SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Amanda Glavaš

NESTANDARDNI MATEMATIČKI ZADATCI

Diplomski rad

Osijek, 2016

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Amanda Glavaš

NESTANDARDNI MATEMATIČKI ZADATCI

Diplomski rad

Mentorica:
doc. dr. sc. Darija Marković

Osijek, 2016

Sadržaj

Uvod

Zadnjih desetak godina u središte pozornosti matematičkog obrazovanja na svim razinama stavlja se rješavanje problemskih zadataka i ističe kao jedna od važnijih matematičkih kompetencija. Međutim, Kurnik ističe da je uz dugogodišnje praćenje sudjelovanje učenika na matematičkim natjecanjima, na kojima se najčešće i pojavljuju takvi zadatci, pri-mijećeno kako se učenici ne snalaze u rješavanju nestandardnih i složenijih problema.
Ne ulazeći u razloge takvih ishoda, koji mogu biti od nedovoljne do loše pripreme učenika, uočeno je, pogotovo, da učenici slabije poznaju analizu koja je kod takvih problema početni i najvažniji korak. Grigorieva pak govori da na raznim fakultetima (uglavnom iz područja prirodnih znanosti) nerijetko postoje kolegiji koji se bave rješavanjem problemskih zadataka, a da su ti kolegiji najomraženiji kod studenata i da ih uglavnom izbjegavaju, ukoliko je moguće (pogledati [4]). Navodi da kod studenata izazivaju strah, tjeskobu i anksioznost jer ih smatraju najtežima. No, pitanje je, zašto je to tako?
Gotovo u svakom području matematike, za zadovoljenje određene kognitivne razine znanja, postoji niz poznatih razrađenih metoda, čak bi se moglo reći algoritama i postupka za rješavanje raznih, srodnih, problema. Već iz same formulacije i sintakse problema, može se naslutiti kojoj skupinu problema pripada te kojim metodama se može rješavati. Takvi su zadatci za većinu učenika poželjniji i pozitivno utječu na njihovo oblikovanje stavova prema matematici te motivaciju za učenjem. Nije nepoznanica da ljudi više preferiraju stvari koje im bolje idu i u čemu se osjećaju dobri. Ljudi više vole ono u čemu imaju svoj vidljivi i konstantni uspjeh. Naime, ako se učeniku zada neki problem za koji on već na prvi pogled zna *"gdje ga smjestiti"*, tj. kojem području matematike i kojoj skupini problema pripada te brzo uočava metodu rješavanja, smanjuje se njegova anksioznost i psihička napetost. Nema psihičkog opterećenja i učenik se odmah okreće rješavanju zadatka. Ipak, nije moguće sve probleme rješavati na "neki od poznatih načina", a takav tip problema karakterističan je za nestandardne i problemske zadatke.

Međutim, kada je u pitanju matematika, svaki je uspjeh rezultat napornog rada i zbog toga ljudi ne bi trebali imati strah ni od čega. Naime, ukoliko dođe do nekakvih poteškoća i problema na to se može odgovoriti na dva načina. Jedna način je da se uhvatimo u koštac s tim problemom, budemo uporni i ne odustajemo, a drugi je da ga pokušamo izbjeći i tražiti liniju manjeg otpora. Primjerice, ukoliko učenik ima problema sa svladavanjem sadržaja i koncepata u određenom području matematike kao što je to geometrija, dolazi do izostanka motivacije što uzrokuje smanjenje truda i zalaganja. U konačnici to vodi do loših rezultata te stvaranju negativnih stavova i sklonost izbjegavanju kada su u pitanju zadatci i sadržaji povezani s geometrijom.

Također, ovisno o pojedincu, poteškoće s kojima se susretne mogu pozitivno utjecati na njega, ako ih doživi kao izazov i to u njemu pobudi motivaciju, samim time uloži dodatan napor što rezultira postizanjem uspjeha. Vrlo je bitno napomenuti da taj inicijalni uspjeh vremenom često vodi i do većih uspjeha i suzbijanja straha. Stoga je važno učenike poučavati novim metodama, poticati ih na razvijanje vlastitih, poučavati kako matematički misliti te kako što djelotvornije iskoristiti i sintetizirati matematičko znanje da bi njihovo znanje bilo što trajnije, za razvitak matematičkih sposobnosti, ali i pozitivnog odnosa prema matematici.

1 Matematički zadatak

Prema Kurniku, matematički zadatak je složeni matematički objekt, a općenito se može izdvojiti pet sastavnica koje karakteriziraju svaki zadatak (pogledati [7]).
To su: uvjeti (dane i tražene veličine, uvjeti i objekti kojima su opisane veze između onog što je dano i onog što se traži), cilj (određivanje nepoznate veličine, svojstva, dokazivanje tvrdnje,...), teorijska osnova (činjenice koje su u vezi s uvjetima i ciljem zadatka; otkrivaju se analizom, a njihovom primjenom se uspostavljaju novi odnosi i uvjeti zadatka), rješavanje (slijedi nakon analize, način na koji se od uvjeta dolazi do cilja) i osvrt (provjera valjanosti rješenja).

Osim navedenih sastavnica zadatka u najširem smislu, za postizanje viših obrazovnih ciljeva, razvijanje matematičkih vještina i sposobnosti, osim provjere rezultata vrlo je bitan i moment procjene rezultata na samom početku (prije i nakon provedene analize). Procjena usmjerava mišljenje učenika i otvara prostor za samoispravak pri svakom koraku rješavanja zadatka jer učenik zna što otprilike u svakom koraku može očekivati.

Iako je uobičajno da sami učenici, a ponekad i nastavnici govore za neke zadatke da su lakši, a za neke da su teži, težina zadatka je vrlo individualna. Naime, težina nekog zadatka je subjektivna i usko je povezana s onime tko rješava zadatak, njegovim predzanjem, pripremljenošću i slično. Matematički zadatci najčešće se dijele prema složenosti kao mjerljivom i objektivnom svojstvu (koliko podzadataka sadrži, koliko različitih matematičkih područja integrira i sl.) što se ne bi smjelo miješati s težinom zadatka. Naposljetku, ako bismo pogledali većinu školskiih udžbenika, u svakom od njih postoje rubrike koje se zovu "nešto složeniji zadaci" ili slično.
Stoga, prema složenosti zadataka Kurnik ih dijeli u dvije skupine: standardne i nestandardne zadatke. *"Standardni zadatci su zadatci kod kojih nema nepoznatih sastavnica: uvjeti su postavljeni jasno i precizno, cilj je očigledan, teorijska osnova se lako uočava i bez dublje analize, a način rješavanja je poznat i teče prirodno i prema očekivanjima" (Kurnik, 2010).* Ili jednostavno rečeno, to bi bili zadatci za koje postoje postupci rješavanja kao što su npr. deriviranje, određivanje determinante i dijeljenje polinoma, a njihova važnost je u tome što su sredstvo kojim se postiže bolje i brže usvajanje novih sadržaja.
"Nestandardni zadatci su zadatci kod kojih je bar jedna sastavnica nepoznata" (Kurnik, 2010). Poseban slučaj nestandardnih zadataka kod kojih je nepoznato više od dvije sastavnice su, prema Kurniku, problemski zadatci.

1.1 Nestandardni zadatci

Iako postoji vrlo precizno prethodno dana definicija nestandardnih zadataka, učenici nestandardnim zadatcima većinom nazivaju zadatke koji izgledaju složeno ili neuobičajeno. Također, problemi se mogu nazivati nestandardnima kada ukazuju na neku netipsku metodu rješavanja, kada za njih ne poznajemo postupak ili algoritam rješavanja, neshematski tipovi zadataka.

Na primjer, kada se u zadatcima zahtijeva pronalaženje minimalne ili maksimalne vrijednosti funkcije, standardna metoda bi bila deriviranje funkcije. No, pod određenim uvjetima, problemi minimuma i maksimuma mogu se riješiti poznavanjem određenih svojstava, ograničenja ili recimo primjenama nekakvih poznatih nejednakosti. Još neki od primjera nestandardnih problema su zadaci riječima čiji je skup rješenja ograničen na cijele brojeve ili se može reducirati na nelinearan sustav jednadžbi koji ima više varijabli nego jednadžbi.

Dakle, općenito se može reći, nestandardni je problem onaj koji ne vodi direktno do rješenja, a *"nestandardna metoda rješavanja problemskih zadataka je proces spajanja veza između naizgled nepovezanih matematičkih područja i odabir prikladnih generalizacija, tako da se poznata ograničenja podudaraju da bi se dobilo rješenje" (Grigorieva, 2015).*

Standardne metode i relevantne formule koje čine kontekst problema dane su s vrlo jednostavnim primjerom za ilustraciju, a potrebno je osnovno predzananje iz srednje škole. Na primjer, ako je zadan problem rješavanja kvadratne jednadžbe $x^2 - 7x + 2 = 0$, onda se njezina rješenja vrlo lako mogu izračunati koristeći poznatu formulu $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. No, što ako se problem samo malo promijeni i zatraži se da se dokaže sljedeće:

Pokaži da za kvadratnu jednadžbu $x^2+ax+1-b=0$, kojoj su rješenja prirodni brojevi, broj a^2+b^2 ne može biti prost?

Bi li nam standardna metoda i formula pomogle riješiti ovaj problem? Ovaj problem ima dva parametra a i b, a skup rješenja ograničen je na skup prirodnih brojeva. Stoga, kako bi se riješio ovaj problem, potrebno je znati nešto više od same formule, moramo imati metodu koja će dati ograničenje na rješenje. U ovom slučaju vidjet ćemo da su to, primjerice, Vietove formule i poznavanje teorije brojeva.

Rješenje:
Rješenja jednadžbe x_1, x_2 su prirodni brojevi. Obzirom da trebamo pokazati da broj $a^2 + b^2$ (kojeg čine koeficijenti jednadžbe) nije prost, možemo uspostaviti vezu rješenja s

tim brojevima preko Vietovih formula pa imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -a \\ x_1 \cdot x_2 &= 1 - b \end{aligned}$$

Uočavamo da prebacivanjem jedinice u drugoj jednakosti, a potom kvadriranjem obje jednakosti i zbrajanjem možemo dobiti broj $a^2 + b^2$.

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 &= a^2 \\ (1 - x_1 \cdot x_2)^2 = 1 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 &= b^2 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 1 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 &= a^2 + b^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2x_2^2 &= a^2 + b^2 \\ x_1^2 \cdot (x_2^2 + 1) + (1 + x_2^2) &= a^2 + b^2 \\ (1 + x_1^2) \cdot (1 + x_2^2) &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

U sljedećem koraku do izražaja dolazi onaj uvjet da su rješenja x_1 i x_2 prirodni brojevi, odnosno $x_1, x_2 \geq 1$. To znači da je $(1 + x_1^2), (1 + x_2^2) \geq 2$, tj. $(1 + x_1^2) \cdot (1 + x_2^2) \geq 4$. Konačno zaključivanje da broj $a^2 + b^2$ nije prost slijedi iz činjenice da se može prikazati u obliku umnoška dva broja veća od jedan te da je on sam veći od 4.

Ono što učenike odbija od rješavanja nestandardnih problema je to što ne postoji garancija da će oni na kraju taj zadatak moći uspješno riješiti. Učenici svaki problemski zadatak vide kao izolirani slučaj i rijetko vide korisnost određene metode, odnosno mogućnost primjene na druge zadatke.

Vrlo je ilustrativno jedna nastavnica matematike rekla kako učenici matematiku vide kao policu s puno ladica u koje spremaju sadržaje koje nauče dok rade jedno područje matematike, a kada prijeđu na drugo tu ladicu zatvore i ne otvaraju dok se bave nečim drugim. Tako se, na primjer, dogodi da ako se u geometrijskom zadatku pojavi račun s razlomcima, koji su učili u prethodnoj nastavnoj cjelini, oni to jednostavno zaborave dok ne počnu opet raditi aritmetiku i treba im više vremena da riješe takav zadatak.

Zbog toga je bitno u matematičkom poučavanju što je više moguće koristiti zadatke koje zahtijevaju znanje iz više različitih matematičkih područja kako bi se stekao dojam matematičke cjelovitosti. Nestandardni problemi ukazuju upravo na to da matematika nije sačinjena od više disjunktnih tematskih dijelova nego je ona jedno povezano cijelo. Zato je vrlo važno nakon rješavanja jednog zanimljivog problema, potražiti generalizaciju metode kojom se došlo do rješenja te ju pokušati primijeniti na druge probleme.

Nadalje, ukoliko učenici jedanput vide neko elegantno rješenje određenog problema, ali ne pristupaju i drugim problemima na isti način, neće ga ni zapamtiti. Nasuprot tome, ako nastavnik opetovano koristi isti pristup cijelu godinu te uz to još usporedi sa standardnim pristupom, učenici će ga zapamtiti i znati cijeniti.

