Zakon ponovljenog logaritma

Brlek, Dora

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Studij Sveučilišni diplomski studij matematike
modul: financijska matematika i statistika

Zakon ponovljenog logaritma

Diplomski rad

Mentor:

**izv. prof. dr. sc.
Danijel Grahovac**

Student:

Dora Brlek

Osijek, 2024.

Sadržaj

1 | Uvod

Kako je u 17. stoljeću porasla potreba za točnim računanjem višeznamenkastih brojeva, matematičari su probali osmisliti neki novi način računanja takvih brojeva. To je dovelo do pojave logaritama te se zato 17. stoljeće smatra početkom pojave nove matematičke operacije koju zovemo logaritmiranje. Matematičari koji su prvi otkrili logaritme su švicarski matematičar i proizvođač satova Jost Bürgi i škotski matematičar John Napier. Napier je 1614. godine u svojoj poznatoj knjizi *Opis divnog kanona logaritama* (lat. *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*) prvi opisao metodu prirodnog logaritma. Nakon toga je William Oughtred 1632. godine konstruirao prvo logaritamsko računalo, zapravo dvije vrste: linijsko i kružno. To sve je pomoglo u daljnjem razvijanju znanosti, a posebno astronomiji, fizici i astrologiji. Osim što su olakšali računanje, logaritmi imaju važno mjesto i u teorijskoj matematici.
Zakon velikih brojeva i centralni granični teorem se smatraju dvama najvažnijim teoremima u modernoj teoriji vjerojatnosti, a najizgledniji kandidat za treću poziciju je upravo zakon ponovljenog logaritma. Stoga neki znanstvenici navode da se on može promatrati kao usavršavanje zakona velikih brojeva i centralnog graničnog teorema. Cilj ovog diplomskog rada je prikazati i dokazati zakon ponovljenog logaritma te objasniti pojmove i teoreme iz teorije vjerojatnosti koji su nam potrebni za sami rad.

2 | Osnovni pojmovi

2.1 Vjerojatnost

Za što bolje razumijevanje teme ovog diplomskog rada prvo ćemo definirati bitne pojmove te iskazati teoreme koje ćemo spominjati tokom cijelog rada i koji su nam potrebni za dokaz zakona ponovljenog logaritma.

Definicija 1 (σ-algebra)**.** *Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) jest σ-algebra skupova na Ω ako je*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
3. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se **izmjeriv prostor**, a elemente familije $\mathcal{F}$ nazivamo **izmjerivim skupovima**.

Definicija 2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Funkcija $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jest **vjerojatnost** na Ω ako vrijedi*

1. $P(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}$,
2. $P(\Omega = 1)$,
3. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$ *i* $A_i \cup A_j = \emptyset$ *za* $i \neq j$.

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω i P vjerojatnost na $\mathcal{F}$ zove se **vjerojatnosni prostor**.

Definicija 3. *Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Sa $\mathcal{B}$ označimo σ-algebru generiranu familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ zovemo **σ-algebra Borelovih skupova** na $\mathbb{R}$, a elemente σ-algebre $\mathcal{B}$ zovemo **Borelovi skupovi**.*

Definicija 4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ jest **slučajna varijabla** na Ω ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljni $B \in \mathcal{B}$, tj. $X^{-1}(B) \subset \mathcal{F}$.*

Definicija 5. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kažemo da su $X_1, \ldots, X_n$ **nezavisne** ako za proizvoljne $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n$, vrijedi*

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)$$

.

Definicija 6. *Neka je X slučajna varijabla i neka EX postoji.* ***Varijanca*** *od X definira se sa*

$$VarX = E[(X - EX)^2] \tag{2.1}$$

ako očekivanje u (2.1) postoji.

Teorem 1 (Čebiševljeva nejednakost)**.** [6] *Neka je X slučajna varijabla s konačnom varijancom. Tada za proizvoljan $\epsilon > 0$ vrijedi*

$$P(|X - EX| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{VarX}{\epsilon^2}$$

.

2.2 Konvergencija

Sljedeći pojam koji je vrlo važan u teoriji vjerojatnosti i za ovaj rad je konvergencija slučajnih varijabli te kakve sve konvergencije postoje.

Definicija 7. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira gotovo sigurno*** *(g.s.) prema slučajnoj varijabli X ako je*

$$P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\}) = 1.$$

To označujemo (g.s.) $\lim_n X_n$ ili $X_n \xrightarrow{g.s.} X$ $(n \to \infty)$. Takav limes je (g.s.) jedinstven.

Definicija 8. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira po vjerojatnosti*** *prema slučajnoj varijabli X ako za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

To označujemo $(P) \lim_n X_n = X$ ili $X_n \xrightarrow{P} X$ $(n \to \infty)$.

Definicija 9. *Neka je $1 \leq p < \infty$ i neka je $X_n, X \in L_p(\Omega)(n \in \mathbb{N}$. Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$* ***konvergira u srednjem reda p*** *prema X ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0.$$

To označujemo $(m^p) \lim_n X_n = X$ ili $X_n \xrightarrow{m^p} X$ $(n \to \infty)$.

Definicija 10. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira po distribuciji*** *prema slučajnoj varijabli X ako je*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), x \in C(F_X).$$

F_X je funkcija distribucije od X, a $C(F_x)$ je skup svih točaka neprekidnosti od F_X.

Napomena 1. *Kažemo da je g.s. konvergencija jača od konvergencije po vjerojatnosti, odnosno da je konvergencija po vjerojatnosti slabija od g.s. konvergencije.*

3 | Granični teoremi u vjerojatnosti

3.1 Zakoni nula-jedan

Neka je $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. U ovom odlomku nas zanima kolika je vjerojatnost da $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira. Možemo naslutiti da bi vjerojatnost događaja na kojem dani red konvergira mogla biti bilo koji realni broj iz segmenta $[0,1]$, ali ustvari vrijedi da ta vjerojatnost može biti samo 0 ili 1. Također, to svojstvo „nula-jedan" imaju i mnogi drugi događaji vezani za niz nezavisnih slučajnih varijabli.

Definicija 11. *Neka je $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli i $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ $(n \in \mathbb{N})$ σ-algebru induciranu sa $X_n, X_{n+1}, \dots$. Za svaki n vrijedi*

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \sigma(X_k)\right) = \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k^{-1}(\mathcal{B})\right),$$

dakle na $\mathcal{F}_n$ možemo gledati kao na σ-algebru koja sadrži događaje vezane za $X_n, X_{n+1}, \dots$ Niz $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ je padajući niz σ-algebri. Stavimo

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n.$$

$\mathcal{F}_\infty$ zovemo ***repna σ-algebra*** *niza $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$, a elemente od $\mathcal{F}_\infty$* ***repni događaji****. Funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, koja je izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_\infty$, zovemo* ***repna funkcija*** *(u odnosu na niz (X_n)).*

Primjer 1. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo*

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergira}\right\} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} X_k \text{ konvergira}\right\} \in \mathcal{F}_n,$$

dakle $\left\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergira}\right\} \in \mathcal{F}_\infty$, tj. to je repni događaj.

Slično gornjem primjeru, sljedeći događaji su repni:

$$\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ postoji}\}, \{X_n < 1 \text{ za beskonačno mnogo } n\},$$

$$\{\limsup_{n\to\infty} X_n < \infty\}, \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ konvergira}\right\}.$$

Primjer 2. *Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljan $c \in \mathbb{R}$ imamo*

$$\{\limsup_{n\to\infty} X_n < c\} = \{\limsup_{\substack{k\to\infty \\ k\geq n}} X_k < c\} \in \mathcal{F}_n,$$

dakle, $\limsup_{n\to\infty} X_n$ *je $\mathcal{F}_\infty$-izmjeriva, tj. to je repna funkcija.*

Slično *Primjeru 2*, sljedeće funkcije su repne:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,\ \liminf_{n\to\infty} X_n,\ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Nadalje, definirat ćemo dva važna pojma za daljnje pisanje rada, a to su limes superior i limes inferior događaja.

