Povijest matrica

Dejanović, Tihana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Tihana Dejanović

Povijest matrica

Završni rad

Osijek, 2025.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Tihana Dejanović

Povijest matrica

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović Ivičić
Komentor: doc. dr. sc. Marija Miloloža Pandur

Osijek, 2025.

Sažetak: U ovom radu proučavat ćemo razvoj teorije matrica i determinanti od njihovih prvih pojava u drevnim civilizacijama do ključnih otkrića u 20. stoljeću. Rad započinjemo definiranjem osnovnih pojmova vezanih uz matrice, s naglaskom na vrste matrica i njihove operacije. Zatim promatramo prethodnike matrice i njezine najranije oblike, s osvrtom na otkrića drevnih Babilonaca i Kineza. U nastavku pažnju posvećujemo matematičarima kao što su Leibniz, Gauss, Cayley, Sylvester i drugi, koji su postepeno oblikovali teoriju determinanti, a zatim i matrica. U posljednjem dijelu osvrćemo se na djela Bochera, Turnbulla, Aitkena i Mirskyja koja su uspostavila teoriju matrica kao temeljnu granu linearne algebre.

Ključne riječi: matrice, determinante, linearna algebra, teorija matrica, povijest matematike

History of Matrices

Abstract: In this paper, we will examine the development of matrix and determinant theory from their earliest appearances in ancient civilizations to key discoveries in the 20th century. We begin by defining the fundamental concepts related to matrices, focusing on types of matrices and their operations. Next, we explore the predecessors of the matrix and its earliest forms, reflecting on the discoveries of the ancient Babylonians and Chinese. We then turn our attention to mathematicians such as Leibniz, Gauss, Cayley, Sylvester, and others, who gradually shaped the theory of determinants and subsequently matrices. In the final section, we review the works of Bocher, Turnbull, Aitken, and Mirsky, which established matrix theory as a fundamental branch of linear algebra.

Keywords: matrices, determinants, linear algebra, matrix theory, history of mathematics

Sadržaj

Uvod

Linearna algebra i teorija matrica zauzimaju istaknuto mjesto među granama matematike obzirom na to da pružaju alate za rješavanje problema koji se javljaju i u drugim područjima znanosti. U ovom radu istražujemo razvoj teorije determinanti i matrica, s naglaskom na značajne trenutke i teorijska otkrića od njihovih najranijih oblika do 20. stoljeća. U povijesnom pregledu, istaknut ćemo znanstvenike koji su objasnili te zatim svojim znanstvenim radovima popularizirali ideje determinanti i matrica. U prvom dijelu dat ćemo definicije ključnih pojmova kao što su matrica, inverzna matrica, determinanta te operacije poput zbroja i produkta matrica. U drugom dijelu slijedi povijesni pregled koji počinje s drevnim Babiloncima i Kinezima koji su primjenjivali osnovne oblike matrica u računima. U nastavku proučavamo doprinose istaknutih matematičara, među kojima su Leibniz, Gauss, Cayley i Sylvester koji su imali ključnu ulogu u razvoju teorije determinanti i matrica. Na samom kraju analiziramo evoluciju teorije matrica u 20. stoljeću, ističući znanstvenike koji su doprinijeli tome da teorija matrica postane važna grana linearne algebre. Kolegiji čije je gradivo potrebno za ovaj rad su: *Linearna algebra I* i *Linearna algebra II*.

1 Osnovni pojmovi

Na samom početku potrebno je predstaviti osnovne pojmove čiji povijesni razvoj opisujemo u idućem odjeljku.

Definicija 1.1. Neka je $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ polje, a $m, n \geq 1$ prirodni brojevi. Preslikavanje

$$A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{F}$$

zovemo **matrica tipa** (m, n), a vrijednost $A(i, j) \in \mathbb{F}$ **element** (koeficijent) **matrice**. Element matrice A neki puta ćemo označavati s a_{ij} ili $[A]_{ij}$.

Često se skup svih vrijednosti preslikavanja A također naziva matrica i označava kao

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad A = \left[a_{ij}\right].$$

Skup svih matrica tipa (m, n) označavamo s M_{mn}. Specijalno ako je $m = n$, govorimo o skupu kvadratnih matrica M_n. Od svih kvadratnih matrica n-tog reda posebno su važne **jedinična matrica** I i **nul-matrica** O:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Općenito, svaku matricu tipa (m, n) čiji su svi elementi jednaki nuli zovemo nul-matrica i označavamo s O.

Glavnu dijagonalu matrice A čine elementi $a_{11}, a_{22}, ...$, a **dijagonalna matrica** je kvadratna matrica $D \in M_n$ kojoj svi elementi izvan glavne dijagonale iščezavaju. Pišemo ju kao $D = diag(d_1, \dots, d_n)$.

Ako matricu rastavimo pomoću pravaca paralelnih njezinim stupcima ili retcima u manje matrice, kažemo da smo je razbili u **submatrice** ili **blokove**. U tom slučaju početnu matricu nazivamo **blok-matricom**.

Matrica koju dobijemo od matrice $A \in M_{mn}$ zamjenom redaka i stupaca naziva se **transponirana** matrica matrice A. Označava se s A^T i vrijedi $A^T \in M_{nm}$.