Iako je velika većina glavnih značajki i korist nestandardnih zadataka navedena, izdvojimo neke od najbitnijih. To su: razvijanje logičkog mišljenja i kreativnosti, razvoj kognitivnih znanja analize, sinteze i vrednovanja, stjecanje vještina koncentracije, ustrajnosti i dosjetljivosti i integriranje matematičkih sadržaja.

1.2 Proces rješavanja zadatka po etapama

U povijesti matematičari su oduvijek težili pronalasku jedne univerzalne metode za rješavanje matematički, a posebno problemskih, zadataka. Iako je danas posve jasno da to nije moguće napraviti, još uvijek je vrlo popularna Descartesova metoda (jer se njome može obuhvatiti široka klasa problema, pogotovo iz područja redovne nastave matematike) koja počiva na ideji da se svaki problem može svesti na algebarsko rješavanje jednadžbi. Upravo zbog tog problema, prema Kurniku dolazi do razvoja posebne metodike rješavanja zadataka, čije je glavno pitanje *"kako naučiti učenike rješavati zadatke."*(pogledati [7])

Iako mnogi učenici matematičke zadatke, definicije, svojstva pokušavaju učiti napamet, to je puno teže, mukotrpnije, a znanje koje iza toga ostaje je kratkotrajno. Zato Grigorieva umjesto toga predlaže razvijanje nekakvog "globalnog" shvaćanja o određenoj temi, predviđanje tipova problema koji bi se mogli pojaviti uz određeni zadatak te na taj način razviti vlastite metode rješavanja (pogledati [4]).

U Hrvatskoj je još uvijek uvriježena obrada nastavnih sadržaja po principu davanje teorijske podloge, a zatim rješavanje zadataka i njihova primjena, dok se u inozemstvu, npr. Danskoj, sve više počinje primjenjivati problemska nastava, tj. teorija proizlazi iz danog problemskog zadatka. Drži se da je takav način učenja djelotvorniji jer se teorija bolje pamti i direktno primjenjuje te se lakše prepoznaju slični problemi.

Mnogi su autori razradili opći proces rješavanja zadataka po etapama, a najveći doprinos dali su australski matematičar Terence Tao i američki matematičar George Polya. Polya je u svojoj knjižici *"How to solve it"* iznio četiri koraka u rješavanju zadatka, dodavši uz njih i niz usmjerujućih i poticajnih pitanja te uputa nastavnicima kako voditi heuristički razgovor (pogledati [8]). Ta pitanja i upute upućuju na znanstvene metode zaključivanja kao što su: generalizacija, specijalizacija, apstrakcija, analogija, dedukcija, indukcija, analiza, sinteza itd.

Četiri koraka ili etape rješavanja zadatka prema Polyji su: razumijevanje problema, stvaranje plana, izvršenje plana te osvrt.

1.2.1 Razumijevanje problema

Iako se ovaj prvi korak čini trivijalnim i često se podrazumijeva, zapravo istraživanja su pokazala da učenici zadatak nisu znali riješiti jer ga u potpunosti, ili djelomično, nisu razumjeli. Stoga Polya ističe da je važno provjeriti s učenicima jesu li shvatili, tj. razumjeli problem postavljajući im prikladna pitanja kao što su: *"Razumijete li sve riječi koje su napisane u zadatku?", "Što se od vas traži da pokažete ili pronađete?", "Što vam je zadano, koji su uvjeti?", "Možete li prepričati zadani problem svojim riječima?", "Ima li suvišnih informacija?", "Imate li dovoljno potrebnih informacija da nađete rješenje?", "Možete li problem (dane podatke i uvjete) zapisati matematičkim simbolima?"* (pogledati [8])

Također, prigodna su pitanja i: *"Poznajete li sve pojmove koji su dani u tekstu", "Kojeg je tipa problem?", "Biste li mogli skicirati dani problem?"* ili *"Što vam je još potrebno da dođete do rješenja?"*

Vrlo je važno za prve dvije etape prepoznati kojeg je tipa problem, za razumijevanje samog problema i danih podataka te određivanje pristupa rješavanju problema i polazne metode.

Tao navodi tri glavna tipa problema, to su:

- *"Pokaži da..."*, *"Ocijeni..."* pitanja u kojima je dana određena tvrdnja koja treba biti dokazana.
- *"Pronađi..."* ili *"Pronađi sva..."* pitanja koja zahtijevaju pronalazak nečega (ili svega) što zadovoljava određene tvrdnje, uvjete i sl. U algebarskim zadatcima to su obično brojevi, a u geometrijskim to su obično geometrijski likovi.
- *"Postoji li..."* pitanja koja zahtijevaju dokazivanje određenje tvrdnje ili pronalaska kontra-primjera (pogledati [4]).

Naravno, ne mogu se svi problemi svesti na ove kategorije problema, ali općenito, važno je napomenuti da forma bilo kojeg problema ili pitanja upućuje na polaznu strategiju rješavanja i tip problema.

1.2.2 Stvaranje plana

Neupitno je da se svaki problem može riješiti na više različitih načina, neki od njih su efikasniji, neki manje, a Polya navodi da se vještina izbora najprikladnijih (u smislu najučinkovitijih i najbržih) startegija i metoda najbolje razvija rješavanjem velikog broja problema, vježbom (pogledati [9]).
Za ovu etapu navodi se važnost usmjeravanja učenika definiranju danih i traženih veličina

te objekata i pronalasku veza između poznatih i nepoznatih veličina i objekata. Time se najbolje provjerava razumijevanje problema i utvrđuje cilj zadatka (treba li se što pronaći, dokazati tvrdnja, odrediti postojanost nekog svojstva itd.) koji uvelike pomaže za izbor najbolje strategije.

Nadalje, korisno je jer može dovesti do potrebe razmatranja/rješavanja sporednih ili pomoćnih problema, ako veza nije odmah očita. Neka od poticajnih pitanja su: *"Jeste li se već susreli s ovakvim problemom ili možda u nekom drugom obliku?", "Znate li neke tvrdnje koje bi mogle biti korisne?", "Možete li preformulirati problem?", "Ako vam je dan srodan problem s rješenjem, biste li mogli koristiti njegovu metodu ili rješenje kao pomoć za rješavanje vašeg problema?", "Možete li riješiti neki specijalan slučaj ovog problema?", "Možete li poopćiti ovaj problem?", "Jeste li iskoristili sve dane pretpostavke/podatke?"* itd. (pogledati [9])

Taova podjela po etapama malo se razlikuje od Polyjine koji je fazu stvaranja plana rascjepkao na tri: razumijevanje danih podataka, pravilan odabir zapisa i skiciranje rješenja te modificiranje problema (pogledati [9]).

Tako je posebno naglasio dvije glavne značajke etape pravilnog odabira zapisa i skiciranja rješenja, a jedna od njih je bolja preglednost u kasnijem radu. Druga i možda još važnija je da fizički čin zapisivanja poznate materije može biti okidač inspiracije, a skica rješenja koju "imamo u glavu" često zna zavarati dok se ne nađe na papiru kada se lakše uočavaju propusti.
Ipak, treba biti oprezan sa zapisivajem suvišnih informacija i detaljiziranjem jer se može dogoditi da neke od tih činjenica mogu biti ometajuće i skretati pozornost u nekom drugom smjeru. Zato je najbolje istaknuti one činjenice za koje se drži da su najkorisnije i ključne.

Taovu fazu modificiranja problema mogli bismo interpretirati i kao jednu od općenitih strategija rješavanja problema. On predlaže modificiranje početnog problema u neki lakši problem, što je posebno korisno u slučajevima kada se nema predodžba o kojem je tipu problema riječ ili kada se ne zna odakle započeti rješavati problem, jer rješavanje jednostavnijeg povezanog problema često otkriva način rješavanja zadanog problema.
Načini koje je Tao iznio za modifikaciju problema, samo su neke od metoda rješavanja problema, npr.: proučavanje specijalnih slučajeva (npr. ekstremnih slučajeva), rješavanje pojednostavljenije verzije (npr. restrikcija), formuliranje pretpostavke koja implicira dani problem te dokazivanje postavljene pretpostavke, izvođenje korolara i prvotno njihovo dokazivanje, reformulacija problema (npr. supstitucija, dokaz po kontrapoziciji, kontradikcija), ispitivanje rješenja sličnog problema i generalizacija.

Neke od brojnih preostalih i poznatih metoda rješavanja za koju se u ovoj fazi stvaranja plana može odlučiti su: metoda uzastopnih približavanja/ metoda pokušaja i pogreške, metoda rješavanja logičkih problema, Descartesova metoda, metoda pomoćnih likova, Dirichletova metoda, metode rješavanja diofantskih jednadžbi, metoda razlikovanja slučaja, metoda eliminacije, metoda matematičke indukcije, metoda rekurzije, metoda supstitucije, konstruktivne metode, metode integrama, metoda poredanih lista, metoda traženja uzorka, metoda crtanja dijagrama, metoda unatrag, metoda specijalnih slučajeva, direktna metoda itd.

1.2.3 Izvršenje plana

Ova je etapa obično lakša od stvaranja plana, a potrebno je malo više pažljivosti i strpljenja. Potrebno je provjeravati valjanost svakog koraka.

Treba ustrajati na odabranom planu, a ako se nakon nekoliko neuspjelih pokušaja pokaže da i dalje ne funkcionira, odnosno da plan nije bio dobar izbor, onda se treba vratiti na prethodni korak i odabrati novu metodu. To može potrajati (što više iskustva, to ide brže i rjeđe se griješi pri izboru metode), no ne treba odustajati.

1.2.4 Osvrt

Polya napominje da boljem usvajanju znanja te razvoju matematičkih sposobnosti i uspješnijem izboru strategija za ubuduće doprinosi osvrtanje na izvršeni rad. To se odnosi na provjeru i vrednovanje rezultata, pri čemu Grigorieva naglasak stavlja na grafički pristup. Koristan je osvrt na ono što je "imalo smisla", a pogotovo na ono što nije i zašto nije, te se ističe kao važan moment učenja. Time se postiže više obrazovnih ciljeva, na jedan se zadatak primjenjuje veća količina znanja, a znanja se proširuju i povezuju. Kao što je ranije rečeno za svaki zadatak su bitne teorijske činjenice koje su vezane uz uvjete i odnose u zadatku, stoga će uz jedan način rješavanja biti vezan određeni dio teorije, uz drugi način neki drugi itd.

Osvrće se i na iskoristivost rezultata na neke druge problem te može li se poopćiti, što se odnosi i na metodu i na rješenje.

Učenicima je važno ponuditi više različitih rješenja te ih ohrabrivati da pronađu i koriste one metode koje njima najviše odgovaraju.
U jednostavnijim problemima za to većinom postoje standardni načini (npr. provjera rješenja u iracionalnim jednadžbama) provjere rezultata.

Općenito, ovo može biti najduži i najteži dio, ali zbog toga je vrlo bitno ne zaboravljati i ne izostavljati počene uvjete, odnose, pretpostavke, važne tvrdnje te načine na koje ih se smije koristiti. Također, i u ovoj etapi, kao i u etapi stvaranja plana, vrlo je loša ideja primjenjivati određene metode i tehnike "na slijepo", tj. bez prethodnog razmatranja prirode danih podataka. Time se može uštedjeti puno vremena eliminiranjem nepotrebnih smjerova rješavanja.

1.2.5 Primjer rješavanja problema kroz etape

Problem: Pronađi sva rješenja jednadžbe $f(x) = 0$, ako je dana neparna funkcija $f(x)$ koja je definirana na cijelom skupu realnih brojeva i $x = 4$ je jedino pozitivno rješenje jednadžbe.

Rješenje:

Razumijevanje problema:
Ono što možemo iščitati iz danih podataka je:

- zadatak je tipa "pronađi sva rješenja...", ali i u određenom trenutku ćemo (nekako) morati dokazati da su sva pronađena ujedno i sva rješenja;
- funkcija je definirana na skupu realnih brojeva pa su rješenja realna;
- dano je jedino pozitivno rješenje, tj. preostala rješenja mogu biti negativna ili 0;
- zadana je neparna funkcija (potrebno je znati definiciju neparne funkcije);

Stvaranje plana:
Treba popisati što je zadano: Funkcija je neparna $\Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Na prvi pogled čini se da ne možemo ništa raditi s danim podatcima, no dana je jedna ne tako uočljiva, a bitna činjenica za povezivanje danih podataka. To je pretpostavka da je funkcija definirana na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Postoji korisna tvrdnja koja kaže da svaka neparna funkcija definirana na cijelom skupu realnih brojeva prolazi kroz ishodište.
Napomena:
Ukoliko učenik ne poznaje tu tvrdnju, za očekivati je da će pokušati skicirati poznate primjere neparnih funkcija npr. $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$ ili $f(x) = x^3$ te uočiti da sve ove funkcije prolaze kroz ishodište. No, onda je potrebno tu pomoćnu tvrdnju i dokazati.

