Ravninske krivulje

Blažević, Nikolina

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Ravninske krivulje

Završni rad

Mentor:
doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Student:
Nikolina Blažević

Osijek, 2024

Sadržaj

1 | Uvod

U ovom radu bavit ćemo se proučavanjem geometrijskih svojstava krivulja koje se nalaze u ravnini. Krivulje predstavljaju osnovni koncept u diferencijalnoj geometriji i imaju široku primjenu u različitim granama matematike i fizike. Kroz ovaj rad cilj je predstaviti temeljne pojmove koji se koriste u lokalnoj teoriji krivulja, kao i primijeniti te pojmove na specifične vrste krivulja koje se nalaze unutar ravnine.

Prvi dio rada bavi se osnovnim pojmovima lokalne teorije krivulja, kao što su definicije krivulje, pojmovi zakrivljenosti i torzije, te teorija Frenetovog trobrida. Ova poglavlja postavljaju temelje za daljnje proučavanje krivulja i razumijevanje njihovih osnovnih svojstava.

U središnjem dijelu rada posebna se pažnja posvećuje analizi krivulja unutar dvodimenzionalne ravnine. Ravninske krivulje specifične su po tome što leže u jednoj ravnini, što pojednostavljuje njihove karakteristike, ali ih čini izuzetno važnim za razumijevanje osnovnih geometrijskih pojmova. Ovdje će biti prikazana povezanost između diferencijalnih i geometrijskih svojstava ravninskih krivulja, kao i načini njihovog proučavanja kroz parametarske jednadžbe.

Završno poglavlje donosi primjere ravninskih krivulja, kroz koje će se teorijski koncepti prikazani u prethodnim poglavljima primijeniti na konkretne primjere.

2 | Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja

Prije upoznavanja sa samim ravninskim krivuljama, definirat ćemo neke osnovne pojmove lokalne teorije krivulja.

Definicija 1. *Parametrizirana krivulja u* $\mathbb{R}^n$ *je glatko preslikavanje* $c : I \to \mathbb{R}^n$, *pri čemu je* $I \subset \mathbb{R}$.

U nastavku ćemo koristiti samo *krivulja* umjesto *parametrizirana krivulja.*

Definicija 2. *Krivulju* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *nazivamo regularnom u točki* $c(t_0)$ *ako je* $\dot{c}(t_0) \neq 0$, *za* $t_0 \in I$. *Krivulja* c *je regularna ako je regularna u svakoj svojoj točki* ($\dot{c}(t) \neq 0$, *za svaki* $t \in I$). *Točku krivulje za koju je* $\dot{c}(t) = 0$ *nazivamo singularnom točkom krivulje.*

Definicija 3. *Neka je* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *regularna krivulja. Tada vektor* $\dot{c}(t)$ *nazivamo tangencijalnim vektorom krivulje* c *u točki* $c(t)$. *Funkciju* $\|\dot{c}(t)\|$ *nazivamo brzinom krivulje* c *u točki* $c(t)$. *Za krivulju* c *kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka ako je* $\|\dot{c}(t)\| = 1$ *za svaki* $t \in I$. *Pravac koji prolazi točkom* $c(t)$ *i ima vektor smjera* $\dot{c}(t)$, *nazivamo tangentom krivulje* c *u točki* $c(t)$.

Definicija 4. *Funkcija* $s : I \to \mathbb{R}$ *duljine luka krivulje* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *od točke* $\dot{c}(t_0)$ *je funkcija*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{c}(u)\| du.$$

Duljina luka krivulje $c : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ *je realni broj*

$$s = \int_{a}^{b} \|\dot{c}(u)\| du.$$

Uočimo da ako je c *jedinične brzine, onda je duljina luka krivulja jednaka duljini intervala* I:

$$s = \int_{a}^{b} du = b - a.$$

Napomena 1. *Derivaciju krivulje po općem parametru označavat ćemo s* $\dot{c}(t)$, *a ako je krivulja parametrizirana duljinom luka, derivaciju ćemo označavati s* $c'(s)$.

Pogledajmo sada na koji način ćemo reparametrizirati krivulju c.