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ kažemo da je **simetrična** ako je $A^T = A$, tj.

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad i, j = 1, ..., n.$$

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ kažemo da je **antisimetrična** ako je $A^T = -A$, tj.

$$a_{ij} = -a_{ji}, \qquad i, j = 1, ..., n.$$

Kažemo da su dvije matrice $A, B \in M_{mn}$ **jednake** ako su im svi odgovarajući elementi jednaki tj.

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n.$$

Definicija 1.2. **Zbroj matrica** $A \in M_{mn}$ i $B \in M_{mn}$ je matrica $C = A + B \in M_{mn}$ s elementima
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n.$$

Definicija 1.3. **Produkt matrice** $A \in M_{mn}$ **i skalara** $\lambda \in \mathbb{F}$ je matrica $D = \lambda A \in M_{mn}$ s elementima
$$d_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n.$$

Definicija 1.4. Kažemo da su matrice $A \in M_{mr}$ i $B \in M_{sn}$ **ulančane** ako je $r = s$. **Produkt ulančanih matrica** $A \in M_{mr}$ i $B \in M_{rn}$ je matrica $C = A \cdot B \in M_{mn}$ s elementima
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n.$$

Teorem 1.1. Za sve $A, B, C \in M_n$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$ vrijedi:

1. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
3. $(\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha(A \cdot B)$;
4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
5. $I \cdot A = A \cdot I = A$.

Dokaz. Dokaz se može naći u [3, str. 55.]. □

Pojam inverzne matrice uvodimo samo za kvadratne matrice.

Definicija 1.5. Za matricu $A \in M_n$ kažemo da je **regularna** (invertibilna) **matrica** ako postoji matrica $B \in M_n$ takva da je
$$A \cdot B = B \cdot A = I. \tag{1.1}$$

Kažemo da je matrica $C \in M_n$ **singularna** ako nije regularna.

Obzirom da postoji jedinstvena matrica $B \in M_n$ sa svojstvom (1.1), tu matricu označavat ćemo s $A^{-1} \in M_n$ i zvati **inverzna matrica** matrice A. Dakle, vrijedi:
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Definicija 1.6. Neka je $A = [a_1, ..., a_n] \in M_{mn}$ i neka su $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, ..., a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m1}$ njezini stupci. Maksimalan broj linearno nezavisnih stupaca matrice A zovemo **rang stupaca matrice** A i označavamo s $r(A)$.

Matricu $A \in M_{mn}$ možemo zapisati i pomoću njezinih redaka $a^1 = (a_{11}, ..., a_{1n}), ..., a^m = (a_{m1}, ..., a_{mn})$. Maksimalan broj linearno nezavisnih redaka matrice A zovemo **rang redaka matrice**. Rang matrice A po stupcima je jednak rangu matrice po retcima.

Definicija 1.7. Neka je $A \in M_{mn}$. Elementarne transformacije nad matricom A su:

1. međusobna zamjena dvaju redaka (stupaca);
2. množenje nekog retka (stupca) skalarom $\lambda \neq 0$;
3. pribrajanje nekog retka (stupca) prethodno pomnoženog skalarom λ drugom retku (stupcu).

Na kraju još predstavljamo definicije determinante te svojstvenog problema kvadratnih matrica. Determinanta matrice definira se induktivno, odnosno determinantu n-tog reda definiramo pomoću determinante matrice $(n-1)$-og reda.

Definicija 1.8 (Determinanta prvog reda)**.** Determinanta matrice $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ je broj a.

Definicija 1.9 (Determinanta drugog reda)**.** Determinanta matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

je broj

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Definicija 1.10 (Determinanta trećeg reda)**.** Determinanta matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

je broj

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Definicija 1.11 (Determinanta n-tog reda)**.** Determinanta matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je broj

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}. \end{aligned}$$

Definicija 1.12. Neka je $A \in M_n$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je **svojstvena** ili **karakteristična vrijednost** matrice A ako postoji vektor[1] $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Nadalje, takav vektor x nazivamo **svojstven** ili **karakterističan vektor** matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Definicija 1.13. Neka je $A \in M_n$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ nazivamo **svojstveni polinom** matrice A.

[1]Vektor je matrica koja pripada skupu M_{n1}.

2 Povijest matrica i determinanti

2.1 Prethodnici matrica

Ideja matrica u računima datira čak do 200. godine pr. Kr., a neki izvori ukazuju na to da su se koristile čak i do 400. godine pr. Kr. Interes za takvim strukturama proizlazi iz potrebe za preciznim rješavanjem problema u zemljišnim mjerama i trgovini koja su se često svodila na rješavanje linearnih sustava jednadžbi.