Izvršenje plana:
Nakon dobro iskorištenih pretpostavki, vrlo je lako uočljivo da je 0 jedno rješenje. No, preostaje pitanje ima li još rješenja i koliko. Naime, većina učenika će vrlo vjerojatno u prvoj etapi kada vide da je riječ o neparnoj funkciji zapisati njezinu definiciju koju dobro poznaju, ali mali je broj onih koji je uistinu znaju primijeniti na zadatcima (osim u slučajevima provjere neparnosti funkcije).

Naime, prvo rješenje koje bi se trebalo direktno nametnuti je to da, ako je funkcija neparna i definirana na cijelom skupu $\mathbb{R}$, a poznato nam je jedno njezino rješenje x, odmah znamo i drugo rješenje, a to je $-x$. To proizlazi iz same definicije neparne funkcije pa ako je $f(4) = 0$, onda je i $f(-4) = 0$.

Do poteškoća dolazi zbog tog što učenici najčešće same definicije pamte kao činjenice, bez razumijevanja.

Potrebno je dokazati još da su to sva rješenja jednadžbe (dokaz kontradikcijom). Za to ćemo još jednom iskoristiti definiciju neparne funkcije i pretpostavku da je $x = 4$ jedino pozitivno rješenje. Za bilo koji drugi x negativni broj, moralo bi i $-x$ biti rješenje, a to nije moguće prema pretpostavci.

Iz navedenog slijedi da su $-4, 0, 4$ sva rješenja dane jednadžbe.

Osvrt:
Za ovaj zadatak važno je izdvojiti pomoćne tvrdnje koje su se pokazale ključnima kako bi ih se što bolje upamtilo i znalo iskoristiti u sličnim situacijama, a to su:

- Ako je x jedno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, gdje je funkcija $f(x)$ neparna, onda je to i $-x$.
- Neparna funkcija definirana na cijelom skupu realnih brojeva prolazi kroz ishodište.

Također, bilo bi dobro moći navesti primjer funkcije iz zadatka. Primjerice, polinom (minimalnog) trećeg stupnja $f(x) = a(x-4)x(x+4), a \neq 0$.
Općenito, možemo generalizirati funkciju (dobivamo funkciju većeg stupnja):
$g(x) = a(x-4)(x+4)x^n$, za n neparan broj i $a \neq 0$.

2 Rješavanje nestandardnih zadataka koristeći svojstva funkcija

2.1 Monotonost

Defincija 1 *Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ monotono rastuća na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D$ ako*

$$(x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle) \wedge (x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Ako u definiciji umjesto znaka "$\leq$" stoji znak "$\geq$", kažemo da je funkcija f monotono padajuća na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako u definiciji umjesto znaka "$\leq$" stoji znak "$<$", kažemo da je funkcija f na intervalu $\langle a, b\rangle$ strogo monotono rastuća. Analogno se definira i pojam strogo monotono padajuće funkcije na intervalu.[1]

Zadatak 1 *Riješi jednadžbu* $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$

Rješenje:
Ukoliko ne želimo standardnim postupkom rješavati danu iracionalnu jednadžbu, tada nakon nekoliko pokušaja i pogrešaka, odnosno isprobavanja različitih vrijednosti koje ju zadovoljavaju, uočavamo da je $x = 2$ jedno njezino rješenje. No, pitanje je kako ćemo dokazati da je to i jedino njezino rješenje.

Prva ključna stvar koju se treba uočiti je da je funkcija $f(x) = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} - 4$ monotono rastuća na cijeloj domeni $D_f = [\frac{3}{2}, \infty\rangle$. To zaključujemo iz poznate tvrdnje:

Teorem 1 *Zbroj dvije monotno rastuće (padajuće) funkcije je monotono rastuća (padajuća) funkcija.*[2]

Nadalje, prema sljedećem teoremu zaključujemo da je $x = 2$ i jedino rješenje jednadžbe.

Teorem 2 *Ako je funkcija f neprekidno strogo rastuća (padajuća) na intervalu I, onda jednadžba $f(x) = 0$ ima najviše jedno rješenje u skupu I.*

Napomena:
Preporuča se prvo rješavanje zadatka standardnim postupkom (kvadriranje, pojednostavljivanje i odabir rješenja koje zadovoljava uvjete te polaznu jednadžbu), a zatim i nestandardnim radi usporedbe i ilustriranja korisnosti poznavanja i razumijevanja teorije te njene primjene na nestandardne zadatke.

[1] [5]
[2] Dokazi Teorema od 1 do 7 mogu se pronaći u [4].

Zadatak 2 *Riješi jednadžbu* $\sqrt[4]{x+2}+\sqrt[4]{x-2}=\sqrt[4]{4}$

Rješenje:
Kao u prethodnom zadatku, vrlo je lako uočljivo jedno rješenje $x=2$. Stoga, pogledajmo monotonost funkcije $f(x)=\sqrt[4]{x+2}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt[4]{4}$. Obzirom da se ovdje radi o strogo monotono rastućoj funkciji, rješenje $x=2$ je ujedno i jedino rješenje jednadžbe.

Zadatak 3 *Odredi monotonost funkcije* $f(x)=\sqrt{x^3+2x-3}$.

Rješenje:
Da bismo odredili monotnonost funkcije f koristit ćemo sljedeći teorem:

Teorem 3 *Kompozicija dvije monotono rastuće ili dvije monotono padajuće funkcije je monotono rastuća funkcija.*

Uočavamo da je funkcija f zapravo kompozicija $f(x)=(g\circ h)(x)$ funkcija $g(x)=\sqrt{x}$ i $h(x)=x^3+2x-3$. Obzirom da su obje funkcije g i h monotono rastuće i njihova kompozicija je monotono rastuća.

Zadatak 4 *Dokaži da su sljedeće funkcije monotono padajuće:*

- $f(x)=\sqrt{4-x}$
- $g(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x}}$

Rješenje:

- funkcija f je kompozicija funkcija $f(x)=(f_1\circ f_2)(x)$, pri čemu su $f_1(x)=\sqrt{x}$ i $f_2(x)=4-x$. Funkcija f_1 je monotono rastuća, a f_2 monotono padajuća pa stoga tvrdnja slijedi iz sljedećeg teorema:

Teorem 4 *Kompozicija monotono rastuće (padajuće) i monotono padajuće (rastuće) funkcije je monotono padajuća funkcija.*

- funkcija $h(x)=\sqrt{4+x}$ je kompozicija funkcija $h(x)=(h_1\circ h_2)(x)$, pri čemu su $h_1(x)=\sqrt{x}$ i $h_2(x)=4+x$. Funkcije h_1 i h_2 su monotono rastuće pa je i funkcija h monotono rastuća, prema Teoremu 3. Također, uočimo da je $g(x)=\frac{1}{h(x)}$. Nadalje, vrijedi teorem:

Teorem 5 *Ako je funkcija f monotono rastuća (padajuća) na nekom intervalu I, tada je funkcija $\frac{1}{f(x)}$ montono padajuća (rastuća) na tom intervalu.*

Zbog prethodnog teorema, slijedi da je funkcija g monotono padajuća.

Zadatak 5 *Odredi monotonost funkcije* $f(x) = \frac{1}{x+3} - \sqrt{x+1}$.

Rješenje:
Funkciju f možemo promatrati kao razliku funkcija $f(x) = g(x) - h(x)$ pri čemu je $g(x) = \frac{1}{x+3}$, a $h(x) = \sqrt{x+1}$.
Uočavamo da je h monotono rastuća funkcija kao kompozicija dvije monotono rastuće funkcije ($h_1(x) = \sqrt{x}$ i $h_2(x) = x+1$), prema Teoremu 3.
Isto tako, uočavamo da je $g(x) = \frac{1}{l(x)}$, gdje je $l(x) = x+3$ i l monotono rastuća funkcija. Prema Teoremu 5, slijedi da je g monotono padajuća.
Monotonost funkcije f odredit ćemo uz pomoć sljedećeg teorema:

Teorem 6 *Ako je funkcija f monotono rastuća (padajuća) na intervalu I, tada je funkcija $-f$ montono padajuća (rastuća) na tom intervalu.*

Dakle, prema Teoremu 6 slijedi da je funkcija $-h$ monotono padajuća, a prema Teoremu 1 slijedi da je funkcija $f(x) = g(x) + (-h(x))$ kao zbroj dvije monotono padajuće funkcije isto monotono padajuća.

Zadatak 6 *Odredi monotonost funkcije* $f(x) = \frac{x^2+3}{15-x}, x \in \langle 15, \infty \rangle$.

Rješenje:
Navedimo prvo teorem koji ćemo koristiti za rješavanje zadatka:

Teorem 7 *Umnožak dvije monotono rastuće (padajuće) funkcije je opet monotono rastuća (padajuća) funkcija.*

Uočimo da funkciju f možemo zapisati kao umnožak dvije funkcije
$f(x) = (x^2+3) \cdot \frac{1}{15-x}$ pri čemu su obje monotono rastuće ($\frac{1}{15-x}$ je rastuća prema Teoremu 5).
Uz poznavanje prethodnog teorema, zaključujemo da je funkcija f monotono rastuća.

Zadatak 7 *Riješi jednadžbu* $\sqrt{x} + x^3 - \frac{2}{x} = 0$.

Rješenje:
Funkcija $f(x) = \sqrt{x} + x^3 - \frac{2}{x}$ definirana je samo za pozitivne brojeve. Vrijedi i da je monotono rastuća na cijeloj domeni kao zbroj tri monotono rastuće funkcije (x je rastuća + Teorem 5 $\rightarrow$ $\frac{2}{x}$ je padajuća + Teorem 6 $\rightarrow$ $-\frac{2}{x}$ je rastuća). Također, za monotono rastuću funkciju $f(x)$ na skupu $(0, \infty)$, jednadžba $f(x) = 0$ može imati najviše jednu nultočku (Teorem 2), stoga je, lako uočljivo rješenje, $x = 1$ jedino rješenje jednadžbe.

Zadatak 8 *Koliko pozitivnih rješenja ima jednadžba* $\frac{x^4+5x-12}{x} = 7$.

Rješenje:
Primijetimo prvo da x ne može biti nula jer je nultočka nazivnika i nije u domeni, a to nam svakako sugerira da možemo dijeliti s x, pa ćemo to i učiniti na lijevoj strani.
Nakon dijeljenja dobijemo sljedeće: $x^3 + 5 - \frac{12}{x} = 7 \Rightarrow x^3 - \frac{12}{x} = 2$.
Kada bismo pokazali da je funkcija $f(x) = x^3 - \frac{12}{x} - 2$ strogo monotono rastuća, tada bi postojalo samo jedno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$. Pokažimo da je funkcija strogo monotono rastuća.
Naime, funkcija $f(x) = x$ kao i $f(x) = c \cdot x, c > 0$ je strogo monotono rastuća. Prema Teoremu 5 funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je strogo monotono padajuća, a prema Teoremu 6 je $f(x) = -\frac{1}{x}$ strogo monotono rastuća. Isto vrijedi i za $f(x) = -\frac{c}{x} + d, c > 0, d \in \mathbb{R}$.
Konačno jer su x^3 i $-\frac{12}{x} - 2$ strogo monotono rastuće funkcije, prema Teoremu 1 je dana funkcija strogo monotono rastuća.
Dakle, funkcija je strogo monotono rastuća, a polazna jednadžba ima samo jedno pozitivno rješenje.

2.2 Parnost

Za promatranje ovog svojstva kod funkcija, prije svega, domena funkcije mora biti simetričan skup obzirom na ishodište. To znači da za svaki $x \in D(f)$ mora slijediti da je i $-x \in D(f)$.

Defincija 2 *Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$,* ***parna*** *ako je*

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D.$$

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je ***neparna*** *ako je*

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in D.$$ [3]

Napomena:

- Graf parne funkcije je simetričan obzirom na y-os.
- Graf neparne funkcije je simetričan obzirom na ishodište, tj. centralno simetričan.
- Graf svake polinomijalne neparne funkcije mora prolaziti kroz ishodište te vrijedi $0 \in D$.

[3] [5]

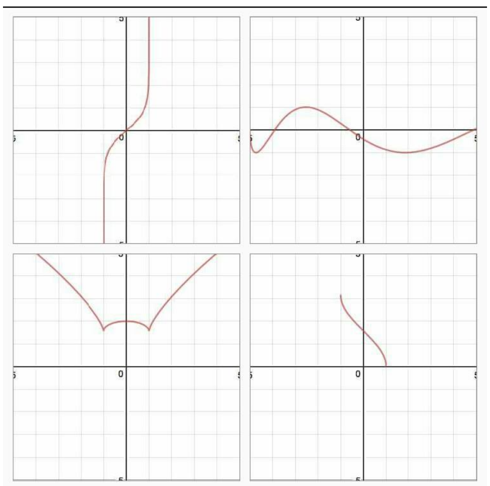
Zadatak 9 *Neka je funkcija f neparna i definirana na cijelom skupu realnih brojeva. Ako su $x = 5$ i $x = -2$ nultočke te funkcije, odredi koje su još sigurne nultočke funkcije f.*

Rješenje:
Ako je funkcija neparna, onda joj je domena simetrična, tj. mora vrijediti ako je $a \in D(f) \to -a \in D(f)$. To znači da su $x = -5$ i $x = 2$ druge dvije nultočke. Također, neparna funkcija je simetrična obzirom na ishodište pa je i $0 \in D(f)$, odnosno nultočka funkcije.

