_n + 7) = 13.\end{aligned}$$

Osim Heineove definicije limesa funkcije, postoji i Cauchyjeva definicija limesa funkcije. Ovdje ćemo ju iskazati u obliku sljedećeg teorema:

Teorem 1 (Cauchyjeva definicija limesa)**.** [*vidjeti* [3, *Theorem 3.1*]]

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $x_0 \in I$ i $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Limes funkcije f u točki x_0 postoji i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)((0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L| < \epsilon)). \tag{2.1}$$

Dokaz. Najprije pretpostavimo da vrijedi (2.1). Odaberimo neki niz (x_n) iz intervala $I\backslash\{x_0\}$ takav da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Prema definiciji limesa niza slijedi:

$$(\forall\delta > 0)(\exists n_\delta > 0)(\forall x \in \mathbb{N})((n > n_\delta) \Rightarrow (|x_n - x_0| < \delta)). \tag{2.2}$$

Ponovno koristeći definiciju o limesu niza pokažimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$, tj.

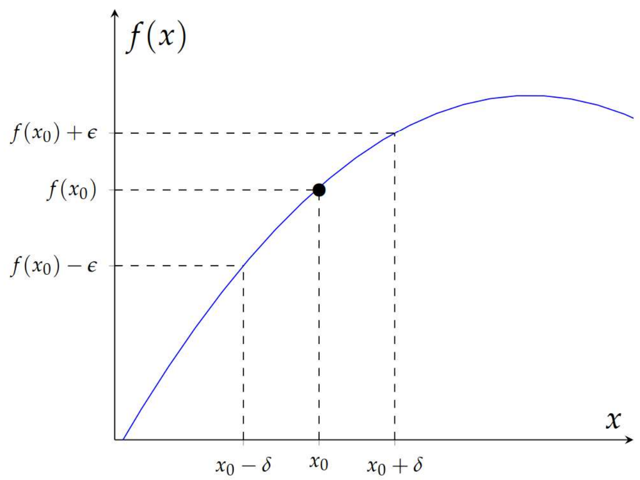
$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_\epsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{N})((n > n_\epsilon) \Rightarrow (|f(x_n) - L| < \epsilon)). \tag{2.3}$$

Za $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi (2.1). Za takav δ postoji n_δ takav da vrijedi (2.2). Za n_ϵ odaberimo da je jednak n_δ i $\forall n \in \mathbb{N}$ dobijemo

$$(n > n_\epsilon) \Rightarrow (|x_n - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x_n) - L| < \epsilon), \tag{2.4}$$

odnosno dobijemo (2.3).

Obrat ovog teorema možete pronaći u [3, Theorem 3.1] na stranici 64. □



Slika 2.1: Geometrijski prikaz Cauchyjeve definicije limesa funkcije.

Prethodni teorem možemo i geometrijski interpretirati: Za svaku otvorenu okolinu broja L, $< L-\epsilon, L+\epsilon >$, može se pronaći otvorena okolina broja x_0, $< x_0-\delta, x_0+\delta >$, koja se preslika u okolinu $< L-\epsilon, L+\epsilon >$.

Pomoću Cauchyjeve definicije limesa funkcije ćemo odrediti limes funkcije na sljedećem primjeru.

Primjer 2. *Imamo funkciju f definiranu izrazom $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x+1}$. Pokažimo da vrijedi $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 2$.*

Rješenje. Znamo da po Cauchyjevoj definiciji mora vrijediti:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in I\backslash\{-1\})((0 < |x-(-1)| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - 2| < \epsilon)).$$

Pojednostavimo $|f(x) - 2|$*:*

$$
\begin{aligned}
|f(x)-2| &= \left|\frac{x^2+4x+3}{x+1} - 2\right| = \left|\frac{x^2+4x+3-2x-2}{x+1}\right| \\
&= \left|\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right| = \left|\frac{(x+1)^2}{x+1}\right| = |x+1|\,.
\end{aligned}
$$

Pošto je $\epsilon > 0$ *bilo koji pozitivan broj, trebamo naći* $\delta > 0$ *takav da* $(\forall x \in I\backslash\{-1\})((|x+1| < \delta) \Rightarrow (|x+1| < \epsilon))$.

Dovoljno je da δ *bude neki pozitivan broj koji je manji ili jednak od* ϵ*.*

Nekada promatramo limes funkcije kod koje se samo s jedne strane može doći do točke gomilanja. Te limese zovemo jednostranim limesima, odnosno limes slijeva i limes zdesna.

Definicija 2. *Neka je* $f : D \to \mathbb{R}$ *realna funkcija realne varijable i* $x_0 \in D'$*. Kažemo da* f *ima limes* L *slijeva [limes* L *zdesna] u točki* x_0 *i pišemo*

$$L = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad [L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)]$$

Heine: *ako za svaki niz* (x_n) *iz* D *takav da je* $x_n < x_0$ $[x_n > x_0]$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$*.*

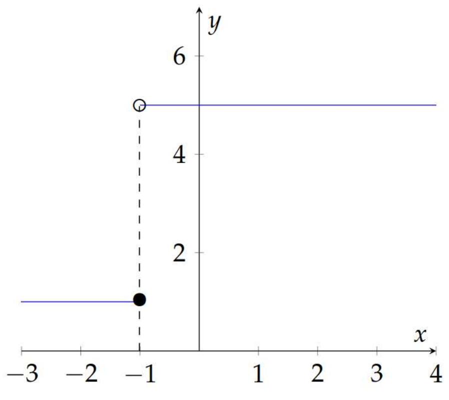
Cauchy: *ako za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in D$ *sa svojstvom* $x_0 - \delta < x < x_0$ $[x_0 < x < x_0 + \delta]$ *vrijedi* $|f(x_0) - L| < \epsilon$*.*

Pogledajmo na primjeru kako se određuju jednostrani limesi.

Primjer 3. *Odredimo limes slijeva i limes zdesna funkcije* f_1 *zadane formulom*

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\infty, -1\rangle \\ 5, & x \in [-1, +\infty\rangle \end{cases}$$

u točki $x = -1$*.*



Slika 2.2: Graf funkcije f_1.

Rješenje. *Funkcija poprima vrijednost* 1 *za svaki* $x < -1$, *a* 5 *za* $x \geq -1$. *Najprije odredimo* $\lim\limits_{x \to 1^-} f_1(x)$.