Definicija 5. *Neka je* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *regularna krivulja. Reparametrizacija krivulje* c *je preslikavanje* $\tilde{c} = c \circ \varphi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$, *gdje je* $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ *i* $\varphi : \tilde{I} \to I$ *glatka bijekcija tako da vrijedi* $\dot{\varphi}(\tilde{t}) \neq 0$, *za svaki* $\tilde{t} \in \tilde{I}$.

Propozicija 1 (Vidjeti [2], Propozicija 1.3.4.)**.** *Neka je c krivulja parametrizirana duljinom luka s i neka je $\tilde{c}$ njena reparametrizacija s parametrom duljine luka u. Tada vrijedi $u = \pm s + C, C \in \mathbb{R}$. Obratno, ako je s parametar duljine luka krivulje c, onda je $u = \pm s + C, C \in \mathbb{R}$ također definirana parametrom duljine luka.*

Dokaz. Krivulja $\tilde{c}$ je reparametrizacija krivulje c, pa vrijedi $c(s) = \tilde{c}(u)$. Tada je

$$\frac{dc}{ds} = \frac{d\tilde{c}}{du} \cdot \frac{du}{ds}$$

i normiranjem obje strane dobivamo

$$\left\| \frac{dc}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\tilde{c}}{du} \cdot \frac{du}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\tilde{c}}{du} \right\| \cdot \left| \frac{du}{ds} \right|$$

Znamo da su c i $\tilde{c}$ krivulje parametrizirane duljinom luka, pa slijedi

$$\left\| \frac{dc}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\tilde{c}}{du} \right\| = 1.$$

Stoga je

$$\left| \frac{du}{ds} \right| = 1$$

tj.

$$\frac{du}{ds} = \pm 1$$

pa integracijom po s dobivamo

$$u = \pm s + C, C \in \mathbb{R}$$

□

Nadalje, uvodimo pojam koji će nam biti vrlo važan u nastavku, a to je zakrivljenost krivulje.

Definicija 6. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ regularna krivulja parametrizirana duljinom luka s. Funkciju $\kappa : I \to \mathbb{R}$ definiranu s $\kappa(s) = \|c''(s)\|$ nazivamo zakrivljenošću ili fleksijom krivulje c u točki $c(s)$.*

Uočimo da definicija zakrivljenosti ne ovisi o izboru parametra duljine luka. Vrijedi:

$$c'(s) = \frac{dc}{ds} = \frac{d\tilde{c}}{du} \cdot \frac{du}{ds},$$

pa daljnjim deriviranjem po parametru s dobivamo

$$c'' = \frac{d^2c}{ds^2} = \frac{d^2c}{du^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{d\tilde{c}}{du} \cdot \frac{d^2u}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\tilde{c}' \cdot \frac{du}{ds} \right) = \frac{d^2\tilde{c}}{du^2} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{d\tilde{c}}{du} \cdot \frac{d^2u}{ds^2}$$

$$\Rightarrow c'' = \tilde{c}'' \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \tilde{c}' \frac{d^2u}{ds^2} = \tilde{c}'' + \tilde{c}' \cdot 0$$

Stoga je

$$\kappa(s) = \|c''(s)\| = \|\tilde{c}''(u)\| = \tilde{\kappa}(u).$$

Kako bismo objasnili pojam Frenetov trobrid, najprije ćemo definirati jedinično tangencijalno polje, kada za krivulju kažemo da je dopustiva te što su vektorsko polje glavnih normala i vektorsko polje binormala.

Definicija 7. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^n$ regularna krivulja. Jedinično tangencijalno polje je preslikavanje $T : I \to \mathbb{R}^n$ definirano s*

$$T(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}.$$

Definicija 8. *Za regularnu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3$ kažemo da je dopustiva ako su vektorska polja prve i druge derivacije linearno nezavisna.*

Dakle, za dopustive krivulje vrijedi $\kappa(t) \neq 0$, za svaki $t \in I$, a specijalno i za krivulje parametrizirane duljinom luka, tj. $\kappa(s) \neq 0$, za svaki $s \in I$, što znači da je $\|c''(s)\| \neq 0$, pa onda i $c''(s) \neq 0$. Uočimo da je svaka dopustiva krivulja ujedno i regularna.

Napomena 2. *Pravac je jedina regularna krivulja koja nije dopustiva.*

Definicija 9. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka. Tada vektorsko polje glavnih normala definiramo kao:*

$$N(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}.$$

Vektorsko polje binormala definiramo kao:

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Sada možemo definirati Frenetov trobrid.