Zadatak 10 *Ako je $f(x) = x^8 + px^4 + 1$ i $f(2) = 305$, odredi $f(-2)$.*

Rješenje:
Standardni način:
Uvrštavanje za $x = 2$ u jednadžbu $f(2) = 305$, izračunavanje vrijednosti parametra p te potom uvrštavanja dobivene vrijednosti za $p, (p = 3)$ te izračunavanje vrijednosti $f(-2)$.
Nestandardni način:
Uočimo da je dana funkcija parna $[f(-x) = (-x)^8 + p(-x)^4 + 1 = x^8 + px^4 + 1 = f(x)]$, zbog toga slijedi da je $f(2) = f(-2) = 305$.

Zadatak 11 *Odredi parnost sljedećih funkcija:*



Rješenje:
Sve što je potrebno za riješiti ovaj zadatak je znati tvrdnje iz prethodne Napomene. Uočavamo da je prva slika lijevo simetrična obzirom na ishodište, što znači da je neparna. Graf funkcije na prvoj slici u drugom redu je simetričan obzirom na y-os pa je ta funkcija parna.
Grafovi preostale dvije funckije ne zadovoljavaju nijedan od uvjeta napomene pa te funkcije nisu ni parne ni neparne.[4]

[4] [3]

2.3 Periodičnost

Defincija 3 *Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$* ***periodična*** *ako postoji pozitivan broj $T \in \mathbb{R}$, takav da je*

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in D.$$

Najmanji od brojeva T za koji je ispunjen uvjet nazivamo ***temeljni period*** *funkcije f.*[5]

Najpoznatije periodične funkcije su trigonometrijske funkcije, a također je poznato da polinomi i eksponencijalne funkcije nisu periodične. Nešto manje poznata funkcija, tzv. "razlomljeni dio", koja se definira pomoću funkcije *pod* (eng. *floor*) također je periodična.

Defincija 4 *Funkcija $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ koja realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj koji nije veći od x naziva se* ***funkcija pod*** *ili najveće cijelo.*[6]

Defincija 5 *Funkciju $\{\} : \mathbb{R} \to [0,1\rangle$ definiranu na sljedeći način $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ zovemo* ***funkcija "razlomljeni dio"****, odnosno funkcija "decimalni dio realnog broja x", tj. funkcija "mantisa realnog broja x".*[7]

Neka od osnovnih korisnih svojstava koja se koriste u sljedećim zadatcima dani su u obliku napomene.

Napomena:

1. Ako je funkcija f periodična s temeljnim periodom T, $\forall x \in D(f)$, takva da je $x+T \in D(f)$, $x-T \in D(f)$, tada je $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$.
2. Ako je T period funkcije f, onda je i $n \cdot T$ period iste funkcije, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$.
3. Ako je funkcija $y = f(x)$ periodična s periodom T, tada je funkcija $y = f(kx), k \in \mathbb{Z}$ također periodična s periodom $T_1 = \frac{T}{k}$.
4. Ako je funkcija zbroj ili umnožak dvije periodične funkcije koje imaju isti period T, tada je ta funkcija također periodična s periodom T. No, ne mora vrijediti da je to ujedno i njezin temeljni period.

Zadatak 12 *Dokaži da je period funkcije "razlomljeni dio" bilo koji prirodni broj, $T = n, n \in \mathbb{N}$.*[8]

---
[5] [2]
[6] [8]
[7] [6]
[8] [6]

Rješenje:
Treba dokazati da je $\{x+n\} = \{x\}, \forall n \in \mathbb{N}$. To ćemo dokazati prema definiciji.

$$\{x+n\} = (x+n) - \lfloor x+n \rfloor$$

Sada ćemo iskoristiti svojstvo funkcije pod: $\lfloor x \rfloor = x, \forall x \in \mathbb{Z}$.

$$\{x+n\} = (x+n) - \lfloor x+n \rfloor = x+n - \lfloor x \rfloor - n = x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$$

Temeljni period ove funkcije je $T = 1$.

Zadatak 13 *Odredi temeljni period funkcije* $f(x) = \cos x + \cos 3x$.

Rješenje:
Uočimo prvo da je dana funkcija zbroj dvije periodične funkcije (kosinus) koje imaju isti period 2π, stoga je to period i dane funkcije. Treba još pokazati da je to i temeljni period. Da bismo to dokazali dovoljno je odrediti temeljni period svake od funkcija i pronaći njihov najmanji zajednički višekratnik. Temeljni period funkcije $\cos x$ je 2π, od funkcije $\cos 3x$ je $T = \frac{2\pi}{3}$ (prema Napomeni, točka 3.). Dakle, temeljni period dane funkcije je 2π.

Zadatak 14 *Odredi temeljni period funkcije* $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$.

Rješenje:
Zadatak je vrlo sličan prethodnome i mnogi učenici bi mogli pomisliti da se rješava na isti način, tj. zasebnim određivanjem temeljnih perioda od $\sin x$ i $\sin 3x$ te pronalaskom najmanjeg zajedničkog višekratnika. No, tim postupkom bi se dobilo da je temeljni period jednak 2π, što nije točno.
Ključ ovog zadatka je primijeniti formulu pretvorbe umnoška sinusa u zbroj kosinusa za trigonometrijske funkcije $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

$$\sin x \cdot \sin(3x) = -\frac{1}{2}(\cos(4x) - \cos(-2x))$$

Zbog parnosti funkcije kosinus vrijedi:

$$\sin x \cdot \sin(3x) = -\frac{1}{2}(\cos(4x) - \cos(2x))$$

Sada smo ovaj zadatak sveli na prethodni, odnosno trebamo odrediti temeljne periode od $\cos(4x)$ i $\cos(2x)$ što je prema Napomeni (točka 3.) jednako $T = \frac{\pi}{2}$, odnosno $T = \pi$. Njihov najmanji zajednički višekratnik je π te je to i temeljni period početne funkcije.

Zadatak 15 *Funkcija f definirana je na skupu realnih brojeva. Funkcija je neparna i periodična s periodom $T = 4$ i dana je formulom: $f(x) = 1 - |x-1|$, $x \in [0,2]$.*
Riješite jednadžbu $2f(x) \cdot f(x-8) + 5f(x+12) + 2 = 0$.

Rješenje:

Obzirom da je funkcija periodična s periodom 4, funkciju možemo promatrati na bilo kojem segementu duljine 4.

Dana funkcija je definirana na na segmentu $[0,2]$, ali obzirom da je neparna, poznato nam je i njezino ponašanje na $[-2,0\rangle$, tu je funkcija $f(-x) = -f(x)$.

Vrijedi $f(x) = -f(-x) = -(1 - |-x-1|) = -1 + |x+1|$

Stoga, danu funkciju možemo proširiti na segment $[-2,2]$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + |x+1|, & \text{ako je } x \in [-2,0] \\ 1 - |x-1|, & \text{ako je } x \in [0,2] \end{cases}$$

Sada kada znamo definiciju funkcije na cijelom skupu $\mathbb{R}$ zajedno s uvjetom periodičnosti vrijedi da je $f(x+4z) = f(x), \forall z \in \mathbb{Z}$. Zbog toga vidimo odmah da je $f(x) = f(x-8) = f(x+12)$, a početnu jednadžbu možemo svesti na kvadratnu jednadžbu s nepoznanicom $f(x)$:

$$2(f(x))^2 + 5f(x) + 2 = 0$$

$$f(x)_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$$f(x)_1 = -2, f(x)_2 = -\frac{1}{2}$$

Postoje četiri moguća slučaja:

1.slučaj

$x \in [-2,0] \wedge f(x) = -2$

$-1 + |x+1| = -2 \Rightarrow |x+1| = -1 \Rightarrow$ nema rješenja

2.slučaj

$x \in [-2,0] \wedge f(x) = -\frac{1}{2}$

$-1 + |x+1| = -\frac{1}{2} \Rightarrow |x+1| = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$

3.slučaj

$x \in [0,2] \wedge f(x) = -2$

$1 - |x-1| = -2 \Rightarrow |x-1| = 3 \Rightarrow x_3 = -2, x_4 = 4 \Rightarrow$ rješenja ne zadovoljavaju uvjet

4.slučaj

$x \in [0,2] \wedge f(x) = -\frac{1}{2}$

$1 - |x-1| = -\frac{1}{2} \Rightarrow |x-1| = \frac{3}{2} \Rightarrow x_5 = -\frac{1}{2}, x_6 = \frac{5}{2} \Rightarrow$ rješenja ne zadovoljavaju uvjet

Jedina moguća rješenja na segmentu $[-2,2]$ su x_1 i x_2.

Obzirom da je funkcija periodična, konačno slijedi da su rješenja jednadžbe oblika: $x_1 = -\frac{1}{2} + 4n, x_2 = -\frac{3}{2} + 4m$, gdje su $m, n \in \mathbb{Z}$.

2.4 Razna svojstva i njihove primjene

Obzirom da je omeđenost svojstvo funkcija koja će se u mnogim narednim zadatcima koristiti, pogledajmo prvo definiciju omeđenosti.

Defincija 6 *Kažemo da je realna funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$

- *omeđena odozdo, ako postoji broj* $m \in \mathbb{R}$ *takav da je* $f(x) \geq m, \forall x \in D$
- *omeđena odozgo ako postoji broj* $M \in \mathbb{R}$ *takav da je* $f(x) \leq M, \forall x \in D$
- *omeđena, ako je omeđena i odozdo i odozgo.*[9]

Zadatak 16 *Riješi jednadžbu* $2(1 + \sin^2(x - 1)) = 2^{2x-x^2}$.

Rješenje:
U ovakvim slučajevima kada se "izrazi ne mogu srediti", najbolje bi bilo najprije pokušati ograničiti svaku od funkcija te pronaći njihovo sjecište.
Funkcija sinus je po definiciji omeđena ($\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$) pa slijedi da $\sin^2 : \mathbb{R} \to [0, 1]$.
Zbog toga za funkciju $f(x) = 2(1 + \sin^2(x - 1))$ vrijedi $2 \leq f(x) \leq 4$.
Funkcija $g(x) = 2^{2x-x^2}$ kao eksponencijalna funkcija, također je omeđena odozdo, tj. prima samo pozitivne vrijednosti. No, obzirom da je funkcija h ($h(x) = -x(x - 2)$) postiže maksimum u $x = 1$, slijedi da je funkcija $g$omeđena i odozgo, sa 2.
Dakle, imamo $2 \leq f(x) \leq 4 \wedge 0 < g(x) \leq 2$ i zahtjev da je $f(x) = g(x)$.
Očito, rješenje jednadžbe postoji ako i samo ako postoji x takav da je $f(x) = g(x) = 2$.
Budući da je $x = 1$ jedina vrijednost za koju $g(x) = 2$, ona je i jedini kandidat za rješenje jednadžbe.
Uistinu, vrijedi $f(1) = 2$ pa polazna jednadžba ima rješenje, $x = 1$.

Zadatak 17 *Riješi jednadžbu* $\log_2(3 - \sin x) = \sin x$.

Rješenje:
Isto kao u prethodnom zadatku, cilj nam je ograničiti svaku od funkcija s lijeve i desne jednakosti te na taj način pronaći sjecište.
Kako znamo da je funkcija sinus omeđena, $-1 \leq \sin x \leq 1$, da bi rješenje postojalo mora vrijediti $\log_2(3 - \sin x) \in [-1, 1]$.
Uočimo da za logaritamsku funkciju s lijeve strane jednakosti vrijedi $\log_2(3-\sin x) \in [1, 2]$.
Budući da jedna funkcija postiže vrijednosti iz segmenta $[-1, 1]$, a druga iz segmenta $[1, 2]$,

[9] [11]

vidimo da je jedina mogućnost za postizanje jednakosti $\log_2(3 - \sin x) = \sin x = 1$. No, provjerimo postoji li takav x za koji je ispunjen taj uvjet. Dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \log_2(3 - \sin x) &= 1 \\ 3 - \sin x &= 2 \\ \sin x &= 1 \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Postoji beskonačno mnogo rješenja za polaznu jednadžbu i ona su oblika: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 18 *Riješi jednadžbu* $2^{1-|x|} = 1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2}$.

