Normirani i Banachovi prostori

Trojko, Barbara

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Diplomski sveučilišni studij financijske matematike i statistike

Normirani i Banachovi prostori

Diplomski rad

Mentor:
prof.dr.sc. Ivan Matić

Student:
Barbara Trojko

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Normirani i Banachovi prostori predstavljaju ključne koncepte u matematičkoj i funkcionalnoj analizi. Oni imaju ključnu ulogu za razumijevanje ponašanja funkcija, nizova i vektora. Ovi prostori omogućuju formaliziranje koncepata konvergencije, neprekidnosti, linearnog prostora i mnoge druge fundamentalne aspekte matematičkih struktura.

Normirani prostor je vektorski prostor s metrikom definiranom pomoću norme. Uz vektorske operacije zbrajanja i skalarnog množenja ima normu koja određuje na koji način se vektori prikazuju unutar tog prostora. Nadalje, norma u normiranom prostoru je funkcija koja svakom vektoru dodjeljuje nenegativni realni broj i zadovoljava tri osnovna svojstva: nenegativnost, skalarnu multiplikativnosti i nejednakost trokuta.

Banachov prostor je normirani prostor koji je potpun metrički prostor. Stoga, ključna karakteristika Banachovog prostora je potpunost. Ovo svojstvo Banachove prostore čini važnim za analitičare jer omogućava razumijevanje konvergencije u prostoru funkcija ili vektora. Klasični primjer Banachovog prostora je Lebesgueov prostor, u oznaci: L^p.

Linearni operatori su preslikavanja koja čuvaju algebarske operacije vektorskih prostora. Kategorija linearnih operatora nad normiranim prostorima koja je od posebnog interesa su ograničeni linearni operatori. Promatrat ćemo i prostor svih ograničenih operatora nad nekim normiranim prostorom za koji će se pokazati da je Banachov prostor.

Ovi koncepti čine temelj za dublje razumijevanje analize, topologije i mnogih drugih matematičkih disciplina. Omogućuju matematičarima da precizno modeliraju i analiziraju, čime se stvaraju osnove za teorijska istraživanja i primjene u područjima kao što su inženjering, fizika, ekonomija i računalna znanost.

Ovaj rad podijeljen je u dvije velike cjeline, a to su normirani prostori i linearni operatori. Unutar normiranih prostora uvest ćemo osnovne pojmove te se upoznati s Banachovim prostorima. Unutar linearnih operatora uvest ćemo osnovne pojmove vezane za linearne operatore te se upoznati s ograničenim linearnim operatorima. U obje cjeline, navest ćemo bitna svojstva i neke primjere te važne teoreme koji proizlaze iz tih koncepata.

2 | Normirani prostori

2.1 Uvod u normirane prostore

Definicija 1. (*vidjeti* [2], *Definicija 2.1-1*) *Vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *je neprazni skup* X *elemenata koje nazivamo vektorima nad kojim su definirane operacije vektorskog zbrajanja i množenja skalarom tj. s elementima iz* $\mathbb{F}$.
Vektorsko zbrajanje pridružuje svakom uređenom paru vektora (x, y) *vektor* $x + y$ *koji nazivamo zbroj* x *i* y *na način da vrijede svojstva:*
komutativnost

$$x + y = y + x$$

i asocijativnost

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Nadalje, postoji nul vektor, u oznaci 0 *i za svaki* x *postoji* $-x$, *tako da*

$$x + 0 = x$$

i

$$x + (-x) = 0.$$

Množenje skalarom svakom vektoru x *i skalaru* α *pridružuje vektor* αx *koji nazivamo umnožak* α *i* x, *na način da za sve vektore* x *i* y *te sve skalare* α *i* β *vrijede svojstva:*

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$1x = x$$

i distributivnost

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Iz definicije vidimo da je vektorsko zbrajanje preslikavanje $X \times X \to X$, a množenje skalarom $\mathbb{F} \times X \to X$. $\mathbb{F}$ nazivamo skalarno polje (polje koeficijenata). Kažemo da je X realni vektorski prostor ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, a X je kompleksan vektorski prostor ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definicija 2. (*vidjeti* [2], *Definicija 2.1-7*) *Za vektorski prostor* X *kažemo da je konačnodimenzionalan ako postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takav da postoji linearno nezavisan skup od* n *vektora iz* X, *a svaki skup s više od* n *vektora iz* X *je nužno linearno zavisan. Za* n *kažemo da je dimenzija od* X, *u oznaci:* $\dim X = n$. *Prema definiciji,* $X = \{0\}$ *je konačnodimenzionalan i* $\dim X = 0$. *Za vektorski prostor* X *kažemo da je beskonačnodimenzionalan ako nije konačnodimenzionalan.*

U funkcionalnoj analizi, beskonačnodimenzionalni vektorski prostori su od većeg interesa od konačnodimenzionalnih. Primjeri bekonačnodimenzionalnih prostora su l^2 i $C[a,b]$ gdje je l^2 oznaka za prostor beskonačnih nizova realnih ili kompleksnih brojeva kojima je suma kvadrata svih članova konačna, a s $C[a,b]$ označavamo prostor svih neprekidnih realnih ili kompleksnih funkcija na segmentu $[a,b]$. Primjeri konačnodimenzionalnih prostora su $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ koji su n-dimenzionalni.

Definicija 3. *(vidjeti [2], Definicija 2.1-6) Ako je* $\dim X = n$, *linearno nezavisnu* n-*torku vektora iz* X *nazivamo bazom od* X. *Svaki vektor* $x \in X$ *ima jedinstven prikaz kao linearna kombinacija vektora iz baze:*

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$

gdje je $\{e_1, .., e_n\}$ *neka baza od* X, *a* $\alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{F}$.

Općenito, za B kažemo da je baza od vektorskog prostora X, ne nužno konačnodimenzionalanog, ako je B linearno nezavisan podskup od X koji ga razapinje. Ako je B baza od X onda za svaki $x \in X, x \neq 0$ ima jedinstven prikaz kao linearna kombinacija elemenata iz B s koeficijentima različitim od 0.

Svaki vektorski prostor $X \neq \{0\}$ ima bazu. Ovo svojstvo vektorskog prostora nije očito u beskonačnodimenzionalnom slučaju, ali to vrijedi iako to nećemo dokazivati u ovom radu. U konačnodimenzionalnom prostoru, ovo svojstvo je očito.

Definicija 4. *(vidjeti [2], Definicija 2.2-1) Preslikavanje* $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ *definirano na vektorskom prostoru* X *nad poljem* $\mathbb{F}$ $(\mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{C})$ *nazivamo skalarnim produktom ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

i. $\langle x, x \rangle \geq 0, \ \forall x \in X.$

ii. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

iii. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall x, y \in X.$

iv. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \ \forall x_1, x_2, y \in X.$

v. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \ \forall x, y \in X.$

Vektorski prostor X *s definiranim skalarnim produktom na* X *nazivamo unitaran prostor, u oznaci* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Normirani prostori su jedni od najvažnijih tipova prostora u funkcionalnoj analizi jer pružaju dobru bazu za zanimljivu teoriju te uključuju dosta konkretnih modela koji su važni u praksi. Normirani prostori sadrže normu kao pomoćni koncept koja koristi algebarske operacije vektorskih prostora. Norma se koristi za dobivanje željene metrike d. Kako bi se osigurala veza između "algebarskih" i "geometrijskih" svojstava od X, definira se metrika d na X. U svrhu dobivanja korisne i zanimljive teorije koja kombinira algebarske i metričke koncepte, nužno je sagraditi vezu između algebarskih struktura i metrike.

Definicija 5. *(vidjeti [1], Definicija 3.1) Preslikavanje $\| \cdot \| : X \to \mathbb{F}$ definirano na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) nazivamo normom ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

i. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X.$

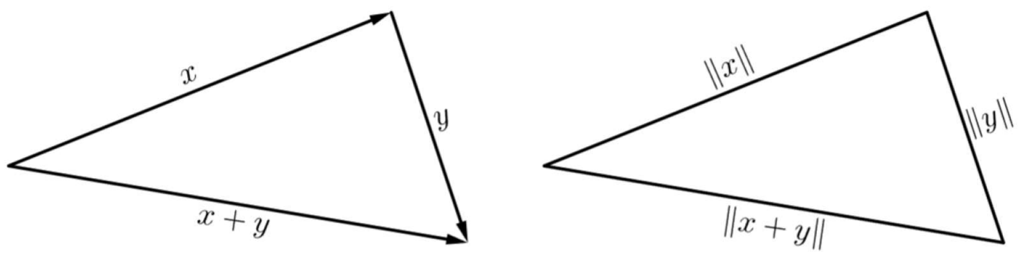
ii. $\|x\| = 0 \iff x = 0.$

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X.$

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X.$ (*nejednakost trokuta*)

Normirani vektorski prostor X je vektorski prostor s definiranom normom na X, u oznaci: $(X, \| \cdot \|)$ ili samo X.

Prva dva svojstva kažu da svi vektori imaju pozitivnu duljinu osim nul vektora koji ima duljinu 0. Treće svojstvo kaže da kad je vektor pomnožen skalarom, njegova duljina je pomnožena s apsolutnom vrijednosti skalara. Četvrto svojstvo kaže da duljina jedne stranice trokuta ne može premašiti zbroj obiju stranica trokuta, prikaz na slici 2.1. Uzmemo li u obzir ova svojstva, možemo doći do zaključka da izraz $d(x, y) = \|x - y\|$, gdje su $x, y \in X$ definira metriku na X. Metrika dobivena na ovaj način naziva se metrika inducirana normom. Stoga možemo zaključiti da su normirani prostori metrički prostori.



Slika 2.1: Nejednakost trokuta

Četvrto svojstvo norme implicira $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$ te ova formula dovodi do bitnog svojstva norme. Norma je neprekidna tj. $x \to \|x\|$ je neprekidno preslikavanje s $(X, \| \cdot \|)$ u $\mathbb{R}$.

Teorem 1. *(vidjeti [1], Teorem 1.1) Neka je $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitaran prostor. Tada je:*

$$|\langle x|y \rangle|^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle, \ \forall x, y \in X. \tag{2.1}$$

Jednakost u 2.1 vrijedi ako i samo ako su x i y linearno zavisni vektori, tj. $x = \alpha y$ za neki $\alpha \in \mathbb{F}$.

Za proizvoljan par vektora x i y iz nekog unitarnog prostora vrijedi Cauchy-Schwarzova nejednakost: $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.

Lako se pokazuje da je s formulom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ zadana jedna norma na proizvoljnom unitarnom prostoru $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Obzirom na to možemo podrazumijevati da je svaki unitaran prostor normiran uz ovako uvedenu normu.