Prema Heinovoj definiciji, neka je (x_n), $x_n < -1$, *bilo koji niz realnih brojeva koji konvergira ka* -1. *Onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, *tj.* $\lim\limits_{x\to -1^-} f_1(x) = 1$.

Prema Cauchyjevoj definiciji, neka je $\epsilon > 0$ *neki pozitivan realan broj. Pošto za svaki* $x < -1$ *vrijedi* $|f_1(x) - 1| = 0 < \epsilon$, *izaberemo da* $\delta > 0$ *bude bilo koji pozitivan realan broj.*

Limes zdesna, $\lim\limits_{x\to 1^+} f_1(x)$, *se analogno određuje kao i limes slijeva i dobijemo da je* $\lim\limits_{x\to 1^+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 5 = 5$.

Sada kada smo se upoznali s definicijom jednostranih limesa pogledajmo vezu između njih i limesa funkcije.

Teorem 2 (vidjeti [3, Theorem 3.5])**.** *Neka je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoren interval,* $x_0 \in I$ *i* $f : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$. *Za funkciju* f *postoji* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *ako i samo ako postoje i jednaki su* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Dokaz. Neka postoji limes $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Tada vrijedi (2.1) i iz Cauchyjeve definicije limesa funkcije slijedi Cauchyjeva tvrdnja iz Definicije 2, odnosno postoje limesi slijeva i zdesna koji iznose L.

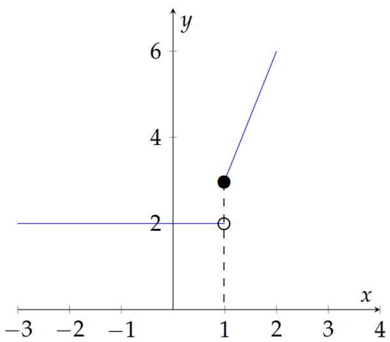
S druge strane neka prema Cauchyjevoj tvrdnji iz Definicije 2 postoje limesi slijeva i zdesna koji su jednaki L. Tada za $\epsilon > 0$ odaberemo najmanji $\delta > 0$ iz Cauchyjeve tvrdnje iz Definicije 2 i on povlači (2.1). $\square$

Primijenimo prethodni teorem na sljedećem zadatku.

Primjer 4. *Postoji li limes funkcije* f_2 *zadane formulom*

$$f_2(x) = \begin{cases} 2, & x \in \langle -\infty, 1\rangle \\ 3x, & x \in [1, +\infty\rangle \end{cases}$$

u točki $x = 1$?



Slika 2.3: Graf funkcije f_2.

Rješenje. *Najprije odredimo jednostrane limese u točki $x = 1$, odnosno $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x_2)$ i $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x_2)$.*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x_2) = \lim_{x\to 1^-} 2 = 2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x_2) = \lim_{x\to 1^+} 3x = 3.$$

U točki $x = 1$ limes slijeva iznosi 2, a limes zdesna je 3. Jednostrani limesi se razlikuju u točki $x = 1$ pa zaključujemo da ne postoji limes funkcije f_2 u točki $x = 1$.

Iduća definicija nam govori o limesu funkcije f kada se x približava ∞.

Definicija 3. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ odozgo neomeđen skup i $f : D \to \mathbb{R}$ bilo koja funkcija. Kažemo da je realan broj L limes ili granična vrijednost funkcije f u ∞ i pišemo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$*

Heine: *ako za svaki niz (x_n) iz D za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Cauchy: *ako za svaki realan broj $\epsilon > 0$ postoji realan broj $M = M(\epsilon)$ takav da*

$$(x \in D; x > M) \Rightarrow (|f(x) - L| < \epsilon).$$

Napomena: Slično se definira i limes funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ gdje x teži prema $-\infty$.
Upotrijebimo definiciju na sljedećem primjeru:

Primjer 5. *Izračunajmo koliko iznosi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x^4-3}{x^5-x^3+16}$.*

Rješenje. *Neka je x_n bilo koji niz za koji vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Onda računamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2+x_n^4-3}{x_n^5-x_n^3+16}$.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + x_n^4 - 3}{x_n^5 - x_n^3 + 16} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + x_n^4 - 3}{x_n^5 - x_n^3 + 16} \cdot \frac{\frac{1}{x_n^5}}{\frac{1}{x_n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_n^2}{x_n^5} + \frac{x_n^4}{x_n^5} - \frac{3}{x_n^5}}{\frac{x_n^5}{x_n^5} - \frac{x_n^3}{x_n^5} + \frac{16}{x_n^5}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n^3} + \frac{1}{x_n} - \frac{3}{x_n^5}}{1 - \frac{1}{x_n^2} + \frac{16}{x_n^5}} = \frac{0+0-0}{1-0+0} = 0.$$

U sljedećem teoremu navedena su osnovna svojstva za računanje limesa funkcije u točki.

Teorem 3 (vidjeti [5, Theorem 5.1]). *Neka vrijedi:*

(i) $x_0 \in [a, b]$,
(ii) $f : D \to \mathbb{R}$, *gdje je* $D = [a, b]$ ili $D = [a, b] \setminus \{x_0\}$,
(iii) postoje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Tada vrijedi:

(i) postoji $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))$ i vrijedi

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2,$

tj. limes zbroja [ili razlike] dviju funkcija jednak je zbroju [ili razlici] njihovih limesa;

(ii) postoji $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ i vrijedi

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2,$

tj. limes produkta dviju funkcija jednak je produktu njihovih limesa;

(iii) ako je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ i ako je $g(x) \neq 0$ u nekoj okolini broja x_0,

tada postoji $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0,$

tj. limes kvocijenta dviju funkcija jednak je kvocijentu njihovih limesa.

Dokaz. Teorem je moguće dokazati pomoću Heineove definicije limesa funkcije u točki x_0, a mi ćemo ga dokazati primjenom Cauchyjeve definicije limesa funkcije u točki x_0.

(i) Za limes zbroja [razlike] trebamo dokazati da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta(\epsilon) > 0$ tako da iz $0 < |x - x_0| < \delta$ slijedi $|f(x) \pm g(x) - (L_1 \pm L_2)| < \epsilon$.