Rješenje:
Potrebno je uočiti da je funkcija $f(x) = 2^{1-|x|}$ definirana za sve realne brojeve, uvijek poprima pozitivne vrijednosti te da je na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$ monotno rastuća, a na $[0, \infty\rangle$ padajuća. Obzirom na to (da je u nuli maksimum) funkcija f uvijek će biti manja ili jednaka 2 ($f(0) = 2$).
S druge strane jednakosti vidimo, također, uvijek pozitivnu funkciju (definiranu na cijelom $\mathbb{R}$). Sada bi bilo dobro ocijeniti (omeđiti) funkciju s desne strane jednakosti, što ćemo i učiniti primjenom aritmetičko - geometrijske nejednakosti.

Svojstvo 1 (A - G Nejednakost) *Za realne brojeve $a, b > 0$ vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b}.$$

Ako označimo $a := 1 + x^2, b := \frac{1}{1+x^2}$ primjenom A - G nejednakosti dobivamo sljedeću ocjenu: $1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2} \geq 2\sqrt{(1 + x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2}} = 2$
Dobili smo da nam lijeva strana jednakosti uvijek mora biti manja ili jednaka 2, a da desna strans uvijek mora biti veća ili jednaka 2. Što znači da jednadžba ima rješenja ako postoji takav x za koji su obje funkcije jednake 2.
Slijedi jednostavan račun:

$$2^{1-|x|} = 2 \Rightarrow 1 - |x| = 1 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u $1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2}$ također dobivamo 2 pa zaključujemo da je $x = 0$ konačno rješenje dane jednadžbe.

Zadatak 19 *Riješi jednadžbu* $\frac{1}{x} + x = \sqrt{2}$.

Rješenje:
Budući da se s desne strane jednakosti nalazi pozitivan broj, tada to mora biti i lijeva

strana, tj. $\frac{1}{x} + x$ mora biti pozitivno.
Zbroj dva realna recipročna broja (različita od 0!) pozitivan je ako i samo ako su oba broja pozitivna.
Vrijedi $x, \frac{1}{x} > 0$ pa možemo primijeniti A - G nejednakost (Svojstvo 1): $\frac{1}{x} + x \geq \sqrt{\frac{1}{x} \cdot x} = 2$
S lijeve strane jednakosti imam broj koji je veći ili jednak 2, a s desne strane točno $\sqrt{2}$ zbog čeg slijedi da ova jednadžba nema rješenja.

Zadatak 20 *Riješi jednadžbu* $1 + x^2 = \cos(3x)$.

Rješenje:
I u ovom zadatku nam je najbolje pokušati pronaći sjecište dvaju funkcija na način da pokušamo ocijeniti funkcije i pronaći zadovoljavajući uvjet.
Obzirom na omeđenost funkcije kosinus (po definiciji $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$), vrijedi da je desna strana jednakosti uvijek manja ili jednaka od 1.
Nasuprot tome, s lijeve strane jednakosti imamo pozitivnu funkciju koja je omeđena odozdo, tj. $1 + x^2 \geq 1$.
Jasno, rješenje polazne jednadžbe postoji ako postoji takav x za koji su obje strane jednakosti točno 1.

$$1 + x^2 = 1 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$
$$\cos(3x) = 1 \iff 3x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Konačno rješenje dobije se presjekom skupova rješenja ove dvije jednadžbe, tj. $x = 0$.

Svojstvo 2 *Ako za funkcije* f, g *vrijedi:*

$$f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0,$$

tada je

$$f(x) + g(x) = 0 \iff f(x) = 0 \wedge g(x) = 0$$

Iako je ovo svojstvo poprilično trivijalno, često se na njega zaboravi, a vrlo je korisno u rješavanju transcedentnih jednadžbi. Pogledajmo primjenu ovog svojstva u sljedećem zadatku.

Zadatak 21 *Riješi jednadžbu* $\sin^2(\pi x) = -\sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

Rješenje:
Prebacivanjem korjenske funkcije na lijevu stranu dobijemo jednadžbu u kojoj zbroj dvije nenegativne funkcije mora biti jednak 0. Zbog Svojstva 2, slijedi da mora vrijediti $\sin^2(\pi x) = 0$ i $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = 0$.

$$\sin^2(\pi x) = 0 \iff \sin(\pi x) = 0 \iff \pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}=0 \iff x^2+3x+2=0 \Longrightarrow x \in \{-1,-2\}$$

Konačno rješenje početne jednadžbe je presjek skupova rješenja ove dvije jednadžbe, tj. rješenja su $x_1=-1$ i $x_2=-2$.

Svojstvo 3 *Ako za funkcije f, g vrijedi:*

$$|f(x)| \geq a \wedge |g(x)| \geq b$$

za $a, b > 0$ te $f(x)$ i $g(x)$ su istog predznaka, tada je

$$f(x) \cdot g(x) = a \cdot b \iff |f(x)| = a \wedge |g(x)| = b$$

Zadatak 22 *Ima li jednadžba $[(x-2)^2+4] \cdot [x+\frac{1}{x}] = 8$ realnih rješenja?*

Rješenje:
Iako bismo ovo mogli rješavati na način da sve izmnožimo pa pokušamo pojednostaviti, to je standardni postupak. Valja primijetiti da su funkcije unutar zagrada omeđene, $x+\frac{1}{x} \geq 2$ prema A - G nejednakosti, dok je $(x-2)^2+4 \geq 4$.
Primjenom Svojstva 3, vidimo da je

$$[(x-2)^2+4] \cdot [x+\frac{1}{x}] = 4 \cdot 2 = 8 \iff |(x-2)^2+4| = 4 \wedge |x+\frac{1}{x}| = 2$$

tj.

$$(x-2)^2+4=4 \wedge x+\frac{1}{x}=2 \iff x=2 \wedge x=1$$

Očito, ovaj sustav nema realnih rješenja.

Napomena:
Pri rješavanju ovakvog tipa zadatka, poželjno je napraviti sljedeći osvrt.

1. Diskutiraj rješenja jednadžbe $[(x-2)^2+4] \cdot [x+\frac{1}{x}] = a$ za $a \in \mathbb{R}$.
   Obzirom da su obje funkcije omeđene odozdo, očito je da umnožak

   $$[(x-2)^2+4] \cdot [x+\frac{1}{x}] \geq 4 \cdot 2 = 8.$$

   U prethodnom zadatku pokazali smo da ne vrijedi ni jednakost, stoga jednadžba nema rješenja za vrijednosti $a \leq 8$.

2. Provjeri ima li jednadžba rješenja za neki $a > 8$. (Dati za domaću zadaću npr. $a = 10$)

3. Možeš li promijeniti početnu jednadžbu $[(x-2)^2+4] \cdot [x+\frac{1}{x}] = 8$ tako da ima rješenja?

   Vrlo je bitno primijetiti zbog čega polazna jednadžba nema rješenja te na temelju toga iskonstruirati novu jednadžbu. Naime, imamo dva različita rješenja $x = 1$ i $x = 2$ te da je potrebno nešto promijeniti tako da obje jednadžbe imaju rješenje ili $x = 1$ ili $x = 2$.

   Uočimo da je lakše promijeniti prvu jednadžbu $(x-2)^2+4$ i da $(x-2)^2$ utječe na rješenje, stoga kad bismo stavili umjesto toga $(x-1)^2+4$, dobivamo da je rješenje jednako 1.

   Sada naša jednadžba ima rješenje.

Zadatak 23 *U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbu* $x^8 + y^{2016} = 32x^4 - 256$.

Rješenje:

$$y^{2016} = -x^8 + 32x^4 - 256$$
$$y^{2016} = -(x^8 - 32x^4 + 16^2)$$

S lijeve strane jednakosti imamo nešto što je uvijek veće ili jednako od nule, s desne strane jednakosti imamo nešto što je uvijek manje ili jednako od nule, što znači da jednadžba ima rješenja ako i samo ako su obje strane jednakosti jednake nuli.

$$y^{2016} = 0 \iff y = 0$$
$$x^4 - 16 = 0 \iff x_{1,2} = \pm 2 \wedge x_{3,4} \pm 2i$$

Obzirom da se traže samo cjelobrojna rješenja, konačna rješenja su $(-2, 0), (2, 0)$.

Zadatak 24 *Dokaži da jednadžba* $\sin(2016x) + \sin(x) = 2$ *nema realnih rješenja.*

Rješenje:
Funkcija sinus je definirana na sljedeći način $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ pa najveću vrijednost koju može primiti je 1.
Zbroj dva sinusa je jednaka 2 ako i samo ako su oba od njih jednaka 1, tj. jednadžba ima rješenja $\iff \sin x = 1 \wedge \sin 2016x = 1$.

$$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin 2016x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4032} + \frac{s\pi}{1008}, s \in \mathbb{Z}$$

Sada trebamo naći presjek rješenja, odnosno izjednačiti vrijednosti x.

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{4032} + \frac{s\pi}{1008} \iff 4s - 8064k = 2015$$
$$4 \cdot (s - 2016k) = 2015 \iff s - 2016k = \frac{2015}{4}$$

Kako su $s, k \in \mathbb{Z}$, kao i $2016k \in \mathbb{Z}$, a razlika dva cijela broja je cijeli broj, s lijeve strane jednakosti imamo cijeli broj, no budući da 4 ne dijeli 2015, s desne strane jednakosti imamo racionalan broj, došli smo do kontradikcije. To znači da jednadžba nema realnih rješenja.

3 Istraživanje

3.1 Uvod

Hrvatski učenici se danas još uvijek vrlo rijetko mogu susresti s nestandardnim matematičkim zadatcima, pogotovo u okviru redovite nastave. Općenito veliku ulogu u uspješnosti rješavanja nestandardnih matematičkih problema ima iskustvo rješavanja takvih zadataka, usvojenost različitih metoda te primjena stečenog znanja na zadatke. Izostanak bilo kojeg od navedenih faktora stvara nesigurnost i otpor prema nestandardnim zadatcima te *nemogućnost* odmicanja od standardnih postupaka. Nadalje, vrlo često se u razgovoru sa nastavnicima matematike može čuti da je kurikul neprilagođen za takve sadržaje, da su operativni planovi i programi preopterećeni velikom količinom gradiva, da se to ne stigne i sl.

Stoga sam odlučila provesti istraživanje među studentima nastavničkog studija matematike i ispitati kako se oni snalaze u rješavanju nestandardnih zadataka i korištenju nestandardnih metoda za rješavanje standardnih zadataka.

3.2 Ciljevi i zadatci istraživanja

Cilj ovog istraživanja je ispitati uspješnost rješavanja nestandardnih matematičkih zadataka te učestalost korištenja nestandardnih metoda u rješavanju standardnih problema kod studenata matematike.

3.3 Hipoteze istraživanja

1. Studenti su neuspješni u rješavanju nestandardnih matematičkih zadataka
2. Studenti su skloniji rješavanju zadataka poznatim algoritmima, standardnim postupcima.
3. Studenti su skloniji rješavanju zadataka za koje poznaju postupak/algoritam rješavanja.

3.4 Metodologija istraživanja

Ispitanici

Istraživanje je provedeno na 34 ispitanika, a ispitivanje je provedeno na uzorku od 31 osobe. Iz obrade je izuzeto 3 ispitanika prema kriteriju: manje od 100% odgovorenih pitanja.

U ispitivanju su sudjelovali studenti 4. i 5. godine sveučilišnog nastavničkog smjera matematika - informatika koji studiraju na Odjelu za matematiku u Osijeku, u akademskoj godini 2015./2016.

U ispitivanju su zastupljena oba spola, iako su velika većina ispitanika ženske osobe ($93,5\%$), a tek ih je $6,5\%$ muških. U uzorku se nalaze osobe između 22 i 26 godina starosti.

Mjerni instrumenti

Hipoteze istraživanja ispitane su kroz pet matematičkih zadataka koje su studenti trebali rješiti pisanim putem, za što su bili ograničeni vremenskim rokom od 60 minuta (*Prilog 1*[10]). Od tih pet zadataka dva su nestandardna zadatka (3. i 5.), kojima se ispitala uspješnost u rješavanju, a preostala tri su standardna zadatka na kojima se ispitivala sklonost korištenju odgovarajuće metode (standardne ili nestandardne).

Na početku je dana uputa da ukoliko neki od zadataka ne budu znali ili stigli riješiti napišu ideju kako bi riješili.

Za svaki od riješenih zadataka provedena je prvo kvalitativna analiza nad kojom je potom provedena kvantitativna analiza.

1. zadatak:

Kategorije kvalitativne analize za dani zadatak su:

- određenost domene funkcije
- poznavanje standardnog postupka preko prve derivacije
- točnost napisanog standardnog postupka
- uočavanje nepostojanja realnih nultočki prve derivacije/uočavanje da je prva derivacija strogo manja od nule
- zamjena problema određivanja monotonosti funkcije s problemom pronalaska ekstrema funkcije
- nešto matematički netočno napisano, osim standardnog postupka
- rješavanje standardnom metodom
- rješavanje nestandardnom metodom
- ništa napisano

[10] U prilogu su zadatci riješeni nestandardnim metodama.