Pogledajmo sada kako se može definirati norma nad konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$.

Primjer 1. *(vidjeti [2], Primjer 2.2-2) Konačnodimenzionalan prostor $\mathbb{F}^n$, gdje je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ s normom definiranom izrazom*

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2},$$

za $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{F}^n$ je normiran prostor. Ova norma inducira metriku:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2},$$

gdje je $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{F}^n$. U $\mathbb{R}^3$ imamo:

$$\|x\|_2 = |x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.$$

Ovo potvrđuje napomenu da norma generalizira dužinu vektora $|x|$. Norma nad poljem $\mathbb{F}^n$ može se definirati na više načina, a ovo su neki:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|,$$

$$\|x\|_\infty = max\{|\xi_j| : j = 1, \ldots, n\}.$$

Primijetimo da se ove tri norme podudaraju u slučaju kad je $n = 1$.

Prethodno su navedeni prostori l_2 i $C[a,b]$ kao primjeri beskonačnodimenzionalnih vektorskih prostora. Nadalje ćemo precizno definirati i pokazati da su to normirani prostori.

Primjer 2. *Prostor l_2 dan je s $l_2 = \{x = (\xi_n)_n;\ \xi_n \in \mathbb{F}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty\}$.*
Za takav $x \in l_2$ stavljamo

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prostor l_2 je normiran prostor s ovako definiranom normom.

Na sličan način kao što smo definirali l_2 možemo definirati normiran prostor l_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Primjer 3. *Prostor l_p, $1 \leq p < \infty$, dan je s $l_p = \{x = (\xi_n)_n;\ \xi_n \in \mathbb{F}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty\}$.*
Za takav $x \in l_p$ stavljamo

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ova norma inducira metriku:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Primjer 4. *Prostor l_∞ dan je s $l_\infty = \{x = (\xi_n)_n;\ \xi_n \in \mathbb{F}, \forall n \in \mathbb{N}, sup\{|\xi_n|;\ n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$.*
Za takav $x \in l_\infty$ stavljamo

$$\|x\|_\infty = sup_j|\xi_j|.$$

Primjer 5. *(vidjeti [2], Primjer 2.2-5) Prostor $C[a,b]$ je normiran prostor s normama:*

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt,$$

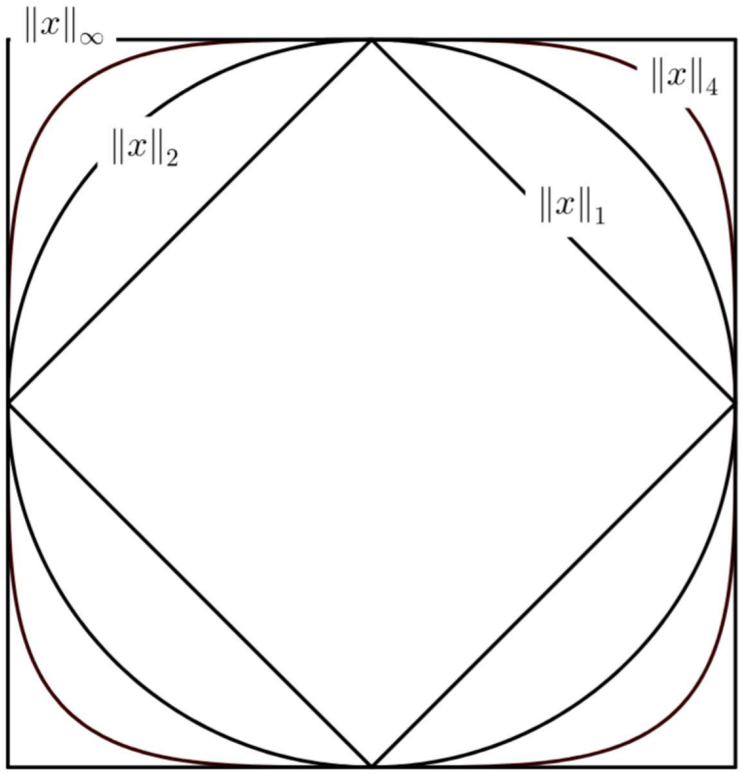
$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt},$$

$$\|x\|_\infty = max_{t\in J}|x(t)|$$

pri čemu je $J = [a,b]$.

Primjer 6. *Skup $S(0;1) = \{x \in X | \|x\| = 1\}$ u normiranom prostoru X nazivamo jedinična sfera. Na Slici 2.2 vidimo grafički prikaz jedinične sfere na $X = \mathbb{R}^2$ uz norme $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_4$ i $\|x\|_\infty$. Norme $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ i $\|x\|_\infty$ su definirane u Primjeru 1, a normu $\|x\|_4$ definiramo s*

$$\|x\|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{\frac{1}{4}}.$$



Slika 2.2: Jedinična sfera

Ne mora svaka metrika nad vektorskim prostorom biti dobivena iz norme. Idući primjer će pokazati prostor u kojem metrika nije dobivena iz norme.

Primjer 7. *(vidjeti [2], Primjer 2.2-8) Neka je s definiran kao skup svih nizova kompleksnih brojeva. s je vektorski prostor, a njegova metrika definirana izrazom:*

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|}.$$

Ta metrika ne može biti dobivena iz norme. Ovo možemo vidjeti iz leme u kojoj se navode dva osnovna svojstva metrike d dobivene iz norme.

Lema 1. *Invarijantnost translacije. (vidjeti [2], Lema 2.2-9) Metrika d dobivena iz norme na normiranom prostoru X zadovoljava:*

i. $d(x+a, y+a) = d(x,y)$

ii. $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$

$\forall x, y, a \in X$ *i za svaki skalar* α.

Dokaz. i. $d(x+a, y+a) = \|x+a-(y+a)\| = \|x-y\| = d(x,y)$

ii. $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x-y\| = |\alpha| d(x,y)$

□

Definicija 6. *(vidjeti [1], Definicija 8.2) Norma* $\|\cdot\|$ *na vektorskom prostoru X je ekvivalentna normi* $\|\cdot\|_0$ *na X ako postoje pozitivni brojevi a i b tako da za* $\forall x \in X$ *imamo*

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0.$$

Lema 2. *(vidjeti [2], Lema 2.4-1) Neka su* $x_1, .., x_n$ *linearno nezavisni vektori u normiranom prostoru X (neovisno o dimenziji). Tada postoji broj* $c > 0$ *tako da za svaki odabir skalara* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *imamo:*

$$\|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|) \qquad (c > 0)$$

Teorem 2. *(vidjeti [1], 8.7) Na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru X, bilo koja norma* $\|\cdot\|$ *je ekvivalentna bilo kojoj drugoj normi* $\|\cdot\|_0$.

Dokaz. Neka je $dimX = n$ i $e_1, .., e_n$ bilo koja baza od X. Tada $\forall x \in X$ ima jedinstven prikaz kao

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Prema Lemi 2 postoji pozitivna konstanta c tako da

$$\|x\| \geq c(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|).$$

S druge strane, nejednakost trokuta nam daje

$$\|x\|_0 \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \|e_j\|_0 \leq k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|,\ k = max_j \|e_j\|_0.$$

Zajedno, $a\|x\|_0 \leq \|x\|$ gdje je $a = \frac{c}{k} > 0$. Druga nejednakost:

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

se dobiva zamjenom uloga $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_0$ u prethodnom argumentu. □

Ovaj teorem ne vrijedi za beskonačnodimenzionalne prostore.

Definicija 7. *Neka je $(\xi_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da niz $(\xi_n)_n$ konvergira prema $\xi \in X$ i pišemo $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ ako*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tako da} \quad n_0 \leq n \Rightarrow \|\xi_n - \xi\| < \epsilon.$$

Kažemo da je niz $(\xi_n)_n$ Cauchyjev ako

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tako da} \quad n_0 \leq m, n \Rightarrow \|\xi_m - \xi_n\| < \epsilon.$$

2.2 Svojstva potprostora normiranog prostora

Prema definiciji, potprostor od Y normiranog prostora X je podskup od X razmatran kao vektorski prostor s normom dobivenom ograničenjem norme na X na podskup Y. Za ovakvu normu na Y kažemo da je inducirana normom od X.

Definicija 8. (*vidjeti* [1], *Definicija 5.3*) *Za podskup S normiranog prostora X kažemo da je ograničen ako postoji realan broj $M > 0$ takav da vrijedi $\|x\| \leq M, \forall x \in S$.*

U normiranom prostoru X definiramo otvorenu kuglu s centrom u točki $x_0 \in X$ i radijusom $r > 0$ kao skup $K(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$. Za vektore $x, y \in X$ interpretiramo $\|x - y\|$ kao njihovu udaljenost pa je $K(x_0, r)$ skup svih vektora iz X čija je udaljenost od centra x_0 manja od r.

Za skup $S \subseteq X$ kažemo da je otvoren ako je S unija neke familije otvorenih kugli. Prazan skup po definiciji smatramo otvorenim. Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren ako mu je komplement u X otvoren.

Najmanji zatvoren skup iz X koji sadrži skup $F \in X$ nazivamo zatvaračem skupa F i označavamo ga s $\overline{F}$.

Ako je Y vektorski prostor koji je zatvoren u X tada za Y kažemo da je zatvoren potprostor od X.

Definicija 9. (*vidjeti* [2], *Definicija 1.3-5*) *Za normiran prostor X u kojem postoji prebrojiv skup $S \subseteq X$ takav da vrijedi $\overline{S} = X$ kažemo da je separabilan ili da je S gust u X.*

Primijetimo da je $\mathbb{R}$ separabilan prostor kako je $\mathbb{Q}$ prebrojiv gust skup u $\mathbb{R}$.

Teorem 3. (*vidjeti* [2], *Teorem 2.4-3*) *Svaki konačnodimenzionalan potprostor Y normiranog prostora X je zatvoren u X.*

Beskonačnodimenzionalan potprostor ne mora biti zatvoren kao što ćemo pokazati u sljedećem primjeru.

Primjer 8. *Neka je $X = C[0,1]$ i $Y = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \,|\, \alpha_j \in \mathbb{R}, x_j(t) = t^j \right\}$, tj. Y je skup svih polinoma. Y je očito beskonačnodimenzionalan i otvoren skup pa nije zatvoren u X.*

Definicija 10. (*vidjeti* [2], *Definicija 2.5-1*) *Kažemo da je metrički prostor X kompaktan ako svaki niz u X ima konvergentan podniz. Podskup M skupa X je kompaktan ako je M kompaktan kao podskup od X, tako da svaki niz iz M ima konvergentan podniz čiji je limes element od M.*

Lema 3. *(vidjeti [2], Lema 1.4-2) Neka je $X = (X, d)$ metrički prostor. Tada:*

i. Konvergentan niz u X je ograničen i ima jedinstven limes.

ii. Ako $x_n \to x$ i $y_n \to y$ u X tada $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Lema 4. *(vidjeti [2], Lema 1.4-6) Neka je M neprazan podskup metričkog prostora (X, d), a $\overline{M}$ njegov zatvarač. Tada:*

i. $x \in \overline{M}$ ako i samo ako postoji niz (x_n) u M takav da $x_n \to x$.

ii. M je zatvoren ako i samo ako $x_n \in M$, $x_n \to x$ povlači da je $x \in M$.