Neka su L_1 i L_2 limesi funkcija f i g u točki x_0. Time za svaki $\frac{\epsilon}{2}$, $\epsilon > 0$, postoje δ_1 i δ_2 takvi da:

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Odaberimo najmanji δ, odnosno $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Zbog $0 < |x - x_0| < \delta$, slijedi:

$$|f(x) \pm g(x) - (L_1 \pm L_2)| = |(f(x) - L_1) \pm (g(x) - L_2)|.$$

Zbog nejednakosti trokuta vrijedi

$$|(f(x) - L_1) \pm (g(x) - L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(ii) Ako postoji limes funkcije f u točki x_0, onda postoji okolina točke x_0 u kojoj je funkcija f omeđena. Ta tvrdnja je posljedica definicije limesa funkcije u točki. Znamo da $|f(x) - L_1| < \epsilon$, za svaki x iz okoline x_0, povlači $-\epsilon < f(x) - L_1 < \epsilon$, odnosno vrijedi $L_1 - \epsilon < f(x) < L_1 + \epsilon$. Ako je limes funkcije f jednak broju L_1, onda $|f(x) - L_1|$ može biti proizvoljno mali za svaki x iz okoline x_0. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - L_1g(x) + L_1g(x) - L_1L_2|\\ &= |(f(x) - L_1)g(x) + L_1(g(x) - L_2)|\\ &\leq |f(x) - L_1||g(x)| + |L_1||g(x) - L_2|.\end{aligned}$$

Ako za funkciju f vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-L_1|=0$, tada za svaki $\lambda\in\mathbb{R}$ vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0}|\lambda\cdot(f(x)-L_1)|=0$. Tvrdnja vrijedi i za funkciju g.

Pošto je L_2 realan broj i funkcija g je omeđena u okolini točke x_0, upotrebljavamo prethodnu tvrdnju i tada vrijedi:

$$|f(x)-L_1||g(x)|+|L_1||g(x)-L_2|\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

(iii) Za limes kvocijenta trebamo dokazati da za svaki $\epsilon>0$ postoji $\delta(\epsilon)>0$ tako da iz $0<|x-x_0|<\delta$ slijedi $|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{L_1}{L_2}|<\epsilon$. Najprije raspišimo $|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{L_1}{L_2}|$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{L_1}{L_2}\right|&=\left|\frac{f(x)L_2-g(x)L_1}{g(x)L_2}\right|=\left|\frac{f(x)L_2-L_1L_2+L_1L_2-g(x)L_1}{g(x)L_2}\right|\\&\le\frac{|L_2||f(x)-L_1|+|L_1||g(x)-L_2|}{|g(x)||L_2|}\\&\le\frac{1}{|g(x)|}|f(x)-L_1|+\frac{L_1}{|g(x)||L_2|}|g(x)-L_2|.\end{aligned}$$

Funkcije $\frac{1}{|g(x)|}$ i $\frac{L_1}{|g(x)||L_2|}$ su omeđene u okolini točke x_0 jer je funkcija g omeđena u okolini točke x_0 pa slijedi:

$$\frac{1}{|g(x)|}|f(x)-L_1|+\frac{L_1}{|g(x)||L_2|}|g(x)-L_2|\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

□

Pogledajmo na sljedećem primjeru primjenu prethodnog teorema.

Primjer 6. *Zadane su funkcije $f(x)=\sin x$ i $g(x)=e^x$.*

a) Izračunajmo zbroj limesa funkcija f i g u točki $x=0$.

Rješenje.

$$\lim_{x\to0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to0}(\sin x+e^x)=\lim_{x\to0}\sin x+\lim_{x\to0}e^x=0+1=1.$$

b) Izračunajmo produkt limesa funkcija f i g u točki $x=\frac{\pi}{2}$.

Rješenje.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x\cdot e^x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^x=1\cdot e^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

c) Izračunajmo kvocijent limesa funkcija f i g u točki $x=\frac{\pi}{4}$.

Rješenje.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}.$$

Pomoću sljedećeg teorema naučit ćemo još jedan način za određivanje limesa.

Teorem 4 (Teorem o sendviču)**.** [*vidjeti* [3, *Theorem 3.3*]] *Neka je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoren interval,* $x_0 \in I$ *i* $f, g : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *za koje postoje* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

1. Ako je $f(x) \leq g(x), \forall x \in I \backslash \{x_0\}$, onda je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
2. Ako je $h : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in I \backslash \{x_0\}$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$, onda funkcija h ima limes u x_0 i $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$.

Dokaz. Dokaz teorema je moguće pogledati u [3, Theorem 3.3]. □

Primijenimo teorem na sljedećem primjeru:

Primjer 7.
a) Promotrimo funkcije f, g zadane formulama $f(x) = x$ i $g(x) = e^x$ u točki $x = 5$. Vidimo da je x manji ili jednak e^x za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa vrijedi $\lim\limits_{x \to x_0} x \leq \lim\limits_{x \to x_0} e^x$. Odnosno, $\lim\limits_{x \to 5} x \leq \lim\limits_{x \to x_0} e^5$.

b) Promotrimo funkciju h definiranu izrazom $h(x) = \frac{\arcsin x}{x}$ u točki $x = 0$. Vidimo da funkcija h nije definirana u točki $x = 0$ pa nas zanima koliko je $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Pomoću funkcija zadanih formulama $f(x) = \cos x$ i $g(x) = x^2 + 1$ možemo iskoristiti teorem o sendviču jer:

$$\cos x \leq \frac{\arcsin x}{x} \leq x^2 + 1$$

i limesi funkcija f i g točki $x = 0$ su jednaki:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1.$$

Tada vrijedi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

2.2 Neprekidnost funkcije

Neprekidnost funkcije je, uz limes funkcije, drugi osnovni pojam iz matematičke analize. Intuitivno, funkcija je neprekidna ako se njen graf može nacrtati bez podizanja olovke s papira. Zapišimo matematički definiciju neprekidnosti funkcije u točki:

Definicija 4. *Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ako ona ima limes u točki x_0 koji je jednak $f(x_0)$, tj. ako je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkcija $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ je neprekidna na intervalu $\langle a, b \rangle$ ako je ona neprekidna u svakoj točki intervala.