Definicija 10. *Za dopustivu krivulju parametriziranu duljinom luka $c : I \to \mathbb{R}^3$ vektori $\{T(s), N(s), B(s)\}$ čine ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3_{c(s)}$ koju nazivamo Frenetov trobrid (reper, okvir) krivulje c.*

Još jedan važan pojam vežemo uz krivulje, a to je torzija krivulje.

Definicija 11. *Za dopustivu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3$ koja je parametrizirana duljinom luka, funkcija $\tau : I \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

naziva se torzijom (sukanjem) krivulje c u točki $c(s)$.

Sljedećim teoremom opisana je veza između Frenetovog trobrida i njegovih derivacija.

Teorem 2 (Frenetove formule)**.** (*Vidjeti* [2], *Teorem 1.3.7.*) *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka s. Tada vrijedi:*

$$T'(s) = \kappa(s) \cdot N(s),$$

$$N'(s) = -\kappa(s) \cdot T(s) + \tau(s) \cdot B(s),$$
$$B'(s) = -\tau(s) \cdot N(s).$$

U nastavku ćemo definirati ravninsku krivulju i dokazati da je krivulja ravninska ako i samo ako je njena torzija jednaka nuli.

Definicija 12. *Za krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3$ kažemo da je ravninska krivulja ako postoji ravnina $\Pi \subsetneq \mathbb{R}^3$ takva da je $c(I) \subsetneq \Pi$.*

Propozicija 3 (Vidjeti [2], Propozicija 1.4.2.)**.** *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ dopustiva krivulja. Krivulja $c(I)$ je ravninska ako i samo ako je $\tau(t) = 0$, za svaki $t \in I$.*

3 | Ravninske krivulje

U ovom poglavlju bavit ćemo se specijalnom teorijom ravninskih krivulja. Svi rezultati iz prethodnog poglavlja o krivuljama u $\mathbb{R}^n$ vrijede za bilo koji prirodan broj n. Neka je $n = 2$. Ta dimenzija je jedina dimenzija u kojoj izrazi *u smjeru kazaljke na satu* i *suprotno od smjera kazaljke na satu* imaju smisla za opisivanje kretanja regularne krivulje. Pogledajmo linearni izomorfizam $\mathcal{R}_{90} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiran kao

$$\mathcal{R}_{90}(x, y) = (-y, x).$$

Tako definiran izomorfizam služi za rotaciju vektora (x, y) za 90° u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. Ako $\mathbb{R}^2$ promatramo kao kompleksnu ravninu, onda je $\mathcal{R}_{90}$ zadano množenjem s imaginarnom jedinicom i. Tada je $\mathcal{R}_{90}(\mathcal{R}_{90}(\mathbf{v})) = -\mathbf{v}$, za svaki $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

Pretpostavimo sada da je $c : I \to \mathbb{R}^2$ ravninska krivulja jedinične brzine. Označimo s $\mathbf{v}$ vektor brzine krivulje c, tj. $\mathbf{v}(t) = c'(t)$, dok je $\mathbf{a}$ vektor akceleracije te krivulje c, odnosno $\mathbf{a}(t) = c''(t)$.

Uočimo da su $\mathbf{a}(t)$ i $\mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t))$ oba okomiti na $\mathbf{v}(t)$, za svaki $t \in I$. Iz toga slijedi da oni moraju biti međusobno paralelni, što implicira postojanje jednadžbe

$$\mathbf{a}(t) = \kappa_s(t) \cdot \mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t)) \tag{3.1}$$

za neke skalare $\kappa_s(t) \in \mathbb{R}$.

Zakrivljenost $\kappa_s : I \to \mathbb{R}$ nazivamo *orijentirana zakrivljenost* ili *zakrivljenost s predznakom*. Kažemo da je orijentirana zakrivljenost krivulje negativna ukoliko se krivulja zakreće u negativnom smjeru u točki t, tj. u smjeru kazaljke na satu u t. Ako se krivulja kreće u smjeru suprotnog od smjera kazaljke na satu, onda je zakrivljenost s predznakom pozitivna.

