Primjene integrala funkcije jedne varijable

Tomljenović, Marija

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marija Tomljenović

Primjene integrala funkcije jedne varijable

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marija Tomljenović

Primjene integrala funkcije jedne varijable

Završni rad

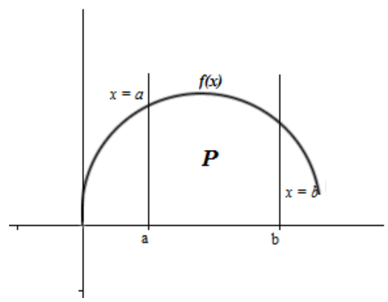
Voditelj: prof. dr. sc. Kristian Sabo

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

Jedan od problema koji vodi do pojma određenog integrala je pojam površine. Za likove poput trokuta, pravokutnika, kvadrata, kruga i dugih *pravilnih* oblika računanje površine ne predstavlja problem jer imamo unaprijed određene formule koje koristimo za njihovo računanje.
No, što ako je lik kojem moramo izračunati površinu nepravilan, ograničen danim funkcijama i/ili koordinatnim osima. Pogledajmo primjerice lik na slici Slika 1. Ograničen je odozgo slikom neprekidne, pozitivne funkcije f na segmentu [a,b], s lijeva pravcem x = a, s desna pravcem x = b, a odozdo granicu predstavlja os-x. Lik određen na ovaj način naziva se *krivolinijski trapez*.



Slika 1: Krivolinijski trapez

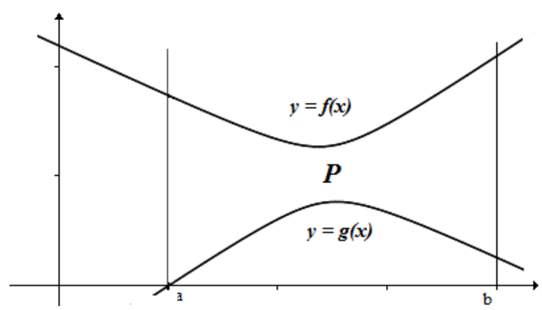
Površina krivolinijskog trapeza, ako postoji, ne može se izračunati nekom već unaprijed poznatom formulom iz elementarne geometrije. Razlog tomu je upravo zakrivljenost grafa funkcije f. Problem površine ovakve vrste zadnog lika svodi se na računanje određenog integrala pomoću funkcije koja osniva trapez i segmenta [a,b] koji predstavlja njegove granice.
Najlakši i najbrži način računanja integrala je pomoću **Newton - Leibnizove formule**:
Ako je funkcija f integrabilna na intervalu [a,b] i ima na tom intervalu primitivnu funkciju F (funkcija takva da je F' = f), onda je $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ pozitivne funkcije f jednak je površini P ravninskog područja omeđenog grafom funkcije f, x-osi i pravcima x = a i x = b.
Osim problema površine ravninskog lika, upoznat ćemo i neke druge probleme koji se mogu riješiti pomoću integrala.

Poglavlje 1

Primjene integrala u geometriji

1. Računanje površine ravnih likova

Za dani ravninski lik Slika 1.1 omeđen krivuljama y = $f(x)$ i y = $g(x)$, te pravcima x = a i x = b treba odrediti njegovu površinu P.



Slika 1.1: Površina P odgovara razlici površina određenih grafovima funkcija $f(x)$ i $g(x)$

Površina tog lika jednaka je razlici površina lika omeđenog pravcima x = a i x = b, osi x i krivuljom y = $f(x)$, te lika omeđenog pravcima x = a, x = b, osi x i krivuljom y = $g(x)$. Dakle,

$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

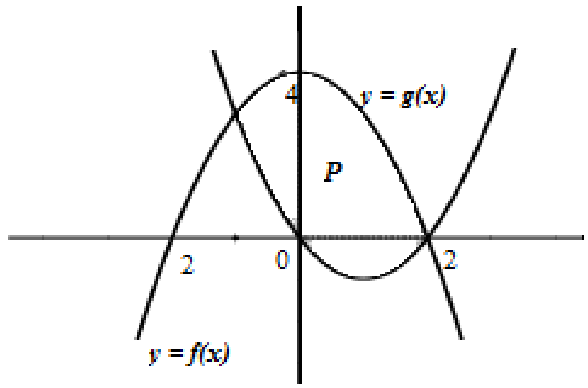
tj.

$$P = \int_a^b (f-g)(x)dx.$$

Sljedeći primjeri pokazuju neke od situacija u kojima treba izračunati površinu krivuljnog lika.