Drevni Babilonci su istraživali takve probleme, a neki od tih zapisa su ostali očuvani na glinenim pločama. Jedan od poznatijih zapisa potiče iz vremena oko 300. godina pr. Kr. i glasi:

> *Imamo dva polja čija je ukupna površina* $1800m^2$*. Oba polja su za proizvodnju žita, s tim da jedno daje* $\frac{2}{3}kg/m^2$*, a drugo* $\frac{1}{2}kg/m^2$*. Ukoliko je ukupan rod* $1100kg$*, kolika je površina svakog polja?*

Taj se zapis može prevesti u sustav u kojemu x predstavlja površinu prvog, a y površinu drugog polja:

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 1100 \end{cases}.$$

Zatim pretpostavimo da je $x = x_1$ i $y = y_1$ te dobijemo

$$x_1 + y_1 = 1800.$$

pri čemu, ako je $x_1 = y_1$, dobijemo

$$x_1 = 900 \quad \text{i} \quad y_1 = 900.$$

Ako je $x = x_1 + d = 900 + d$ i $y = y_1 - d = 900 - d$, supstitucijom x i y u drugoj jednadžbi dobivamo:

$$\frac{2}{3}(900 + d) + \frac{1}{2}(900 - d) = 1100,$$

iz čega slijedi da je:

$$d = 300, \quad x = 900 + 300 = 1200, \quad y = 900 - 300 = 600.$$

Dakle, dobije se da je površina polja koja daje $\frac{2}{3}kg/m^2$ roda $1200m^2$, a površina polja koja daje $\frac{1}{2}kg/m^2$ roda je $600m^2$. Moderni načini rješavanja linearnih sustava s dvije nepoznanice se oslanjaju na prikazanu metodu.

Danas poznatom obliku matrica su se pak više približili između 200. i 100. godine pr. Kr. matematičari u drevnoj Kini. U starokineskom tekstu *Devet poglavlja umijeća računanja* opisuje se metoda *fang čeng* (kvadratno tabeliranje) pomoću koje su se rješavali sustavi s do 6 jednadžbi i 6 nepoznanica. Jedan od zadataka iz teksta glasi:

> *Iz tri snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos od 39 dou. Iz dva snopa dobrog žita, tri snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos od 34 dou. Iz jednog snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i tri snopa lošeg žita dobije se prinos od 26 dou. Koliki je prinos po jednog dobrog, srednjeg i lošeg žita?*

Za račun se koristila kvadratna računska ploča na koju su bili postavljeni bambusovi štapići u boji. Štapići u crnoj boji su predstavljali negativne, a štapići u crvenoj boji pozitivne brojeve. Okomito postavljeni štapići su označavali brojeve na pozicijama koje odgovaraju jedinicama, stoticama, desettisućicama itd. (odnosno pozicijama čija vrijednost odgovara 10^{2n} gdje je n nenegativan cijeli broj), dok su horizontalno postavljeni štapići označavali brojeve na pozicijama koje odgovaraju deseticama, tisućicama, stotisućicama itd. (odnosno pozicijama čija vrijednost odgovara 10^{2n+1}, gdje je n nenegativan cijeli broj). Štapići su bili raspoređeni na mreži koja je omogućavala jednostavno računanje operacija poput zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Brojevi su se označavali kao što je prikazano u Tablici 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Tablica 1: Prikaz brojeva pomoću metode brojanja štapića

Postupak rješavanja započinje ispisivanjem pravokutne tablice u kojoj svaki stupac predstavlja koeficijente pridružene jednoj nepoznanici:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

U prvom koraku se dvostruki treći stupac oduzima od dvostrukog drugog stupca te se rezultat zapisuje u drugi stupac. Obzirom da u to vrijeme nula nije bila poznata u Kini, mjesta koja odgovaraju nuli su se ostavljala prazna:

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

Zatim se trostruki prvi stupac oduzima od trećeg te se rezultat zapisuje u prvi stupac:

		3
4	5	2
8	1	1
26	24	39

Nakon čega se četverostruki drugi stupac oduzima od peterostrukog prvog te se rezultat zapisuje u prvi stupac:

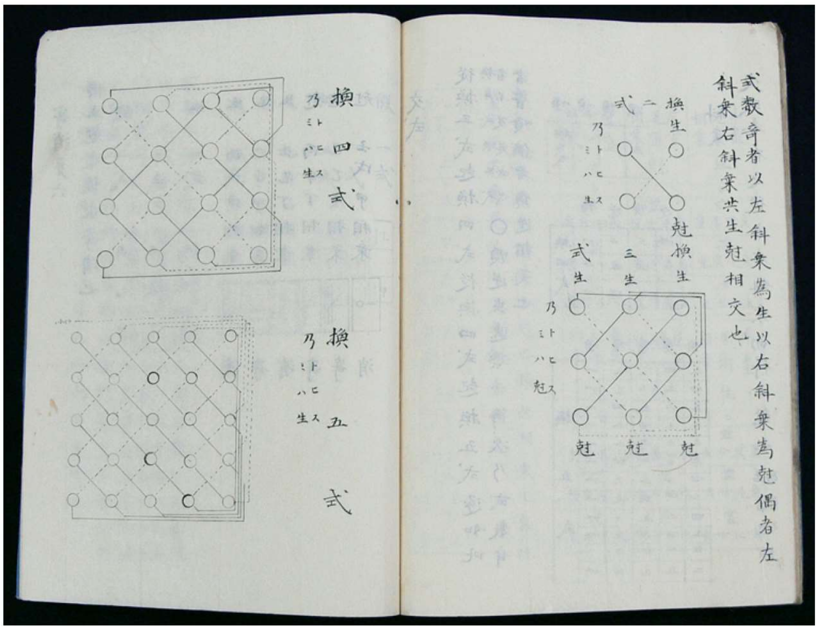
		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Do konačnog rješenja dolazimo povratnim uvrštavanjem: prinos lošeg žita oznosi $\frac{99}{36}$ dou, iz čega proizlazi da je prinos srednjeg žita $(24 - 1 \cdot \frac{99}{36}) : 5 = \frac{17}{4}$ dou te da je prinos dobrog žita $(39 - 1 \cdot \frac{99}{36} - 2 \cdot \frac{17}{4}) : 3 = \frac{37}{4}$ dou. Danas, u navedenom postupku, možemo prepoznati elementarne transformacije množenja redaka skalarom i dodavanja višekratnika jednog retka drugom, (opisane u Definiciji (1.7)), dok cijeli postupak poznajemo kao Gaussovu metodu eliminacije.