Lema 5. *(vidjeti [2], Lema 2.5-2) Kompaktni podskup M metričkog prostora je zatvoren i ograničen.*

Dokaz. Po (i) iz Leme 4 za $\forall x \in \overline{M}$ postoji niz (x_n) u M takav da $x_n \to x$. Kako je M kompaktan, $x \in M$. M je zatvoren jer je $x \in \overline{M}$ proizvoljan. Dokazano je da je M ograničen. Ako je M neograničen sadrži neograničen niz (y_n) takav da $d(y_n, b) > n$, gdje je b bilo koji fiksni element. Ovaj niz ne može imati konvergentan podniz jer prema Lemi 3 konvergentan podniz mora biti ograničen. □

Obrat ove leme općenito ne vrijedi, a mi ćemo pokazati da vrijedi u konačnodimenzionalnom slučaju.

Teorem 4. *(vidjeti [2], Teorem 2.5-3) U konačnodimenzionalnom normiranom prostoru X bilo koji podskup $M \subset X$ je kompaktan ako i samo ako je M zatvoren i ograničen.*

Dokaz. Kompaktnost implicira zatvorenost i ograničenost prema Lemi 5 Dokazujemo obrat.
Neka je M zatvoren i ograničen. Neka je $dim X = n$ i $e_1, ..., e_n$ baza od X. Razmotrimo bilo koji niz (x_m) u M. Svaki x_m ima prikaz

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + ... + \xi_n^{(m)} e_n.$$

M je ograničen pa je i (x_m) ograničen, pri čemu je $\|x_m\| \leq k$ za $\forall m$. Po Lemi 2 imamo

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}|$$

gdje je $c > 0$. Stoga niz brojeva $\xi_j^{(m)}$ (j je fiksan) je ograničen i prema Bolzano-Weierstrass teoremu ima gomilište u $\xi_j, 1 \leq j \leq n$. Neka je $(z_{j,m})$ podniz od (x_m) takav da $(z_{j,m})$ konvergira prema ξ_j za svaki $1 \leq j \leq n$. Zaključujemo da (x_m) ima podniz $(z_m) = (z_{1,m}, z_{2,m}, \dots)$ koji konvergira u $z = \sum \xi_j e_j$. Kako je M zatvoren, $z \in M$. Ovo pokazuje da proizvoljan niz (x_m) u M ima podniz koji konvergira u M, stoga je M kompaktan. □

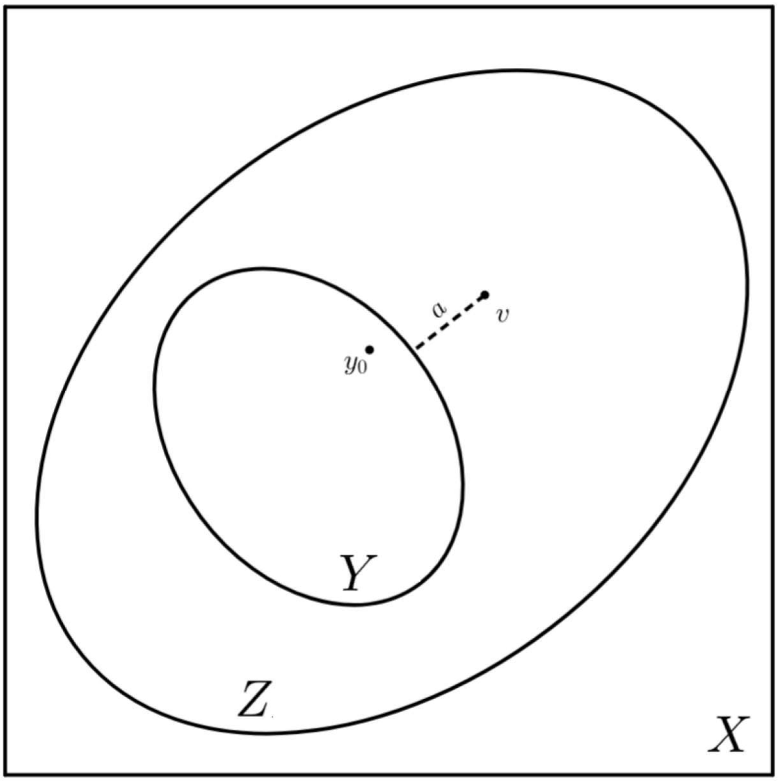
U $\mathbb{R}^n$ (ili bilo kojem drugom konačnodimenzonalnom prostoru) kompaktan podskup je zatvoren i ograničen podskup tako da se ovo svojstvo (zatvorenost i ograničenost) može koristiti za definiranje kompaktnosti.

Lema 6. *Rieszova lema (vidjeti [2], Lema 2.5-4) Neka su Y i Z potprostori normiranog prostora X (bilo koje dimenzije) i pretpostavimo da je Y zatvoren te da je podskup od Z. Tada za svaki realni broj θ iz intervala $\langle 0, 1 \rangle$ postoji $z \in Z$ tako da*

$$\|z\| = 1, \ \|z - y\| \geq \theta, \ \forall y \in Y.$$

Dokaz. Uzmimo bilo koji $v \in Z - Y$ i zapišimo ga kao udaljenost od Y u oznaci a na način:

$$a = inf_{y \in Y} \|v - y\|.$$



Slika 2.3: Oznake u dokazu Rieszove leme

Jasno, $a > 0$ jer je Y zatvoren. Uzimamo bilo koji $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$. Prema definiciji za infinum postoji $y_0 \in Y$ tako da

$$a \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}. \tag{2.2}$$

Primijetimo da $\frac{a}{\theta} > a$ jer je $0 < \theta < 1$. Neka je $z = c(v - y_0)$ gdje je $c = \frac{1}{\|v - y_0\|}$. Tada $\|z\| = 1$ i pokazujemo $\|z - y\| \geq \theta$, $\forall y \in Y$. Imamo

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \|c(v - y_0) - y\| \\ &= c\|v - y_0 - c^{-1}y\| \\ &= c\|v - y_1\| \end{aligned}$$

gdje je $y_1 = y_0 + c^{-1}y$.
Oblik od y_1 pokazuje da je $y_1 \in Y$. Stoga $\|v - y_1\| \geq a$, prema definiciji od a. Pišemo c izvan i koristimo 2.2 te dobivamo

$$\|z - y\| = c\|v - y_1\| \geq ca = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geq \frac{a}{\frac{a}{\theta}} = \theta.$$

Obzirom da je $y \in Y$ proizvoljan, ovime završava dokaz. □

U konačnodimenzionalnom normiranom prostoru zatvorena jedinična kugla je kompaktna. Posljedično, Rieszova lema nam daje sljedeći koristan i zanimljiv rezultat.

Teorem 5. *(vidjeti [2], Teorem 2.5-5) Ako normiran prostor X ima svojstvo da je zatvorena jedinična kugla $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kompaktna tada je X konačnodimenzionalan.*

2.3 Banachovi prostori

Ranije smo definirali konvergentne i Cauchyjeve nizove u normiranom prostoru (Definicija 7), a u ovom ćemo se poglavlju fokusirati na normirane prostore u kojima svi Cauchyjevi nizovi konvergiraju. Takve prostore nazivamo Banachovima.

Definicija 11. *(vidjeti [1], Definicija 8.1) Normiran prostor nazivamo Banachov ako je potpun tj. ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira.*

Banachovi prostori važni su zbog svojih svojstava koja nisu jednaka nepotpunim normiranim prostorima. Potprostor Y Banachovog prostora X je potprostor od X razmatran kao normirani prostor te stoga nije potrebno da Y bude potpun. Pokazat ćemo u kojem slučaju je potprostor Banachovog prostora Banachov.

Teorem 6. *(vidjeti [2], Teorem 2.3-1) Potprostor Y Banachovog prostora X je potpun ako i samo ako je Y zatvoren u X.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Ako je Y potpun, onda je Y zatvoren.
Ako je Y potpun, onda svaki Cauchyev niz u Y konvergira u Y.
Neka $x \in \overline{Y}$ (zatvoren). To znači da postoji niz (y_n) u Y koji konvergira k x. Dakle, (y_n) je Cauchyev niz u X (X je potpun).
Pošto je Y potpun, (y_n) konvergira u Y. Iz potpunosti prostora Y slijedi $x \in Y$.
Dakle, $\overline{Y} \subseteq Y$, što znači da je Y zatvoren.
$\Leftarrow$ Ako je Y zatvoren, onda je Y potpun.
Ako je Y zatvoren, onda $\overline{Y} = Y$. Neka je (y_n) Cauchyjev niz u Y. Pošto je X Banachov prostor, (y_n) konvergira u X. Označimo taj limes s x. Zbog zatvorenosti Y, $x \in Y$.
Dakle, svaki Cauchyjev niz u Y konvergira u Y, što znači da je Y potpun. □

Normirani prostori $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{R}^n$ s normama koje smo prethodno definirali su potpuni. Nadalje, pokazat ćemo da su svi konačnodimenzionalni normirani prostori potpuni.

Teorem 7. (*vidjeti* [2], *Teorem 2.4-2*) *Svaki konačnodimenzionalan potprostor Y normiranog prostora X je potpun. Posebno, svaki konačnodimenzionalan normirani prostor je potpun.*

Dokaz. Razmotrimo proizvoljan Cauchyjev niz (y_n) u Y i pokažemo da je on konvergentan u Y. Limes ćemo označiti s y. Neka je $dimY = n$ i $e_1, ..., e_n$ bilo koja baza za Y. Tada svaki y_m ima jedinstven prikaz u obliku

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + ... + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

Kako je (y_m) Cauchyjev niz, za $\forall \varepsilon > 0$ postoji N tako da $\|y_m - y_r\| < \varepsilon$ kada su $m, r > N$. Odavde i iz Leme 2 imamo da za neki $c > 0$

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|,$$

gdje su $m, r > N$. Dijeljenjem s $c > 0$ dobivamo

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \qquad (m, r > N).$$

Ovo pokazuje da je svaki od nizova

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, ...) \qquad j = 1, ..., n$$

Cauchyjev u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ te stoga i konvergentan. Označimo limes s α_j. Koristeći n limesa $\alpha_1, ..., \alpha_n$ definiramo

$$y = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Jasno, $y \in Y$. Nadalje,

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \|e_j\|.$$

S desna, $\alpha_j^{(m)} \to \alpha_j$. Stoga $\|y_m - y\| \to 0$, tj. $y_m \to y$. Ovo pokazuje da je (y_m) konvergentan u Y. Kako je (y_m) proizvoljan Cauchyjev niz u Y, dokazali smo da je Y potpun. □

Za beskonačnodimenzionalne normirane prostore ova tvrdnja ne vrijedi nužno. Normirani prostori l^∞ i l^p s normama koje smo prethodno definirali su potpuni. Pokazat ćemo da je prostor $C[a,b]$ s normom $\|\cdot\|_\infty$ Banachov, dok u normama $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ nije Banachov.