U nastavku ćemo iskazati i dokazati tvrdnju koja kaže da je apsolutna vrijednost zakrivljenosti s predznakom jednaka zakrivljenosti krivulje.

Lema 1 (Vidjeti [3], Lema 1.37)**.** *Za orijentiranu zakrivljenost κ_s i zakrivljenost κ ravninske krivulje c vrijedi*

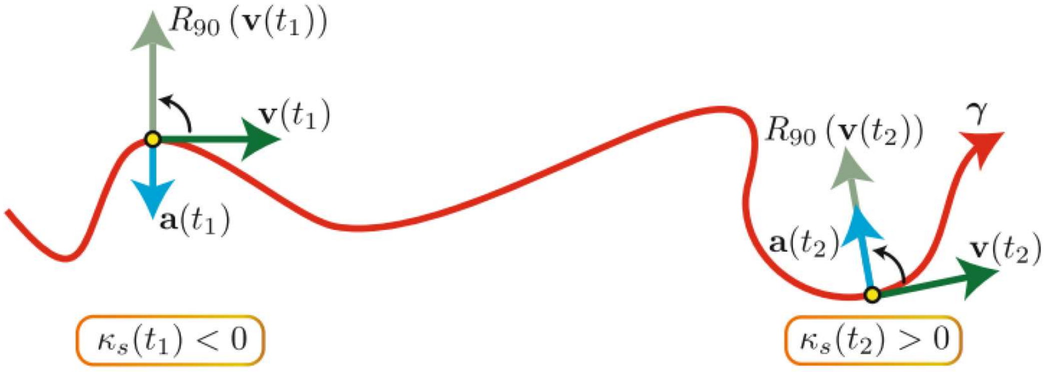
$$|\kappa_s(t)| = \kappa(t).$$

Dokaz. Primijetimo da je $\|\mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t))\| = \|\mathbf{v}(t)\| = 1$. Ranije smo zaključili da vrijedi $\kappa(t) = \|c''(t)\|$, pa iz toga slijedi

$$\kappa(t) = \|\mathbf{a}(t)\| = \|\kappa_s(t)\mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t))\| = |\kappa_s(t)|.$$

□

[vidjeti [3, Slika 1.20.]]



Slika 3.1: Predznak zakrivljenosti krivulje u odnosu na smjer zakretanja, slika preuzeta iz [3]

Jednadžbu (3.1) možemo drugačije zapisati kao

$$\kappa_s = \langle \mathbf{a}(t), \mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle. \tag{3.2}$$

Do sada smo pretpostavljali da je c jedinične brzine. Međutim, čak i kada to nije slučaj, njezina zakrivljenost s predznakom može se izračunati generalizacijom jednadžbe 3.2.

Definicija 13. *Ako je $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ regularna ravninska krivulja (ne nužno jedinične brzine), onda za sve $t \in I$ vrijedi*

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), \mathcal{R}_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}\right) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), \mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}.$$

Dakle, zaključujemo da je $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$ i za one krivulje koje nisu jedinične brzine.

Propozicija 4 (vidjeti [3, Propozicija 1.39])**.** *Ako je $c : I \to \mathbb{R}$ ravninska krivulja jedinične brzine, tada postoji glatka funkcija kuta $\theta : I \to \mathbb{R}$ takva da za sve $t \in I$ imamo*

$$\mathbf{v}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)). \tag{3.3}$$

Ova funkcija je jedinstvena do na zbrajanje višekratnika 2π.

Prije nego što započnemo dokaz, trebamo konstruirati *funkciju lokalnog kuta* za svaki $t_0 \in I$ takvu da u okolini točke t_0 vrijedi jednadžba 3.3. Označimo komponente funkcije brzine s $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$. Funkcija θ je definirana u okolini $v_x > 0$ te za nju vrijedi $\theta(t) = \arcsin(v_y(t))$. Slično, u okolini gdje je $v_y > 0$, vrijedit će funkcija $\theta(t) = \arccos v_x(t)$. Analogno se mogu pronaći formule koje vrijede u okolini gdje je $v_x < 0$ ili $v_y < 0$. Dakle, ključni problem leži u definiranju *globalne funkcije kuta* koja je definirana na cijelom I. Važno je napomenuti da lokalna funkcija kuta ostaje ista čak i ako joj dodamo bilo koji višekratnik broja