2.2 Rani razvoj teorije matrica u 17. i 18. stoljeću

Tijekom 17. i 18. stoljeća teorija matrica započela je sa značajnim razvojem. Mnogi matematičari su razmatrali determinante i njima srodne strukture koje su se pokazale kao ključni dio razumijevanja i otkrivanja matrica.

Ideja o računu u obliku determinante pojavila se prvo u Japanu, a zatim i u Europi. U svom dijelu *Metoda rješavanja skrivenih problema*, 1683. godine, istaknuti japanski matematičar Seki Kowa je izložio metode rješavanja problema pomoću tabličnih oblika, tj. koristeći Kinesku tehniku brojanja štapića. U svome dijelu je radio s kvadratnim tablicama tipa $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ i $(5, 5)$ te tražio njihove primjene u rješavanju sustava jednadžbi u izračunima koji su ekvivalentni današnjim determinantama. Dijagrami kvadratnih tablica iz Sekijevog djela *Kaifuku dai no ho* prikazani su na Slici 1.



Slika 1: Dio serije rukopisa "Kaifuku dai no ho" u kojem je objašnjena metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

Slične ideje o determinantama su se usporedno počele razvijati u Europi, neovisno o otkrićima u Japanu. Njemački matematičar Gottfried Wilhelm Leibniz je 1693. godine u pismu upućenom francuskom matematičaru L'Hôpitalu ispisao sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0. \end{aligned}$$

Brojeve 10, 11, 12, ... koristio je kao oznake koeficijenata pri čemu je prvi broj oznake predstavljao redni broj jednadžbe, a drugi broj oznake redni broj pripadajuće nepoznanice unutar jednadžbe. Nakon što je uveo i oznaku $1_0\,2_1\,3_2 = 10{\cdot}21{\cdot}32$ za produkt tri koeficijenta, došao je do jednadžbe:

$$\begin{matrix} 1_0 & 2_1 & 3_2 \\ 1_1 & 2_2 & 3_0 \\ 1_2 & 2_0 & 3_1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1_0 & 2_2 & 3_1 \\ 1_1 & 2_0 & 3_2 \\ 1_2 & 2_1 & 3_0 \end{matrix}$$

tj.

$$10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30$$

što je ekvivaletno uvjetu da je determinanta koeficijenata matrice jednaka nuli. Danu je determinantu imenovao "rezultanta" i pojasnio kako rješenje sustava postoji kada vrijedi navedeni uvjet. Međutim, njegovo pismo ostalo je neobjavljeno sve do sredine 18. stoljeća te nije imalo utjecaja na razvoj determinanti.

Dvije godine nakon smrti matematičara Colina Maclaurina, 1748. godine, objavljeno je njegovo djelo *Treatise of Algebra* (Rasprava o algebri) u kojemu je opširno proučavao postupke rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Konkretno, razradio je rješavanje sustava pomoću determinanti u sustavima s dvije jednadžbe i dvije nepoznanice, a ideju je proširio i na sustave s tri jednadžbe i tri nepoznanice. Za kompleksnije sustave s četiri jednadžbe i četiri nepoznanice nije iznio kompletan dokaz, no pružio je osnovne upute koje se odnose i na složenije sustave.

Prilikom dokazivanja teorema iz 4. stoljeća, u svojoj knjizi *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Uvod u analizu algebraičkih krivulja) 1750. godine, švicarski matematičar Gabriel Cramer došao je do sustava s pet linearnih jednadžbi. Tijekom rješavanja sustava uočio je kako je dobiveno rješenje za linearni sustav generalizabilno te se počeo baviti istraživanjem formula za rješavanje proizvoljnih sustava od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica. Pristup rješavanju bio je sljedeći:

> *Kako bismo otkrili vrijednosti nepoznanica, težimo k tome da eliminiramo sve nepoznanice osim jedne. Preostala nepoznanica kombinirana s poznatim parametrima će dati konačnu jednadžbu koja otkriva tu nepoznanicu, a zatim pomoću nje otkrivamo sve ostale.*

Dakle, možemo promatrati sustav od n jednadžbi:

$$\begin{aligned} A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \dots \\ A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \dots \\ A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \dots \\ A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

gdje su z, y, x, v, ... nepoznanice, Z^1, Z^2, Z^3, Z^4, ... koeficijenti od z, Y^1, Y^2, Y^3, Y^4, ... koeficijenti od y, X^1, X^2, X^3, X^4, ... koeficijenti od x, V^1, V^2, V^3, V^4, ... koeficijenti od v, a A^1, A^2, A^3, A^4, ... predstavljaju jedan poznati član svake od jednadžbi. Ako je zadana jedna jednadžba s jednom nepoznanicom z, tada vrijedi:

$$z = \frac{A^1}{Z^1}.$$

Ako su zadane dvije jednadžbe s dvije nepoznanice z i y, tada vrijedi:

$$z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1},$$
$$y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}.$$