Pokažimo primjenu ove definicije na sljedećem primjeru:

Primjer 8. *Provjerimo je li funkcija f zadana formulom*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

neprekidna u točki $x = 0$.

Rješenje. Najprije pogledajmo koliki su odgovarajući jednostrani limesi:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0.$$

Limesi slijeva i zdesna iznose 0 pa je i $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Pošto limes u točki $x = 0$ i $f(0)$ nisu jednaki zaključujemo da funkcija f nije neprekidna u toj točki.

Iako neke funkcije imaju prekide one se mogu proširiti tako sa budu neprekidne. To objašnjava sljedeća definicija:

Definicija 5. *Neka je $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, bilo koja funkcija, $x_0 \in D'$ i neka postoji $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Ako funkcija f nije definirana u točki x_0 ili $L \neq f(x_0)$, onda za funkciju $\overline{f}$ definiranu formulom:*

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ L, & x = x_0 \end{cases}$$

kažemo da je proširenje funkcije f po neprekidnosti u točki x_0.

U sljedećem primjeru ćemo proširiti zadanu funkciju h po neprekidnosti.

Primjer 9. *Funkcija $h(x) = \frac{\arcsin x}{x}$, na svojoj domeni $[-1, 1]$, nije definirana u točki $x = 0$. Znamo da je $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ pa se funkcija h može proširiti po neprekidnosti na sljedeći način:*

$$\overline{h}(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x}, & x \in [-1, 1] \backslash \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Sljedeći teorem govori o vezi između neprekidnosti funkcije i limesa funkcije u točki.

Teorem 5 (vidjeti [2, Theorem 5.2.1])**.** *Neka su $f : D \to \mathbb{R}$ i $g : K \to \mathbb{R}$, $f(D) \subseteq K$, bilo koje dvije funkcije i $x_0 \in D'$. Ako postoji $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ i ako je g neprekidna u točki L, onda je*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)),$$

tj. limes i neprekidna funkcija] "komutiraju".

Dokaz. Dokaz ovog teorema se može pronaći u [2, Theorem 5.2.1] na stranici 149. □

Pogledajmo na primjeru primjenu prethodnog teorema.

Primjer 10. *Imamo funkcije g i f zadane formulama $g(x) = x^3$ i $f(x) = -5x + 20$. Najprije odredimo $\lim_{x\to 6} g(f(x))$.*

$$\lim_{x\to 6} g(f(x)) = \lim_{x\to 6} g(-5x+20) = \lim_{x\to 6}(-5x+20)^3 = (30-20)^3 = 1000.$$

Zatim odredimo $g(\lim_{x\to 6} f(x))$.

$$g(\lim_{x\to 6} f(x)) = g(\lim_{x\to 6}(-5x+20)) = g(10) = 1000.$$

Dobili smo da su limesi jednaki.

3 | Derivacija funkcije

Derivacija funkcije je najbitniji pojam diferencijalnog računa. Pojam derivacije su otkrili britanski matematičar Isaac Newton Gottfried i njemački matematičar Wilhelm Leibniz. Newton je pokušavao odrediti brzinu gibanja tijela u nekom trenutku, dok je Leibniz proučavao jednadžbu tangente na graf funkcije u danoj točki. Navedimo sada preciznu definiciju derivacije funkcije u točki.

Definicija 6. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, diferencijabilna ili derivabilna u točki x_0 otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$, ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Taj broj zovemo derivacija funkcije f u točki x_0 i pišemo*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Još se koriste oznake $Df(x_0)$ ili $\frac{df}{dx}(x_0)$.

U sljedećem primjeru derivirat ćemo formulom zadanu funkciju f koristeći prethodnu definiciju.

Primjer 11. *Pogledajmo koliko iznosi derivacija funkcije f dane izrazom $f(x) = x^2$ u točki $x_0 = 7$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} x+x_0 = x_0+x_0 = 2x_0 = 14. \end{aligned}$$

Derivacije elementarnih funkcija u točki x_0 dobivaju se na sličan način primjenom Definicije 6. Svi računi mogu se vidjeti u [2]. Kao rezultat toga, navodimo tablicu derivacija elementarnih funkcija:

$f(x)$	$f'(x)$
x^c	$cx^{c-1}, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x,\ x \in \mathbb{R}$
$tg\ x$	$\frac{1}{\cos x^2},\ x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$ctg\ x$	$-\frac{1}{\sin x^2},\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x \rvert < 1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x \rvert < 1$
$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$
$arcctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$
$sh\ x$	$ch\ x,\ x \in \mathbb{R}$
$ch\ x$	$sh\ x,\ x \in \mathbb{R}$
$th\ x$	$\frac{1}{ch^2 x},\ x \neq 0$
$cth\ x$	$-\frac{1}{sh^2 x},\ x \neq 0$
$arsh\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbb{R}$
$arch\ x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x \rvert > 1$
$arthh\ x$	$\frac{1}{1-x^2},\ \lvert x \rvert < 1$
$arcth\ x$	$\frac{1}{1-x^2},\ \lvert x \rvert > 1$
e^x	$e^x,\ x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a,\ x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x},\ x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a},\ x > 0$

Tablica 3.1: Tablica derivacija elementarnih funkcija.

Sljedeći teorem objašnjava pravila za deriviranje funkcija.

Teorem 6 (vidjeti [5, Theorem 6.3]). *Neka su $f, g : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki*

$x \in I$. Tada vrijedi:

(i) $f+g$ je derivabilna u x i vrijedi
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
(ii) $f-g$ je derivabilna u x i vrijedi
$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
(iii) $f \cdot g$ je derivabilna u x i vrijedi
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
(iv) ako je $g(x) \neq 0$, onda je f/g derivabilna u x i vrijedi
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Dokaz. Dokaz ovoga teorema može se pronaći u [2] od 167. do 169. stranice. □

Iskoristimo pravila za deriviranje funkcija na sljedećem primjeru:

Primjer 12. *Izračunajmo derivaciju zbroja funkcija f i g zadanih formulama $f(x) = \ln x$ i $g(x) = 5x^4$.*

Rješenje.

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = (\ln x)' + (5x^4)' = \frac{1}{x} + 20x^3 = \frac{1+20x^4}{x}.$$

Izračunajmo derivaciju razlike funkcija f i g definiranih izrazima $f(x) = \cos x$ i $g(x) = 8^x$.