Primjer 9. *(vidjeti [1], Primjer 8.3) Pokažimo da je prostor $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ Banachov.*

Dokaz. Neka je $(f_n)_n$ Cauchyjev niz iz $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. Iz definicije Cauchyjevog niza slijedi da je za svaki $t_0 \in [a,b]$ vrijedi:

$$|(f_n(t_0) - f_m(t_0)| \leq max\{|f_n(t) - f_m(t)| : t \in [a,b]\} = \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Kako je $(f_n)_n$ Cauchyjev slijedi da je i $(f_n(t_0))_n$ također Cauchyjev za svaki $t_0 \in [a,b]$.

Budući da je $\mathbb{R}$ potpun niz $(f_n(t_0))_n$ konvergira nekoj vrijednosti $f(t_0)$. Definiramo funkciju f na intervalu $[a,b]$ sa:

$$f(t_0) = lim_{n\to\infty} f_n(t_0), t_0 \in [a,b].$$

Sad treba pokazati da je funkcija f neprekidna i da niz $(f_n)_n$ konvergira k f u normi $\|\cdot\|_\infty$.

Za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da za $m, n \geq n_0$ vrijedi

$$\|f_m - f_n\|_\infty = max\{|f_m(t) - f_n(t)| : t \in [a,b]\} < \epsilon. \tag{2.3}$$

Uzmimo sad proizvoljan $t_0 \in [a,b]$. Za isti ϵ možemo pronaći $m \geq n_0$ tako da vrijedi

$$|f(t_0) - f_m(t_0)| < \epsilon.$$

Sada za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$|f(t_0) - f_n(t_0)| \leq |f(t_0) - f_m(t_0)| + |f_m(t_0) - f_n(t_0)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Obzirom da je t_0 bio proizvoljan možemo zaključiti da vrijedi

$$n \geq n_0 \Rightarrow sup\{|f(t) - f_n(t)| : t \in [a,b]\} \leq 2\epsilon. \tag{2.4}$$

Dokažimo sada da je funkcija f neprekidna. Uzmimo ponovno proizvoljne $t_0 \in [a,b]$ i $\epsilon > 0$. Za taj ϵ odredimo n_0 tako da vrijedi 2.3, a onda i 2.4. Zbog neprekidnosti funkcije f_{n_0} u točki t_0 postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$t \in [a,b], |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \epsilon.$$

Odavde dobivamo da za sve $t \in [a,b], |t - t_0| < \delta$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| + |f_{n_0}(t_0) - f(t_0)| \\ &< 2\epsilon + \epsilon + 2\epsilon = 5\epsilon. \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je neprekidna u svakoj točki iz $[a,b]$. Sada iz 2.4 vidimo da vrijedi $n \geq n_0 \Rightarrow \|f - f_n\|_\infty \leq 2\epsilon$. □

Primjer 10. *Pokažimo da prostori $(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$ i $(C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ nisu Banachovi.*

Dokaz. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\frac{2}{b-a} \leq n_0$. Definirajmo niz funkcija f_n s

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & a \leq t \leq c - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{n}{2}(t-c), & c - \frac{1}{n} \leq t \leq c + \frac{1}{n} \\ 1, & c + \frac{1}{n} \leq t \leq b \end{cases},$$

gdje je $c = \frac{a+b}{2}$ i $n \geq n_0$.
Lagano se može pokazati da za $m \geq n$ vrijedi $\|f_m - f_n\|_2 \leq \frac{1}{n}$ što pokazuje da je $(f_n)_n$ Cauchyjev niz u normi $\|\cdot\|_2$.
Zbog nejednakosti

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt = \langle 1, |f| \rangle = |\langle 1, |f| \rangle| \leq \|1\|_2 \||f|\|_2 = \sqrt{b-a}\|f\|_2.$$

slijedi da je $(f_n)_n$ Cauchyjev niz i u normi $\|\cdot\|_1$. Iz te nejednakosti slijedi da ako niz $(f_n)_n$ nije konvergentan u normi $\|\cdot\|_1$ tada nije konvergentan ni u normi $\|\cdot\|_2$. Pokažimo sad da niz $(f_n)_n$ nije konvergentan u normi $\|\cdot\|_1$. Pretpostavimo da postoji $f \in C([a,b])$ takva da $\|f_n - f\| \to 0$.
Za proizvoljan ϵ takav da vrijedi $0 < \epsilon < \frac{b-a}{2}$ za $n > \frac{1}{\epsilon}$ imamo

$$\|f - f_n\|_1 = \int_a^b |f(t) - f_n(t)| dt \geq \int_{c+\epsilon}^b |f(t) - 1| dt.$$

Za $n \to \infty$ lijeva strana teži nuli, a desna strana je nenegativna konstanta, što je kontradikcija. Dakle, zaključujemo da je $\int_{c+\epsilon}^b |f(t) - 1| dt = 0$. Kako je $\|\cdot\|_1$ norma i na prostoru $C([c+\epsilon, b])$, slijedi $f(t) = 1, \forall t \in [c+\epsilon, b]$. Analogno, iz $\|f - f_n\|_1 \geq \int_a^{c-\epsilon} |f(t)| dt$ zaključujemo da je $f(t) = 0, \forall t \in [a, c-\epsilon]$. Kako je ϵ bio proizvoljan, slijedi da f ima prekid u točki c. $\square$

Obzirom da potpuni prostori imaju mnoga lijepa svojstva, prirodno je razmišljati u smjeru kako od nepotpunog prostora dobiti potpun prostor. Da bi to postigli trebamo dodati vektore koji bi bili limesi Cauchyjevih nizova u taj prostor. Idući teorem pokazuje na koji način možemo "upotpuniti" normiran prostor.

Teorem 8. (*vidjeti* [2], *Teorem 2.3-2*) *Neka je $X = (X, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Tada postoji Banachov prostor $\hat{X}$ i izometrija A od X na potprostor W koji je gust u $\hat{X}$. Prostor $\hat{X}$ je jedinstven do na izometriju. Takav prostor $\hat{X}$ naziva se upotpunjenje prostora.*

Dokaz. Prema teoremu koji kaže da postoji zatvoren metrički prostor $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$ i izometrija $A : X \to W = A(X)$, gdje je W gust u $\hat{X}$ i $\hat{X}$ je jedinstven do na izometriju, trebamo napraviti $\hat{X}$ u vektorskom prostoru te dodati odgovarajuću normu na $\hat{X}$.
Kako bi definirali na $\hat{X}$ dvije algebarske operacije vektorskog prostora, razmatramo bilo koje $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$ i bilo kojeg predstavnika iz $(x_n) \in \hat{x}$ i $(y_n) \in \hat{y}$.

$\hat{x}$ i $\hat{y}$ su klase ekvivalencije Cauchyjevih nizova u X. Postavimo $z_n = x_n + y_n$. Tada (z_n) je Cauchyjev u X pošto

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n + y_n - (x_m + y_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|.$$

Definiramo sumu $\hat{z} = \hat{x} + \hat{y}$ od $\hat{x}$ i $\hat{y}$ da bude klasa ekvivalencije za koju je (z_n) predstavnik pri čemu $(z_n) \in \hat{z}$. Ova definicija neovisna je od posebnog izbora Cauchyjevog niza koji pripada $\hat{x}$ i $\hat{y}$. Nadalje, koristimo ako je $(x_n) \sim (x'_n)$ i $(y_n) \sim (y'_n)$, tada $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ jer

$$\|x_n + y_n - (x'_n + y'_n)\| \leq \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\|.$$

Slično, definiramo produkt $\alpha\hat{x} \in \hat{X}$ skalara α i $\hat{x}$ da bude klasa ekvivalencije za koju je (αx_n) predstavnik. Ova definicija je neovisna od posebnog izbora predstavnika za $\hat{x}$. Neutralni element od $\hat{X}$ je klasa ekvivalencije koja sadrži sve Cauchyjeve nizove koji konvergiraju u 0. Ove dvije algebarske operacije imaju sva svojstva određena definicijom pa je $\hat{X}$ vektorski prostor. Iz definicije slijedi da se na W operacije vektorskog prostora inducirane iz $\hat{X}$ slažu s onim induciranim iz X pomoću A. Nadalje, A inducira na W normu $\|\cdot\|$ čija vrijednost na svakom $\hat{y} = Ax \in W$ iznosi $\|\hat{y}\|_1 = \|x\|$. Odgovarajuća metrika na W je restrikcija od $\hat{d}$ na W budući da je A izometrija. Možemo proširiti normu $\|\cdot\|_1$ na $\hat{X}$ postavljanjem $\|\hat{y}\|_2 = \hat{d}(\hat{0}, \hat{x}), \forall \hat{x} \in \hat{X}$. Očito je da $\|\cdot\|_2$ zadovoljava svojstva (i) i (ii) iz Definicije 5 dok druga dva aksioma norme (iii) i (iv) slijede iz $\|\cdot\|_1$. $\square$

Definiramo $L^2(X) = \{f : X \to \mathbb{F} : f \text{ izmjeriva}, \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$ pri čemu poistovjećujemo funkcije s njihovim klasama ekvivalencije s obzirom na relaciju podudarnosti do na skupove mjere 0. Na $L^2(X)$ imamo definiran skalarni produkt $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g} d\mu$ i iz njega izvedenu normu $\|f\|_2 = \sqrt{\int_X |f|^2 d\mu}$. Prostor $L^2(X)$ je potpun. Pokazat ćemo da je $L^2([a,b])$ upotpunjenje normiranog prostora $(C([a,b], \|\cdot\|_2)$.