Definicija 12. *Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N})$ niz događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.* ***Limes superior*** *tog niza je događaj*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n} A_k,$$

a ***limes inferior***

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty}\bigcap_{k=n} A_k.$$

Kada malo bolje pogledamo gornju definiciju te uzmemo $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$, onda vrijedi $\omega \in \bigcup_{k=n} A_k$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. To ustvari znači da je $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, $\omega \in A_2 \cup A_3 \cup \cdots$ itd. Koliko god da daleko gledamo nizove $A_1, A_3, \ldots,$ ω će se nalaziti barem u jednom od preostalih skupova, a to znači da će ω biti u beskonačno mnogo skupova A_n, $n \in \mathbb{N}$. Moramo uzeti u obzir da je moguća situacija i da ω ne bude u beskonačno mnogo njih.
Također, ako je $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$, onda je ω u barem jednom od skupova $\bigcap_{k=n} A_k$, $n \in \mathbb{N}$. Što ustvari znači da je $\omega \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ ili $\omega \in A_2 \cap A_3 \cap \cdots$ itd. Možemo zaključiti da će ω biti u svim skupovima A_n, $n \in \mathbb{N}$ osim u eventualno konačno mnogo njih.
Time smo pokazali da je

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ za beskonačno mnogo } n\},\\ \liminf_{n\to\infty} A_n &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ za sve } n \text{ osim eventualno konačno mnogo njih}\},\end{aligned}$$

tj. $\limsup_{n\to\infty} A_n$ se dogodi ako i samo ako se dogodi beskonačno mnogo događaja A_n, a $\liminf_{n\to\infty} A_n$ se dogodi ako i samo ako se dogode svi događaji A_n osim eventualno konačno mnogo njih. To pišemo kao $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(A_n \text{ b.č.})$, a to stoji za beskonačno često.

Teorem 2 (Prva Borel-Cantellijeva lema). *Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, onda je*

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(A_n \text{ b.č.}) = 0.$$

Dokaz. Familija $\{\bigcup_{k=n} A_k, n \in \mathbb{N}\}$ je padajuća pa je

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

□

Teorem 3 (**Druga Borel-Cantellijeva lema**). *Ako su $A_n, n \in \mathbb{N}$, nezavisni događaji i $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, onda je*

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(A_n \text{ b.č.}) = 1.$$

Dokaz. Kako je $1 - x \le e^{-x}$ za $x \ge 0$, zbog nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned} P\left(\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right)^c\right) &= P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{m} P(A_k^c) \\ &= \prod_{k=n}^{m}(1 - P(A_k)) \le e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} \to 0, \end{aligned}$$

kad $m \to \infty$. Sada slijedi

$$\begin{aligned} P(\limsup_{n\to\infty} A_n) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} P\left(\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right)^c\right) = 1. \end{aligned}$$

□

Napomena 2. *Prethodna dva teorema zajedno su poznata pod nazivom **Borelov zakon 0-1** za niz nezavisnih događaja jer $P(A_n$ b.č.$)$ može imati ili vjerojatnost nula ili jedan.*

Sljedeći teorem koji ćemo spomenuti je Kolmogorovljev zakon nula-jedan koji je općenitija verzija teorema Borelov zakon nula-jedan. On govori o repnim događajima i repnim funkcijama.

Teorem 4 (Kolmogorovljev zakon nula-jedan). *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Tada je vjerojatnost svakog repnog događaja 0 ili 1, a svaka repna funkcija je g.s. konstantna.*

Dokaz. Kako je niz $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ nezavisan, onda to povlači da je i familija σ-algebri $\{\sigma(X_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ nezavisna. Također, vrijedi da za svaki n su σ-algebre $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ i $\mathcal{F}_{n+1} = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ isto nezavisne. Nadalje, vrijedi da je $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_{n+1}$, tj. $\mathcal{F}_\infty$ je pravi podskup od $\mathcal{F}_{n+1}$ jer vrijedi

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_n,$$

a $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Zbog toga možemo zaključiti da su $\mathcal{F}_\infty$ i $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ nezavisne za svaki n. To znači da je familija $\{\mathcal{F}_\infty, \sigma(X_1), \sigma(X_2), \dots)\}$ nezavisna, a onda su i $\mathcal{F}_\infty$ i $\sigma(X_1, X_2, \dots) = \mathcal{F}_1$ nezavisne. Iz $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_1$ zaključujemo da je $\mathcal{F}_\infty$ nezavisna sama sa sobom. To sada znači da za proizvoljan $A \in \mathcal{F}_\infty$ vrijedi $P(A \cap A) = P(A) = [P(A)]^2$, a iz toga slijedi $P(A) = 0$ ili $P(A) = 1$. Uzet ćemo sada funkciju f koja je repna funkcija u odnosu na niz (X_n), odnosno σ-algebru $\mathcal{F}_\infty$. Tada za svaki $y \in \mathbb{R}$ događaj $\{f \leq y\}$ je repni događaj, a to znači da ima vjerojatnost 0 ili 1. Neka je F funkcija distribucije funkcije f. Zbog monotonog rasta distribucije F imamo:

$$F(y) = 0 \quad \textit{za neki } y = y_1 \Rightarrow F(y) = 0, \quad \textit{za sve } y < y_1,$$
$$F(y) = 1 \quad \textit{za neki } y = y_2 \Rightarrow F(y) = 1, \quad \textit{za sve } y > y_2.$$

Iz toga slijedi da postoji konstanta c takva da je $F(y) = 0$ za $y < c$ i $F(y) = 1$ za $y \geq c$. Tada je $f = c$ g.s. pa je $c = \sup\{y \in \mathbb{R} : P(f \leq y) = 0\}$. □

3.2 Zakoni velikih brojeva

Također, kako smo spomenuli na početku ovog diplomskog rada, jedan od bitnih teorema u teoriji vjerojatnosti je zakon velikih brojeva. Kažemo da zakoni velikih brojeva govore o asimptotskom ponašanju sume, tj. prosjeka niza nezavisnih slučajnih varijabli. Ovisno o tipu konvergencije, razlikujemo slabe i jake zakone velikih brojeva. U nastavku ćemo navesti slabi i jaki zakon velikih brojeva.

Parcijalne sume niza slučajnih varijabli definiramo s

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

dok **aritmetičku sredinu** s $\overline{X}_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Slabi zakon velikih brojeva govori o konvergenciji po vjerojatnosti.

Teorem 5 (Slabi zakon velikih brojeva - **Hinčin**). [2] *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz, $E|X_1| < \infty$ i $EX_1 = \mu$. Tada*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Sljedeći oblik slabog zakona nazivamo Čebiševljev i kod njega slučajne varijable ne moraju biti jednako distribuirane, čak ni nezavisne nego samo nekorelirane.

Teorem 6 (Slabi zakon velikih brojeva - **Čebišev**). [2] *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nekoreliranih slučajnih varijabli takvih da za neki $C > 0$ vrijedi $EX_n = \mu$ i $VarX_n \leq C$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Teorem 7 (Slabi zakon velikih brojeva - **Feller**)**.** [2] *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *n.j.d. niz takav da*

$$xP(|X_1| > x) \to 0, \quad kad\ x \to \infty. \tag{3.1}$$

Tada

$$\frac{S_n}{n} - E(X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| \le n\}}) \xrightarrow{P} 0.$$

Uvjet (3.1) *je nužan za postojanje niza konstanti* (a_n) *takvih da* $\frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{P} 0.$

Gornji teorem, od hrvatsko-američkog matematičara Vilima Fellera, pokazuje da konačnost prvog momenta nije nužan uvjet za slabi zakon velikih brojeva. U takvoj situaciji je potrebno samo redefinirati smisao limesa.
Različito od slabog zakona, koji govori o konvergenciji prosjeka po vjerojatnosti, jaki zakon velikih brojeva govori o konvergenciji g.s.

Teorem 8 (Jaki zakon velikih brojeva)**.** [2] *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *n.j.d. niz,* $E|X_1| < \infty$ *i* $EX_1 = \mu$. *Tada vrijedi*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{g.s.} \mu.$$

3.3 Centralni granični teorem

Sljedeći važan teorem u teoriji vjerojatnosti koji ćemo navesti je centralni granični teorem koji govori o uvjetima pod kojima niz funkcija distribucije standardiziranih suma slučajnih varijabli konvergira prema funkciji distribucije standardne normalne slučajne varijable.