2π, zbog periodičnosti trigonometrijskih funkcija. Ako je θ funkcija lokalnog kuta definirana u okolini točke t, onda za sve t u toj okolini vrijedi

$$\theta'(t) = \kappa_s(t). \tag{3.4}$$

Stoga, možemo zaključiti da je orijentirana zakrivljenost jednaka brzini kojom se kut mijenja. To se također može pokazati i algebarski tako da deriviramo izraz 3.2:

$$\mathbf{a}(t) = \theta'(t) \cdot (-\sin\theta(t), \cos\theta(t)) = \theta'(t) \cdot \mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t)).$$

Iz jednadžbe 3.3 dolazimo do zaključka da možemo definirati funkciju globalnog kuta integriranjem funkcije κ_s.

Sada smo spremni dokazati Propoziciju 4.

Dokaz. Neka $t_0 \in I, \theta_0 \in \mathbb{R}$ tako da je $\mathbf{v}(t_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$. Zatim definiramo našu globalnu funkciju kuta $\theta : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \kappa_s(u)du + \theta_0.$$

Primijetimo da vrijedi $\theta'(t) = \kappa_s(t)$, za sve $t \in I$.

Kako bismo pokazali da ova funkcija vrijedi, definirajmo $\hat{I} \subset I$ kao skup na kojem jednadžba 3.2 vrijedi:

$$\hat{I} = \{t \in I : \mathbf{v}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))\}.$$

Preostaje pokazati da je $\hat{I} = I$.

Očito je $t_0 \in \hat{I}$. Tvrdimo da $\hat{I}$ također sadrži svaki podinterval od I koji sadrži t_0 na kojem je definirana funkcija lokalnog kuta. Da bismo to pokazali, dodamo točan višekratnik od 2π funkciji lokalnog kuta tako da se lokalna i globalna funkcija podudaraju u t_0. Budući da imaju istu derivaciju, vrijednosti lokalnih i globalnih funkcija kuta se moraju podudarati na cijelom podintervalu, pa ovaj podinterval leži u $\hat{I}$. Dakle, postoji okolina točke $t_0 \in I$ koja leži u $\hat{I}$.

Isti argument potvrđuje da *svaki* element iz $\hat{I}$ ima okolinu u I koja leži u $\hat{I}$. Dakle, $\hat{I}$ je otvoreno u I. Također je vrlo lako vidjeti da je $\hat{I}$ zatvoren u I. Međutim, interval I je povezan pa nema nepraznih podskupova koji su i otvoreni i zatvoreni, osim svih I. Stoga zaključujemo da je $\hat{I} = I$.

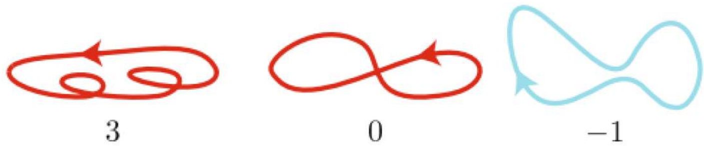
Ako je $\Theta : I \to \mathbb{R}$ neka druga glatka funkcija za koju vrijedi jednadžba 3.2, onda se $\Theta(t_0)$ i $\theta(t_0)$ razlikuju do na višekratnik broja 2π. Budući da Θ i θ imaju istu derivaciju na I, točnije κ_s, oni se zapravo moraju razlikovati za ovaj višekratnik od 2π na cijelom I.

□

Propozicija 4 daje uvjete za strogo definiranje indeksa rotacije, koji mjeri broj petlji u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu koje izvodi krivulja jedinične brzine.

Definicija 14. ***Indeks rotacije*** *zatvorene ravninske krivulje jedinične brzine* $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *je jednak* $\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$, *gdje je* θ *funkcija kuta iz Propozicije 4. Indeks rotacije pravilne zatvorene ravninske krivulje (ne nužno jedinične brzine) predstavlja indeks rotacije reparametrizacije jedinične brzine koja čuva orijentaciju.*

Neki primjeri prikazani su na Slici 3.2. Indeks rotacije je cijeli broj jer je $\mathbf{v}(b) = \mathbf{v}(a)$, pa je $\theta(b) - \theta(a)$ višekratnik od 2π.