Primjer 11. *(vidjeti [2] Primjer 2.2-7) Skup $C([a,b])$ je gust u $L^2([a,b])$. Posebno, $L^2([a,b])$ je upotpunjenje normiranog prostora $(C([a,b]), \|\cdot\|_2)$.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq [a,b]$ neprazan i zatvoren. Definirajmo preslikavanje $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ formulom

$$t(x) = d(x, A) = inf\{|x - y| : y \in A\}.$$

Funkcija t je neprekidna. Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo niz funkcija $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ s $g_n(x) = \frac{1}{1+nt(x)}$. Očigledno je da je g_n neprekidna i da vrijedi $g_n(y) = 1\ \forall y \in A$. Za sve $x \in [a,b]$ vrijedi $g_n(x) \to 0$ jer je $t(x) \neq 0, \forall x \in [a,b] \setminus A$. Dakle, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \chi_A(x)\ \forall x \in [a,b]$$

gdje je χ_A dana s

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \ x \in A \\ 0, \ x \notin A \end{cases}.$$

χ_A nazivamo karakteristična funkcija skupa A. Po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\|\chi_A - g_n\|_2^2 = \int_a^b (\chi_A(x) - g_n(x))^2 dx \to 0.$$

Budući da karakterističnu funkciju χ_A možemo po volji dobro aproksimirati neprekidnim funkcijama u normi $\|\cdot\|_2$, taj se postupak može primijeniti i za svaku konačnu linearnu kombinaciju karakterističnih funkcija zatvorenih skupova. Nadalje, ovaj zaključak možemo proširiti na sve jednostavne izmjerive funkcije. Na kraju, svaku funkciju iz $L^2([a,b])$ možemo po volji dobro aproksimirati jednostavnom izmjerivom funkcijom u normi $\|\cdot\|_2$.
Neka je $f \in L^2([a,b])$ pozitivna funkcija. Postoji rastući niz jednostavnih izmjerivih funkcija (s_n) takav da je $s_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ i $s_n(x) \to f(x)$ s.s. Kako je $|f - s_n|^2 \leq f^2$, teorem o dominiranoj konvergenciji povlači

$$\|f - s_n\|_2^2 = \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2 dx \to 0.$$

Dakle, pokazali smo da možemo aproksimirati svaku funkciju iz $L^2([a,b])$ jednostavnim izmjerivim funkcijama, a time i funkcijama iz $C([a,b])$. To dokazuje da je skup $C([a,b])$ gust u $L^2([a,b])$. $\square$

Definicija 12. *Ako je (x_k) niz u normiranom prostoru X, uz njega možemo vezati niz (s_n) parcijalnih suma $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$, gdje je $n = 1, 2, ...$ Ako je (s_n) konvergentan, odnosno $s_n \to s$ tj. $\|s_n - s\| \to 0$, tada kažemo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + ...$ konvergentan. Sumu redova s, zapisujemo na način: $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + ...$*
Ako $\|x_1\| + \|x_2\| + ...$ konvergira, kažemo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + ...$ apsolutno konvergentan.

U normiranom prostoru X, apsolutna konvergencija podrazumijeva konvergenciju ako i samo ako je X potpun.

Definicija 13. *Ako normiran prostor X sadrži niz (e_n) sa svojstvom da za $\forall x \in X$ postoji jedinstven niz skalara (α_n) tako da*

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

tada (e_n) nazivamo Schauderova baza od X. Red $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ koji sadrži sumu x nazivamo razvoj od x u odnosu na (e_n) i pišemo:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Primjer 12. *l_p ima Schauderovu bazu, naime (e_n) gdje je $e_n = (\delta_{n_j})$, tako da (e_n) je niz čiji n-ti član 1, a svi ostali 0. Pišemo:*

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, ...)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0, ...)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0, ...)$$

itd.

Normirani prostor X ima Schauderovu bazu ako se svaki element iz X može izraziti kao konvergentan niz linearnih kombinacija elemenata iz baze.

Teorem 9. *Ako normirani prostor X ima Schauderovu bazu, X je separabilan.*

Dokaz. Korak 1: Konstrukcija brojevnog niza. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, definirajmo brojevni niz x_n kao linearnu kombinaciju prvih n elemenata baze $(e_n)_{n=1}^{\infty}$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} e_k.$$

Korak 2: Dokaz gustoće. Pokazujemo da je niz x_n gust u X. Za svaki $x \in X$ i $\epsilon > 0$ postoji N takav da je $\|x - x_N\| < \epsilon$. Neka je x proizvoljan element iz X i $\epsilon > 0$. Budući da x pripada X s Schauderovom bazom, možemo napisati

$$x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right)$$

za neki niz a_k realnih brojeva. Budući da x konvergira prema tom redu, možemo pronaći N takav da za sve $n > N$ vrijedi

$$\left\| x - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) \right\| < \epsilon.$$

No, $\sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ je upravo x_N za $N = n$, pa imamo

$$\|x - x_N\| < \epsilon,$$

što znači da je niz x_n gust u X. U koracima 1 i 2 dokazali smo da za normirani prostor X sa Schauderovom bazom, niz (x_n) koji se sastoji od linearnih kombinacija elemenata baze čini gusti podskup u X. To znači da je X separabilan normirani prostor. □

Nema svaki separabilan Banachov prostor Schauderovu bazu, ali pokazano je da gotovo svi poznati Banachovi prostori imaju Schauderovu bazu.

3 | Linearni operatori

U analizi promatramo prostor realnih brojeva $\mathbb{R}$ i realne funkcije na $\mathbb{R}$. Svaka takva funkcija je preslikavanje svoje domene na $\mathbb{R}$. U funkcionalnoj analizi promatramo generalizirane prostore kao što su metrički i normirani prostori te preslikavanja na tim prostorima.

Za vektorske prostore, posebno normirane prostore, takva preslikavanja nazivamo operatorima. Od posebnog značaja su operatori koji čuvaju dvije algebarske operacije vektorskih prostora, u smislu definicije koja slijedi.

3.1 Uvod u linearne operatore

Definicija 14. *(vidjeti [2], Definicija 2.6-1) Linearni operator T je preslikavanje iz $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ u vektorski prostor Y, gdje su X i Y vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, takvo da*

i. $Im(T) \subseteq Y$

ii. $\forall x, y \in \mathcal{D}(T)$ *i skalar* α *vrijedi*

$$T(x+y) = Tx + Ty$$
$$T(\alpha x) = \alpha Tx.$$

$Im(T)$ iz definicije operatora je oznaka za sliku operatora T, a $\mathcal{D}(T)$ oznaka za domenu operatora T. Nadalje, definiramo jezgru operatora T kao skup svih $x \in \mathcal{D}(T)$ takvih da je $Tx = 0$ u oznaci $Ker(T)$.

Primjer 13. *Operator identiteta* $I_X : X \to X$ *je dan s* $I_X x = x, \forall x \in X$. *Često pišemo* I *umjesto* I_X.

Primjer 14. *Nul-operator* $0 : X \to Y$ *je dan s* $0x = 0, \forall x \in X$.

Primjer 15. *Neka je* X *vektorski prostor svih polinoma na* $[a, b]$. *Definiramo linearni operator* $T : X \to X$ *kao*

$$Tx(t) = x'(t), \forall x \in X.$$

Tako definiran operator označava deriviranje obzirom na t.

Primjer 16. *(vidjeti [2] Primjer 2.6-5) Definiramo linearni operator* $T : C[a, b] \to C[a, b]$ *kao*

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau, t \in [a, b].$$

Tako definirani operator označava integraciju.

Primjer 17. *Realna matrica $A = (\alpha_{jk})$ s r redova i n stupaca definira operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ kao*

$$y = Ax,$$

gdje $x = (\xi_j)$ ima n komponenti dok $y = (\eta_j)$ ima r komponenti. Oba vektora zapisujemo u stupce obzirom na uobičajen način zapisivanja matričnog množenja. Zapišimo $y = Ax$ u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

T je linearni operator jer je množenje matricom linearna operacija. Možemo definirati operator nad $\mathbb{C}$ tako da je A kompleksna matrica.

Idući rezultat daje neka korisna svojstva za domenu, sliku i jezgru linearnog operatora, a navodimo ga bez dokaza.

Teorem 10. (*vidjeti* [2], *Teorem 2.6-9*) *Neka je $T : X \to Y$ linearan operator. Tada:*

i. *Ako je $dim\mathcal{D}(T) < \infty$, tada je $dim\mathcal{D}(T) \leq n$.*

ii. *Jezgra $Ker(T)$ je vektorski prostor.*

Pokazat ćemo kako je definiran inverz linearnog operatora i uz koje uvjete postoji.

Preslikavanje $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ je injekcija ako različite točke u domeni imaju različite slike, tj. ako za neki $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2$$

ekvivalentno

$$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2. \tag{3.1}$$

U ovom slučaju postoji preslikavanje

$$T^{-1} : Im(T) \to \mathcal{D}(T) \qquad y_0 \mapsto x_0 \qquad (y_0 = Tx_0) \tag{3.2}$$

koja preslikava svaki $y_0 \in Im(T)$ i $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ za koji je $Tx_0 = y_0$. Preslikavanje T^{-1} je inverz od T, prikazano na slici 3.1.

Iz 3.2 imamo

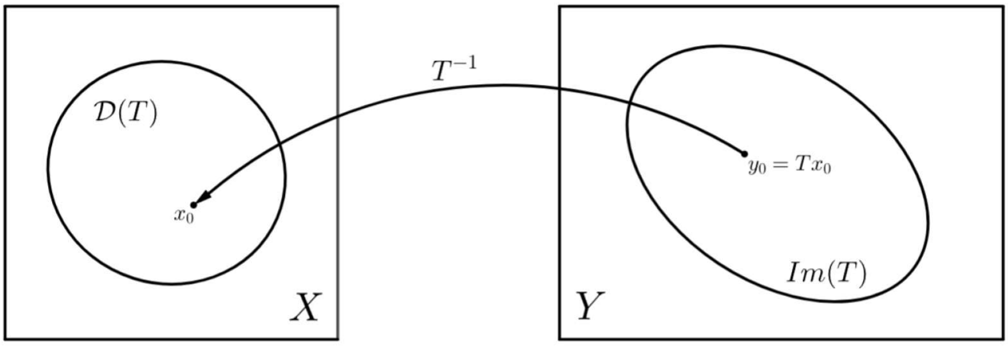
$$T^{-1}Tx = x, \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

i

$$TT^{-1}y = y, \forall y \in Im(T).$$

Inverz linearnog operatora postoji ako i samo ako jezgra operatora sadrži samo nul vektor.

Teorem 11. (*vidjeti* [2], *Teorem 2.6-10*) *Neka su X, Y vektorski prostori, oba realni ili kompleksni. Neka je $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ linearni operator s domenom $\mathcal{D}(T)$ i kodomenom $Im(T) \subset Y$. Tada:*



Slika 3.1: Inverzno preslikavanje

i. Inverz $T^{-1} : Im(T) \to \mathcal{D}(T)$ *postoji ako i samo ako*

$$Tx = 0 \Rightarrow x = 0.$$

ii. Ako T^{-1} *postoji, onda je linearni operator.*

iii. Ako $dim\mathcal{D}(T) = n < \infty$ *i* T^{-1} *postoji, tada je* $dimIm(T) = dim\mathcal{D}(T)$.