Primjer 1.1. *Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom* $y = 4 - x^2$ *i* $y = x^2 - 2x$ [1]

Rješenje:



Slika 1.2

Grafovi zadanih funkcija omeđuju lik koji je određen točkama presjeka dviju krivulja, a to su točke x_1 *= -1 i* x_2 *= 2. Iz slike Slika 1.2 nam je vidljivo da je funkcija* $f(x) := 4 - x^2$ *"gornja funkcija", dok je* $g(x) := x^2 - 2x$ *"donja funkcija".*
Površinu računamo pomoću već rečene formule na sljedeći način:

$$P = \int_{-1}^{2} (f-g)(x)dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx = (-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x)\Big|_{-1}^{2} = 9$$

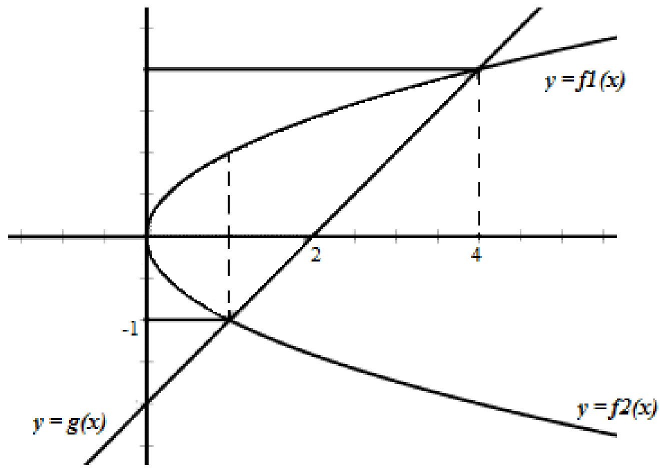
Međutim, ne možemo uvijek na ovaj način izračunati površinu. Što ako su nam krivulje zadane na način da ne možemo oduzeti "gornju" od "donje" krivulje? U tom slučaju problem površine možemo riješiti prelaskom na neke druge koordinate ili gledanjem "s druge strane", odnosno oduzimanjem "lijeve" od "desne" krivulje što ćemo prikazati kroz sljedeći primjer preuzet iz .

Primjer 1.2. *Lik je omeđen parabolom* $y^2 = x$ *i pravcem* $y = x - 2$*. Izračunajte njegovu površinu.*

Rješenje:

[1] 1B.Apsen

Krivulju $y^2 = x$ možemo zapisati na dva načina: $f_1(x) = \sqrt{x}$ i $f_2(x) = -\sqrt{x}$. Na slici (Slika 1.3) vidimo kako pomoću tako razdvojene funkcije možemo primijeniti već korištenu formulu u $Primjer$1.1.



Slika 1.3

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x-2))dx = 2\Big(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big)\Big|_0^1 + \Big(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}$$

Drugi način:
Možemo izraziti x pomoću y: $x = y^2$ i iz druge jednadžbe: $x = y + 2$. Sada gledamo "sa strane y osi" pa integral računamo ovako:

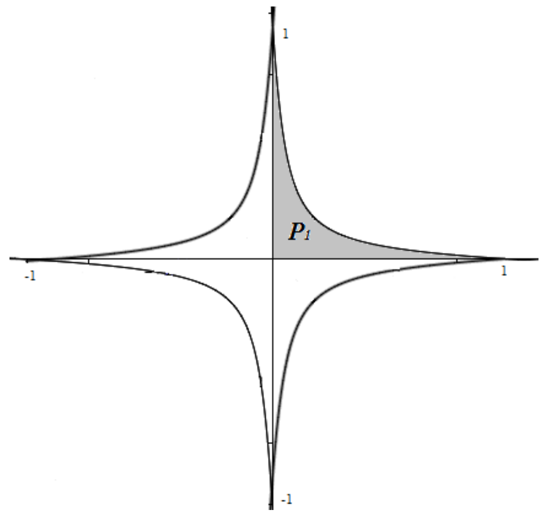
$$P = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)dy = \Big(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y\Big)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

Primjer 1.3. *Izračunajte površinu ravninskog lika omeđenog krivuljom $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.*

Rješenje:

Zadana krivulja u Kartezijevim koordintama ima oblik sa $Slika$1.4. Iz slike je vidljivo da je $P = 4P_1$. Koristit ćemo parametrizaciju: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. Granice područja P_1 u Kartezijevim koordinatama su 0 i 1. Parametrizacijom granice se mijenjaju:

$$0 = x = \cos^3 t \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2},$$



Slika 1.4: Prikaz zadane krivulje u Kartezijevim koordinatama

$$1 = x = \cos^3 t \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0.$$

S obzirom da je $P = 4P_1$, korištenjem formule za površinu parametarski zadane krivulje ($x = x(t)$, $y = y(t)$):