Slika 3.2: Indeksi rotacije nekih zatvorenih krivulja, slika preuzeta iz [3]

4 | Primjeri ravninskih krivulja

U ovom poglavlju prikazat ćemo neke od najvažnijih i najpoznatijih ravninskih krivulja koje imaju značajnu ulogu u geometriji, ali i u brojnim primjenama u znanosti i inženjerstvu.

Jedan od najjednostavnijih i najpoznatijih primjera ravninskih krivulja je kružnica, koja se definira kao skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od jedne fiksne točke zvane središte. Elipsa je još jedna važna krivulja koja se pojavljuje u brojnim prirodnim i tehničkim kontekstima; definirana je kao skup točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dvije fiksne točke (žarišta) stalan. Arhimedova spirala primjer je krivulje koja raste linearno s udaljenošću od središta i ima brojne primjene u raznim disciplinama, od matematike do fizike. Cikloida je ravninska krivulja koja opisuje putanju točke na kružnici koja se kotrlja bez klizanja duž ravne linije. Ovdje smo naveli samo neke, ali postoji još mnogo ravninskih krivulja koje bi bile zanimljive za proučavanje. U narednim odjeljcima ćemo izvesti izraz za računanje zakrivljenost kružnice i zakrivljenost elipse, izračunati ih na konkretnim primjerima te pogledati kako izgledaju na grafu.

Primjer 1. *Neka je kružnica radijusa R parametrizirana s*

$$\mathbf{r}(t) = R \cdot (\cos t, \sin t)$$

Dvaput deriviramo $\mathbf{r}(t)$ po parametru t i dobivamo

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R \cdot (-\sin t, \cos t),$$

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = R \cdot (-\cos t, -\sin t).$$

Imamo zakrivljenost κ:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

Budući da je $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{r}''(t)\| = R$, zakrivljenost je

$$\kappa(t) = \frac{R}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

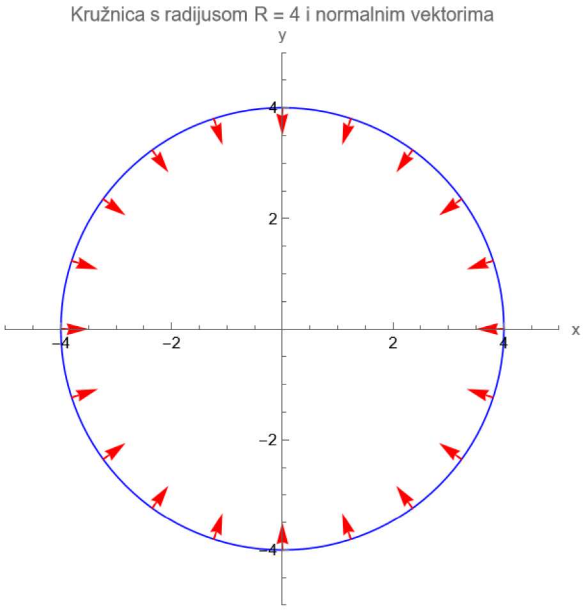
Neka je dana kružnica s radijusom $R = 4$. Želimo izračunati zakrivljenost te kružnice koristeći formulu koju smo prethodno izveli. Kružnica je opisana parametrizacijom u ravnini kao:

$$\mathbf{r}(t) = 4 \cdot (\cos t, \sin t).$$

Zakrivljenost iznosi

$$\kappa(t) = \frac{1}{R} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Očito što je veći radijus kružnice, zakrivljenost postaje manja, odnosno kružnica postaje "ravnija". Iako je konstantna, zakrivljenost se može vizualizirati pomoću normalnih vektora i prikazom njihovog smjera prema centru kružnice.