Rješenje.

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)(\cos x)' - (8^x)' = -\sin x - 8^x \cdot \ln 8.$$

Izračunajmo derivaciju produkta funkcija f i g zadanih formulama $f(x) = e^x$ i $g(x) = x^3$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x) =& f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (e^x)' \cdot (x^3) + (e^x) \cdot (x^3)' \\ =& e^x x^3 + e^x \cdot 3x^2 = e^x x^2(x+3x).\end{aligned}$$

Izračunajmo derivaciju kvocijenta funkcija f i g definiranim izrazima $f(x) = tgx$ i $g(x) = x$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) =& \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{(tgx)' \cdot x - tgx \cdot (x)'}{x^2} \\ =& \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - 1 \cdot tgx}{x^2} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}.\end{aligned}$$

Sljedeći teorem opisuje kako se deriviraju kompozicije funkcija.

Teorem 7 (vidjeti [5, Theorem 6.4]). *Neka su f i g realne funkcije takve da je kompozicija $f \circ g$ definirana. Neka je također g derivabilna u x_0, a f u točki $g(x_0)$. Tada vrijedi:*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Dokaz. Dokaz ovoga teorema možete pronaći u [2] na 171. stranici. □

Na primjeru ćemo primijeniti prethodni teorem.

Primjer 13. *Izračunajmo derivaciju funkcije y zadane formulom $y(x) = (\ln(\sin x))^2$. Ta funkcija je kompozicija funkcija f, g i h koje su definirane izrazima $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \sin x$, odnosno $y(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))$.*

Rješenje. Najprije pogledamo kako izgleda derivacija kompozicije funkcija:

$$y' = (f \circ (g \circ h))' = (f' \circ (g \circ h)) \cdot (g \circ h)' = (f' \circ (g \circ h)) \cdot (g' \circ h) \cdot h'.$$

Sada uvrstimo zadane funkcije:

$$\begin{aligned} y'(x) =& (2x \circ (\ln x \circ \sin x)) \cdot \left(\frac{1}{x} \circ \sin x\right) \cdot \cos x \\ =& (2x \circ \ln(\sin x)) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 2\ln(\sin x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

Idući teorem je bitan jer će se upotrijebiti za dokaz L'Hôpitalovog pravila.

Teorem 8 (Cauchyjev teorem). [*vidjeti* [4, *Theorem 9.4*]] *Neka su zadane funkcije f i g za koje vrijedi:*

1. f i g su neprekinute na zatvorenom intervalu $[a, b]$,
2. postoje derivacije f' i g' na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$,
3. $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

Tada postoji $c \in \langle a, b\rangle$ za koji je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

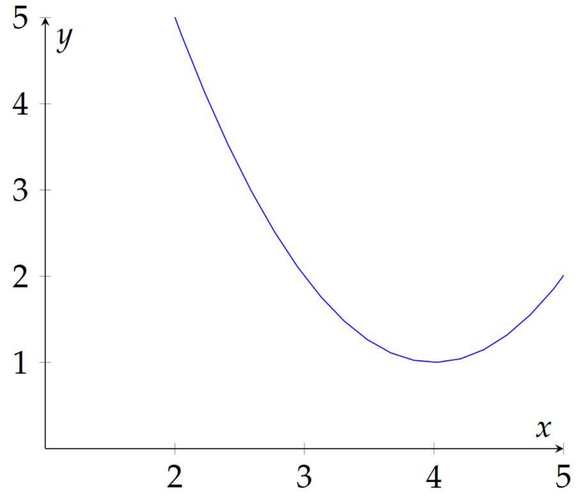
Dokaz. Dokaz teorema se može pronaći u [4, Theorem 9.4] na stranicama 149 i 150. □

4 | L'Hôpitalovo pravilo

U ovom poglavlju obradit ćemo L'Hôpitalovo pravilo. Koristeći L'Hôpitalovo pravilo računat ćemo limese oblika: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ i $\infty - \infty$, takozvane neodređene oblike.

4.1 Neodređeni oblik $\frac{0}{0}$

Promotrimo formulom zadanu funkciju $h(x) = \frac{x^3-12x^2+49x-68}{x-4}$. Ta funkcija jedino nije definirana u točki $x = 4$ i u toj točki poprima oblik $\frac{0}{0}$. Pogledajmo sada njen graf:



Slika 4.1: Graf funkcije h.

Iako funkcija nije definirana u točki $x_0 = 4$ vidimo da graf funkcije h nema prekida. Zato nas zanima kako da odredimo iznos funkcije h kada se x približava 4, odnosno zanima nas koliko iznosi $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^3-12x^2+49x-68}{x-4}$. Odgovor nam daje sljedeći teorem.

Teorem 9 (L'Hôpitalovo pravilo)**.** [*vidjeti* [2, *Theorem 6.8.4*]] *Neka su f i g bilo koje dvije funkcije takve da je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Ako su ispunjene sljedeće pretpos-*

tavke:

(i) postoji realan broj $\delta > 0$ takav da su funkcije f i g derivabilne u svakoj točki intervala $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, osim možda u točki a,
(ii) $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \backslash \{x_0\}$,
(iii) postoji $L = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

onda je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da su u točki x_0 funkcije f i g neprekidne. Tada vrijedi $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ i $g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Ako funkcije f i g nisu neprekidne u točki x_0 proširimo ih po neprekidnosti, odnosno umjesto $f(x_0)$ gledamo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ i $g(x_0)$ preoblikujemo u $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Iz (iii), $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ i za $\epsilon > 0$ po definiciji limesa postoji $0 < \delta_\epsilon < \delta$, takav da vrijedi:

$$(x \in \langle x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon \rangle \backslash \{x_0\}) \Rightarrow \left(\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon \right). \tag{4.1}$$

Nadalje, neka je $x \in \langle x_0, x_0 + \delta_\epsilon \rangle$ $[\langle x_0 - \delta_\epsilon, x_0 \rangle]$, a funkcije f i g, na segmentu $[x_0, x]$ $[[x, x_0]]$, su neprekidne i na intervalu $\langle x_0, x \rangle$ $[\langle x, x_0 \rangle]$. Tada po Teoremu 8 postoji točka $c \in \langle x_0, x_0 + \delta_\epsilon \rangle$ takva da vrijedi:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.2}$$