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$$

slijedi:

$$P = 4P_1 = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 t \cdot (-3) \cdot \cos^2 t \cdot \sin t dt = -12 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t \cos^2 t dt = ... =$$

$$= \frac{3}{8}\pi$$

2. Određivanje duljine luka krivulje

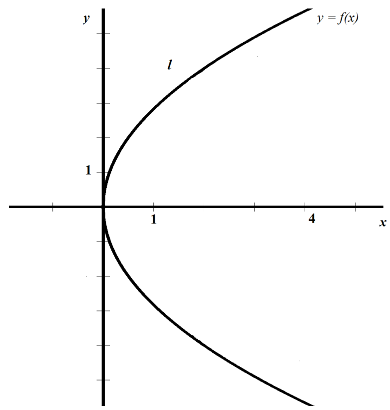
Kroz ovo poglavlje rješavat ćemo problem određivanja duljine luka krivulje na nekom zadanom segmentu [a,b]. Odnosno, tražimo duljinu onog dijela krivulje koji je omeđen točkama A = (a, $f(a)$) i B = (b, $f(b)$). Formula koju koristimo za određivanje duljine luka krvulje:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Primjer 1.4. *Odredite duljinu luka krivulje $y^2 = 4x$ od točke $x_1 = 0$ do $x_2 = 4$.* [2]

Rješenje:

Graf na slici Slika 1.5 prikazuje sliku zadane funkcije $y^2 = 4x$. Zbog jednostavnosti pronaći ćemo inverznu funkciju onoj koja je zadana, a ona glasi: $x = \frac{y^2}{4}$, granice koje su bile $x_1 = 0$ do $x_2 = 4$ prelaze u: $y_1 = 0$ i $y_2 = 4$.



Slika 1.5

S obzirom da smo funkciju izrazili preko varijable y, naša formula glasi

$$l = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + f^{-1}(y)'^2} dy,$$

dakle, moramo izračunati derivaciju od $f^{-1}(y)$:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{y}{2},$$

pa je

$$l = 2l_1 = 2\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} dy = \int_0^4 \sqrt{4 + y^2} dy = \frac{1}{2}\Big|\frac{y}{2}\sqrt{4 + y^2} + 2ln\frac{y + \sqrt{4 + y^2}}{2}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + ln(2 + \sqrt{5})$$

Za parametarski zadanu krivulju $x = x(t)$, $y = y(t)$ duljina luka krivulje omeđenog točkama A i B s pripadajućim parametrima t_1 i t_2 glasi:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

[2] 1B. Apsen

Primjer 1.5. *Odredi duljinu luka krivulje zadane parametarski s* $x = \sin^3 t$, *y* $= \cos^3 t$ *korištenjem formule za duljinu luka krivulje zadane parametarski.*
Rješenje: *Duljina luka krivulje jednaka je* $4l_1$ *(prema Slika1.4)*

$$1 = x_1 = \cos^3 t \Rightarrow cost = 1 \Rightarrow t_1 = 0.$$

$$0 = x_2 = \cos^3 t \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2},$$

Trebamo još izračunati derivacije funkcija x(t) i y(t) kako bismo mogli koristiti formulu za duljinu luka krivulje zadane parametarski:

$$x'(t) = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)$$

$$y'(t) = 3\sin^2 t \cdot \cos t$$

Sada još uvrstimo dobivene podatke u formulu i izračunamo integral.

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3\cos^2 t \cdot (-\sin t))^2 + (3\sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t \cdot \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t \cdot \cos t dt =$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6(\frac{-\cos 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$$

Analogno za krivlje zadane funkcijom $x = g(y)$ od točke $y_1 =$ c do $y_2 =$ d.

3. Površina rotacijskih tijela

Pri rotaciji slike funkcije $y = f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$ oko osi x nastaje ploha. Formula za računanje površine rotacijske plohe je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx$$

Primjer 1.6. *Izračunati površinu plohe nastale rotacijom oko osi x luka krivlje* $y = 2\sqrt{x}$ *za* $3 \leq x \leq 8$.[3]
Rješenje:

$$y = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}, y' = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$P = 2\pi \int_3^8 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx = 4\pi \int_3^8 \sqrt{1+x}dx =$$

$$= \left\| 1 + x = t, dx = dt, x = 3 \Rightarrow t = 4, x = 8 \Rightarrow t = 9 \right\| =$$

$$= 4\pi \int_4^9 \sqrt{t}dt = \frac{8\pi}{3}\sqrt{t^3}\Big|_4^9 = \frac{152\pi}{3}$$

Formula za računanje površine rotacijske plohe nastale rotacijom oko osi y je analogna:

$$P = 2\pi \int_c^d f(y)\sqrt{1 + [f'(y)]^2}dy =$$

$$= 2\pi \int_c^d x\sqrt{1 + x'^2}dy$$

Sada ćemo pokazati jedan primjer za računanje površine plohe koja rotra oko osi y.