Teorem 9. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem* m *i varijancom* σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$ *i neka je* $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ $(n \in \mathbb{N})$. *Tada vrijedi*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1) \quad za\ n \to \infty.$$

Dokaz. Neka je $Z_k = \dfrac{X_k - m}{\sigma}$ $(k \in \mathbb{N})$. Tada je

$$Y_n = \frac{S_n - ES_n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

Niz $(Z_k, k \in \mathbb{N})$ je niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli i za sve k vrijedi $EZ_k = 0, E(Z_k^2) = VarZ_k = 1$. Sada ćemo definirati karakterističnu funkciju od Z_k.

$$\varphi_{Z_k}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Kako su Z_k jednako distribuirane, one imaju jednake karakteristične funkcije, tj. $o(t^2)$ ne ovisi o k. Zbog nezavisnosti dobijemo

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{Z_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sada iz donje leme zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

To znači da tvrdnja ovog teorema slijedi iz teorema neprekidnosti. $\square$

Lema 1. *Neka je* $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *takva funkcija da je* $\lim_{n\to\infty} g(n) = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. *Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{g(n)}{n}\right]^n = e^{\lambda}.$$

4 | Zakon ponovljenog logaritma

Zakon ponovljenog logaritma prvi je uveo sovjetski matematičar Aleksandr Jakovlevič Hinčin 1924. godine. Najveći dio svojeg rada je posvetio nezavisnim, jednako distribuiranim slučajnim varijablama. Njegove rezultate vezane uz zakon ponovljenog logaritma je dodatno usavršio Andrej Kolmogorov 1929. godine. On je u svojoj verziji zakona govorio o sumama nezavisnih slučajnih varijabli.

Mnogo napisanih radova možemo pronaći o zakonu ponovljenog logaritma i to za razne vrste zavisnih struktura i stohastičkih procesa. Nabrojat ćemo neke značajnije radove. Generalizacija zakona ponovljenog logaritma pripala je američkom matematičaru P. Hartmanu i mađarskom matematičaru A. Wintneru 1940. godine i oni u svojoj generalizaciji govore o slučajnim šetnjama s prirastima koje imaju očekivanje nula i konačnu varijancu. Nakon njih je 1948. godine matematičar Kai Lai Chung dokazao zakon ponovljenog logaritma za apsolutnu vrijednost Brownovog gibanja. Veliki napredak u povijesti zakona ponovljenog logaritma se dogodio 1964. godine s načelom invarijantnosti kad je Volker Strassen pokazao da se zakon može izvesti iz konvergencije slučajnih procesa u funkcijskim prostorima. Njegov rad je povezao sam zakon s općim načelima slabe konvergencije i funkcionalne analize. Nadalje, spomenimo da je W. F. Stout generalizirao zakon na stacionarne ergodičke martingale 1970. godine. Zanimljiva verzija zakona ponovljenog logaritma je napisana 1987. godine od strane matematičara V.Vovka koja je o Kolmogorovljevom slučajnom nizu i ova verzija je posebno značajna jer izlazi iz okvira klasične teorije vjerojatnosti. Danas se posebno koristi u financijskoj matematici, slučajnim šetnjama i statističkoj mehanici te je ključan rezultat za razumijevanje slučajnih procesa.
Zakon ponovljenog logaritma govori o maksimalnim mogućim odstupanjima parcijalnih suma nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli od njihove očekivane vrijednosti. Također, on daje preciznu granicu veličine oscilacija te ističe da iako sume neće rasti neograničeno, njihova maksimalna odstupanja su reda veličine $\sqrt{2n \ln \ln n}$.

Sada ćemo navesti jedan način na koji možemo objasniti zakon ponovljenog logaritma.

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ $(n \in \mathbb{N})$. Sada nas zanima brzina konvergencija niza $(S_n, n \in \mathbb{N})$ gdje su

X_n ($n \in \mathbb{N}$) jednako distribuirane s očekivanjem 0 i varijancom 1. Vrijedi da je

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{(2n \ln \ln n)}}$$

repna funkcija pa iz Kolmogorovljevog zakona nula-jedan slijedi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{(2n \ln \ln n)}} = c \text{ (g.s.)},$$

gdje je c konstanta. Zakon ponovljenog logaritma tvrdi da je ta konstanta $c = 1$. To bi onda značilo da povećanjem n dolazi do naizmjenične oscilacije S_n između $\pm\sqrt{2n \ln \ln n}$ beskonačno mnogo puta, ali neće premašiti te granice. Možemo to reći i na način da s vjerojatnošću 1, S_n neće rasti brže od $\sqrt{2n \ln \ln n}$, ali će se približiti toj granici beskonačno mnogo puta.

Spomenut ćemo još jedan način na koji možemo objasniti zakon ponovljenog logaritma.

Kao što smo već spomenuli u ovom radu, zakon velikih brojeva govori da prosjek tih suma, kada je očekivanje 0 i varijanca 1, konvergira prema 0 po vjerojatnosti i g.s. Isto tako kada je očekivanje 0 i varijanca 1 onda centralni granični teorem kaže da $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ konvergira po distribuciji prema standardnoj normalnoj distribuciji. Zbog toga možemo slobodno reći da se zakon ponovljenog logaritma nalazi između gore navedenih zakona. Nadalje, Kolmogorovljev zakon nula-jedan govori da za bilo koju fiksnu vrijednost M, vjerojatnost da se dogodi događaj $\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M$, je 0 ili 1. Znamo da vrijedi

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M\right) \geq \limsup_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M\right),$$

a prema centralnom graničnom teoremu slijedi da za velike n vrijedi

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M\right) \to P(\mathcal{N}(0,1) \geq M).$$

Stoga, možemo zaključiti da vrijedi

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M\right) \geq P(\mathcal{N}(0,1) \geq M) > 0.$$

Zbog toga što vrijedi gore navedena nejednakost je

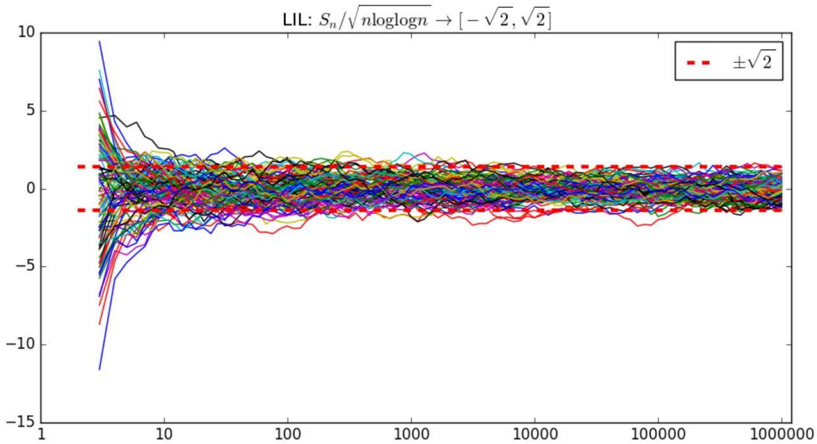
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty \quad \text{s vjerojatnošću } 1$$

odnosno

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty \quad \text{s vjerojatnošću } 1.$$

Iz jednakosti
$$\frac{S_{2n}}{\sqrt{n}} - \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{S_{2n} - S_n}{\sqrt{n}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$
i toga da slučajne varijable $\frac{S_{2n} - S_n}{\sqrt{n}}$ i $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ konvergiraju po distribuciji prema standardnoj normalnoj dolazimo do zaključka da gore definirani lim sup i lim inf impliciraju da ti izrazi ne mogu konvergirati niti po vjerojatnosti niti gotovo sigurno. Zakon ponovljenog logaritma daje faktor skaliranja gdje dva ograničenja postaju različita:
$$\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} \xrightarrow{P} 0 \text{ i } \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} \not\to 0 \text{ g.s.} \quad \text{za } n \to \infty.$$
Dakle, iako je apsolutna vrijednost izraza $\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$ manja od bilo kojeg unaprijed definiranog $M > 0$, s vjerojatnošću koja teži u 1, ona će g.s. biti veća od M beskonačno puta, tj. ta veličina će g.s. posjećivati okolinu točka iz intervala $[-1, 1]$

Za što bolje razumijevanje zakona ponovljenog logaritma prikazat ćemo ga i grafički. Slika prikazuje slučajne sume skalirane po $\sqrt{n \ln \ln n}$ koji su ograničeni granicama $\pm\sqrt{2}$.