Ako su zadane tri jednadžbe s tri nepoznanice z, y i x, tada vrijedi:

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1},$$
$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1},$$
$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}.$$

Iz ovih formula Cramer je otkrio opće pravilo:

> *Kada broj jednadžbi iznosi n, vrijednost svake nepoznanice možemo pronaći konstruiranjem n razlomaka čiji zajednički nazivnik ima onoliko članova koliko ima permutacija n elemenata.*

Cramer je u svojem radu uveo još jedno značajno pravilo koje govori o postojanju rješenja sustava linearnih jednadžbi koje je u primjeni i danas.

Korolar 2.1 (Cramerovo pravilo)**.** Promotrimo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}. \tag{2.1}$$

Sustav se može riješiti metodom suprotnih koeficijenata, tj. prvu jednadžbu sustava se množi s a_{22}, a drugu jednadžbu s $-a_{12}$. Zbrajanjem dobivenih jednadžbi dobije se:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Na analogan način se dobije da je:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Nakon uvođenja oznaka

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

vrijedi da je:

$$Dx_1 = D_1, \tag{2.2}$$
$$Dx_2 = D_2. \tag{2.3}$$

Iz (2.2) i (2.3) zaključujemo:

- ako je $D \neq 0$, sustav (2.1) ima jedinstveno rješenje oblika $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}$;

- ako je $D = 0$ i $D_1 = D_2 = 0$, sustav (2.1) je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja;
- ako je $D = 0$, a pri tome je barem jedan od brojeva D_1, D_2 različit od nule, sustav (2.1) nema rješenja.

Francuski matematičar Étienne Bézout je 1764. godine predstavio metode za izračunavanje determinanti pri čemu je postavio naglasak na eliminaciju nepoznanica iz sustava jednadžbi. Kako bi pronašao učinkovitu metodu pojednostavljenja sustava, Bézout je pošao od činjenice da se jednadžba s jednom nepoznanicom može pretvoriti u oblik sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice (u kojemu je jedna od nepoznanica eliminirana). U svojim radovima koristio je specifičnu notaciju za označavanje determinanti i njihovih izraza. Za determinante drugog reda

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

koristio je oznaku

$$(ab') = ab' - a'b,$$

a za determinante trećeg reda

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

koristio je oznaku

$$(ab'c'') = a(b'c'') - b(a'c'') + c(a'b'').$$

U svojem znanstvenom radu *Mémoire sur l'élimination* (Rasprava o eliminaciji) iz 1771. godine francuski matematičar Alexandre-Théophile Vandermonde predložio je novi pristup determinantama. Dok su njegovi prethodnici determinante koristili kao alat za rješavanje sustava linearnih jednadžbi, Vandermonde ih je prepoznao kao funkcije. Također, uveo je notaciju djelomično sličnu modernoj determinanti:

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & b \end{array} = \overset{\alpha}{a} \cdot \overset{\beta}{b} - \overset{\alpha}{b} \cdot \overset{\beta}{a},$$

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline a & b & c \end{array} = \overset{\alpha}{a} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline b & c \end{array} + \overset{\alpha}{b} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline c & a \end{array} + \overset{\alpha}{c} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline a & b \end{array}$$

pri čemu za $\overset{\alpha}{a}$ broj α označava redni broj jednadžbe iz koje je uzet koeficijent, dok broj a označava redni broj koeficijenta u odabranoj jednadžbi. Naposlijetku, uočio je da vrijede svojstva

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & b \end{array} = - \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline b & a \end{array},$$

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & a \end{array} = \begin{array}{c|c} \alpha & \alpha \\ \hline a & b \end{array} = 0$$

što u modernoj teoriji matrica prepoznajemo kao pravila:

Korolar 2.2. Ako dva stupca matrice A zamijene mjesta, determinanta $\det A$ mijenja predznak, tj. ako r-ti i s-ti stupac zamijene mjesta, vrijedi:

$$\det(AP_{rs}) = -\det A$$

pri čemu je P_{rs} elementarna matrica zamjene r-tog i s-tog stupca.

Korolar 2.3. Ako matrica $A \in M_n$ ima dva jednaka stupca, njena determinanta iščezava, tj. vrijedi:

$$\det A = 0.$$

Laplace je 1772. godine izjavio kako su Cramerove i Bezoutove metode nepraktične za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Naime, vjerovao je kako se rješenja linearnih sustava mogu analizirati bez direktnog rješavanja uz pomoć determinanti tj. „rezultanti". Iako nije bio upoznat s Leibnizovim radom, Laplace je također odlučio koristiti termin rezultanta, a uz to je uveo posebnu notaciju u kojoj je rezultantu tri jednadžbe izražavao u obliku $(\,^1a \cdot \,^2b \cdot \,^3c)$. U svojem djelu *Mécanique Céleste* (Nebeska mehanika) povezao je determinante s kretanjima nebeskih tijela i stabilnostima njihovih orbita. U sklopu izračuna astronomskih problema izložio je i metodu za izračunavanje determinante sustava od n jednadžbi s n nepoznanica razlažući ju na determinante manjih sustava. Danas tu metodu poznajemo pod imenom Laplaceov razvoj determinante:

Teorem 2.1 (Laplaceov razvoj determinante). Neka je $A \in M_n, n \geq 2$. Tada je

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad \forall i = 1, ..., n,$$
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad \forall j = 1, ..., n,$$

pri čemu za sve i, j vrijedi $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, a Δ_{ij} je determinanta matrice $n-1$-og reda koja nastaje tako da iz matrice A uklonimo i-ti redak i j-ti stupac.