Primjer 1.7. *Petlja krivulje* $18x^2 = y(6-y)^2$ *rotira oko osi - y.*
Rješenje: *Računamo prema formuli:*

$$P = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1 + x'^2}dy$$

Deriviramo jednadžbu krivulje $18x^2 = y(6-y)^2$. *Deriviranjem dobivamo:*

$$36xx' = -2y(6-y) + (6-y)^2 = (6-y) \cdot 3(2-y)$$

$$\Rightarrow xx' = \frac{(6-y)(2-y)}{12}$$

Uvrstimo li to u formulu s početka primjera dobivamo:

$$P = 2\pi \int_0^6 \sqrt{\frac{y(6-y)^2}{18} + \frac{(6-y)^2(2-y)^2}{144}}dy =$$

[3] 1B. Apsen

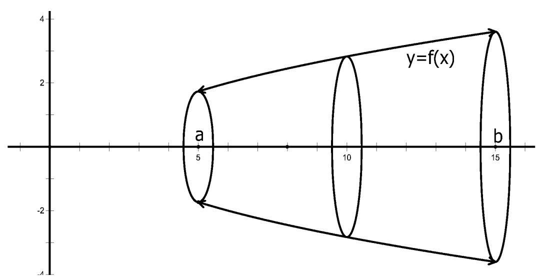
$$= \frac{\pi}{6}\int_0^6 (6-y)\sqrt{y^2+4y+4}dy = \frac{\pi}{6}\int_0^6 (6-y)(2+y)dy =$$

$$= \frac{\pi}{6}\int_0^6 (36+4y-y^2)dy = \frac{\pi}{6}(36y+2y^2-\frac{y^3}{3})\Big|_0^6 = 12\pi$$

4. Volumen rotacijskih tijela

Volumen tijela dobivnog rotacijom lika omeđenog dijelom grafa funkcije f, te pravcima x = a, y = b i x-osi računamo koristeći formulu:

$$V_x = \pi\int_a^b f(x)^2 dx$$



Slika 1.6

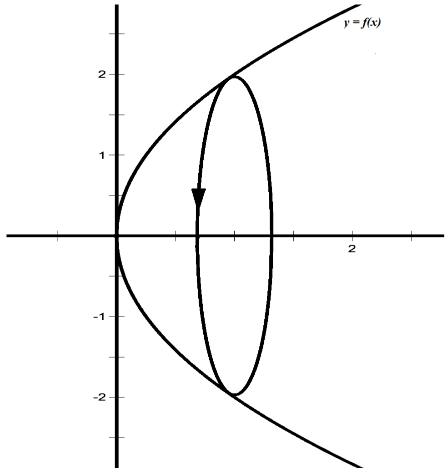
Primjer 1.8. *Odredi volumen tijela nastalog rotacijom oko x-osi lika omeđenog parabolom $y^2 = 4x$ i pravcem $x = 1$.*
Rješenje: *Koristeći već spomenutu formulu $V_x = \pi\int_a^b f(x)^2dx$ izračunat ćemo traženi obujam. Iz Slika 1.7 vidimo granice na x-osi: $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$*

$$V_x = \pi\int_0^1 y^2dx = \pi\int_0^1 4xdx = 2\pi(x^2)\Big|_0^1 = 2\pi$$

Analogno je ako imamo funkciju $x = g(y)$ i rotacijski interval [c,d] na y-osi, te rotiramo oko y-osi:

$$V_y = \pi\int_c^d g(y)^2dy.$$

Primjer 1.9. *Izračunati volumen tijela nastalog rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[7]{7}$ i $x = 0$ oko y-osi.*



Slika 1.7

Rješenje:

$$V = \pi \int_0^{\sqrt[7]{7}} (y^3)^2 dy = \pi \int_0^{\sqrt[7]{7}} y^6 dy = \frac{\pi}{7} y^7 \Big|_0^{\sqrt[7]{7}} = \pi$$

Volumen rotacijskog tijela koje dobvamo rotacijom područja između dviju krivulja:

$$V = \pi \int_a^b (f_1(x)^2 - f_2(x)^2) dx.$$

Primjer 1.10. *Odredi volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x-osi lika omeđenog lukovima parabola $y = x^2$ i $x = y^2$.* [4]

Rješenje:

Prvo ćemo odrediti apscise sjecišta zadanih krivulja:

$$y = x^2$$

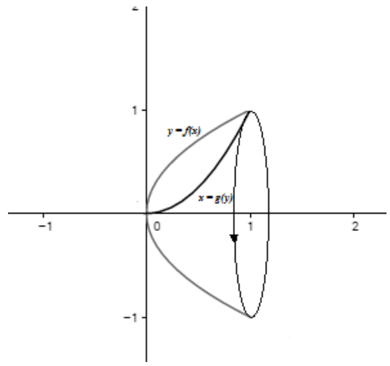
$$y = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x^2 = \sqrt{x} \Big|^2$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

[4] 1B. Apsen



Slika 1.8

$$x_1 = 0; x_2 = 1$$

Sada kad smo izračunali granice, pomoću navedene formule možemo izračunati traženi volumen:

$$V = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5})\Big|_0^1 = \frac{3}{10}\pi$$

Poglavlje 2

Primjene integrala u fizici

1. Statički momenti i koordinate težišta

1.1. Statički momenti

Statičkim momentom s obzirom na os l sustava n materijalnih točaka s masama $m_1,\ m_2,\ ...,\ m_n$ koje leže u istoj ravnini s osi l i udaljene su od nje za $d_1,\ d_2,\ ...,\ d_n$ nazivamo sumu