Slika 4.1: Zakon ponovljenog logaritma [5]

Osim što se zakon ponovljenog logaritma koristi u teoriji vjerojatnosti on se primijenjuje i u teoriji brojeva. Njegove činjenice o ponašanju sume slučajnih varijabla i njihovih fluktuacija mogu se primijeniti na probleme u teoriji brojeva. Sada ćemo navesti neke od poznatijih primjena. Prvo ćemo spomenuti kako zakon ponovljenog logaritma pomaže u određivanju granica fluktuacija u problemima koji se interpretiraju kao slučajne šetnje ili pseudo-slučajni procesi. Jedan takav primjer je proučavanje distribucije kvadratnih razmaka između uzastopnih prostih brojeva. Isto tako nam zakon ponovljenog logaritma može pomoći u uviđanju pogrešaka kod aproksimacije određenih brojevnih funkcija kao npr. $\pi(x)$. Ona broji koliko ima prostih brojeva manjih ili jednakih od x. Spomenut ćemo još jednu primjenu zakona ponovljenog logaritma. Koristimo ga kada analiziramo vjerojatnosnu funkciju djelitelja $d(n)$. Ova funkcija broji broj djelitelja broja n i koristimo zakon kao pomoć u određivanju granica fluktuacija te funkcije kod velikih intervala.

Sada ćemo navesti dva iskaza zakona ponovljenog logaritma. Prvi teorem, kojeg nazivamo Kolmogorovljev, ima pretpostavku o nezavisnim slučajnim varijablama i njega ćemo kasnije u radu dokazati dok drugi teorem, poznat pod nazivom Hartman-Wintnerov teorem, ima pretpostavku o nezavisnim i jednako distribuiranim slučajnim varijablama i detaljnije opisuje akumuliranje točaka u limesu.

Teorem 10 (**Zakon ponovljenog logaritma**). [6] *Neka je $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je $EX_n = 0$ i $E(X_n^2) < \infty$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za svaki n neka je $c_n > 0$ takav da vrijedi $P(|X_n| \leq c_n) = 1$ i stavimo*

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ \ s_n = \sqrt{\operatorname{Var} S_n},\ \ t_n = \sqrt{2 \ln \ln s_n^2}.$$

Ako je $\lim_{n\to\infty} s_n^2 = \infty$ i $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_n t_n}{s_n} = 0$, tada vrijedi

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\, s_n^2 \ln \ln s_n^2}} = 1\right) = 1.$$

Teorem 11 (Hartman-Wintner). [3] *Pretpostavimo da su $X, X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable s očekivanjem 0 i konačnim varijancama σ^2. Stavimo da je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ za svaki $n \geq 1$. Tada vrijedi*

$$\limsup_{n\to\infty} (\liminf_{n\to\infty}) \frac{S_n}{\sqrt{2 s_n^2 \ln \ln s_n^2}} = +1(-1) \quad (g.s.). \tag{4.1}$$

Također, vrijedi i obrat. Ako je

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n \ln \ln n}} < \infty\right) > 0,$$

onda vrijedi $EX^2 < \infty$, $EX = 0$ i jednakost (5.1)

4.1 Ideja dokaza

Dokaz zakona ponovljenog logaritma je podijeljen u nekoliko koraka. Prvi ključni korak je iskazati i dokazati Kolmogorovljev teorem gornje i donje eksponencijalne granice za repne vjerojatnosti. U ovom radu ćemo dokazati samo gornju granicu. Zatim treba te granice primijeniti na Borelov-Cantellijeve leme za sume za geometrijski rastući podniz parcijalnih suma. Prva Borel-Cantellijeva lema uz konvergenciju daju dokaz za gornju granicu limsup tog podniza. Kako parcijalne sume nisu međusobno nezavisne, moramo ustanoviti i divergentan dio za prirast. Za to će biti potrebna druga Borel-Cantellijeva lema uz neke dodatne argumente.

4.2 Eksponencijalne granice

Neka su $Y_1, Y_2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable s očekivanjem 0. Definiramo $\sigma_k^2 = \mathrm{Var}\, Y_k$ za $k \geq 1$ i $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$ za $n \geq 1$. Sada pretpostavimo da za $c > 0$ vrijedi

$$|Y_k| \leq cs_n \ (g.s.) \quad za\ k = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 1.$$

Nadalje, iskazat ćemo i dokazati lemu za gornju eksponencijalnu granicu. Prije toga navedimo jednu važnu nejednakost u teoriji vjerojatnosti, a to je Markovljeva nejednakost.

Korolar 1 (**Markovljeva nejednakost**). *Za slučajnu varijablu X i proizvoljne $p > 0$ i $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|^p}{\varepsilon^p}.$$

Napomena 3. *Možemo primijetiti da ako gornji korolar primijenimo na $X - EX$ za $p = 2$ dobijemo Čebiševljevu nejednakost.*

Teorem 12 (Teorem o dominiranoj konvergenciji). [6] *Ako $X_n \to X$ g.s. i $|X_n| \leq Y$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $E|Y| < \infty$, onda vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = E(\lim_{n\to\infty} X_n) = EX.$$

Lema 2 (**Gornja eksponencijalna granica**). *Neka je $0 < x < 1/c$. Tada vrijedi*

$$P\left(\sum_{k=1}^n Y_k > xs_n\right) \leq \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{xc}{2}\right)\right\}.$$

Dokaz. Neka je Y proizvoljna slučajna varijabla takva da je $EY = 0$ i $|Y| \leq c$ g.s. te $\mathrm{Var} Y = EY^2 = \sigma^2$, a $\sigma^2 > 0$. Kako je $|Y| \leq c$ onda je $E(|Y|^m) \leq c^m$ za sve m i vrijedi

$$|E(Y^r)| \leq c^{r-2}E(Y^2) = c^{r-2}\sigma^2 \quad za\ r \geq 2.$$

Sada ćemo iskoristiti teorem o dominiranoj konvergenciji te za $0 < tc \leq 1$ slijedi

$$\begin{aligned}
E[e^{tY}] &= 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{t^r E(Y^r)}{r!} \leq 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{t^r c^{r-2}\sigma^2}{r!} \\
&= 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{3} + \frac{t^2c^2}{3\cdot 4} + \ldots\right) \\
&= 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left[1 + \frac{tc}{3}\left(1 + \frac{tc}{4} + \frac{t^2c^2}{4\cdot 5} + \ldots\right)\right] \\
&< 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left[1 + \frac{tc}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j}\right] < 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right).
\end{aligned}$$

Kada iskoristimo činjenicu da kod razvoja e^t u red potencija vrijedi $1 + t \leq e^t$ pa za $t \geq 0$ dobivamo

$$E[e^{tY}] < \exp\left\{\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right)\right\}, \quad za\ 0 < tc \leq 1. \tag{4.2}$$

Nadalje, rekli smo da vrijedi $E(Y^r) \geq -c^{r-2}\sigma^2$, za $r \geq 2$, pa onda imamo slično kao i u (4.1)

$$E[e^{tY}] \geq 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{tc}{2}\right). \tag{4.3}$$

Kako vrijedi nejednakost $e^{t(1-t)} \leq 1 + t$, [1] za $t \geq 0$, dobivamo pomoću nje i (4.2)

$$E[e^{tY}] > \exp\left\{\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{tc}{2}\right)\left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{tc}{2}\right)\right)\right\}. \tag{4.4}$$

Također, zbog toga što je $0 < \sigma^2 \leq c^2$ vrijedi

$$\left(1 - \frac{tc}{2}\right)\left[1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{tc}{2}\right)\right] > 1 - \frac{tc}{2} - \frac{t^2\sigma^2}{2} \geq 1 - tc.$$

To onda znači da iz nejednakosti (4.3) slijedi

$$E[e^{tY}] > \exp\left\{\frac{t^2\sigma^2}{2}(1 - tc)\right\}, \quad za\ 0 < tc \leq 1. \tag{4.5}$$

Na početku ovog poglavlja smo spomenuli da su $Y_1, \ldots, Y_n$ nezavisne slučajne varijable. Zbog te njihove nezavisnosti imamo

$$E\left[\exp\left\{\frac{tS_n}{s_n}\right\}\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[\exp\left\{\frac{tY_k}{s_n}\right\}\right]. \tag{4.6}$$

Sada pomoću te jednakosti (4.5) i nejednakosti (4.1) imamo za $0 < tc \leq 1$ i $Y = \dfrac{Y_k}{s_n}$

$$E\left[\exp\left\{\frac{tS_n}{s_n}\right\}\right] < \exp\left\{\frac{t^2}{2s_n^2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}Y_k\right\} = \exp\left\{\frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right)\right\}.$$

To sada uzmemo u kombinaciju s nejednakosti (4.4) i dobivamo za $0 < tc \leq 1$

$$\exp\left\{\frac{t^2}{2}(1 - tc)\right\} < E\left[\exp\left\{\frac{tS_n}{s_n}\right\}\right] < \exp\left\{\frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{tc}{2}\right)\right\}. \tag{4.7}$$

Lagano se dokaže da vrijedi

$$E\left[\exp\left\{\frac{tS_n}{s_n}\right\}\right] \geq \int \exp\left\{\frac{tS_n}{s_n}\right\}dP \geq e^{tx}P\left(\frac{S_n}{s_n} > x\right).$$

Sada iz toga i desne nejednakosti u (4.6) slijedi

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_n}{s_n} > x\right) &\leq e^{-tx}E\left[\exp\left\{\frac{S_n}{s_n}\right\}\right] \\ &< \exp\left\{-x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3c}{4}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{xc}{2}\right)\right\}, \quad za\ x \leq 1/c \text{ i } t = x. \end{aligned}$$

A to je upravo ono što smo trebali dokazati. □

[1] za $t \geq 1$ je očita nejednakost dok za $0 \leq t < 1$ vrijedi $\ln(1+t) = t - (t^2/2) + (t^3/3) - \ldots \geq t - (t^2/2) \geq t - t^2$

Sada ćemo iskazati donju eksponencijalnu granicu koju nećemo dokazivati.