2. zadatak

Kategorije kvalitativne analize za dani zadatak su:

- ideja uvođenja supstitucije
- provedena supstitucija
- ideja logaritmiranja
- provedeno logaritmiranje
- ponuđeno jedno rješenje
- ponuđena oba rješenja
- pokušaj kvadriranja
- rješavanje standardnom metodom
- rješavanje nestandardnom metodom
- nešto matematički netočno napisano
- ništa napisano

3. zadatak

Kategorije kvalitativne analize za dani zadatak su:

- napisana definicija periodičnosti
- dobra primjena definicije
- rješavanje sustava jednadžbi
- nešto matematički netočno napisano
- ništa napisano

4. zadatak

Kategorije kvalitativne analize za dani zadatak su:

- ideja kvadriranja
- provedeno kvadriranje jednom
- provedeno kvadriranje dvaput

- ideja supstitucije
- provedena supstitucija
- traženje nultočki polinom 4. stupnja
- dobiveno rješenje
- svođenje izraza pod korjenom na kvadrat zbroja
- rješavanje standardnom metodom
- rješavanje nestandardnom metodom
- svođenje na kvadrat zbroja
- prepoznavanje uvjeta ispod korjena
- uočavanje uvjeta jednakosti
- nešto matematički netočno napisano
- ništa napisano

5. zadatak

Kategorije kvalitativne analize za dani zadatak su:

- poznavanje kriterija za rješenje - preko diskriminante
- točno napisan kriterij
- prepoznat jedan slučaj (nije naveden koji je slučaj)
- prepoznata oba slučaja - rješenje
- nešto matematički netočno napisano
- ništa napisano

3.5 Rezultati

3.5.1 Prvi zadatak

Od trideset i jednog ispitanika, ovaj zadatak nije pokušalo riješiti ni napisati metodu kojom misle da bi se zadatak mogao riješiti, dvije osobe, odnosno $6,45\%$ ispitanika.

Za svih preostalih $93,55\%$ (29) ispitanika može se reći da poznaje standardnu proceduru rješavanja zadatka ovakvog tipa, pri čemu su se za ovaj kriterij prihvatljivima uzimali u obzir svi odgovori koji su se temeljili na kriteriju preko prve derivacije. Nijedna osoba nije pokušala riješiti zadatak nekom od nestandardnih metoda.

Nadalje, tek je jedna osoba od 29, odnosno $3,45\%$ ispitanika koji su probali riješiti zadatak točno napisala kriteriji za monotonu funkciju (u obzir su uzeti i oni kriteriji koji ne karakteriziraju strogu monotonost) preko prve derivacije.

Nepostojanje realnih nultočaka derivacije i/ili uvjeta da je $f' < 0$ uočilo je 11 od 26 osoba koliko ih je računalo prvu derivaciju, tj. $42,31\%$, no nitko od njih to nije povezao s uvjetom stroge monotonosti.

Za rješavanje ovog zadatka u potpunosti, samo je jedna osoba potrebnim smatrala određivanje domene funkcije za koju se određuje monotonost ($3,45\%$).

Iako ih 29 elementarno poznaje proceduru rješavanja problema monotonosti, ipak njih 8, odnosno $27,59\%$ je pomiješalo problem određenja monotnosti funkcije i problem pronalaska ekstrema funkcije.

Pri analizi rješenja uočeno je u 50% radova nešto drugo matematički netočno napisano osim gore navedenog. Zaključno, nijedna osoba nije riješila zadatak u potpunosti (određenje monotonosti nad domenom) ni djelomično točno, za što se smatra točno određenje monotonosti nad krivom domenom.

Grafički prikaz gore navedenog vidljiv je iz sljedeće tablice.

	Broj ispitanika (31)	%
Poznaje kriterij	29	$93,55\%$
Točno napisan kriterij	1	$3,45\%$
Zamjena s ekstremima	8	$27,59\%$
Krivo napisano (ostalo)	20	$68,97\%$
Određena domena	1	$3,45\%$
Računanje 1. derivacije	26	$89,66\%$
Uočavanje: $\nexists x$ t.d. $f' = 0$ ili $f' < 0$	11	$42,31\%$
Uočavanje stroge monotonosti	0	0%
Ne poznaje kriterij	2	$6,45\%$

Tablica 1: Prikaz uspješnosti rješavanja 1. zadatka po koracima

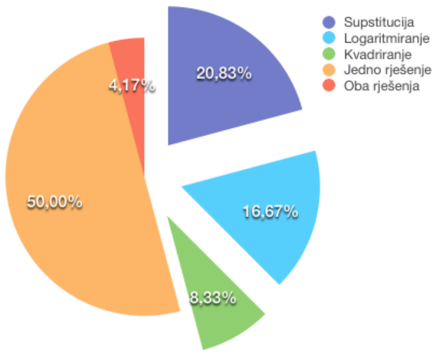
3.5.2 Drugi zadatak

Ovaj nestandardni zadatak pokušalo je riješiti $77,44\%$, tj. 24 ispitanika od 31. Ideju rješavanja nekom od standardnih metoda (supstitucija (5), kvadriranje (2), logaritmiranje (4)) imalo je njih 11 od 24, što bi bilo oko $45,83\%$. Nešto je manji postotak onih koji su te ideje pokušali i realizirati (susptitucija (3), kvadriranje (2), logaritmiranje (3), njih 8 od 11, odnosno $72,73\%$ sveukupno od broja ispitanika koji su se odlučili za standarnu metodu, a $33,33\%$ od broja ispitanika koji su zadatak pokušali rješavali.

Nasuprot tome, većina $54,17\%$ ih se odlučila za nestandardnu metodu i to metodu pokušaja i pogrešaka. Pri tome je 12 od 13 osoba, koji su zadatak rješavali ovom metodom, pogodilo samo jedno rješenje, a jedna je osoba uočila i drugo rješenje, uz obrazloženje. Odnosi između zastupljenih metoda vidljive su na Figure 1.

Pri analizi rješenja uočeno je u $16,67\%$ radova nešto matematički netočno napisano.

Od 24 ispitanika koji su rješavali zadatak djelomično ga je riješilo 50% (ponuđeno jedno rješenje), u potpunosti ga je riješilo $4,17\%$, tj. jedna osoba (oba rješenja). Valja napomenuti kako nitko od ispitanika koji su se odlučili za standardne metode nije ponudio ni djelomično ni potpuno rješenje.



Slika 1: Odnos zastupljenosti standardnih i nestandardnih metoda u 2. zadatku

3.5.3 Treći zadatak

Ovaj zadatak je rješavalo najmanje ispitanika u usporedbi s preostala četiri, točnije njih 19 od 31 ili $61,29\%$.

Svih 19 ih je započelo s prvim korakom, pisanjem definicije periodičnosti i svi su je točno napisali. Sljedeći korak, uspješna primjena definicije, riješilo je manje od pola (8), tj. $42,1\%$. Posljednji korak, rješavanje sustava kvadratnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, uspješno je riješila samo jedna osoba od njih 8. To znači da je samo jedna osoba riješila zadatak u potpunosti, što iznosi $5,26\%$ od onih koji su zadatak rješavali te $12,5\%$ od onih koji su znali primijeniti definiciju periodičnosti na zadatak (Table 2).

Pri analizi rješenja uočeno je u $47,37\%$ radova nešto matematički netočno napisano.

	Broj ispitanika (od 19 koji su rješavali)
Definicija periodičnost	19 (100%)
Točna primjena definicije	8 (42,1%)
Rješavanje sustava jednadžbi	1 (5,26%)

Tablica 2: Prikaz uspješnosti rješavanja 3. zadatka po koracima

3.5.4 Četvrti zadatak

Četvrti zadatak je zadatak s najvećim postotkom rješavanosti, tj. svih 31 ispitanika su rješavali ovaj zadatak ili predložili metodu rješavanja. Za standardne metode odlučilo se $90,32\%$, a za nestandardne metode $9,68\%$ ispitanika.

U ovom zadatku ispitanici koji su se odlučili za standardne metode su imali ili ideju kvadriranja (17 od 28, što je $60,7\%$) ili ideju supstitucije (11 od 28, što je $39,3\%$).

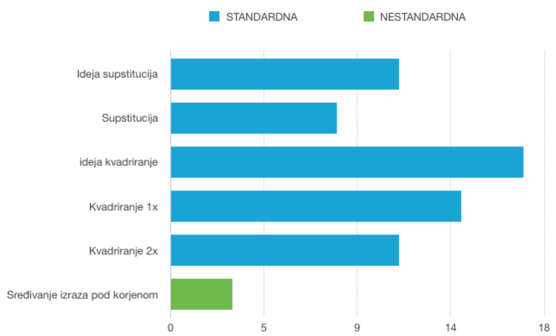
Supstituciju je uistinu pokušalo i provesti 8 od 11 ispitanika koji su se za nju odlučili, no nijedno rješavanje supstitucijom nije dovelo do konačnog rješenja.

Od ispitanika koji su se odlučili za ideju kvadriranja ih je uistinu i kvadriralo 14 od 17 jedanput ($82,35\%$), a 11 od 17 dvaput ($64,71\%$). No, nitko od njih nije došao do sljedećeg koraka (polinoma 4. stupnja) ni rješenja.

Svi ispitanici koji su se odlučili za nestandardnu metodu došli su samo do prvog koraka (svođenje izraza pod korjenom na kvdarat zbroja).

Na Figure 2 prikazano je koliko je ispitanika riješilo određeni korak zadatka, ovisno o izboru metoda koje su koristili.

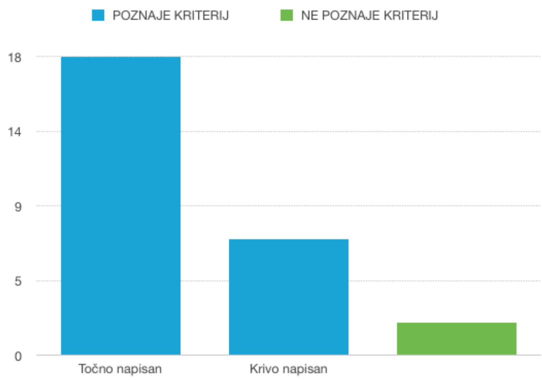
Pri analizi rješenja uočeno je u $25,81\%$ radova nešto matematički netočno napisano.



Slika 2: Provedeni koraci rješavanja u ovisnosti o metodama korištenja u 4. zadatku

3.5.5 Peti zadatak

Posljednji zadatak rješavalo je 27 ispitanika, a 4 ih nije ništa napisalo. Od njih 27 početnu točku u rješavanju ovog zadatka (kriterij kada kvadratna jednadžba ima dva različita realna rješenja) poznaje njih 25 (u obzir su se uzimali svi odgovori povezani s diskriminantom). Ukupan broj onih koji poznaju kriterij, a koji su ga točno i napisali iznosi 18, što je 72%, a općenito ($66,67\%$). Prikaz je vidljiv na sljedećoj Figure 3.



Slika 3: Poznavanje i točnost napisanog kriterija za rješavanje 5. zadatka

Sljedeći korak u rješavanju se sastojao od razlikovanja dva slučaja u ovisnosti o realnom broju c. Nitko od 25 ispitanika koji su prepoznali početnu točku rješavanja nije uvidio sljedeći korak, odnosno potrebu razlikovanja dva slučaja. Njih 14 od 25 je dobilo rješenje za jedan slučaj (kada je $c \geq 0$), ali ga nisu i prepoznali, nego ponudili kao konačno rješenje. To znači da je njih 56% dobilo djelomično rješenje, a nitko nije riješio zadatak u potpunosti. Na tablici 3 prikazano je koliko je ispitanika riješilo određeni korak zadatka.

Pri analizi rješenja uočeno je u $22,22\%$ radova nešto drugo matematički netočno napisano osim kriterija za određivanje prirode rješenja kvadratne jednadžbe.

	Broj ispitanika (od 25 koji su prepoznali početnu točku)
Točno napisan kriterij	18 (72%)
Riješen 1 slučaj ($c \geq 0$)	14 (56%)
Oba slučaja	0 (0%)

Tablica 3: Prikaz uspješnosti rješavanja 5. zadatka po koracima

3.6 Rasprava

1. Studenti su neuspješni u rješavanju nestandardnih matematičkih zadataka

U ovom istraživanju dana su dva nestandardna zadatka, jedan tipa *"odredi,..."*, a drugi tipa *"dokaži da,..."*. U oba zadatka za početnu točku rješavanja pretpostavljeno je povezivanje teorijskog znanja sa zadatkom i njegova primjena kao jedna od glavnih pretpostavki za uspješno rješavanje nestandardnih zadataka. U trećem zadatku traži se definicija periodičnosti, a u petom je zadatku potrebno poznavanje kriterija za određivanje prirode rješenja kvadratne jednadžbe, odnosno poznavanje prirode rješenja obzirom na diskriminantu. Isto tako, u svakom od standardnih zadataka za korištenje i standardnih i nestandardnih metoda potrebno je teorijsko znanje. U prvom je zadatku za standardnu metodu potrebno znati kriterij za određivanje monotonosti funkcije preko prve derivacije ili Teoreme 1 i 5 za nestandardnu. U drugom se zadatku se tražilo prepoznavanje parnosti funkcije i primjena definicije parne funkcije (nestandardna metoda), a u četvrtom područje definicije korjenske funkcije te generalizacija Svojstva 2 (nestandardna metoda).