Navedeni izraz je toliko značajan za teoriju matrica i determinanti da se u raznoj literaturi za definiciju determinante često koristi Laplaceov razvoj po prvom retku.

Joseph-Louis Lagrange u svojem djelu iz 1773. godine navodi izraz za volumen tetraedra zadanog s točkama $O(0,0,0)$, $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$, $M''(x'',y'',z'')$:

$$V = \frac{1}{6}\left[z(x'y'' - y'x'') + z'(yx'' - xy'') + z''(xy' - yx')\right]$$

što je zapravo produkt koji sadrži determinantu matrice sačinjene od koordinata točaka M, M' i M''. Iako je dao važan rezultat koji je povezao determinante s geometrijom, Lagrange nije uočio povezanost svog otkrića s radovima njegovih prethodnika na temu determinanti.

2.3 Razvoj teorije matrica u 19. i 20. stoljeću

Termin "determinanta" uveo je njemački matematičar Carl Friedrich Gauss u svojoj knjizi *Disquisitiones Arithmeticae* (Aritmetičke rasprave) 1801. godine prilikom promatranja svojstava kvadratnih formi. Ono što je tada Gauss nazvao determinantom forme, danas poznajemo kao diskriminanta forme, a naziv je proizašao iz činjenice da determinanta određuje (eng. determines) svojstva kvadratne forme[2].

> *Broj $bb-ac$, o čijoj prirodi prvenstveno ovise svojstva forme (a,b,c), nazvat ćemo determinantom ove forme.*

[2] Kvadratna forma je homogeni polinom drugog stupnja od n varijabli, pri čemu je n prirodan broj.

Koeficijente kvadratnih formi je ispisivao u obliku pravokutnika te je objasnio množenje i izračunavanje inverza takvih konstrukcija. Prilikom promatranja orbite asteroida Pallas između 1803. i 1809. godine i izračuna opažanja, Gauss je došao do sustava od šest linearnih jednadžbi sa šest nepoznanica:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 &= b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 &= b_3\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 &= b_4\\
a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 + a_{56}x_6 &= b_5\\
a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 &= b_6\,.
\end{aligned}$$

Elementarnim transformacijama sustava dobio je u konačno mnogo koraka sustav:

$$\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + a'_{14}x_4 + a'_{15}x_5 + a'_{16}x_6 &= b'_1\\
x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + a'_{25}x_5 + a'_{26}x_6 &= b'_2\\
x_3 + a'_{34}x_4 + a'_{35}x_5 + a'_{36}x_6 &= b'_3\\
x_4 + a'_{45}x_5 + a'_{46}x_6 &= b'_4\\
x_5 + a'_{56}x_6 &= b'_5\\
x_6 &= b'_6
\end{aligned}$$

iz čega je dobio sustav koji ima gornje trokutasti oblik ($a_{ij} = 0$ za $i > j$) i koji se zatim rješavao unazad, čime je dobio vrijednost svih nepoznatih koeficijenata. Gaussova metoda je ekvivalentna metodi *fang čeng* koja se upotrebljavala u drevnoj Kini, no ipak nosi njegovo ime jer je on znanstvenik koji ju je on popularizirao i sistematski primjenjivao u okviru rješavanja sustava linearnih jednadžbi.

Francuski matematičar Jacques Philippe Marie Binet je 1812. godine formulirao pravilo za množenje determinanti, no obzirom na složenost njegovog djela pravilo je zaživjelo tek kada je prošlo kroz doradu od strane drugih matematičara. Ipak, iz njegovih saznanja, uz radove Cauchyja, proizašao je značajan teorem koji nosi njegovo ime:

Teorem 2.2 (Binet-Cauchy). Za bilo koje dvije matrice $A, B \in M_n$ vrijedi:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Dokaz. Dokaz se može naći u [3, str. 72.]. □

Istovremeno, Augustin-Louis Cauchy je objavio rad u kojemu je razmatrao simetrične funkcije i koristio ih za izražavanje općih vrijednosti nepoznanica. Inspiriran Gaussovim radom u knjizi *Disquisitiones Arithmeticae*, Cauchy je odlučio koristiti termin „determinanta“ čime je postao prvi znanstvenik koji je taj pojam upotrijebio u modernom smislu koji i danas poznajemo.