Lema 3 (**Donja eksponencijalna granica**). [3] *Pretpostavimo da je* $\gamma > 0$. *Tada postoje konstante* $x(\gamma)$ *i* $\kappa(\gamma)$ *takve da za* $x(\gamma) \leq x \leq \kappa(\gamma)/c$,

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k > xs_n\right) \geq \exp\left\{-\frac{x^2}{2}(1+\gamma)\right\}.$$

4.3 Borel-Cantellijeve leme

Nakon što smo iskazali teoreme za gornju i donju eksponencijalnu granicu možemo te granice primijeniti na Borel-Cantellijeve leme za sume geometrijski rastućih podnizova.

Lema 4. *Neka su* $X, X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem* 0, *konačnom varijancom* σ^2 *i parcijalnim sumama* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$. *Nadalje, neka je* $\lambda > 1$ *i definiramo* $n_k = [\lambda^k]$. *Tada je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|S_{n_k}| > \varepsilon\sqrt{n_k \ln \ln n_k}) < \infty \quad \text{za } \varepsilon > \sigma\sqrt{2}, \tag{4.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(S_{n_k} > \varepsilon\sqrt{n_k \ln \ln n_k}) = \infty \quad \text{za } \varepsilon < \sigma\sqrt{2}. \tag{4.9}$$

Dokaz ove leme je prilično tehnički pa ćemo pogledati slučaj s normalnim slučajnim varijablama.

4.3.1 Normalne slučajne varijable

Neka su $X_1, X_2, \ldots$ normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0, varijancom σ^2 i parcijalnim sumama S_n, $n \geq 1$.
Primjenjujući eksponencijalne granice slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n > \varepsilon\sqrt{n \ln \ln n}) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma}{\varepsilon\sqrt{\ln \ln n}} \cdot (\ln n)^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} = \infty$$

Možemo vidjeti iz toga da ne možemo iskoristiti Borel-Cantellijevu lemu na cijeli niz. Stoga ćemo pronaći neki njegov podniz na koji ćemo iskoristiti Borel-Cantellijevu lemu.
Prema tome, neka je $\lambda > 1$, $n_k = [\lambda^k]$ i uzmemo k_0 dovoljno veliki tako da vrijedi

$$n_{k+1} > n_k + 1, \quad 1 < \frac{n_{k+1}}{n_k} < \lambda^2 \quad i \quad 1 < \frac{n_{k+1} \ln \ln n_{k+1}}{n_k \ln \ln n_k} < \lambda^3.$$

Napomena 4. *Ovdje treba imati na umu da se gornji zahtjevi uvijek mogu ispuniti jer vrijedi* $n_{k+1}/n_k \to \lambda > 1$ *za* $k \to \infty$. *Odnosno, trebamo uzeti u obzir da je* λ *"blizu" 1*

Za dokaz nejednakosti (4.1) koristimo gornje zahtjeve i gornju eksponencijalnu granicu

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k > x\sigma\sqrt{n}\right) \begin{cases} \leq \dfrac{1}{x}\cdot \exp\left\{-\dfrac{1}{2}x^2\right\}, & za\ x > 0 \\ \geq \dfrac{1}{2x}\cdot \exp\left\{-\dfrac{1}{2}x^2\right\}, & za\ x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Tada slijedi

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{\infty} P(|S_{n_k}| > \varepsilon\sqrt{n_k \ln\ln n_k} \quad &\leq \quad 2\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\sigma}{\varepsilon\sqrt{\ln\ln n_k}} \cdot (\ln n_k)^{-\dfrac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \\ \leq \frac{2\sigma}{\varepsilon}\sum_{k=k_0}^{\infty} (log(\lambda^{k-1}))^{-\dfrac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \quad &= \quad \frac{2\sigma}{\varepsilon}\sum_{k=k_0}^{\infty} ((k-1)\ln\lambda)^{-\dfrac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Dok za donju granicu vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{\infty} P(S_{n_k} > \varepsilon\sqrt{n_k \ln\ln n_k}) \quad &\geq \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\sigma}{2\varepsilon\sqrt{\ln\ln n_k}} \cdot (\ln n_k)^{-\dfrac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \\ &\geq \quad \frac{\sigma}{2\varepsilon}\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(\lambda\ \ln k)}}(k\ \ln\lambda)^{-\dfrac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

4.4 Dodatne pomoćne tvrdnje

Prije dokaza zakona ponovljenog logaritma potrebno je iskazati još nekoliko tvrdnji koje ćemo koristiti u samom dokazu.

Korolar 2. [6] *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable s konačnim drugim momentima. Ako je $EX_k = 0$ za $k = 1, \ldots, n$, onda za proizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon) \leq 2P(S_n \geq \varepsilon - \sqrt{2VarS_n}).$$

Lema 5. [6] *Neka je $(b_n, n \in \mathbb{N})$ neopadajući niz pozitivnih realnih brojeva takav da $b_n \to \infty$ i $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$ kada $n \to \infty$. Tada za svaki $c > 1$ postoji rastući (od nekog člana) niz prirodnih brojeva $(n_k, k \in \mathbb{N})$ takav da je $b_{n_k} \sim c^k$, tj. $\dfrac{b_{n_k}}{c^k} \to 1$ kada $k \to \infty$.*

Dokaz. Na početku, možemo primijetiti da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da u svakom intervalu koji je oblika (c^k, c^{k+1}) je sadržan barem jedan b_n za svaki $k > k_0$. Kada to ne bi vrijedilo onda bi $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \geq c$, a $c > 1$. To je u kontradikciji s pretpostavkom ove leme, odnosno u kontradikciji s $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$ kada $n \to \infty$.

Stavimo sada da je $n_1 = n_2 = \ldots = n_{k_0} = 1$ te definiramo n_j kao najmanji prirodan broj takav da je $b_{n_j} \geq c^j$ za $j > k_0$. Tada vrijedi $n_j < n_{j+1}$ za sve $j > k_0$, a to znači da je niz $(n_j, j \in \mathbb{N})$ rastući od nekog člana (tj. strogo raste za $j > k_0$). Stoga, za $j > k_0$ vrijedi

$$\frac{b_{n_j - 1}}{b_{n_j}} < \frac{c^j}{b_{n_j}} \leq 1.$$

Koristeći pretpostavku leme $\frac{b_{n_{j-1}}}{b_{n_j}} \to 1$ dobivamo $b_{n_j} \sim c^j$, a to je upravno ono što smo htjeli dokazati. □

Lema 6. [6] *Neka je* $0 < b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *i neka* $b_n \to \infty$ *kada* $n \to \infty$. *Ako je* $\frac{b_n}{b_{n-1}} \sim c \geq 1$, *onda* $\frac{\ln b_n}{\ln b_{n-1}} \to 1$ *kada* $n \to \infty$.

Dokaz. Vrijedi

$$\frac{\ln b_n}{\ln b_{n-1}} = \frac{\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right) + \ln b_{n-1}}{\ln b_{n-1}}.$$

Tvrdnja leme slijedi iz $\ln \frac{b_n}{b_{n-1}} \to \ln c$ i $\ln b_n \to \infty$ kada $n \to \infty$. □

Lema 7. [6] *Neka je* $A = [a_{nj}]$ $(n, j \in \mathbb{N})$ *beskonačna realna matrica. Pretpostavimo da je* $\lim_{n\to\infty} a_{nj} = 0$ *za svaki fiksni* j *i da postoji* $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ *takvo da je* $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \leq c$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$. *Ako je* $(x_n, n \in \mathbb{N})$ *ograničeni niz u* $\mathbb{R}$, *definirajmo*

$$y_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada vrijedi:

1. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, *tada je* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

2. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} = 1$ *i ako je* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ $(x \in \mathbb{R})$, *tada je* $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

4.5 Dokaz zakona ponovljenog logaritma

Nakon što smo iskazali tvrdnje koje će pomoći u dokazu zakona ponovljenog logaritma sada ga možemo dokazati.