Dokaz. i. Pretpostavimo da $Tx = 0$ povlači $x = 0$. Neka je $Tx_1 = Tx_2$. T je linearan,

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 = 0,$$

tako da $x_1 - x_2 = 0$ prema pretpostavci. Stoga, $Tx_1 = Tx_2$ povlači $x_1 = x_2$ i T^{-1} postoji. Obrnuto, ako T^{-1} postoji vrijedi 3.1. Iz 3.1 s $x_2 = 0$ i $T0 = 0$ dobivamo

$$Tx_1 = T0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

ii. Pretpostavimo da T^{-1} postoji i pokažemo da je T^{-1} linearan. Domena od T^{-1} je $Im(T)$ i to je vektorski prostor prema Teoremu 10 (i). Za bilo koji $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ i njegovu sliku

$$y_1 = Tx_1 \qquad i \qquad y_2 = Tx_2.$$

Slijedi

$$x_1 = T^{-1}y_1 \qquad i \qquad x_2 = T^{-1}y_2.$$

T je linearan pa za bilo koji skalar α i β vrijedi

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Stoga, $x_j = T^{-1}y_j$ povlači

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$$

i dokazuje da je T^{-1} linearan.

iii. Imamo $dimIm(T) \leq dim\mathcal{D}(T)$ prema Teoremu 10 (ii) i $dim\mathcal{D}(T) \leq dimIm(T)$ primjenom istog teorema na T^{-1}.

□

Lema 7. *(vidjeti [2], Lema 2.6-11) Neka su $T : X \to Y$ i $S : Y \to Z$ bijektivni linearni operatori, gdje su X, Y, Z vektorski prostori. Inverz $(ST)^{-1} : Z \to X$ produkta (kompozicije) ST postoji i*

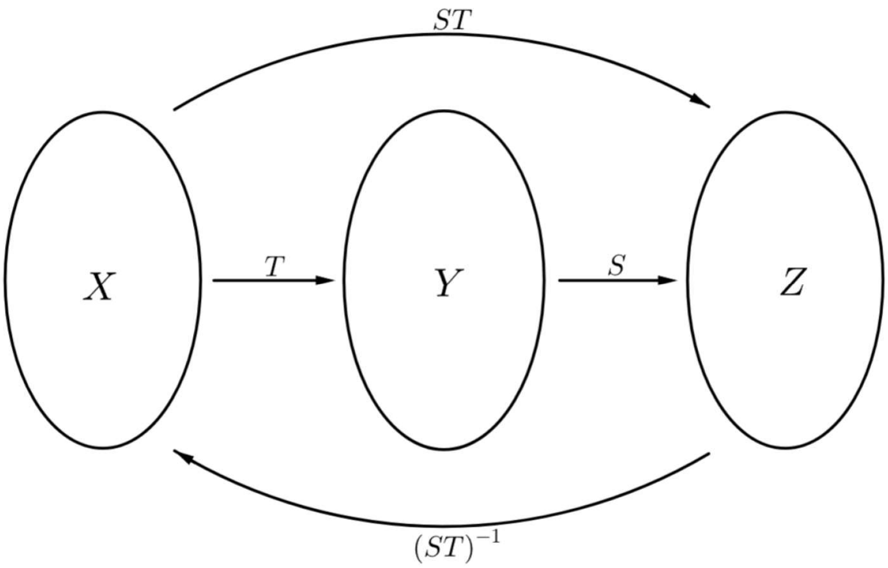
$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

Dokaz. Operator $ST : X \to Z$ je bijektivan pa $(ST)^{-1}$ postoji. Tada imamo

$$ST(ST)^{-1} = I_Z,$$

gdje je I_Z identiteta na Z. Primjenom S^{-1} i koristeći $S^{-1}S = I_Y$, dobivamo

$$S^{-1}ST(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z = S^{-1}.$$



Slika 3.2: Oznake u lemi za inverz produkta

Primjenom T^{-1} i koristeći $T^{-1}T = I_X$, dobivamo traženi rezultat

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

□

3.2 Ograničeni linearni operatori

U prethodnom poglavlju nismo koristili nikakva svojstva norme. Uvest ćemo normu u linearne operatore počevši s definicijom ograničenog linearnog operatora.

Definicija 15. *(vidjeti [2] Definicija 2.7-1) Neka su X i Y normirani prostori i $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ linearni operator gdje je $\mathcal{D}(T) \subset X$. Operator T je ograničen ako postoji realan broj c takav da za $\forall x \in \mathcal{D}(T)$*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|. \tag{3.3}$$

U nejednakosti 3.3 norma s lijeve strane je na Y, a norma s desne strane je na X. Radi jednostavnosti, obje norme označimo s $\|\cdot\|$. Formula pokazuje da ograničeni linearni operator preslikava ograničen skup u $\mathcal{D}(T)$ na ograničen skup u Y.

Pitamo se koji je najmanji mogući c takav da 3.3 i dalje vrijedi za svaki ne-nul $x \in \mathcal{D}(T)$. Možemo izbaciti $x = 0$ jer $Tx = 0$ za $x = 0$ prema svojstvu $T0 = 0$. Dijeljenje

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$$

pokazuje da c mora biti veliko barem kao supremum izraza s lijeve strane nad $\mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$. Odgovor na pitanje je da je najmanji mogući c u 3.3 upravo taj supremum. Taj supremum označimo s $\|T\|$ pa imamo

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\} \right\}. \tag{3.4}$$

$\|T\|$ nazivamo normom operatora T. Ako je $\mathcal{D}(T) = 0$, definiramo $\|T\| = 0$. U ovom slučaju $T = 0$ jer je svojstvo $T0 = 0$.

Primijetimo da 3.3 s $c = \|T\|$ daje

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Kroz iduću lemu, pokazat ćemo da je ovako definirano preslikavanje norma.

Lema 8. *(vidjeti [2], Definicija 2.7-2) Neka je T ograničen linearni operator. Tada:*

i. Alternativna formula za normu od T je

$$\|T\| = sup_{x \in \mathcal{D}(T), \|x\|=1} \|Tx\|.$$

ii. Norma definirana s 3.4 u Definiciji 15 zadovoljava svojstva $(i) - (iv)$ iz Definicije 5.

Dokaz. i. Pišemo $\|x\| = a$ i postavljamo $y = \frac{1}{a}x$, gdje je $x \neq 0$. Iz $\|y\| = \frac{\|x\|}{a} = 1$ i linearnosti od T, dobivamo izraz

$$\|T\| = sup_{x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0} \frac{1}{a}\|Tx\| = sup_{x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0} \left\| T\frac{1}{a}x \right\| = sup_{x \in \mathcal{D}(T), \|y\|=1} \|Ty\|.$$

Pisanjem x umjesto y s desne strane, dobijemo

$$\|T\| = sup_{x \in \mathcal{D}(T), \|x\|=1} \|Tx\|.$$

ii. Svojstvo (i) iz Definicije 5. je očito i tako je $\|0\| = 0$. Iz $\|T\| = 0$ imamo $Tx = 0$ za $\forall x \in \mathcal{D}(T)$, tako da $T = 0$. Stoga svojstvo (ii) iz Definicije 5. vrijedi. Nadalje, svojstvo (iii) iz Definicije 5 je dobiveno iz

$$sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|Tx\| = |\alpha| sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

gdje je $x \in \mathcal{D}(T)$. Konačno, svojstvo (iv) iz Definicije 5. slijedi iz

$$\begin{aligned} sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| &= sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \\ &\leq sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\|, \end{aligned}$$

gdje je $x \in \mathcal{D}(T)$.

□

U svrhu što boljeg razumijevanja ograničenih operatora, proći ćemo kroz nekoliko primjera. Provjerit ćemo ograničenost linearnih operatora uvedenih u prethodnom potpoglavlju.

Primjer 18. *Operator identiteta $I : X \to X$ na normiranom prostoru $X \neq 0$ je ograničen i ima normu $\|I\| = 1$.*

Primjer 19. *Nul operator $0 : X \to Y$ na normiranom prostoru X je ograničen i ima normu $\|0\| = 0$.*

Primjer 20. *(vidjeti [2], Primjer 2.7-5) Neka je X normirani prostor polinoma na $J = [0,1]$ s normom $\|x\| = max|x(t)|$, $t \in J$. Operator diferenciranja T je definiran na X s*

$$Tx(t) = x'(t).$$

Ovaj operator je linearan, ali nije ograničen. Neka je $x_n(t) = t^n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Zatim $\|x_n\| = 1$ i

$$Tx_n(t) = x_n'(t) = nt^{n-1}$$

tako da $\|Tx_n\| = n$ i $\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = n$. Kako je $n \in N$ proizvoljan, ovo pokazuje da nema fiksnog broja c takvog da $\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \leq c$. Iz toga i $\|Tx\| \leq c\|x\|$ možemo zaključiti da T nije ograničen.

Primjer 21. *(vidjeti [2], Primjer 2.7-6) Definiramo integralni operator $T : C[0,1] \to C[0,1]$ s*

$$y = Tx,$$

gdje je

$$y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Ovdje je k poznata funkcija koju nazivamo jezgra operatora T i pretpostavljamo da je T neprekidan na zatvorenom kvadratu $G = J \times J$ u $t\tau$-ravnini, gdje je $J = [0,1]$. Operator T je linearan. Pokažimo da je T ograničen.
Da bi dokazali ovu tvrdnju primijetimo da neprekidnost od k na zatvorenom kvadratu povlači da je k ograničen, $|k(t,\tau)| \leq k_0, \forall (t,\tau) \in G$, gdje je k_0 realan broj. Nadalje,

$$|x(T)| \leq max_{t\in J}|x(t)| = \|x\|.$$

Stoga,

$$\begin{aligned}\|y\| = \|Tx\| &= max_{t\in J}\left|\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right| \\ &\leq max_{t\in J}\left|\int_0^1 k(t,\tau)\|x(\tau)\|d\tau\right| \\ &\leq k_0\|x\|.\end{aligned}$$

Rezultat je $\|Tx\| \leq k_0\|x\|$. Za $c = k_0$ imamo $\|Tx\| \leq c\|x\|$. Stoga je T ograničen.