Slika 4.1: Zakrivljenost kružnice

Da bismo izračunali orijentiranu zakrivljenost dane kružnice, trebamo koristiti formulu iz Definicije 13. Odredimo naše $\mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t)$*:*

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-4\sin t, 4\cos t)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-4\cos t, -4\sin t).$$

Sada računamo $\|\mathbf{v}(t)\|$ *i* $\mathcal{R}_{90}$ *te vektorski produkt* $\mathbf{a}(t)$ *i* $\mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t))$*:*

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t} = \sqrt{16(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{16} = 4$$

$$\mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t)) = (-4\cos t, -4\sin t)$$

$$\langle \mathbf{a}(t), \mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle = 16\cos^2 t + 16\sin^2 t = 16(\cos^2 t + \sin^2 t) = 16$$

Dakle, orijentirana zakrivljenost kružnice polumjera 4 iznosi

$$\kappa_s = \frac{16}{4^3} = \frac{1}{4}.$$

Primjer 2. *Razmotrimo elipsu koja je definirana jednadžbom:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gdje su a i b poluosi elipse duž osi x i y, redom. Elipsa se može parametrizirati kao:

$$x(\theta) = a\cos\theta$$

$$y(\theta) = b\sin\theta$$

Prije nego pogledamo konkretan primjer, izvedimo formulu za zakrivljenost elipse. Izračunajmo prvu derivaciju parametarskih jednadžbi po θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$$

Sada izračunajmo drugu derivaciju:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = -a\cos\theta, \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = -b\sin\theta$$

Promotrimo krivulju $\mathbf{r}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, gdje su $x(\theta)$ i $y(\theta)$ funkcije koje opisuju položaj točke na krivulji u ovisnosti o parametru θ. Tangenta na krivulji u točki θ dana je prvom derivacijom:

$$\mathbf{r}'(\theta) = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}\right)$$

Druga derivacija daje vektor ubrzanja:

$$\mathbf{r}''(\theta) = \left(\frac{d^2x}{d\theta^2}, \frac{d^2y}{d\theta^2}\right)$$

Vektor zakrivljenosti $\mathbf{k}(\theta)$ je okomit na tangentu, a njegova norma daje zakrivljenost. Izračunava se kao:

$$\mathbf{k}(\theta) = \frac{\mathbf{r}'(\theta) \times \mathbf{r}''(\theta)}{|\mathbf{r}'(\theta)|^3}$$

Na kraju, dobivamo:

$$\kappa(\theta) = \frac{\left|\frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d^2x}{d\theta^2}\right|}{\left(\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Uvrštavanjem izvedenih derivacija u formulu za zakrivljenost dobivamo:

$$\kappa(\theta) = \frac{|-a\sin\theta \cdot (-b\sin\theta) - b\cos\theta \cdot (-a\cos\theta)|}{\left((-a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2\right)^{3/2}}$$

Nakon pojednostavljenja:

$$\kappa(\theta) = \frac{|ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta|}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{3/2}}$$

Budući da je $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$*:*

$$\kappa(\theta) = \frac{ab}{\left(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

Dakle, zakrivljenost elipse u točki određene kutom θ *je:*

$$\kappa(\theta) = \frac{ab}{\left((b\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Za elipsu s poluosima $a = 5$ *i* $b = 3$*, zakrivljenost u točki gdje je* $\theta = 0$ *(što odgovara vrhu elipse na osi* x*) je:*

$$\kappa(0) = \frac{5\cdot 3}{\left((3\cdot\cos 0)^2 + (5\cdot\sin 0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(0) = \frac{15}{(9+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$$

Dakle, zakrivljenost elipse u točki $\theta = 0$ *je* $\frac{5}{9}$*.*
Sada računamo zakrivljenost κ_s *kao ranije koristeći Definiciju 13:*

$$\mathbf{v}(\theta) = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = (-5\sin\theta, 3\cos\theta),$$

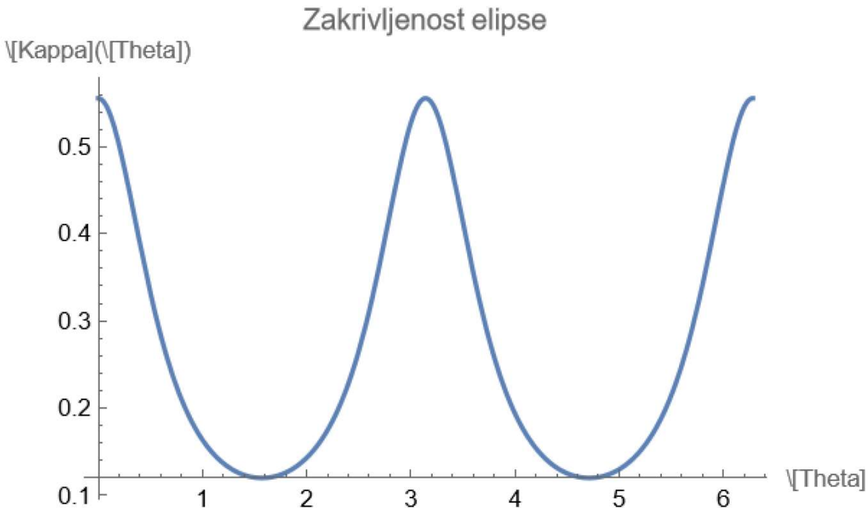
$$\mathbf{a}(\theta) = \frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = (-5\cos\theta, -3\sin\theta),$$