Dokaz. Spomenuli smo ranije u dokazu eksponencijalne granice da vrijedi

$$\mathrm{Var} X_n = E(X_n^2) \leq c_n^2 = o\left(\frac{s_n^2}{\ln \ln s_n^2}\right), \text{ tj.}$$

$$\frac{(VarX_n)\ \ln\ln s_n^2}{s_n^2} = o(1).$$

Sada koristeći činjenicu da je $\mathrm{Var}X_n = s_n^2$ i gornju jednakost dobivamo da je

$$\frac{s_{n+1}^2}{s_n^2} = 1 + \frac{VarX_{n+1}}{s_n^2} = 1 + \frac{s_{n+1}^2}{s_n^2} \cdot \frac{o(1)}{\ln\ln s_{n+1}^2},$$

odnosno

$$\frac{s_{n+1}^2}{s_n^2}\left[1 - \frac{o(1)}{\ln\ln s_{n+1}^2}\right] = 1.$$

U ovoj jednakosti za nazivnik $\ln\ln s_{n+1}^2$ vrijedi $\ln\ln s_{n+1}^2 \to \infty$ kada $n \to \infty$, a to znači da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}^2}{s_n^2} = 1. \tag{4.10}$$

Sada uzmimo proizvoljne ε i δ koji zadovoljavaju $1 > \varepsilon > \delta > 0$. Teorem ćemo dokazati u dva koraka i to na način da dokažemo sljedeće dvije relacije:

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{S_n > (1+\delta)s_n t_n\}) = 0 \tag{4.11}$$

i

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{S_n > (1-\varepsilon)s_n t_n\}) = 1. \tag{4.12}$$

Prvo ćemo dokazati (4.10). Neka je c fiksan takav da vrijedi $1+\delta > c > 1$. S tako odabranim c i dokazanom jednakosti (4.9) možemo zaključiti da niz (s_n) zadovoljava uvjete *Leme 5*. To znači da postoji rastući (od nekog člana) niz $(n_k, k \in \mathbb{N})$ takav da je $s_{n_k} \sim c^k$. Također, slijedi iz *Leme 6* $t_{n_{k-1}} \sim t_{n_k}$, a to zajedno s $s_{n_k} \sim c^k$ daje

$$(1+\delta)s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}} \sim \frac{1+\delta}{c} s_{n_k}t_{n_k}. \tag{4.13}$$

Sada definiramo $S_{n_k}^*$ na sljedeći način: $S_{n_k}^* = \max_{1\le j\le n_k} S_j$. Tada vrijedi

$$\limsup_{n\to\infty}\{S_n > (1+\delta)s_n t_n\} \subset \limsup_{k\to\infty}\{S_{n_{k+1}}^* > (1+\delta)s_{n_k}t_{n_k}\}. \tag{4.14}$$

Znamo da to vrijedi jer ako uzmemo neku točku s lijevoj strani od (4.13) onda možemo naći proizvoljno veliki n takav da je $\dfrac{S_n}{s_n t_n} > 1+\delta$. Ustvari postoji beskonačno mnogo takvih n. Nadalje, ako vrijedi $n_k < n \le n_{k+1}$ i zbog činjenice da je niz $(s_n t_n, n \in \mathbb{N})$ rastući imamo

$$\frac{S_n}{s_n t_n} \le \frac{S_{n_{k+1}}^*}{s_{n_k}t_{n_k}}.$$

Zbog toga možemo zaključiti da (4.13) stvarno vrijedi. Gore smo pretpostavili da vrijedi $1+\delta > c > 1$. Sada odaberemo $\gamma > 0$ tako da je $\dfrac{1+\delta}{c} > 1+\gamma$. Zbog relacije (4.12) vrijedi

$$\limsup_{k\to\infty}\{S^*_{n_{k+1}} > (1+\delta)s_{n_k}t_{n_k}\} \subset \limsup_{k\to\infty}\{S^*_{n_k} \geq (1+\gamma)s_{n_k}t_{n_k}\}. \tag{4.15}$$

Možemo iz svega do sad navedenog zaključiti da će nam za dokazivanje relacije (4.10) biti dovoljno dokazati da je

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{S^*_{n_k} \geq (1+\gamma)s_{n_k}t_{n_k}\}) = 0.$$

U dokazivanju ove jednakosti koristit ćemo prvu Borel-Cantellijevu lemu koja nam kaže da je dovoljno dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(S^*_{n_k} \geq (1+\gamma)s_{n_k}t_{n_k}) < \infty.$$

Isto tako iskoristit ćemo *Korolar 2* te iz njega slijedi

$$\begin{aligned} P(S^*_{n_k} \geq (1+\gamma)s_{n_k}t_{n_k}) &\leq 2P(S_{n_k} \geq (1+\gamma)s_{n_k}t_{n_k} - \sqrt{2}s_{n_k}) \\ &= 2P\left(S_{n_k} \geq s_{n_k}t_{n_k}\left(1+\gamma-\frac{\sqrt{2}}{t_{n_k}}\right)\right). \end{aligned}$$

To znači da za dovoljno velike k vrijedi

$$P(S^*_{n_k} \geq (1+\gamma)s_{n_k}t_{n_k}) \leq 2P\left(S_{n_k} \geq s_{n_k}t_{n_k}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\right). \tag{4.16}$$

Prvo želimo iz nejednakosti (4.15) saznati koliko iznosi desna strana nejednakosti. Za to nam je potrebno iskoristiti pretpostavke teorema koje kažu da za proizvoljni $\alpha > 0$ postoji n_0 takvo da je $\dfrac{c_n t_n}{s_n} < \alpha$ za $n > n_0$.
Zatim za $n_0 < m < n$ vrijedi

$$\frac{c_m t_n}{s_n} < \alpha\,\frac{s_m t_n}{t_m s_n} < \alpha.$$

Kako $\dfrac{t_n}{s_n} \to 0$ *za* $n \to \infty$, onda navedene nejednakosti vrijede i za $m \leq n_0$ ako je n dovoljno veliki.
Sada stavimo $d_n = \max_{1\leq j\leq n} c_j$ i iz toga možemo zaključiti da je $\lim_n \dfrac{d_n t_n}{s_n} = 0$.
Nadalje, definiramo $\varepsilon_k = t_{n_k}\left(1+\dfrac{\gamma}{2}\right)$. Tada vrijedi

$$\frac{\varepsilon_k d_{n_k}}{s_{n_k}} = \frac{d_{n_k}t_{n_k}}{s_{n_k}}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right) \to 0 \quad \text{kada } k \to \infty \tag{4.17}$$

To znači da je $0 < \frac{\varepsilon_k d_{n_k}}{s_{n_k}} \leq 1$ za dovoljno velike k.
Budući da vrijedi

$$P\left(\left|\frac{X_j}{s_{n_k}}\right| \leq \frac{d_{n_k}}{s_{n_k}}\right) = 1 \quad za\ j = 1, \ldots, n_k$$

onda slijedi iz gornje nejednakosti

$$P\left(S_{n_k} \geq s_{n_k} t_{n_k}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\right) < \exp\left[-\frac{t_{n_k}^2\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_k d_{n_k}}{2s_{n_k}}\right)\right],$$

za dovoljno velike k. Zbog relacije (4.16) možemo reći da postoji $\beta > 0$ takav da za sve dovoljno velike k vrijedi

$$\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^2\left(1-\frac{\varepsilon_k d_{n_k}}{2s_{n_k}}\right) > 1+\beta > 1.$$

Korištenjem te činjenice i toga kako smo definirali t_{n_k} u iskazu teorema, dobivamo da za dovoljno velike k vrijedi

$$P\left(S_{n_k} \geq s_{n_k} t_{n_k}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\right) < \exp\{-(1+\beta)\ \ln\ln s_{n_k}^2\}.$$