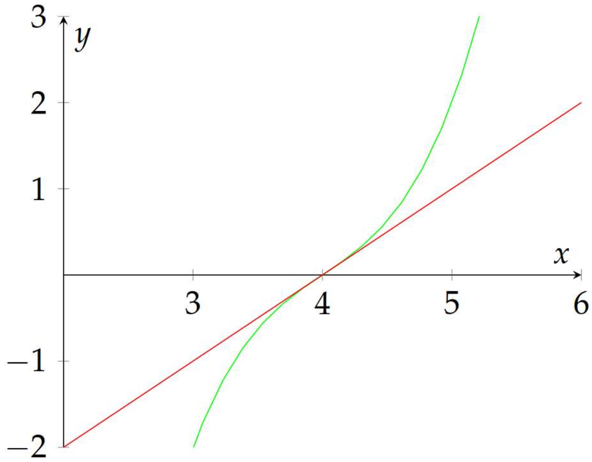
Analogno vrijedi i za $x \in \langle x_0 - \delta_\epsilon, x_0 \rangle$. Time smo dobili da je $c \in \langle x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon \rangle$, pa iz (4.1) i (4.2) imamo:

$$(x \in \langle x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon \rangle \backslash \{x_0\}) \Rightarrow \left(\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon \right).$$

Stoga prema definiciji limesa funkcije u točki x_0 imamo $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. □

Napomena : L'Hôpitalovo pravilo može se primijeniti i na jednostrane limese.

Kako bi shvatili zašto smijemo koristiti derivacije pogledajmo grafove funkcija f i g zadane formulama $f(x) = x^3 - 12x^2 + 49x - 68$, $g(x) = x - 4$.



Slika 4.2: Graf funkcija f i g.

Vidimo da funkcije f i g u točki $x_0 = 4$ poprimaju vrijednost 0. Kada bi tražili približnu vrijednost kvocijenta funkcija f i g u točki $x_0 = 4$, tada za mali pomak po varijabli x dobijemo mali pomak funkcija f i g. Ako gledamo beskonačno mali pomak kod kvocijenta funkcija f i g, dobijemo kvocijent derivacija funkcija f i g, i to nije približno, nego pravo rješenje $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^3-12x^2+49x-68}{x-4}$.

Derivirajmo brojnik i nazivnik:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 12x^2 + 49x - 68}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x^3 - 12x^2 + 49x - 68)'}{(x-4)'} = \lim_{x\to 4} \frac{3x^2 - 24x + 49}{1}.$$

Limes više nije oblika $\frac{0}{0}$ pa dobijemo

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 24x + 49) = 48 - 96 + 49 = 1.$$

Pogledajmo još jedan primjer limesa funkcija koji je oblika $\frac{0}{0}$.

Primjer 14. *Izračunajmo* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$ *iz Primjera 7.*

Rješenje. Primjećujemo da je limes oblika $\frac{0}{0}$ *i zadovoljeni su uvjeti iz Teorema 9 pa smijemo upotrijebiti L'Hôpitalovo pravilo:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Sada znamo kako se računaju limesi oblika $\frac{0}{0}$, ali što kada nakon korištenja L'Hôpitalovog pravila i dalje imamo oblik $\frac{0}{0}$? Odgovor na to pitanje nam daje sljedeći rezultat:

Teorem 10 (vidjeti [3, Korolar 4.4]). *Neka funkcije f, g imaju n-tu derivaciju na skupu $I\backslash\{x_0\} \subset \mathbb{R}$ i neka vrijedi:*

$$\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = 0, \lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0, (k = 0, 1, ..., n-1),$$

$$g^{(k)}(x) \neq 0, \forall x \in I\backslash\{x_0\}, (k = 0, 1, ..., n).$$

Ako je $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L$ *tada je i* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Dokaz. Dokaz slijedi uzastopnom primjenom Teorema 9. □

Upotrijebimo prethodni teorem kroz sljedeći primjer:

Primjer 15. *Odredimo koliko iznosi* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^4 x}{x^3}$.

Rješenje. Limes je oblika $\frac{0}{0}$ *pa možemo upotrijebiti L'Hôpitalovo pravilo:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^4 x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin^4 x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{4\sin^3 x \cos x}{3x^2}.$$

Nakon što smo primijenili L'Hôpitalovo pravilo limes je i dalje oblika $\frac{0}{0}$. *Zato prema Teoremu 10 nastavljamo koristiti L'Hôpitalovo pravilo sve dok ne dobijemo limes ispravnog oblika.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{4\sin^3 x \cos x}{3x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{(4\sin^3 x \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{12\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin^4 x}{6x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(12\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin^4 x)'}{(6x)'} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{24\sin x \cos^3 x - 40\sin^3 x \cos x}{6} = 0.
\end{aligned}$$

4.2 Neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$

Idući neodređeni oblik je $\frac{\infty}{\infty}$, odnosno proučavamo $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, kada $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Analogno će biti ako se jedna ili dvije funkcije kreću prema $-\infty$.

Pogledajmo sada teorem koji pomaže u određivanju tih oblika:

Teorem 11. [*vidjeti* [1, *Theorem 20.2.3*]] *Neka su funkcije* $f(x), g(x)$ *definirane u nekom intervalu* $\langle x_0, x_1]$ *i neka vrijedi* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. *U intervalu* $\langle x_0, x_1]$ *neka postoje derivacije* $f'(x)$ *i* $g'(x) \neq 0$. *Ako postoji (pravi ili nepravi)*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \tag{4.3}$$

onda postoji i limes kvocijenta $\frac{f(x)}{g(x)}$ *i jednak je* L, *tj.*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \tag{4.4}$$

Pravilo se može primijeniti i na slučaj $x \to \infty$, $x \to -\infty$ *na isti način kako je to prije izloženo.*

Dokaz. Neka x i ξ budu brojevi takvi da vrijedi $x_0 < x < \xi < x_1$.