Primjer 22. (*vidjeti* [2], *Primjer 2.7-7*) *Neka je A realna $r \times n$ matrica. A definira linearni operator s $y = Ax$ kao što smo pokazali u Primjeru 17. Sada ćemo pokazati da je operator A ograničen. Izraz $y = Ax$ se može zapisati u obliku*

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k, j = 1, ..., r \tag{3.5}$$

Kao što smo prethodno pokazali jedna norma na $\mathbb{R}^n$ je dana s

$$\|x\| = \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Slično se može pokazati za $y \in \mathbb{R}^r$. Iz 3.5 i Cauchy-Schwarz nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{r} \eta_j^2 = \sum_{j=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k \right]^2 \\ \leq \sum_{j=1}^{r} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ = \|x\|^2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2. \end{aligned}$$

Primijetimo da dvostruka suma u zadnjem retku ne ovisi o x, a rezultat možemo zapisati kao

$$\|Tx\|^2 \leq c^2 \|x\|^2,$$

gdje je

$$c^2 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2.$$

Ovo nam daje svojstvo iz definicije ograničenih operatora što povlači da je A ograničen.

Sada ćemo pokazati da u konačnodimenzionalnim prostorima svaki operator ima ovo lijepo svojstvo.

Teorem 12. (*vidjeti* [2], *Teorem 2.7-8*) *Ako je normirani prostor X konačnodimenzionalan, onda je svaki linearni operator na X ograničen.*

Dokaz. Neka je $dim X = n$ i $e_1, ..., e_n$ baza od X. Uzmemo bilo koji $x = \sum \xi_j e_j$ i bilo koji linearni operator T na X. Kako je T linearan,

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \|Te_j\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|.$$

Na zadnju sumu primijenimo Lemu 2 s $\alpha_j = \xi_j$ i $x_j = e_j$. Zatim dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|.$$

Zajedno imamo

$$\|Tx\| = \gamma \|x\|,$$

gdje je

$$\gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|.$$

Iz ovog i $\|Tx\| \leq c\|x\|$ vidimo da je T ograničen. □

Sada ćemo napraviti pregled važnih svojstava ograničenih linearnih operatora. Operatori su preslikavanja pa se definicija za neprekidnost može primijeniti na njih. Temeljna činjenica za linearne operatore je da su neprekidnost i ograničenost ekvivalentni koncepti.

Neka je $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ bilo koji operator, ne nužno linearan, gdje je $\mathcal{D}(T) \subset X$ te su X i Y normirani prostori. Operator T je neprekidan u $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ ako za $\forall \epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon, \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

zadovoljava

$$\|x - x_0\| < \delta.$$

T je neprekidan ako je T neprekidan u svakom $x \in \mathcal{D}(T)$.

Teorem 13. (*vidjeti* [2], *Teorem 2.7-9*) *Neka je $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ linearni operator, gdje je $\mathcal{D}(T) \subset X$ te su X i Y normirani prostori. Tada:*

i. T je neprekidan ako i samo ako je ograničen.

ii. Ako je T neprekidan u jednoj točki onda je neprekidan.

Dokaz. i. Za $T = 0$ tvrdnja je trivijalna.

Neka je $T \neq 0$. Tada $\|T\| \neq 0$. Pretpostavimo da je T ograničen i uzmimo bilo koji $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Neka je dan bilo koji $\epsilon > 0$. Obzirom da je T linearan, za $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ takav da

$$\|x - x_0\| < \delta,$$

gdje je

$$\delta = \frac{\epsilon}{\|T\|}.$$

Dobivamo

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \epsilon.$$

Kako je $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ proizvoljan, to pokazuje da je T neprekidan. Pretpostavimo da je T neprekidan u proizvoljnom $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Tada za bilo koji $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \epsilon, \forall x \in \mathcal{D}(T) \text{ zadovoljava } \|x - x_0\| \leq \delta. \tag{3.6}$$

Uzmimo bilo koji $y \neq 0$ u $\mathcal{D}(T)$ i postavimo $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y$. Tada je $x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|}y$. Stoga $\|x - x_0\| = \delta$, tako da možemo koristiti 3.6. Kako je T linearan, imamo

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|$$

i 3.6 povlači

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\| \leq \epsilon.$$

Tada je

$$\|Ty\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}\|y\|.$$

Možemo pisati $\|Ty\| \leq c\|y\|$, gdje je $c = \frac{\epsilon}{\delta}$ iz čega slijedi da je T ograničen.

ii. Neprekidnost od T u točki povlači ograničenost od T prema drugom dijelu dokaza (i). Zauzvrat slijedi neprekidnost od T po (i).

□

Korolar 1. *(vidjeti [2], Korolar 2.7-10) Neka je T ograničen linearan operator. Tada:*

i. $x_n \to x$ (gdje su $x_n, x \in \mathcal{D}(T)$) povlači $Tx_n \to Tx$.

ii. Jezgra operatora $Ker(T)$ je zatvorena.

Za operatore T_1 i T_2 kažemo da su jednaki, u oznaci $T_1 = T_2$, ako imaju istu domenu $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ i ako $T_1x = T_2x$ za $\forall x \in \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$.

Restrikciju operatora $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ na podskup $B \subset \mathcal{D}(T)$ označavamo s $T|_B$ i to je operator $T|_B : B \to Y$ definiran s

$$T|_B x = Tx, \forall x \in B.$$

Proširenje od T na skup $M \supset \mathcal{D}(T)$ je operator $\tilde{T} : M \to Y$ definiran s

$$\tilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T.$$

Vrijedi da je $\tilde{T}x = Tx, \forall x \in \mathcal{D}(T)$.

Ako je domena od T pravi podskup od M, onda dani T ima puno proširenja. Zanimaju nas proširenja koja čuvaju neka osnovna svojstva kao što su linearnost i ograničenost.

Teorem koji slijedi odnosi se na proširenje ograničenog linearnog operatora T na zatvorenost $\mathcal{D}(T)$ domene tako da je prošireni operator ponovno ograničen i linearan te čak ima istu normu. Ovo uključuje slučaj proširenja iz gustog skupa u normiranom prostoru X na cijeli X. Također, uključuje slučaj proširenja s normiranog prostora X na zatvarač od X.

Teorem 14. *(vidjeti [2], Teorem 2.7-11) Neka je $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ ograničen linearni operator, gdje $\mathcal{D}(T)$ leži u normiranom prostoru X, a Y je Banachov prostor. Tada T ima proširenje*

$$\tilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \to Y,$$

gdje je $\tilde{T}$ ograničen linearan operator norme

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

Dokaz. Razmotrimo bilo koji $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$. Tada po (i) iz Leme 4. postoji niz $(x_n) \in \mathcal{D}(T)$ takav da $x_n \to x$. Obzirom da je T linearan i ograničen, imamo

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\|\|x_n - x_m\|.$$

Ovo pokazuje da je (Tx_n) Cauchyjev jer (x_n) konvergira. Prema pretpostavci, Y je potpun tako da (Tx_n) konvergira. Pišemo

$$Tx_n \to y \in Y.$$

Definiramo $\tilde{T}$ po $\tilde{T}x = y$.
Pokazujemo da je ova definicija nezavisna od izbora niza iz $\mathcal{D}(T)$ koji konvergira u X. Pretpostavimo da $x_n \to x$ i $z_n \to x$.
Tada $v_m \to x$ gdje je (v_m) niz $(x_1, z_1, x_2, z_2, ...)$.
Stoga, (Tv_m) konvergira po Korolaru 1 (i) te oba podniza (Tx_n) i (Tz_n) od (Tv_m) moraju imati isti limes. Ovo dokazuje da je $\tilde{T}$ jedinstveno definiran na svakom $x \in \mathcal{D}(T)$. Jasno, $\tilde{T}$ je linearan i $\tilde{T}x = Tx$ za svaki $x \in \mathcal{D}(T)$ tako da je $\tilde{T}$ proširenje od T. Koristimo

$$\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\|,$$

neka $n \to \infty$. Tada $Tx_n \to y = \tilde{T}x$. Obzirom da $x \to \|x\|$ definira neprekidno preslikavanje, dobivamo

$$\|\tilde{T}x\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Stoga $\tilde{T}$ je ograničen i $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Naravno, $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$ jer se norma definirana supremumom ne može smanjiti u proširenju. Zajedno imamo $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. □

Slika $Im(T)$ ograničenog linearnog operatora $T : X \to Y$ ne mora biti zatvorena u Y.

Primjer 23. *Neka je operator $T : l^\infty \to l^\infty$ dano s $y = (\eta_j) = Tx, \eta_j = \frac{\xi_j}{j}, x = (\xi_j)$. Vrijedi da je operator linearan i ograničen, a pokazat ćemo da $Im(T)$ nije zatvorena u l^∞. Da bismo pokazali da slika operatora T nije zatvoren skup u l^∞, trebamo pronaći niz $(x^{(n)})$ u l^∞ čija slika $(Tx^{(n)})$ konvergira u l^∞. Taj limes ne smije biti slika nekog elementa iz l^∞ preko operatora T. Prvo, definiramo niz $x^{(n)} = (\xi_j^{(n)})$ s*

$$\xi_j^{(n)} = \begin{cases} j; & j \leq n \\ 0; & j > n \end{cases}.$$

Primijenimo sad operator T na $x^{(n)}$

$$Tx^{(n)} = (\eta_j) = \begin{cases} 1; & j \leq n \\ 0; & j > n \end{cases}.$$

Kako n teži u beskonačnost niz $y^{(n)}$ konvergira prema nizu $y = (\mu_j)$ gdje je $\mu_j = 1$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. Pokažemo sad da niz $y \notin Im(T)$, tj. da y ne možemo dobiti djelovanjem *operatora T na neki niz $x \in l^\infty$. Pretpostavimo suprotno, neka postoji niz $z = (\zeta_j) \in l^\infty$ takav da je $Tz = y$. Onda bi za svaki $j \in \mathbb{N}$ imali*

$$\frac{\zeta_j}{j} = 1$$

$$\Rightarrow \zeta_j = j.$$

Međutim, ovaj niz očito nije iz l^∞ pa imamo kontradikciju s našom pretpostavkom. Dakle, slika operatora T nije zatvoren skup u l^∞.

Pokažimo sad koristeći isti operator kao u prethodnom primjeru da inverz ograničenog linearnog operatora ne mora biti ograničen.