Niz (n_k) smo odabrali na način da zadovoljava pretpostavke *Leme 5* pa onda iz nje slijedi $c^k \leq s_{n_k}$, a tada iz toga dobijemo

$$P\left(S_{n_k} \geq s_{n_k} t_{n_k}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\right) < \exp\{-(1+\beta)\ \ln\ln c^{2k}\} = (2k\ \ln c)^{-(1+\beta)}.$$

Kako je $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\beta)} < \infty$ onda možemo zaključiti da prva relacija koju smo trebali dokazati vrijedi, tj. vrijedi relacija (4.10).
Preostaje nam još dokazati drugu relaciju, odnosno relaciju (4.11).
Neka su ε, δ, c i niz (n_k) definirani kao kod dokaza relacije (4.3). Budući da vrijedi $1 > \varepsilon > \delta > 0$ i uzmemo $c > 1$ dovoljno veliki da vrijedi

$$1 > (1-\delta)\left(\sqrt{1-\frac{1}{c^2}}\right) - \frac{2}{c} > 1-\varepsilon. \tag{4.18}$$

Nadalje, kako smo uzeli niz (n_k) koji je definirani kao u prvom dijelu dokaza, onda i ovdje vrijedi $s_{n_k} \sim c^k$ i neka je c fiksan. Tada je

$$\frac{s_{n_{k+1}}}{s_{n_k}} \sim c, \text{ odnosno } \ln\frac{s_{n_{k+1}}^2}{s_{n_k}^2} \sim \ln c^2.$$

Sada ćemo iskoristiti *Lemu 7*, pri tome je $s_{n_0}^2 = 1$, te nezavisnost varijabla i dobivamo

$$\ln s_{n_k}^2 = \ln\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{s_{n_j}^2}{s_{n_{j-1}}^2}\right) = k\left[\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\ln\left(\frac{s_{n_j}^2}{s_{n_{j-1}}^2}\right)\right] \sim k\ \ln c^2 = \ln c^{2k},$$

tj. vrijedi

$$\ln s_{n_k}^2 \sim \ln c^{2k} \quad za\ k \to \infty.$$

Definiramo sada u_k^2 i to na način da je $u_k^2 = s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2$. Sada kada to zapišemo na drugačiji način dobivamo

$$u_k^2 = s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2 = s_{n_k}^2 \left(1 - \frac{s_{n_{k-1}}^2}{s_{n_k}^2}\right) \sim s_{n_k}^2 \left(1 - \frac{1}{c^2}\right).$$

Po uzoru na dokaz *Leme 6* dobivamo

$$v_k^2 = (2 \ln \ln u_k^2) \sim 2 \ln \left[\ln s_{n_k}^2 + \ln \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)\right] \sim 2 \ln \ln s_{n_k}^2 = t_{n_k}^2.$$

Također, neka je $A_k = \{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\delta)u_k v_k\}$.
Sada je potrebno dokazati da je $P(\limsup_k A_k) = 1$. Kako su varijable $S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$ nezavisne za $k = 1, 2, \ldots$ onda su i događaji $A_1, A_2, \ldots$ nezavisni.
Koristit ćemo Borelov zakon nula-jedan koji kaže da je dovoljno dokazati da je $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$. Stavimo da je $\varepsilon_k = (1-\delta)v_k$, a kako vrijedi $0 < \delta < 1$ i $v_k \sim t_{n_k}$ onda imamo da $\varepsilon_k \to \infty$ kada $k \to \infty$. Nadalje, neka je

$$a_k = \max\{c_j; n_{k-1} < j \leq n_k\}.$$

Tada vrijedi

$$P\left(\left|\frac{X_j}{u_k}\right| \leq \frac{a_k}{u_k}\right) = 1 \quad za\ n_{k-1} < j \leq n_k.$$

Kako je $a_k = c_n$ za neki n i kako taj n zadovoljava $n_{k-1} < n \leq n_k$ onda iz toga slijedi

$$\frac{a_k}{u_k} = \frac{c_n t_n}{s_n} \frac{s_n}{t_n u_k} \sim \frac{c_n t_n}{s_n} \frac{s_n}{t_n s_{n_k}} \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Iz toga se jasno vidi da $\lim_k \dfrac{a_k}{u_k} = 0$.
Kako smo ε_k definirali kao $\varepsilon_k = (1-\delta)v_k$ i $\varepsilon_k \to \infty$ onda je $\lim_k (1-\delta)v_k = \infty$. Sada iz *Leme 3* i

$$1 + \gamma = (1-\delta)^{-1}$$

slijedi da za dovoljno velike vrijednosti k vrijedi

$$\begin{aligned} P(A_k) &> \exp\left[-\frac{1-\delta}{2} v_k^2\right] = \exp\left[-(1-\delta) \ln \ln u_k^2\right] = \\ &= (\ln u_k^2)^{-(1-\delta)} \sim (\ln c^{2k})^{-(1-\delta)} = \\ &= \frac{1}{(2k \ln c)^{(1-\delta)}}. \end{aligned}$$

Budući da red $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{(1-\delta)}}$ divergira, imamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty \Rightarrow P(\limsup_{k \to \infty} A_k) = 1.$$

Sada definirajmo

$$B_k = \{|S_{n_{k-1}}| \leq 2s_{n_{k-1}n_{k-1}}\}.$$

Pretpostavke teorema će biti istinite i ako svaku varijablu X_n zamijenimo sa $-X_n$. Kako smo dokazali da vrijedi relacija (4.10) iz toga tada dobivamo

$$P(\limsup_{n\to\infty} \{-S_n > (1+\delta)s_n t_n\}) = 0.$$

Tada to znači da vrijedi

$$P(\limsup_{n\to\infty} \{|S_n| > (1+\delta)s_n t_n\}) = 0.$$

Zbog $0 < \delta < 1$ slijedi

$$P(\limsup_{k\to\infty} B_k^c) = 0.$$

Prema tome je $P(\liminf_{k\to\infty} B_k) = 1$. Zbog činjenice da je

$$(\limsup_{k\to\infty} A_k) \cap (\liminf_{k\to\infty} B_k) \subset \limsup_{k\to\infty} (A_k \cap B_k)$$

dobijemo

$$P(\limsup_{k\to\infty} (A_k \cap B_k)) = 1. \tag{4.19}$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} A_k \cap B_k &= \{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\delta)u_k v_k\} \cap \{|S_{n_{k-1}}| \leq 2s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}}\} \subset \\ &\subset \{S_{n_k} > (1-\delta)u_k v_k + S_{n_{k-1}}\} \cap \{S_{n_{k-1}} \geq -2s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}}\} \subset \\ &\subset \{S_{n_k} > (1-\delta)u_k v_k - 2s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}}\}. \end{aligned}$$

Gore u dokazu smo pokazali da vrijede relacije $u_k^2 \sim s_{n_k}^2 \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)$ i $v_k \sim t_{n_k}$ te koristevši *Lemu 6* dobivamo

$$s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}} \sim \frac{1}{c} s_{n_k}t_{n_k} \quad \text{(relacija (4.5))}$$

pa iz toga slijedi

$$\begin{aligned} (1-\delta)u_k v_k - 2\,s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}} &\sim (1-\delta)s_{n_k}t_{n_k}\sqrt{1-\frac{1}{c^2}} - 2\,s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}} \sim \\ &\sim s_{n_k}t_{n_k}\left[(1-\delta)\sqrt{1-\frac{1}{c^2}} - \frac{2}{c}\right]. \end{aligned}$$

Varijablu c smo izabrali na način da bude zadovoljena (4.17) pa zbog toga za dovoljno velike k vrijedi

$$A_k \cap B_k \subset \{S_{n_k} > (1-\varepsilon)s_{n_k}t_{n_k}\}. \tag{4.20}$$

Sada iz (4.18) i (4.19) slijedi

$$P(\limsup_{k\to\infty}\{S_{n_k} > (1-\varepsilon)s_{n_k}t_{n_k}\}) = 1.$$

Iz ove jednakosti jednostavno slijedi druga relacija koju smo trebali dokazati, tj. relacija (4.11). Dokazivanjem relacija (4.10) i (4.11) smo dokazali navedeni teorem. $\square$

5 | Proširenja zakona ponovljenog logaritma

5.1 Zakon ponovljenog logaritma za Brownovo gibanje

Spomenuli smo u gornjem dijelu rada da postoji zakon ponovljenog logaritma za Brownovo gibanje. Sada ćemo definirati Brownovo gibanje i iskazati zakon ponovljenog logaritma za to gibanje.