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i,$$

pri čemu udaljenosti točaka koje leže s jedne strane osi l uzimamo s pozitivnim predznakom, a one s druge strane s negativnim.
1) Neka je dana krivulja $x = x(t),\ y = y(t)$ gdje je parametar t duljina luka, tada vrijedi

$$M_x = \int_0^L y(s)ds; \qquad M_y = \int_0^L x(s)ds$$

pri čemu je $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ diferencijal luka, a L duljina čitave krivulje.
2) Za ravninski lik omeđen krivuljom $y = y(x)$, osi-x i sa dvije vertikale $x = a$ i $y = b$, kad je $a < b$ imamo:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y|y|dx; \qquad M_y = \int_a^b x|y|dx$$

Primjer 2.1. *Izračunajte statički moment s obzirom na os - x trokuta omeđenog pravcima x=0, $y = 0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$.*
Rješenje:

Iz $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \Rightarrow \quad y=4\Big(1-\frac{x}{2}\Big)$
Uvrštavanjem u formulu za računanje statičkog momenta s obzirom na os-x dobijemo:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^2 4\Big(1-\frac{x}{2}\Big)^2dx=2\int_0^2\Big(1-x+\frac{x^2}{4}\Big)dx=$$

$$=2\Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\Big)\Big|_0^2=\frac{8}{6}$$

1.2. Koordinate težišta

1) Koordinate težišta ravninske krivulje mase m računamo po sljedećim formulama:

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}\ i\ \overline{y}=\frac{M_x}{M},$$

M_x i M_y su statički momenti mase.

2) Koordinate težišta $(\overline{x},\overline{y})$ luka glatke krivulje u ravnini $y=f(x)$ koji spaja točke $A(a;\ f(a))$ i $B(b;\ f(b))$ možemo računati formulama:

$$\overline{x}=\frac{\int_A^B xds}{s}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx},\qquad \overline{y}=\frac{\int_A^B yds}{s}=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx}.$$

3) Koordinate težišta $(\overline{x},\overline{y})$ krivocrtnog trapeza $a\le x\le b$, $0\le y\le f(x)$ računamo formulama:

$$\overline{x}=\frac{\int_a^b xydy}{S},\qquad \overline{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dy}{S},$$

a $S=\int_a^b ydx$ površina lika.

Primjer 2.2. *Nađite koordnate težišta luka polukružnice* $x^2+y^2=4$ *preko statičkog momenta.*
Rješenje:*Kako su* $\overline{x}=\frac{M_y}{M}$, $\overline{y}=\frac{M_x}{M}$, *dakle, moramo izračunati* M_x, M_y, M *prema formulama iz poglavlja prije.*

$$x^2+y^2=4\quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{4-x^2}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$M_y = \int_{-a}^{a} x ds = \int_{-2}^{2} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 0; \quad M_x = \int_{-a}^{a} y ds = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 8$$

$$M = \int_{-2}^{2} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\pi$$

$$\left(\overline{x} = 0,\ \overline{y} = \frac{4}{\pi}\right)$$

2. Nekoliko primjera za računanje puta, rada sile, kinetičke energije i tlaka tekućine

1) Put koji pređe točka

Ako se točka giba po nekoj krivulji i apsolutna veličina njene brzine $v = (t)$ je poznata funkcija u ovisnosti o varijabli vremena t. Put koji pređe točka u intervalu vremena $[t_1, t_2]$:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Primjer 2.3. *Brzina tijela točke iznosi $v = te^{-0,01t} m/s$. Nađite put koji pređe točka u vremenu T=10s od početka gibanja.*

Rješenje:

$$s = \int_{0}^{10} te^{-0,01t} dt = ... = 46,78m$$

2) Rad sile

Ako promjenjiva sila $F = f(x)$ djeluje u smjeru osi - x, onda rad sile u intervalu $[x_1, x_2]$ računamo formulom:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Primjer 2.4. *Koliki rad je potreban da se opruga rastegne za 10 cm ako sila od 2 kp rastegne oprugu za 2 cm?*

Rješenje:*Po Hookovu zakonu sila F koja rastegne oprugu za x iznosi kx, gdje je k koeficijent proporcionalnosti.*

Ako je x = 0,1 cm i $F = 2kp \Rightarrow k = 10$

Pa je $F = 10x$.

$$\Rightarrow W = \int_{0}^{0,1} 10x dx = 5x^2 \Big|_{0}^{0,1} = 0,05kpm.$$

3) Kinetička energija

Kinetičkom energijom nazivamo izraz:

$$K = \frac{mv^2}{2},$$

gdje je v brzina, a m masa materijalne točke.
Kinetička energija sustava od n materijalnih točaka s masama $m_1, m_2, ..., m_n$ i pripadnim brzinama $v_1, v_2, ..., v_n$ jednaka je

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Kinetička energija tijela dobije se rastavljanjem tijela na elementarne čestice, zatim sumirajući kinetičke energije tih čestica u limesu umjsto sume $K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$ dobivamo integral.