Međutim, na tablici 4 dan je prikaz poznavanja teorije i njezine primjene u zadatcima gdje se to tražilo[11].

	Poznavanje teorije	Točno napisana teorija	Uspješna primjena teorije
1. zadatak	29 $(93,55\%)$	1 $(3,23\%)$	0 (0%)
3. zadatak	19 $(61,29\%)$	19 $(61,29\%)$	8 $(25,81\%)$
5. zadatak	25 $(80,65\%)$	18 $(58,65\%)$	14 $(45,16\%)$

Tablica 4: Teorijsko znanje

Iz tablice se može uočiti da većina ispitanika prepoznaje teorijsku pozadinu u zadatcima u kojima se ona traži, prosječno u ova tri navedena zadatka $78,5\%$ ispitanika. Puno lošiji rezultat se dobije, ukoliko se zahtijeva točnost i konkretnost poznavanja teorije koja se primjenjuje u zadatcima, prosječno $41,06\%$. Dok je svega $23,66\%$ ispitanika sposobno i primijeniti znanje u konkretnim zadatcima.

Kada u obzir uzmemo činjenicu da je primjena teorijskog znanja u kombinaciji s integracijom različitih matematičkih područja jedna od osnovnih pretpostavki za uspješno rješavanje većine nestandardnih zadataka, dobiveni rezultati istraživanja potkrjepljuju tvrdnju da su studenti neuspješni u rješavanju nestandardnih zadataka. Uzrok lošeg poznavanja i primjene teorije, a vrlo dobro dobrog poznavanja teorije na razini prepoznavanja leži u poznavanju procedura, ali ne i koncepata.

Rezultati istraživanja o djelomičnoj i potpunoj riješenosti zadataka dodatno potvrđuje ovu hipotezu istraživanja. Naime, prvi zadatak ni u potpunosti ni djelomično nije riješila nijedna osoba. Pri čemu se za potpuno rješenje zadatka smatra točno određena monotonost nad domenom funkcije, a za djelomično rješenje se smatra točno određena monotonost nad krivom domenom.

Drugi zadatak je djelomično (ponuđeno jedno rješenje) riješilo 12 od sveukupno 31 ispitanika[12] $(38,71\%)$, a u potpunosti točno samo jedna osoba $(3,23\%)$.

Treći zadatak djelomično (dobra primjena definicije periodičnost, a netočno rješavanje sustava jednadžbi) je riješilo $42,11\%$, a u potpunosti nitko.

Četvrti zadatak nitko nije riješio ni djelomično ni u potpunosti točno. Za djelomično točno rješenje smatralo bi se sređivanje izraza do polinoma četvrtog stupnja iz kojeg je

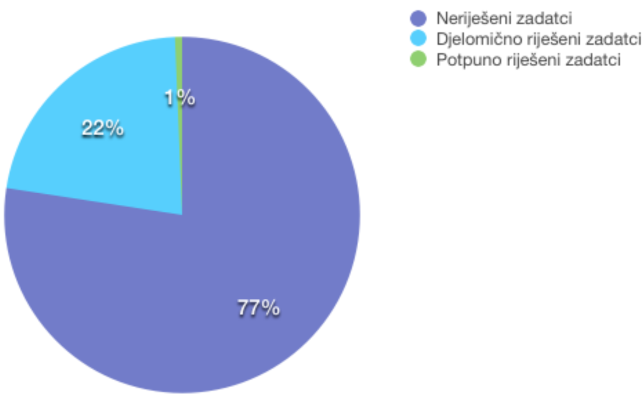
[11] Za svaku od kategorija po stupcima je u obzir uzet ukupan broj ispitanika N=31.

[12] Smatra se da ispitanici koji za određeno pitanje nisu ništa napisali, nisu imali ideju ni kako započeti te se također uzimaju u obzir. Za detaljnije razmatranje treba uzeti u obzir vremenski rok trajanja istraživanja.

potrebno tražiti nultočke.

Peti zadatak nijedna osoba nije riješila u potpunosti točno, a $45,16\%$ ih je riješilo djelomično točno (rješenje jednog slučaja bez navođenja uvjeta).

Konačan pregled uspješnosti djelomičnog i potpunog rješavanja zadataka vidljiv je na sljedećoj Figure 4.



Slika 4: Udjeli neriješenih, djelomično riješenih i potpuno riješenih zadataka u postotcima

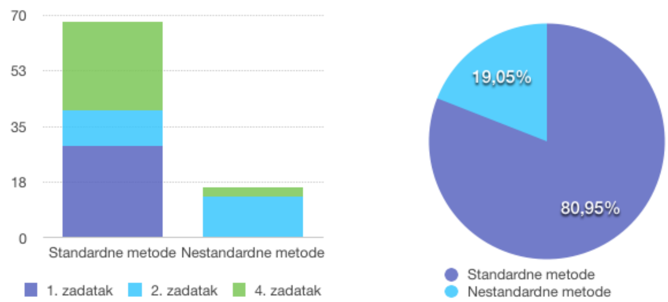
2. Studenti su skloniji rješavanju zadataka poznatim algoritmima, standardnim postupcima.

Rezultatima analize metoda rješavanja standardnih zadataka (prvog, drugog i četvrtog) potvrdila se navedena hipoteza. Naime, od 29 ispitanika koji su rješavali ili ponudili metodu rješavanja prvog zadatka svih 29 (100%) radije su to učinili koristeći standardnu metodu (kriterij monotonosti preko prve derivacije), umjesto recimo pomoću Teorema 5 i 1. U drugom zadatku omjer korištenja standardnih (supstitucija, logaritmiranje i kvadriranje) i nestandardnih (metoda pokušaja i pogrešaka) metoda otprilike je podjednak $(11 : 13 = 45,83\% : 54,17\%)$, iako u korist nestandardnih.

Pri rješavanju četvrtog zadatka, omjer standardnih (supstitucija i rješavanje iracionalne jednadžbe kvadriranjem) i nestandardnih metoda (svođenje izaraza ispod korjena na kvadrat zbroja) sličniji je onom u prvom zadatku, $28 : 3 = 90,32\% : 9,68\%$.

Sveukupni omjer korištenja standardnih i nestandardnih metoda u standardnim zadatcima prikazan je grafovima na Figure 5.

Ovakav rezultat vjerojatno je posljedica nedovoljnog poznavanja teorije, poznavanja manjeg broja metoda rješavanja zadataka (u zadatcima je dominirala supstitucija) te pomanjkanja iskustva rješavanja zadataka nestandardnim metodama.

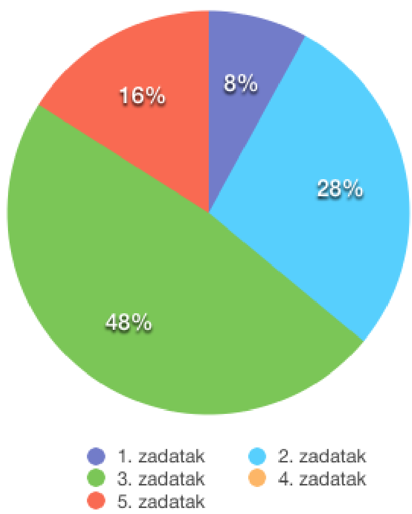


Slika 5: Omjeri korištenja standardnih i nestandardnih metoda

3. Studenti su skloniji rješavanju zadataka za koje poznaju postupak/algoritam rješavanja.

Ovu tvrdnju provjerit ćemo uspoređujući broj ispitanika koji je nije ni pokušao riješiti pojedini zadatak i broj ispitanika koji je odustao odmah na početku ili nakon prvog koraka. Na sljedećoj slici prikazan je po zadatcima broj ispitanika koji nije ni pokušao riješiti zadatak. Prvi zadatak nije ni pokušalo riješiti 2 ispitanika, drugi zadatak 7, treći zadatak 12, peti zadatak 4, dok su svi ispitanici rješavali četvrti zadatak.

Ovakav ishod je očekivan te potvrđuje hipotezu jer je veći broj ljudi odustao od rješavanja nestandardnih zadataka (64%) nego od standardnih (36%).

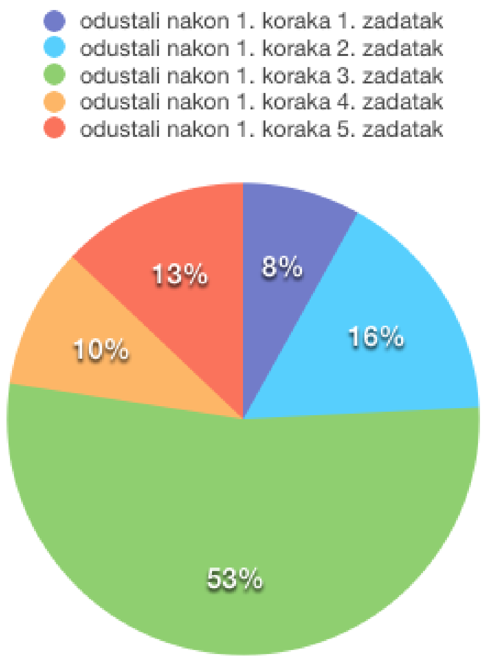


Slika 6: Omjer broja ispitanika za određeni zadatak koji nisu ni pokušali riješiti

Očekivana je činjenica da su svi ispitanici pokušali rješavati ili imali ideju za rješavanje četvrtog zadatka, zato što je to primjer jedne iracionalne jednadžbe za koju postoji standardna procedura rješavanja i koja se uči već u 1. razredu srednje škole. Isto se očekivalo i za prvi zadatak, iako je od tog zadatka odustalo samo 2 ispitanika, što je puno manje u usporedbi s preostalim zadatcima.

Očekivano najviše ispitanika je odustalo od rješavanja trećeg zadatka, gotovo pola (48%) ispitanika koji su odustali od rješavanje od nekog zadatka. Pretpostavljam da je uzrok tome što se pri usvajanju svojstva periodičnosti funkcije rješavaju jedino zadatci provjere periodičnosti neke funkcije.

Također, situacija ostaje skoro nepromijenjena kada se onima koji su odustali prije rješavanja pribroji broj ispitanika koji su odustali nakon prvog koraka zadatka, što dodatno potvrđuje hipotezu, a vidljivo je na sljedećoj slici.



Slika 7: Omjer broja ispitanika za određeni zadatak koji su odustali nakon prvog koraka

Matematičke pogreške

Smatram da je za raspravu vrlo zanimljiv podatak o velikom broju napravljenih matematičkih pogrešaka, ne uzimajući u obzir netočno napisane kriterije rješavanja zadataka. U tablici je, po zadatcima, prikazan broj ispitanika koji su počinili barem jednu pogrešku u jednom zadatku, koji su rješavali.

U prvom zadatku najčešća pogreška bila je određivanje kompleksnih nultočaka prve derivacije i intervala monotonosti obzirom na te kompleksne točke. U drugom zadatku većinom su pogriješili oni koji su zadatak pokušavali riješiti logaritmiranjem.

U trećem zadatku pogrešku je napravilo 9 ispitanika, a od njih 9, čak 8 ih je pogriješilo u rješavanju sustava kvadratnih jednadžbi s jednom nepoznanicom. Naime, svi su načinili pogrešku vezanu uz matematičku logiku kada su umjesto sustava jednadžbi (kojeg su trebali sami prepoznati jer je sustav jednadžbi bio zadan u tekstualnom obliku, povezane logičkim operatorom *i*, a ne *ili*) rješavali samo jednu od jednadžbi.

U četvrtom zadatku su pogreške bile "tehničke prirode" ili je izostavljen pojedini algebarski izraz ili je nešto pogrešno kvadrirano, zbrojeno i sl. Pogreške proizašle iz petog zadatka većinom su iz područja teorije brojeva (usporedba brojeva).

	Udio matematičkih pogrešaka
1. zadatak	50%
2. zadatak	16,67%
3. zadatak	47,37%
4. zadatak	25,81%
5. zadatak	22,22%

Tablica 5: Udio napravljene barem 1 greške u zadatcima

3.7 Zaključak istraživanja

Nakon dobivenih rezultata istraživanja može se zaključiti da su studenti loši u rješavanju nestandardnih zadataka (djelomična uspješnost iznosi 22%, dok potpuna riješenost svega 1%). Jedan od ispitanih uzroka je nedovoljno poznavanje teorije i mogućnost primjene usvojenog teorijskog znanja na različite zadatke (u prosjeku svega 23,66% ispitanika je uspješno primijenilo teorijsko znanje).