> *Promotrimo alternirajuću simetričnu funkciju $S(\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}...a_{n,n})$. Taj općeniti oblik funkcije u daljnjem tekstu označavat ću imenom determinanta. Ukoliko pret-*

postavimo da je, redom, $n = 1$, $n = 2$, ..., dobit ćemo

$$\begin{aligned} S(\pm a_{1,1}a_{2,2}) =& a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \\ S(\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}) =& a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ & - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} \end{aligned}$$

za determinante drugog reda, trećeg reda, itd. Budući da se količine s različitim indeksima općenito moraju smatrati nejednakima, vidimo da determinanta drugog reda sadrži četiri različite količine, odnosno:

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \end{matrix}$$

da determinanta trećeg reda sadrži devet takvih količina, odnosno:

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, \\ a_{3,1}, & a_{2,3}, & a_{3,3}, \end{matrix}$$

itd. Općenito, determinanta n-tog reda ili $S(\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}...a_{n,n})$ sadržavat će broj različitih količina jednak n^2, koje će biti:

$$\begin{cases} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & ..., & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & ..., & a_{2,n}, \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & ..., & a_{3,n}, \\ ..., & ..., & ..., & ..., & ..., \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & ..., & a_{n,n}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Pretpostavljamo da su te iste količine raspoređene u kvadrat, kao što vidimo ovdje, u broju horizontalnih redaka jednakom n i u isto toliko vertikalnih stupaca, na način da prvi indeks koji se odnosi na svaku količinu varira samo u svakom vertikalnom stupcu, a drugi indeks varira samo u svakom horizontalnom retku; skup takvih količina činit će sustav koji ću nazvati simetričnim sustavom reda n.
...
Nazvat ću konjugiranim članovima one koje možemo proizvesti jedan iz drugog transpozicijom između prvog i drugog indeksa; tako su $a_{2,3}$ i $a_{3,2}$ dva konjugirana člana. Postoje neki članovi koji su sami sebi konjugirani. To su članovi u kojima su dva indeksa jednaka jedan drugome, odnosno: $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, ..., a_{n,n}$; nazvat ću ih glavnim članovima: svi su oni smješteni u sustavu (2.4) na dijagonali kvadrata koji čini sustav.

Iz navedenog teksta može se zaključiti da su objekti koje je Cauchy nazivao simetričnim sustavima reda n zapravo kvadratne matrice reda n, da su horizontalni i vertikalni nizovi zapravo redovi i stupci matrice te da su konjugirani članovi zapravo simetrični članovi matrice. To su prvi pokušaji opisivanja matematičkih svojstava matrica koje će biti definirane tek oko 40 godina kasnije. U dijelu iz 1826. godine u kojemu je razvijao kvadratne forme, Cauchy je koeficijente kvadratne forme organizirao u tablične oblike koje je nazivao „tableau“. Razradio je ideju svojstvenih polinoma tih tabličnih oblika, dijagonalizirao ih je te uočio kako slični tablični oblici imaju jednake svojstvene polinome.

Njemački matematičar Carl Gustav Jacob Jacobi je 1841. godine objavio tri rada o determinantama u kojima je prvi puta determinanta bila napisana pomoću algoritma te ju se moglo promatrati i kao broj i kao funkciju. Radom nad parcijalnim diferencijalnim jednadžbama prvog reda i njihovom primjenom u dinamici došao je do determinante čiji su elementi parcijalne derivacije funkcija i koja je dobila ime po njemu - Jacobijan. Također, kroz svoje radove uveo je i dvije nove notacije za determinantu:

$$\sum \pm a_{r_0,s_0} a_{r_1,s_1} \ldots a_{r_m,s_m} \quad \text{i} \quad a \begin{Bmatrix} r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m \\ s_0, s_1, s_2, \ldots, s_m \end{Bmatrix},$$

a svojim znanstvenim djelima je popularizirao koncept determinante u matematičkoj zajednici.

Iste godine, 1841., Arthur Cayley je objavio rad *On a Theorem in the Geometry of Position* (O teoremu u geometriji položaja) u kojemu je uveo modernu notaciju determinante s dvije vertikalne linije:

> *Neka simboli*
>
> $$|\alpha|, \quad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix}, \quad \textit{itd.}$$
>
> *označavaju količine*
>
> $$\alpha, \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta, \quad \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma, \quad \textit{itd.}$$
>
> *čiji je princip formiranja prilično dobro poznat.*

Uvođenjem ove notacije svaka determinanta, neovisno koliko kompleksna, može biti prikazana u uniformnom zapisu.

Prilikom pisanja rada pod nazivom *On a new class of theorems in elimination between quadratic functions* (O novoj klasi teorema u eliminaciji kvadratnih funkcija) engleski matematičar James Joseph Sylvester je za niz brojeva iz kojeg su se mogle dobiti determinante njegovih manjih dijelova uveo naziv „matrica“. Danas njegove „matrice“ poznajemo kao minore.