Primjer 2.5. *Izračunajte kinetičku energiju homogenog kružnog valjka gustoće δ s polumjerom baze R i visinom h, koji se vrti kutnom brzinom ω oko svoje osi.*
Rješenje: *Za elementarnu masu dm odabiremo masu šupljeg valjka visine h, s unutarnjim polumjerom r i debljinom stijenke dr :*

$$dm = 2\pi r h \delta dr.$$

Linearna brzina mase dm iznosi $v = r\omega$

$$\Rightarrow dK = \frac{v^2 dm}{2} = \pi r^3 \omega^2 h \delta dr.$$

Pa je kinetička energija jednaka

$$\Rightarrow K = \pi \omega^2 h \delta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \omega^2 \delta R^4 h}{4}.$$

4) Tlak tekućine

Za računanje sile tlaka tekućine koristimo se Pascalovim zakonom koji kaže da tlak tekućine na površinu S uronjenu u dubinu h iznosi:

$$P = \gamma h S,$$

gdje je γ gustoća tekućine.

Primjer 2.6. *Izračunati tlak tekućine na polukrug polumjera 4 uronjenog vertikalno u vodu tako da se njegov promjer podudara s površinom vode.* [1]
Rješenje:_Podjelit ćemo polukrug na elemente paralelne površini vode. Površina jednog takvog elementa udaljenog za h od površine iznosi_

$$dS = 2xdh = 2\sqrt{r^2 - h^2}dh = 2\sqrt{16 - h^2}dh$$

Tlak koji djeluje na taj element je:

$$dP = \gamma hds = 2\gamma h\sqrt{16 - h^2}dh,$$

a gustoća vode, γ, jednaka je 1, pa je ukupni tlak

$$P = 2\int_0^4 h\sqrt{16 - h^2}dh = -\frac{2}{3}(16 - h^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}4^3 = \frac{128}{3}$$

[1] 3B.Demidovič

Poglavlje 3

Primjene integrala u kemiji

U kemiji su posebno česte situacije kad nam je poznata funkcija brzine promjene neke funkcije i početni iznos funkcije čiju promjenu promatramo. Takvi zadatci uglavnom se rješavaju integriranjem funkcije brzine, a konstanta integriranja određuje se iz početnog uvjeta. Prmjeri iz ovog poglavlja preuzeti su iz 2Matematika 1 za kemičare: Kako prevoditi s jezika kemije na jezik matematike(i obrnuto)? ili su napravljeni po uzoru na primjere iz navedene zbirke.

1. Primjene integrala u kemijskoj termodinamici

Osobito česta fizikalna primjena integrala vezana je za pojam rada. Ukoliko na objekt djeluje sila čiji iznos F ovisi o poziciji x tog objekta, onda je rad izvršen pod utjecajem te sile za pomak objekta od pozicije x = a do pozicije x = b dan formulom

$$w = \int_a^b F(x)dx.$$

U kemijskoj termodinamici često je potrebno odrediti volumni rad (rad koji je posljedica promjene volumena) ili kemijski rad koj je posljedica promjene kemijskog sastava sustava. Često je potrebno odrediti i električni rad.

Kemijski rad za promjenu množine od n_1 do n_2, gdje je $\mu(n)$ kemijski potencijal promatrane komponente kad joj je množina n: $w = \int_{n_1}^{n_2} \mu(n)dn$.
Rad izvršen za pomicnje naboja q_1 od udaljenosti r = a do udaljenosti r = b u odnosu na naboj q_2, Coulumbova konstanta: $k_c = 8,99 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2}$ je **električni rad** - $w = \int_a^b \frac{k_c q_1 q_2}{r^2} dr$
Za reverzibilnu promjenu volumena od V_1 do V_2 gdje je p(V) tlak pri volumenu

V formula za **volumni rad** je:

$$w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)dV$$

Primjer 3.1. *Pri izotermnoj ekspanziji volumen nekog idealnog plina povećao se osam puta. Koliki je rad izvršen ako je ekspandiralo 10,0 mola plina pri temperaturi 298 kelvina?*
Rješenje: *Imamo problem volumnog rada. Za idealan plin vrijedi $pV = nRT$. Pri volumenu V tlak je opisan s*

$$p(V) = \frac{24777,21J}{V}$$

pa je izvršeni rad

$$w = -\int_{V_1}^{8V_1} \frac{24777,21J}{V}dV = -24777,21J \cdot lnV\Big|_{V_1}^{8V_1} =$$

$$= -24777,21 \; ln \; 8 = -51,5kJ$$

Primjer 3.2. *U kemijskoj termodinamici ponekad se ovisnost molarnog toplinskog kapaciteta pri konstantnom tlaku ($C_{p,m} = \frac{C_p}{n}$) aproksimira funkcijom*

$$C_{p,m}(T) = a + bT + \frac{c}{T^2}.$$

Empirijski parametri a,b,c ne ovise o temperaturi i za dušik iznose

$$a = 28,58JK^{-1}mol^{-1}, \; b = 3,77 \cdot 10^3 JK^{-2}mol^{-1}, \; c = -0,5 \cdot 10^5 JKmol^{-1}.$$