Sada fiksiramo broj ξ. Funkcije f i g ispunjavaju uvijete Teorema 8 na svakome segmentu $[x, \xi]$ i zato postoji broj $c \in \langle x, \xi \rangle$ za koji je

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Smijemo pretpostaviti da za svaki $\epsilon > 0$ postoji okolina broja x_0 takva da za svaki x iz te okoline vrijedi:

$$\frac{g(\xi)}{g(x)} < \epsilon \qquad \text{i} \qquad \frac{f(\xi)}{f(x)} < \epsilon,$$

$$\text{odnosno, kada } x \to x_0^+, \text{ onda vrijedi} \frac{1 - \frac{f(\xi)}{f(x)}}{1 - \frac{g(\xi)}{g(x)}}.$$

Sada rezultat Teorema 8 možemo zapisati u obliku:

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(\xi)}{f(x)}}{1 - \frac{g(\xi)}{g(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(\xi)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\xi)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Pošto ξ može biti bilo koji broj, odaberimo da ξ teži ka x_0^+. Tada i c teži ka x_0^+ pa vrijedi:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Upotrijebimo teorem na sljedećem primjeru:

Primjer 16. *Tražimo* $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$.

Rješenje. Vidimo da vrijedi $\lim_{x \to \infty} \ln x = \lim_{x \to \infty} x = \infty$. *Zato zbog Teorema 11 možemo i ovdje primijeniti L'Hôpitalovo pravilo, odnosno deriviramo i brojnik i nazivnik. Dobivamo:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

4.3 Neodređeni oblik $0 \cdot \infty$

U ovom odjeljku promatramo produkt funkcija f i g kada za $x \to x_0$ vrijedi $f(x) \to 0$ i $g(x) \to \infty$. Tada $f(x)g(x)$ u točki x_0 poprima neodređeni oblik $0 \cdot \infty$. Znamo da ako za $x \to x_0$, $g(x)$ teži prema ∞, onda $\frac{1}{g(x)} \to 0$. Sada produkt funkcija zapišemo u obliku:

$$f(x)g(x) = f(x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Dobivamo neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ koji već znamo riješiti primjenom L'Hôpitalovog pravila.

Promotrimo kako se limes oblika $0 \cdot \infty$ određuje na dolazećem primjeru:

Primjer 17. *Tražimo* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x})$.

Rješenje. Svedimo neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ *na otprije poznat oblik* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\cos x \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{(\frac{\pi}{2} - x)'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-1} = 1.$$

Također, za računanje produkta $f(x)g(x)$, $f(x)$ se može preoblikovati u oblik $\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}$. Tada imamo:

$$f(x)g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Oblik $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ je neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$ koji se također može riješiti pomoću L'Hôpitalovog pravila. To ćemo vidjeti na predstojećem primjeru.

Primjer 18. *Tražimo* $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-x}$.

Rješenje. Svedimo limes na neki drugi neodređeni oblik:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^{-x}}}.$$

Dobili smo neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$*. Uzastopno primijenimo L'Hôpitalovo pravilo. Dobivamo:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

4.4 Neodređeni oblik $\infty - \infty$

Nadalje promatramo razliku funkcija f i g kada za $x \to x_0$ vrijedi $f(x) \to \infty$ i $g(x) \to \infty$. Tada $f(x) - g(x)$, za $x \to x_0$, poprima neodređeni oblik $\infty - \infty$. Razliku funkcija zapišimo kao:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

U takvom zapisu brojnik i nazivnik teže ka nuli, odnosno dobili smo neodređeni oblik $\frac{0}{0}$.

Primjer 19. *Izračunajmo* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (tgx - \frac{1}{\cos x})$.

Rješenje. Preoblikujmo razliku funkcija u drugi oblik:

$$tgx - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{tgx}} - \frac{1}{\frac{1}{\cos^{-1} x}} = \frac{\cos x - \frac{1}{tgx}}{\frac{\cos x}{tgx}}.$$

Sada je $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x - \frac{1}{tgx}}{\frac{\cos x}{tgx}}$ *oblika* $\frac{0}{0}$. *Iskoristimo L'Hôpitalovo pravilo:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x - \frac{1}{tgx}}{\frac{\cos x}{tgx}} &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\cos x - \frac{1}{tgx})'}{(\frac{\cos x}{tgx})'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{-\sin x \cdot tgx - \frac{1}{\cos x}}{tg^2 x}} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}}{\frac{-\cos x(\sin^2 x+1)}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^3 x - 1}{\cos x(\sin^2 x + 1)} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\sin^3 x - 1)'}{(\cos x(\sin^2 x + 1))'} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{3\sin^2 x \cos x}{2 \sin x \cos^2 x - \sin x(\sin^2 x + 1)} = \frac{0}{-2} = 0.
\end{aligned}$$

Nekada su obje funkcije zapisane kao razlomak, tj. $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ i $g(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, kada f_2 i g_2 teže prema nuli. Onda računamo:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \right).$$

Raspišimo razlomak:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x)g_2(x) - g_1(x)f_2(x)}{f_2(x)g_2(x)}.$$

Dobili smo neodređeni oblik $\frac{0}{0}$.

Upotrijebimo ovaj postupak na sljedećem primjeru:

Primjer 20. *Odredimo* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2+\pi x}{2x}\right)$.

Rješenje. Limes je oblika $\infty - \infty$. *Funkcije najprije svedimo na zajednički razlomak:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2+\pi x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\sin x - \pi x \sin x}{2x\sin x}.$$

Sada imamo neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ *na koji možemo primijeniti L'Hôpitalovo pravilo i Teorem 10.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\sin x - \pi x\sin x}{2x\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(2x - 2\sin x - \pi x\sin x)'}{(2x\sin x)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos x - \pi\sin x - \pi x\cos x}{2(\sin x + x\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2 - 2\cos x - \pi\sin x - \pi x\cos x)'}{(2(\sin x + x\cos x))'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x - 2\pi\cos x + \pi x\sin x}{4\cos x - 2x\sin x} = \frac{-2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4.5 Neodređeni oblici 0^0, ∞^0, 1^∞

Kod neodređenih oblika ∞^0, 0^0, 1^∞ radi se o limesima oblika $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$.