$$\|\mathbf{v}(\theta)\| = \sqrt{25\sin^2\theta + 9\cos^2\theta},$$

$$\mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(\theta)) = (-3\cos\theta, -5\sin\theta),$$

$$\langle \mathbf{a}(\theta), \mathcal{R}_{90}(\mathbf{v}(\theta))\rangle = 15\cos^2\theta + 15\sin^2\theta = 15(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 15.$$

Orijentirana zakrivljenost κ_s *je* $\kappa_s = \frac{15}{\left(\sqrt{25\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}\right)^3}$.



Slika 4.2: Zakrivljenost elipse

Literatura

[1] W.Kühnel,*Differential Geometry Curves–Surfaces–Manifolds*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2015.

[2] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, Matematički odsjek PMF Zagreb, Zagreb, 2016.

[3] K. Tapp, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Springer, Berlin, 2016.

Sažetak

Ravninske krivulje predstavljaju specifičnu vrstu krivulja koje su smještene unutar dvodimenzionalne ravnine. One su ključan predmet proučavanja u geometriji i diferencijalnoj geometriji, jer omogućuju razumijevanje odnosa između analitičkih jednadžbi i geometrijskih svojstava krivulja. U radu su prikazani temeljni pojmovi lokalne teorije krivulja, poput zakrivljenosti i Frenetovog okvira, koji omogućuju detaljnu analizu ravninskih krivulja. Osim teorijskog pregleda, dani su i konkretni primjeri poznatih ravninskih krivulja.

Ključne riječi

krivulja, parametar duljine luka, Frenetov trobrid, zakrivljenost, torzija, specijalna teorija ravninskih krivulja, kružnica, elipsa

Plane curves

Summary

Plane curves represent a specific type of curve that is situated within a two-dimensional plane. They are a key subject of study in geometry and differential geometry, as they allow for an understanding of the relationship between analytical equations and the geometric properties of curves. The paper presents fundamental concepts of local curve theory, such as curvature and the Frenet frame, which enable a detailed analysis of plane curves. In addition to the theoretical overview, concrete examples of well-known plane curves are provided.

Keywords

Curve, arc length parameter, Frenet frame, curvature, torsion, special theory of plane curves, circle, elipse

Životopis

Zovem se Nikolina Blažević, rođena sam 26. prosinca 1999. godine u Vinkovcima, a živim u Županji. Nakon završene osnovne škole, nastavila sam obrazovanje u prirodoslovno-matematičkoj gimnaziji u Županji, gdje sam potvrdila svoju ljubav prema matematici. Ta strast prema brojevima i rješavanju problema bila je glavni razlog zbog kojeg sam odlučila upisati Fakultet primijenjene matematike i informatike s ciljem da se posvetim matematici. Tijekom studija počela sam držati instrukcije iz matematike, a ubrzo i iz drugih predmeta poput kemije i fizike. To iskustvo poučavanja pomoglo mi je da otkrijem koliko uživam u prenošenju znanja drugima. Zbog toga sam se odlučila za nastavnički smjer matematike i trenutno usmjeravam svoje obrazovanje prema tome cilju. U slobodno vrijeme posvećujem se svojim hobijima. Aktivno sudjelujem u SKAC bendu, gdje imam priliku izražavati svoju ljubav prema glazbi, a uz to volim čitati duhovnu literaturu, posebno Bibliju. Svojim dosadašnjim obrazovnim putem, kao i kroz osobne interese, oblikovala sam se u osobu posvećenu obrazovanju, duhovnosti i umjetnosti, uvijek spremnu prenijeti svoja znanja i iskustva na druge.