Nadalje, studenti su skloniji rješavanju zadataka za koje poznaju procedure i algoritme, a najbolji primjer za to su četvrti zadatak (rješavanje iracionalne jednadžbe) kojeg su svi barem započeli rješavati te prvi zadatak za koji svega 2 ispitanika nije ništa napisalo.

Konačno, potvrdila se i treća hipoteza istraživanja da su studenti skloniji rješavanju zadataka standardnim metodama (80,95%) nego nestandardnim (19,05%), a među standardnim metodama dominira supstitucija.

4 Zaključak

Razvojem metodike matematike došlo je do promjena u načinu poučavanja matematike te se umjesto stavljanja naglaska izričito na procedure rješavanja zadataka, sve veći naglasak stavlja i na koncepte. Učenike se umjesto dugotrajnog uvježbavanja shematskih zadataka uči kako matematički misliti.
Za uspješno razvijanje sposobnosti matematičkog i kritičkog mišljenja glavnu ulogu imaju problemski i nestandardni zadatci. Nestandardni matematički zadatci su složeni zadatci koji za uspješno rješavanje pretpostavljaju sposobnost integracije znanja iz različitih matematičkih područja te primjenu teorije.
Svi autori se slažu da ne postoji način kako bi se moglo naučiti rješavanje nestandardnih zadataka, nego da se sposobnost rješavanja nestandardnih zadataka razvija iskustvom, tj. vježbom. Također, jedan od važnijih preduvjeta je poznavanje teorije na višim kognitivnim razinama znanja (analiza, sinteza, vrednovanje) kao i poznavanje većeg broja metoda rješavanja zadataka.
Ipak, američki znanstvenik Polya smatra da se rješavanje svakog zadatka provodi u četiri etape (razumijevanje problema, stvaranje plana, izvršenje plana, osvrt) te je za svaku od njih ponudio i niz heurističkih pitanja i uputa kojima bi se trebalo voditi za uspješno rješavanje zadataka. Za razvoj sposobnosti rješavanja nestandardnih zadataka i dugotrajno usvajanje znanja stečenog rješavanjem nestandardnih zadataka Grigorieva ističe važnost osvrta (vrednovanja) na zadatak. Predlaže pokušaj osmišljavanja sličnog zadatka, generalizaciju metode koja se koristila na druge probleme (generalizirani problem), diskutiranje rješenja, analiza drugih metoda rješavanja i njihovih efikasnosti itd.

U nizu riješenih nestandardnih zadataka vezanih za rješavanje jednadžbi i nejednadžbi u ovom radu vrlo korisnima su se pokazala specifična svojstva funkcija (monotonost, parnost, periodičnost) kao i neke druge tvrdnje npr. aritmetičko - geometrijska nejednakost.

Istraživanje provedeno u sklopu ovog rada ispitalo je uspješnost studenata (učenika) u rješavanju nestandardnih zadataka, sklonost korištenju nestandardnih metoda u standardnim zadatcima te sklonost rješavanju nestandardnih zadataka. Pokazalo se da studenti (učenici) nisu uspješni u rješavanju nestandardnih zadataka, tek je 1% nestandardnih zadataka u potpunosti točno riješeno, a 22% zadataka djelomično riješeno.
Istraživanje je pokazalo da su studenti skloniji korištenju standardnih metoda u standardnim zadatcima od nestandardnih jer je u zadatcima korišteno sveukupno svega $19,05\%$.
Isto tako, analizom istraživanja potvrđena je hipoteza da su studenti skloniji rješavanju standardnih zadataka od nestandardnih koje češće ni ne pokušavaju riješiti.

Literatura

[1] M. BOMBARDELLI, I. BRNETIĆ, Ž. HANJŠ, *Matematička natjecanja 1996./97.*, Element, 1998.

[2] B. DAKIĆ, *Periodične funkcije*, Miš, **45** (2008), 203–209.

[3] B. P. DEMIDOVIČ, *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*, Golden Marketing, Zagreb, 2003.

[4] E. GRIGORIEVA, *Methods of Solving Nonstandard Problems*, Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[5] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika I*, Gradska tiskara, Osijek, 1998.

[6] V. KADUM, *Funkcije "najveće cijelo" i "razlomljeni dio"*, Metodički obzori, **4** (2009), 159–177.

[7] Z. KURNIK, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.

[8] I. KUZMANOVIĆ, *Neke primjene funkcija pod i strop*, Osječki matematički list, **8** (2008), 77–82.

[9] G. POLYA, *How To Solve It*, Princeton University Press, New Jersey, 1973.

[10] T. TAO, *Solving mathematical problems*, University Press, Oxford, 2006.

[11] D. VELJAN, B. PAVKOVIĆ, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

Sažetak

Na početku ovog rada definiraju se nestandardni matematički zadatci, iznose tipovi zadataka te opisuju etape procesa rješavanja zadataka s korisnim heurističkim i usmjerujućim pitanjima i uputama za uspješno svladavanje svake od etapa. Nadalje, dan je niz riješenih nestandardnih zadataka (vezanih uz problem rješavanja jednadžbi i nejednadžbi) te standardnih zadataka korištenjem nestandardnih metoda i korištenjem svojstava funkcija (monotonost, parnost i periodičnost). Na kraju rada napravljeno je istraživanje o uspješnosti studenata u rješavanju nestandardnih zadataka, sklonost korištenju nestandardnih metoda u standardnim zadatcima te sklonost rješavanju nestandardnih zadataka.

Ključne riječi: *nestandardni zadatci, nestandardne metode, monotnost, parnost, periodičnost, uspješnost rješavanja nestandardnih zadataka.*

Nonstandard mathematical problems

In the beginning of these paper, nonstandard mathematical problems are defined and types of tasks are listed. Moreover, stages of problem solving process are described, along with favorable heuristic and orienting questions or guidelines on how to successfully master each of the stages. Further, the series of solved nonstandard problems are given (connected to the problem of solving equations and inequalities), standard problems, resolved by using nonstandard methods and by using function properties (monotonic function properties, even and odd function properties, periodic function properties). In the end, paper contains research conducted on efficacy of students on nonstandard problem solving, tendency to use nonstandard methods on standard problems and inclination for nonstandard problem solving.

Key words: *nonstandard problems, nonstandard methods, monotic functions, even and odd functions, periodic functions, success in solving nonstandard mathematical problems.*

Životopis

Zovem se Amanda Glavaš, rođena sam 16. kolovoza 1992. godine u Osijeku. Rođena sam kao četvrti član obitelji Stašćik, otac mi se zove Damir, majka Snježana, a sestra Azra. Danas imam svoju obitelj, dvogodišnjeg sina Bornu i muža Filipa.
U Osijeku sam pohađala OŠ "Tin Ujević", a nakon završene osnovne škole kao najbolji "osmaš" upisala sam opću gimanziju "Prva gimnazija Osijek". Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na raznim natjecanjima znanja, pri čemu bih istaknula osvojeno drugo mjesto na županijskom natjecanju iz latinskog jezika.
Također, od prvog razreda osnovne pa sve do kraja srednje škole bavila sam se karateom u slobodno vrijeme i kao član hrvatske reprezentacije osvajala sam brojne medalje na državnim i međunarodnim natjecanjima. Srednju školu završila sam kao najbolji maturant generacije nakon čega se upisujem na Odjel za matematiku, sveučilišni nastavnički smjer matematika - informatika.
Tijekom studiranja imala sam aktivan društveni život te sam 2011. godine bila izabrana za člana Savjeta mladih Osječko - baranjske županije, a bila sam i član studentskog zbora na Odjelu za matematiku.

U budućnosti se vidim i radujem pozivu nastavnika matematike i nadam se da ću svojim radom, znanjem i trudom utjecati i doprinijeti stvaranju pozitivnog odnosa učenika prema matematici te unaprijeđenju i razvoju u načinima poučavanja i nastavi matematike.

Prilog 1

1. Odredi monotonost funkcije $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$.

2. Riješi jednadžbu $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$.

3. Neka je funkcija $f(x)$ periodična funkcija s temeljnim periodom $T = \frac{1}{3}$. Koliko iznosi $f(1)$ ako je $f^2(2) - 5f(0) + \frac{21}{4} = 0$ i $4f^2(-1) - 4f(\frac{10}{3}) = 35$?

4. Riješi jednadžbu $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5(x^2+2x+1)+9} = 4 - 2x - x^2$.

5. Ako su koeficijenti a, b, c takvi da $a > 0$ i $b > a+c$, dokaži da jednadžba $ax^2+bx+c = 0$ ima dva različita realna rješenja.

Rješenja:

1. Primjećujemo da su funkcije $g(x) = x - 2$ i $h(x) = x + 2$ monotnono rastuće na cijelom skupu $\mathbb{R}$.
   Primjenom Teorema 5, zaključujemo da su funkcije $\frac{1}{g(x)}$ i $\frac{1}{h(x)}$ monotono padajuće na $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, odnosno $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
   Dalje, primjenjujemo Teorem 1 i dobivamo da je $f(x) = \frac{1}{g(x)} + \frac{1}{h(x)}$ monotono padajuća funkcija na domeni $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

2. U ovom zadatku vrlo lako je uočljivo jedno rješenje, a i ako nije onda se primjenom metode pokušaja i pogrešaka, jednostavno dođe do prvog rješenja $x = 2$.

$$\begin{aligned}(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 &= 4\\ 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} &= 4\\ 2+2 &= 4\end{aligned}$$

   Zatim, potrebno je uočiti da su $2+\sqrt{3}$ i $2-\sqrt{3}$ inverzni.
   Vrijedi $(2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ Definirajmo $a := 2+\sqrt{3}$, tada je $\frac{1}{a} = 2-\sqrt{3}$.
   Uvrstimo to u početnu jednadžbu.

$$\begin{aligned}(\sqrt{a})^x + (\sqrt{\frac{1}{a}})^x &= 4\\ a^{\frac{x}{2}} + a^{\frac{-x}{2}} &= 4\end{aligned}$$

   Potrebno je uočiti da je funkcija $f(x) = a^{\frac{x}{2}} + a^{\frac{-x}{2}} - 4$ parna funkcija zbog čeg vrijedi prema definiciji parne funkcije da ako je $x = 2$ jedno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, onda je to i $x = -2$.

3. Za rješavanje ovog zadtka od studenata se očekuje poznavanje definicije peridoičnosti (Definicija 3).
   Primjenom definicije periodičnosti treba se doći do sljedećeg zaključka:

$$f(\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}) = f(1) = ... = f(2) = ... = f(\frac{10}{3}) = ... = f(0) = ... = f(-1)$$

   Što znači da vrijedi: $f^2(1) - 5f(1) + \frac{21}{4} = 0$ i $4f^2(1) - 4f(1) = 35$.
   Sada je još samo potrebno riješiti sustav dvije kvadratne jednadžbe s jednom nepoznanicom.
   Ako pomnožimo prvu jednadžbu s 4 i oduzmemo prvu jednadžbu od druge dobivamo sljedeće:

$$-16f(1) + 56 = 0 \iff f(1) = 3.5$$

4.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5(x^2+2x+1)+9} &= 4 - 2x - x^2\\ \sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5(x+1)^2+9} &= -4 - 2x - x^2\\ \sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} &= -[(x+1)^2 - 5]\end{aligned}$$

   Uočimo da zbog definicije kvadratne i korjenske funkcije (uvijek primaju nenegativne vrijednosti) vrijedi: $\sqrt{3(x+1)^2+4} \geq 2$, $\sqrt{5(x+1)^2+9} \geq 3$ i $-[(x+1)^2-5] \leq 5$.
   Prema tome, jednadžba ima rješenja ako postoji takav x za koji vrijede jednakosti $\sqrt{3(x+1)^2+4} = 2$, $\sqrt{5(x+1)^2+9} = 3$ i $-[(x+1)^2-5] = 5$.

$$\sqrt{3(x+1)^2+4} = 2 \iff 3(x+1)^2+4 = 4 \iff 3(x+1)^2 = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1$$

   Iz prvog uvjeta dobivamo da jdnakost vrijedi za $x = -1$, uvrštavanjem i druga dva uvjeta vidimo da su i oni zadovoljeni za $x = -1$.
   Konačno, dobivamo rješenje jednadžbe $x = -1$.

5. Dovoljno je pokazati da je diskriminanta $D > 0$.

   - Ako je $c < 0$, tada je zbog $a > 0$, $D = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$, tj. $D > 0$.
   - Ako je $c > 0$, tada zbog $b > a + c > 0$, vrijedi $D = b^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0$, tj. $D > 0$
     Dakle, u oba slučaja u ovisnosti o c vrijedi da je $D > 0$, što znači da jednadžba ima dva različita rješenja, i to realna.[13]

[13]Rješenje preuzeto iz [1].