Funkciju $[f(x)]^{g(x)}$ označimo s $F(x)$ i obje funkcije logaritmiramo prirodnim logaritmom pa dobijemo:

$$\begin{aligned}
\ln F(x) &= \ln[f(x)]^{g(x)}\\
\ln F(x) &= g(x)\ln f(x).
\end{aligned}$$

Nadalje, gledamo koliko iznosi $\lim \ln F(x) = \lim g(x)\ln f(x)$. Znamo da Teoremu 5 limes i neprekidna funkcija "komutiraju" pa se $\lim \ln F(x)$ može zapisati kao:

$$\lim_{x\to x_0}\ln F(x) = \ln \lim_{x\to x_0} F(x).$$

Ako uspijemo pronaći $\lim\limits_{x\to x_0}\ln F(x) = L$, vrijedi:

$$\ln \lim_{x\to x_0} F(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} F(x) = e^L.$$

Kod svih triju oblika ∞^0, 0^0, 1^∞ najprije računamo $\lim g(x)\ln f(x) = L$ pa računamo $\lim \ln[f(x)]^{g(x)} = e^L$.

Kod oblika 0^0 i eksponent (funkcija f) i baza (funkcija g) teže ka 0. Tada $\ln f(x)$ teži prema $-\infty$, zato što f teži ka 0, i onda je $\lim g(x)\ln f(x)$ oblika $0\cdot(-\infty)$. Promotrimo sljedeći primjer:

Primjer 21. *Izračunajmo* $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$.

Rješenje. Limes je neodređenog oblika 0^0*. Najprije izračunajmo koliko iznosi L. Za to rješavamo* $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln(1-\cos x))$*:*

$$L=\lim_{x\to 0}(x\cdot\ln(1-\cos x))=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{x^{-1}}.$$

Limes je bio oblika $0\cdot(-\infty)$ *pa je sveden na oblik* $\frac{\infty}{\infty}$*. Upotrebom L'Hôpitalovog pravila dobijemo:*

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1-\cos x))'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x-1}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2\sin x)'}{(1-\cos x)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x+x^2\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x\sin x+x^2\cos x)'}{(-\sin x)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin x+x\cos x)+2x\cos x-x^2\sin x}{-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cos x+\sin x(2-x^2)}{-\cos x}\\&=\frac{0}{-1}=0.\end{aligned}$$

Dobili smo da je $L=0$*. Stoga je:*

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^x=e^0=1.$$

Kod oblika ∞^0 baza f teži prema ∞ pa i $\ln f(x)$ teži prema ∞, a eksponent g teži ka nuli. Tada je $\lim g(x)\ln f(x)$ oblika $0\cdot\infty$.

Pogledajmo primjer u kojem se pojavljuje limes tog oblika:

Primjer 22. *Odredimo* $\lim\limits_{x\to 1^-}(\frac{1}{1-x})^{\ln x}$.

Rješenje. Imamo neodređeni oblik ∞^0*. Najprije izračunajmo koliki je L:*

$$L=\lim_{x\to 1^-}\left((\ln x)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{(\ln x)^{-1}}.$$

Limes je sveden na oblik $0\cdot\infty$ *pa je prikazan u obliku* $\frac{\infty}{\infty}$*. Kada upotrijebimo L'Hôpitalovo pravilo dobijemo:*

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln\frac{1}{1-x})'}{((\ln x)^{-1})'}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{\frac{1}{1-x}}(1-x)^{-2}}{-(\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to 1^-}-(x(1-x)^{-1}(\ln x)^2)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2}{\frac{x-1}{x}}.\end{aligned}$$

Limes je i dalje oblika $\frac{0}{0}$*. Ponovno iskoristimo L'Hôpitalovo pravilo:*

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2}{\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{((\ln x)^2)'}{(\frac{x-1}{x})'}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(\ln x)\frac{1}{x}}{\frac{x-x+1}{x^2}}=\lim_{x\to 1^-}2x\ln x=2\cdot 0=0.$$

Pošto je $L=0$*, slijedi da je:*

$$\lim_{x\to 1^-}(\frac{1}{1-x})^{\ln x}=e^0=1.$$

U slučaju 1^∞ baza teži prema 1 pa $\ln f(x)$ teži prema 0. Eksponent teži ka ∞ i zato je $\lim g(x) \ln f(x)$ oblika $\infty \cdot 0$, kao i prethodni oblici u ovom odjeljku. Analizirajmo taj oblik na idućem primjeru:

Primjer 23. *Odredimo* $\lim\limits_{x\to 0}(e^x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Rješenje. Ovo je neodređen oblik 1^∞. *U početku trebamo znati koliki je L:*

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}\cdot \ln e^x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}.$$

Limes je prikazan u obliku $\infty \cdot 0$ *pa je sveden na oblik* $\frac{0}{0}$. *Upotrebom L'Hôpitalovog pravila dobijemo*

$$L == \lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Kako je $L = 1$, *slijedi da je traženi limes jednak*

$$\lim_{x\to 0}(e^x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^L = e^1 = e.$$

Literatura

[1] D. Blanuša, Viša matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.

[2] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[3] B. Guljaš, Matematička analiza I & II, PMF-MO, Zagreb, 2018.

[4] P. Javor, Matematička analiza 1, Element, Zagreb, 2003.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika I, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[6] *Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital*, dostupno na `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_LHopital/`.

Sažetak

U završnom radu govorit ćemo o rezultatu zvanom L'Hôpitalovo pravilo i njegovim primjenama. Prije nego što obradimo sam teorem kojim je opisan taj rezultat definirat ćemo osnovne pojmove iz matematičke analize. Prvotno ćemo objasniti limes funkcije. Nakon toga opisat ćemo neprekidnost funkcije, a potom ćemo definirati derivaciju funkcije. Na kraju obuhvaćamo L'Hôpitalovo pravilo, njegov dokaz i primjenu kod računanja limesa neodređenih oblika.

Ključne riječi

limes funkcije, neprekidnost funkcije, derivacija funkcije, L'Hôpitalovo pravilo, neodređeni oblici

L'Hôpital's rule and applications

Summary

In this final paper we will talk about the theorem called L'Hôpital's rule and its applications. Before we go over the theorem we will define basic terms of calculus. First we are going to explain the limit of a function. After that we will describe the continuous function and then we will define the derivative of a function. Finally, we will go over L'Hôpital's rule, its proof and apply it to evaluate limits of inderteminate forms.

Keywords

limit of function, continuous function, function derivative, L'Hôpital's rule, inderteminate form