Primjer 24. *Neka je T ograničen linearni operator iz prethodnog primjera. Pokazat ćemo da njegov inverz $T^{-1} : Im(T) \to l^\infty$ nije ograničen linearni operator.*
Da bismo pokazali da inverz operatora T, označimo ga sa T^{-1}, nije ograničen, moramo pronaći niz $\left(y^{(n)}\right) \in l^\infty$ takav da ne postoji $M \in \mathbb{N}$ za koji je $\|T^{-1}y^{(n)}\| \le M\|y^{(n)}\|$. Razmotrimo niz $y^{(n)} = \left(\eta_j^{(n)}\right)$ u l^∞ definiran s

$$\eta_j^{(n)} = \begin{cases} 1; & j = n \\ 0; & inače \end{cases},$$

gdje je jedinica na n-toj poziciji. Sve druge komponente su nule.
Za svako $n \in \mathbb{N}$, primjenjujemo operator T^{-1} na $y^{(n)}$

$$T^{-1}y^{(n)} = (\xi_j),$$

gdje je za svaki j

$$\xi_j = \eta_j \cdot j.$$

Imamo

$$\xi_j = \begin{cases} n; & j = n \\ 0; & inače \end{cases}$$

tako da

$$\xi_n = n.$$

Sve druge komponente su nule jer su $\eta_j = 0$ za $j \ne n$. Dakle

$$T^{-1}y^{(n)} = (0, 0, \dots, n, 0, 0, \dots).$$

Vrijedi $\|y^{(n)}\| = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Međutim $\|T^{-1}y^{(n)}\| = n$ za $n \in \mathbb{N}$, što teži u beskonačno kad n teži u beskonačno. Očito ne postoji $M \in \mathbb{N}$ da bi vrijedilo $\|T^{-1}y^{(n)}\| \le M\|y^{(n)}\|, \forall n \in \mathbb{N}$. Stoga, inverz operatora T nije ograničen.

Skup svih ograničenih linearnih operatora s normiranog prostora X na normirani prostor Y, označavamo s $\mathbb{B}(X, Y)$. Skup $\mathbb{B}(X, Y)$ je vektorski prostor sa standardnim operacije. Za operatore $A, B \in \mathbb{B}(X, Y)$ postoje brojevi M i N takvi da vrijedi

$$\|Ax\| \le M\|x\| \text{ i } \|Bx\| \le N\|x\|, \ \forall x \in X.$$

Sada imamo

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (M+N)\|x\|.$$

Analogno, za skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ i operator $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ vidimo da je i αA također ograničen operator.

Za $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ definiramo normu operatora kao

$$\|A\| = sup\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Budući da je slika zatvorene jedinične kugle ograničen skup, ovo preslikavanje je dobro definirano jer je A ograničen operator.

Za $\forall x \in X, x \neq 0$, vrijedi

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \ \forall x \in X.$$

Nadalje, $\|A\|$ je najmanji broj M za koji vrijedi $\|Ax\| \leq \|M\|\|x\|, \forall x \in X$. Ako je M neki takav broj, onda za $\forall x \in X$ takav da je $\|x\| \leq 1$ imamo $\|Ax\| \leq M\|x\| \leq M$ pa je po definiciji suprenuma $\|A\| \leq M$.

Time smo pokazali da je formulom $\|A\| = sup\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ uistinu definirana norma na prostoru $\mathbb{B}(X,Y)$. Tako definiranu normu nazivamo operatorska norma.

Ovime smo pokazali da je za normirane prostore X i Y je i prostor $\mathbb{B}(X,Y)$ s operatorskom normom normiran prostor. Idući teorem će pokazati koji uvjeti su potrebni da bi $\mathbb{B}(X,Y)$ bio Banachov.

Teorem 15. (*vidjeti* [2], *Teorem 2.10-2*) *Prostor $\mathbb{B}(X,Y)$ će biti Banachov ako je Y Banachov. Nadalje, ako je Y Banachov i ako je $X_0 \leq X$ gust potprostor od X tada za svaki operator $A_0 \in \mathbb{B}(X,Y)$ postoji jedinstven operator $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ za koji vrijedi $A|_{x_0} = A_0$ i $\|A\| = \|A_0\|$.*

Dokaz. Neka je $(A_n)_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{B}(X,Y)$. Za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi

$$\|A_m - A_n\| < \epsilon. \tag{3.7}$$

Odavde slijedi i da za sve $m, n \geq n_0$ i $x \in X$ imamo

$$\|A_m x - A_n x\| \leq \|A_m - A_n\| < \epsilon\|x\|.$$

Dakle, niz $(A_n)_n$ je Cauchyjev u Banachovom prostoru Y. Definiramo operator A s

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x, \ x \in X.$$

Očito je da je A linearni operator s X na Y. Preostaje pokazati da je A ograničen i da A predstavlja limes niza $(A_n)_n$ u operatorskoj normi.

Zbog razlike između jake konvergencije i konvergencije u normi potrebno je dokazati da A_n konvergira prema A u operatorskoj normi. Uzmimo proizvoljan $x \in X$ takav da je $\|x\| \leq 1$. Za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoji n_0 tako da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi 3.7. Uzmimo sad neki $m \geq n_0$ za odabrani ϵ tako da vrijedi

$$\|Ax - A_m x\| \leq \epsilon.$$

Sada za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$\|Ax - A_n x\| \leq \|Ax - A_m x\| + \|A_m x - A_n x\|$$
$$\leq \|Ax - A_m x\| + \|A_m - A_n\| \|x\|$$
$$\leq \epsilon + \epsilon \|x\| \leq 2\epsilon.$$

Dokazali smo da vrijedi

$$\|Ax - A_n x\| < 2\epsilon, \forall x \in X, \|x\| \leq 1, \forall n \geq n_0.$$

Uzmimo sad supremum po svim x takvim da je $\|x\| \leq 1$. Sada za sve $n \geq n_0$. dobijemo

$$\|A - A_n\| \leq 2\epsilon.$$

Ovime pokazujemo da niz $(A_n)_n$ konvergira prema A u operatorskoj normi jer je $A - A_n \in \mathbb{B}(X, Y)$ pa je očito i $A = (A - A_n) + A_n \in \mathbb{B}(X, Y)$.
Za dokaz druge tvrdnje, definiramo operator A na sljedeći način: za $x \in X$ nađimo niz $(x_n)_n \in X_0$ koji konvergira k x. Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev, ali i niz $(A_0 x_n)_n \in Y$ je Cauchyjev zbog

$$\|A_0 x_n - A_0 x_m\| \leq \|A_0\| \|x_n - x_m\|.$$

Obzirom da je Y potpun staviti ćemo $Ax = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n$. Da bi pokazali da je ta definicija dobra gledamo nizove $x_n \to x$ i $y_n \to x$, pri čemu je $x \in X$, a $x_n, y_n \in X_0$. Sada zbog neprekidnosti operatora A_0 i zbog $x_n - y_n \to 0$ možemo zaključiti

$$A_0(x_n - y_n) \to 0.$$

Kako su nizovi $(A_0 x_n)_n$ i $(A_0 y_n)_n$ konvergentni, slijedi

$$\lim_{n\to\infty} A_0 x_n = \lim_{n\to\infty} A_0 y_n.$$

Time je pokazano da je operator A dobro definiran.
Zbog neprekidnosti norme i linearnosti operatora A imamo

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_0 x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_0\| \|x_n\| = \|A_0\| \|x\|.$$

Time smo pokazali da je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ i $\|A\| \leq \|A_0\|$. Obzirom da je A_0 restrikcija od A, obratna nejednakost $\|A_0\| \leq \|A\|$ je trivijalna jer supremum po manjem skupu ne može biti veći. $\square$

Literatura

[1] G. Bachman, L. Narici, *Functional analysis*, Dover Publications, New York, 1998.

[2] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[3] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

Sažetak

Normirani vektorski prostori su temelj funkcionalne analize, posebice Banachovi prostori i teorija linearnih operatora unutar njih. Ovaj rad dublje istražuje ove ključne pojmove.

Normirani prostori su vektorski prostori opremljeni metrikom koja proizlazi iz norme, što generalizira pojam duljine vektora. Kada normirani prostor također posjeduje potpunost kao metrički prostor, naziva se Banachov prostor. Važno je napomenuti da se svaki normirani prostor može proširiti kako bi postao Banachov prostor. U matematičkim operacijama unutar normiranih prostora, beskonačni nizovi postaju vrijedni alati. Operatori su preslikavanja između normiranih prostora, označena kao X u Y. Ograničeni linearni operatori, koji osiguravaju neprekidnost, posebno su značajni, a temeljni teorem uspostavlja vezu između ograničenosti i neprekidnosti. Prostori operatora su skupovi ograničenih linearnih operatora iz jednog normiranog prostora X u drugi Y, tvoreći sami normirane prostore $\mathbb{B}(X, Y)$.

U području analize, beskonačnodimenzionalni normirani prostori imaju veći značaj od konačnodimenzionalnih, koji su jednostavniji i omogućuju matrične prikaze operatora.

Ključne riječi

Normirani vektorski prostori, Banachovi prostori, Norma, Ograničenost, Neprekidnost, Ograničeni linearni operatori, Beskonačnodimenzionalni normirani prostor, Konačnodimenzionalni normirani prostor.

Normed and Banach Spaces

Summary

Normed vector spaces are fundamental in functional analysis, particularly Banach spaces and the theory of linear operators within them. This paper delves into these crucial concepts.

Normed spaces are vector spaces equipped with a metric derived from a norm, which generalizes the concept of vector length. When a normed space also possesses completeness as a metric space, it's known as a Banach space. Importantly, any normed space can be extended to form a Banach space. In mathematical operations within normed spaces, infinite series become valuable tools. Operators are mappings between normed spaces, denoted as X to Y. Bounded linear operators, which ensure continuity, are particularly significant, and a fundamental theorem establishes the link between boundedness and continuity. The spaces of operators are collections of bounded linear operators from one normed space X to another Y, forming normed spaces themselves $\mathbb{B}(X, Y)$.

In the realm of analysis, infinite-dimensional normed spaces hold more prominence than their finite-dimensional counterparts, which are simpler and allow for matrix representations of operators. These concepts serve as the cornerstone of functional analysis.

Keywords

Normed vector spaces, Banach spaces, Norm, Boundedness, Continuity, Bounded linear operators, Infinite-dimensional normed space, Finite-dimensional normed space

Životopis

Rođena sam 08.11.1992. u Čakovcu. Pohađala sam paralelno Osnovnu školu Kotoriba i Osnovnu glazbenu školu Branimira Magdalenića u Čakovcu. Godine 2007. upisala sam Gimnaziju u Čakovcu, smjer: opća gimnazija. Nakon završene srednje škole upisala sam Preddiplomski studij matematike, smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje sam stekla titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Iste godine upisujem Diplomski studij financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J.Strossmayera u Osijeku. Paralelno studiram Diplomski studij ekologije i zaštite okoliša na Fakultetu društvenih znanosti dr. Milenka Brkića Sveučilišta Hercegovina. Godine 2020. nakon završenog BIRD Academy Internship programa, zaposlila sam se u tvrtki Poslovna inteligencija d.o.o. Trenutno radim na poziciji konzultanta. Dodatno, držim edukacije u edukacijskom centru Bird Academy te kontinuirano unapređujem svoje kompetencije polaganjem različitih edukacija i certifikata.