Definicija 13. *Slučajni proces* $(B_t,\ t \geq 0)$ *na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je standardno Brownovo gibanje ako vrijedi:*

1. *trajektorije* $t \mapsto B_t(\omega)$ *su g.s. neprekidne funkcije s* $[0, \infty\rangle$ *u* $\mathbb{R}$
2. $B_0 = 0$
3. *za sve* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ *prirasti*

$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0},\ B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots,\ B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

   su nezavisne slučajne varijable (nezavisnost prirasta)

4. *za sve* $0 \leq s < t$ *je prirast* $(B_t - B_s)$ *normalno distribuiran s očekivanjem* 0 *i varijancom* $(t - s)$ *(stacionarnost prirasta).*

Teorem 13. [4] *Neka je* $(B_t,\ t \geq 0)$ *standardno Brownovo gibanje. Tada je skup graničnih vrijednosti familije slučajnih varijabli*

$$\left(\frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \right) \quad za\ t \to \infty$$

g.s. interval $[-1, 1]$.

5.2 Zakon ponovljenog logaritma za podnizove

U prethodno navedenim dokazima za zakon ponovljenog logaritma smo koristili geometrijski rastuće podnize. Zanima nas kako bi se druge vrste podniza uklopile u zakon ponovljenog logaritma. Zbog toga je prirodno da si postavimo pitanje:

"Koji zaključci se mogu izvesti iz toga za druge podnizove, npr. za brzo rastuće podnizove poput $n_k = 2^{2k}$ ili potencije (koje rastu sporije od geometrijskog)?" Odgovor na to pitanje je da su zaključci isti kao i prije za nizove koji rastu najviše geometrijski, a različite zaključke imamo za brže rastuće podnizove.

Prvo ćemo pogledati za gusto raspoređene podnizove, tj. za podnizove koji rastu najviše geometrijski.

Teorem 14. [3] *Neka su $X, X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable s očekivanjem 0 i konačnom varijancom σ^2 i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$. Nadalje, neka je $\{n_k, k \geq 1\}$ strogo rastući podniz cijelih brojeva takav da je*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_{k+1}} > 0.$$

Tada vrijedi

$$\limsup_{k\to\infty} (\liminf_{k\to\infty}) \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k \ln \ln n_k}} = \pm\sigma\sqrt{2} \quad (g.s.).$$

Sada ćemo pogledati za podnizove koji rastu barem geometrijski, ali oni su vrlo rijetki podnizovi. Prvo definiramo

$$\varepsilon^* = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \sum_{k=3}^{\infty} (\ln n_k)^{-\varepsilon^2/2} < \infty\right\}.$$

i ovaj ε^* predstavlja granicu između konvergencije i divergencije te će u ovom kontekstu iznositi $\sqrt{2}$, a to će nam potvrditi i sljedeći teorem.

Teorem 15. [3] *Neka su $X, X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable s očekivanjem 0 i konačnom varijancom σ^2 i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$. Nadalje, neka je $\{n_k, k \geq 1\}$ strogo rastući podniz cijelih brojeva takav da je*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_{k+1}} < 1.$$

Tada vrijedi

$$\limsup_{k\to\infty} (\liminf_{k\to\infty}) \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k \ln \ln n_k}} = \pm\sigma\varepsilon^* \quad (g.s.).$$

Napomena 5. *Poseban slučaj Teorema 13 je kada ε^* iznosi 0. Tada govorimo o brzo rastućim podnizovima, odnosno vrlo rijetkim podnizovima.*

Korolar 3. [3] *Neka su $X, X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable s očekivanjem 0 i konačnom varijancom σ^2 i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$. Nadalje, neka je $\{n_k, k \geq 1\}$ strogo rastući podniz cijelih brojeva takav da je*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_{k+1}} < 1 \quad i \quad \varepsilon^* = 0.$$

Tada vrijedi

$$\frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k \ln \ln n_k}} \xrightarrow{g.s.} 0 \quad za\ n \to \infty.$$

Sada ćemo navesti nekoliko primjera da što bolje shvatimo gore navedene rezultate.

Primjer 3. *Prvi primjer smo već kratko spomenuli ranije, a to je* $n_k = 2^k$. *Tada je* $n_k/n_{k+1} = 1/2$ *što znači da je ovaj podniz rijedak i gust te možemo primijeniti oba dva gore navedena teorema. Također, vrijedi da je* $\varepsilon^* = \sqrt{2}$.

Primjer 4. *Za podnizove koji rastu kao potencije vrijedi da su gusti. Jedan takav podniz je* $n_k = k^d$ *za* $d = 2, 3, \ldots$. *Tada vrijedi* $n_k/n_{k+1} = k/(k+1) \to 1$ *za* $n \to \infty$. *To znači da bi u ovom primjeru koristili Teorem 12. Općenitije,* $n_k = [ck^\alpha]$ *za* $k \geq 1$, $c > 0$, $\alpha > 1$.

Primjer 5. *Sada ćemo navesti jedan poseban primjer i to podniz čije ekstremne granične točke su strogo između* 0 *i* $\pm\sigma\sqrt{2}$. *Jedan takav podniz je* $n_k = [2^{k^\alpha}]$, $k \geq 1$ *i* $\alpha > 1$. *Taj podniz raste brže od geometrijskog, ali ne tolko brzo ko podniz u Primjer 4. Tada vrijedi* $n_k/n_{k+1} \sim 2^{-\alpha k^{\alpha-1}} \to 0$ *za* $n \to \infty$. *Budući da* $\ln n_k \sim k^\alpha \ln 2$ *onda je* $\varepsilon^* = \sqrt{2/\alpha}$ *pa prema Teorem 13 slijedi*

$$\limsup_{k\to\infty}(\liminf_{k\to\infty}) \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k \ln\ln n_k}} = \pm\sigma\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \quad (g.s.).$$

Kada bi vrijedilo $0 < \alpha < 1$ *onda bi ovaj podniz bio gust.*

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2014.

[2] D. Grahovac, *Vjerojatnost*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2021.

[3] A. Gut, *Probability A Graduate Course*, University of Uppsala, Sweden, 2005.

[4] T. Kyu Kim, *Law of the iterated logarithm*, Stanford University (Math.Sci.) (2020), 1-9.

[5] *Law of the iterated logarithm*, dostupno na
`https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_the_iterated_logarithm`.

[6] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[7] N. Šuvak, *Slučajni procesi II*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2021.

Sažetak

Na početku diplomskog rada definiraju se pojmovi iz teorije vjerojatnosti koji se spominju tijekom čitavog rada i potrebni su za dokaz zakona ponovljenog logaritma. Uz to, navode se zakoni nula-jedan, zakoni velikih brojeva te centralni granični teorem. Nakon toga slijedi dokaz gornje eksponencijalne granice te iskaz Borel-Cantellijeve leme koji su potrebni za dokaz zakona ponovljenog logaritma. Zatim, uz neke dodatne pomoćne tvrdnje, se dokazuje zakon ponovljenog logaritma. Na samom kraju rada, navodimo nekoliko proširenja zakona ponovljenog logaritma te na koji način vrijedi na različitim vrstama podnizova.

Ključne riječi

- zakoni nula-jedan
- zakoni velikih brojeva
- centralni granični teorem
- Borel-Cantellijeve leme
- zakon ponovljenog logaritma

The law of the iterated logarithm

Summary

The thesis starts with the definition of basic terms from probability theory that are used through the thesis and are necessary for the proof of the law of iterated logarithm. In addition, the zero-one laws, laws of large numbers and the central limit theorem are presented. Following this, the proof of the upper exponential bound and the statement of the Borel-Cantelli lemma which are necessary for the proof of the law of the iterated logarithm, are provided. Then, with some additional auxiliary claims, the law of the iterated logarithm is proven. At the end of the thesis, several extensions of the law of the iterated logarithm are presented and the behavior on subsequences is analysed.

Keywords

- the zero-one laws
- laws of large numbers
- central limit theorem
- Borel-Cantelli lemmas
- the law of the iterated logarithm

Životopis

Rođena sam 11. rujna 1997. u Varaždinu. Pohađala sam 1.osnovnu školu Varaždin te nakon nje sam upisala opći smjer na Drugoj gimnaziji Varaždin. Srednju školu sam završila 2016. godine. Nakon toga upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike u Rijeci kojeg sam završila 2021. godine te krajem te godine upisala diplomski studij Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku na Sveučilištu u Osijeku. Trenutno radim kao suradnica za aktuarske poslove u UNIQA osiguranju u Zagrebu.