Uz pretpostavku da se dušik ponaša kao idealan plin odredite promjenu entalpije ΔH i promjenu unutrašnje energije ΔU ako se 1,0 mol dušika izobarno zagrije od $25°C$ do $100°C$. (Izobarno - pri tlaku p = 1 atm)
Rješenje: *Promjena entalpije za izobarne procese računa se integralom toplinskog kapaciteta u zadanom rasponu temperatura.*

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p(T)dT,$$

a veza promjene entalpije i unutrašnje energije dana je s

$$\Delta H = \Delta U + p\Delta V,$$

gdje je ΔV razlika konačnog i početnog volumena.

$$C_p(T) = n \cdot C_{p,m}(T) = na + nbT + \frac{nc}{T^2},$$

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} \Big(na + nbT + \frac{nc}{T^2} dT\Big) = naT + nbT^2 - \frac{nc}{T}\Big|_{T_1}^{T_2} =$$

$$= na(T_2 - T_1) + nb(T_2^2 - T_1^2) - nc\Big(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\Big)$$

$$= 1 \cdot 28,58(373,1500 - 298,1500) + 1 \cdot 3,77 \cdot 10^{-3}(373,1500^2 - 298,1500^2) -$$

$$-1 \cdot (-0,5 \cdot 10^5)\Big(\frac{1}{373,1500} - \frac{1}{298,1500}\Big) = 2,2 \cdot 10^3 J.$$

S obzirom na pozitivan predznak promjene entalpije promatrani proces je endoterman.
Jer je $pV = nRT$, pri izobarnoj temperaturi $\Rightarrow p\Delta V = nR\Delta T$, pa je

$$\Delta U = \Delta H - p\Delta V = \Delta H - nR\Delta T$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 373,1500 - 298,1500 = 75K$$

Uvrštavanjem u formulu

$$\Delta U = \Delta H - p\Delta V = \Delta H - nR\Delta T$$

dobijemo

$$\Delta U = 1,6 \cdot 10^3 J.$$

2. Valne funkcije

Bornova intrpretacija valne funkcije kaže kako je funkcija ψ^2 funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona u nekoj točki prostora. Često se koristi i radijalna gustoća vjerojatnosti $\phi(r) = 4\pi r^2 \psi^2$ koja opisuje vjerojatnost da elektron bude na nekoj udaljenosti r od jezgre. U kontekstu valnih funkcija često je problem njihova ortogonalnost. Ortogonalnost dvije realne funkcije f i g na istom intervalu [a,b] definira kao

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Primjer 3.3. *2s orbitrala za vodikov atom je valna funkcija*

$$\psi_{2,0,0}(r) = N\Big(2 - \frac{r}{a_0}e^{-r/(2a_0)}\Big),$$

gdje je a_0 Bohrov radijus i iznosi 52,9 pm. Odredite konstantu normiranja N.

Rješenje: *Uzimamo radijalnu gustoću vjerojatnosti jer ona opisuje vjerojatnost nalaženja elektrona na bilo kojoj udaljenosti od jezgre. Radijalna gustoća vjerojatnosti u ovom slučaju jednaka je $4r^2\pi\phi_{2,0,0}$, tj.*

$$\psi_{2,0,0}(r) = 4N^2\pi r^2\Big(2 - \frac{r}{a_0}\Big)^2 e^{(-r/a_0)}.$$

Zahtjev normiranja glasi

$$\int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r)dr = 1.$$

$$\int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r)dr = 4N^2\pi \int_0^{+\infty} r^2\Big(2 - \frac{r}{a_0}\Big)^2 e^{(-r/a_0)}dr = 32N^2a_0^3\pi$$

S obzirom da je $\int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r)dr = 1$,

$$\Rightarrow N = \sqrt{\frac{1}{32\pi a_0^3}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}.$$

Poglavlje 4

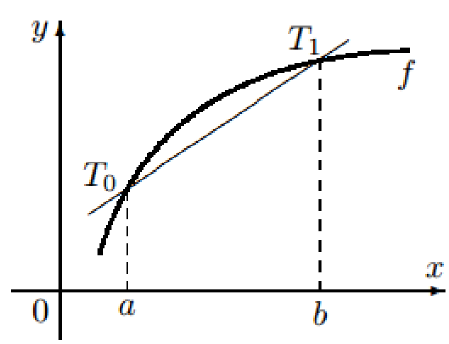
Numerička integracija

Osnovni problem numeričke integracije je približno izračunati integral $\int_a^b f(x)dx$. Najlakši način za riješiti ovaj problem je zamjena funkcije $f(x)$ polinomom $P_n(x)$ uz uvjet da je $f(x) \approx P_n(x)$. Iz te ideje proizlazi formula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx.$$

1. Trapezna formula

Ideja ove metode je da se funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zamjeni polinomom P_1 prvog stupnja koji se s funkcijom f podudara u točkama a i b.