> *Za ovu svrhu potrebno je započeti, ne s kvadratnim, već s pravokutnim rasporedom izraza koji se sastoji od, recimo, m redaka i n stupaca. Ovo neće samo po sebi biti determinanta, već je, primjerice, matrica iz koje možemo oblikovati razne sustave determinanti tako što ćemo odabrati po želji p redaka i p stupaca.*

Budući da su Sylvester i Cayley radili na istom sudu, često su svoje slobodno vrijeme provodili raspravljajući o zajedničkom interesu – matematici. Razmjenjivali su ideje, pri čemu je Sylvester skrenuo Cayleyu pozornost na značaj matrica i njihovo istraživanje, nakon čega je Cayley 1853. objavio članak u kojemu je opisao inverznu matricu. Nakon toga, 1858. godine je objavio rad *A Memoir on the Theory of Matrices* (Memoar o teoriji matrica). Za matrice je koristio notaciju sličnu onoj koju je dodijelio determinantama

$$\begin{array}{|ccc|} \hline (\; a, & b, & c, \;) \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}$$

te je razvio algebru matrica uvodeći definicije za nul-matricu, jediničnu matricu, singularne matrice (nazivao ih je neodređenim matricama), svojstveni polinom, transponirane matrice, simetrične i antisimetrične matrice, te matrice koje nisu kvadratne. Također je uspostavio pravila za zbrajanje matrica, množenje matrica skalarom i množenje kvadratnih matrica, množenje ulančanih matrica koje nisu kvadratne te postupak za dobivanje inverznih matrica. Uveo je uvjete asocijativnosti množenja matrica, postojanje neutralnih elemenata za zbrajanje i množenje, nekomutativnost množenja te naveo ideju da svaka matrica poništava pripadni svojstveni polinom, što je dokazao za matrice tipa (2,2), a za matrice tipa (3,3) je dao ideju dokaza.

Nakon Cayleya, irski astronom i matematičar William Rowan Hamilton se okušao u dokazivanju činjenice da matrica poništava pripadni svojstveni polinom u sklopu svojih istraživanja. Hamilton je dokazao specijalni slučaj te činjenice za matrice tipa (4,4), a njegov doprinos zajedno s Cayleyevim otkrićem danas poznajemo kao Hamilton-Cayleyev teorem:

Teorem 2.3 (Hamilton-Cayley). Neka je $A \in M_n$. Tada je $k_A(A) = 0$, tj. svaka matrica poništava vlastiti svojstveni polinom.

Dokaz. Dokaz se može naći u [3, str. 133.]. □

Francuski matematičar Camille Jordan je 1870. godine objavio djelo *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Rasprava o supstitucijama i algebarskim jednadžbama) u kojem je predstavio ideju Jordanove forme matrice. Jordanova forma matrice jest dijagonalna blok-matrica koja sadrži specijalne kvadratne matrice (Jordanove blokove).

Njemački matematičar Ferdinand Georg Frobenius je 1877. godine napisao rad *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen* (O linearnim supstitucijama i bilinearnim formama). Frobenius nije bio upoznat s Cayleyevim radom pa samim time nije koristio izraz matrica, ali je unatoč tome definirao rang matrice i ortogonalne matrice.

Nakon što je pregledao Cayleyeve materijale, Frobenius je 1896. godine dodatno razradio definiciju ranga matrice i dokazao teorem 2.3.

Njemački profesor algebre Leopold Kronecker je kroz predavanja od 1883. do 1891. godine proučavao svojstva determinanti i njihove primjene u algebarskim jednadžbama, a 1903. godine, nakon njegove smrti objavljena je zbirka njegovih predavanja na temu determinanti pod nazivom *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten* (Predavanja iz teorije determinanti). Iste godine objavljena su i predavanja njemačkog profesora Karla Weierstrassa u kojima se nalazi bilješka imena *Über die Determinanten* (O determinantama) s aksiomatskom definicijom determinante. Objavom tih radova moderna teorija determinanti je bila uspostavljena, dok je teoriji matrica bilo potrebno još vremena da se razvije kao samostalna grana matematike.

Jednu od prvih knjiga koja je sistematski prikazala matrice i kako one mogu biti korištene u algebri je 1908. godine objavio američki matematičar Maxime Bôcher pod nazivom *Introduction to Higher Algebra* (Uvod u višu algebru). Detaljno je opisao teoriju matrica koristeći se definicijama svojih prethodnika te je teoriju matrica proširio i na polje kompleksnih brojeva. Bôcher je također uveo pojam elementarnih transformacija matrica koje omogućuju pojednostavljivanje matrica i određivanje njihovog ranga.

Britanski profesor Herbert Turnbull je 1928. godine objavio knjigu *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants* (Teorija determinanti, matrica i invarijanti), a u suradnji s matematičarom Alecom Aitkenom s Novog Zelanda je 1932. godine napisao nastavak pod nazivom *Introduction to the Theory of Canonical Matrices* (Uvod u teoriju kanonskih matrica) u kojima su razradili postupke redukcije matrica konačnog tipa do kanonskog oblika.

Knjiga Leona Mirskyja *An Introduction to Linear Algebra* (Uvod u linearnu algebru) objavljena 1955. doprinijela je prepoznavanju teorije matrica i determinanti u modernoj matematici. Mirsky je kroz knjigu detaljno analizirao matrice, determinante i vektorske prostore, čime je moderna teorija matrica bila uspostavljena te je postala ključna u nastavi matematike na preddiplomskoj razini.

Literatura

[1] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, New York, NY, 1993.

[2] D. Otero, *Determining the Determinant*, Xavier University Cincinnati, OH, 2018.

[3] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[4] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna algebra, skripta*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2021.

[5] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Matrices and Determinants*, University of St. Andrews, St Andrews, 1996.

[6] M. Juraić, *Povijest matrica i determinanti*, Matematičko-fizički list, LIX (2008–2009), 76–79.

[7] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[8] `https://www.ndl.go.jp/math/e/s1/2.html`