Slika 4.1: Trapezno pravilo

Gledajući s geometrijskog aspekta, trapezna formula nastaje zamjenom krivulje pravcima. Funkciju f interpolirat ćemo linearnom fukcijom P_1 u čvorovima intrpolacije

$$x_0 = a, \quad x_1 = b.$$

Slika funkcije P_1 je pravac koji prolazi točkama $T_0(a, f(a)), T_1(b, f(b))$,

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

$$\Rightarrow I^* = \int_a^b P_1(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

I^* nam ovdje predstavlja površinu trapeza sa strancama $f(a)$ i $f(b)$ i visinom $h = b - a$. Apsolutna pogreška ΔI^* je veličina površine između pravca L_1 i slike funkcije f.

Teorem 4.1. *Neka je $f \in C^2([a, b])$. Tada $\exists c \in < a, b >$ takav da*

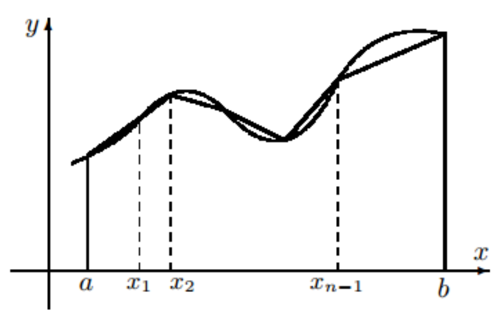
$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$$

$|I - I*| = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$

1.1. Produljena trapezna formula

Funkciju f poznajemo u $n + 1$ točaka $x_0, ..., x_n \in [a, b]$, i pri tome vrijedi:

$$x_1 - x_0 = ... = x_n - x_{n-1} = h \;\; i \;\; x_0 = a, x_n = b.$$



Slika 4.2: Geneeralizirano trapezno pravilo

Udaljenosti među točkama su ekvidistantne i dijele interval [a,b] na n jednaih dijelova duljine h. Vrijedi $h = \frac{b-a}{n}$

$$x_i = a + ih, i = 0, ..., n$$

Pretpostavit ćemo da znamo izračunati

$$y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$$

Na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ napravimo običnu trpeznu formulu: $I_i^* = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(y_{i-1} + y_i)$

$$I^* = \sum_{i=1}^{n} I^*.$$

Uvrštavanjem u gornju formulu i sređivanjem gornjeg izraza dolazimo do produljene trapezne formule:

$$I^* = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n} y_i)$$

Ocjena pogreške:

$$I - I^* = -\frac{h}{2}(b - a)f''(c).$$

Primjer 4.1. *Potrebno je izračunati približnu vrijednost integrala*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

za $n = 5$.

Rješenje:

$$n = 5,\ \ a = 0,\ \ b = 1,\ \ h = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$a = x_0 = 0;\ \ x_1 = a + h = 0 + 0,2 = 0,2 = \frac{1}{5};\ \ x_2 = a + 2h = 0 + 2\frac{1}{5} = \frac{2}{5};$$

$$x_3 = a + 3h = 0 + 3\frac{1}{5} = \frac{3}{5};\ \ x_4 = 0 + 4\frac{1}{5} = \frac{4}{5};\ \ x_5 = 0 + 5\frac{1}{5} = 1$$

$$y_0 = y(0) = 1;\ \ y_1 = y(\frac{1}{5}) = \frac{5}{6};\ \ y_2 = y(\frac{2}{5}) = \frac{5}{7};\ \ y_3 = \frac{5}{8};\ \ y_4 = \frac{5}{9};\ \ y_5 = \frac{1}{2}$$

Uvrstimo još dobivene podatke u produljenu trapeznu formulu:

$$I^* = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{h}{2}(y_0 + y_5 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i) =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{2}(1 + \frac{1}{2} + 2(\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9})) = 1,39126$$

2. Newton - Cotesova formula

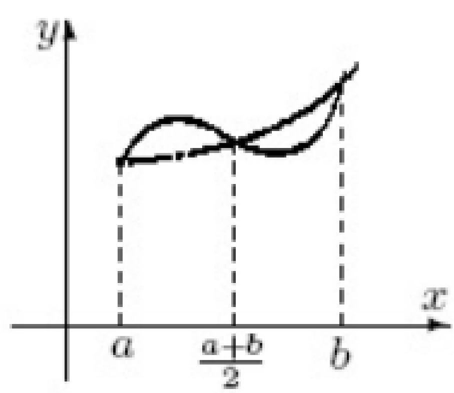
Newton - Cotesova formula reda n + 1 za aproksimaciju određenog interala $\int_a^b f(x)dx$ dobiva se tako da funkciju f zamijenimo Lagrangeovim interpolacijskim polinomom stupnja n.
Interpolacijske točke su: $x_i = a + h,\ h = \frac{b-a}{n},\ i = 0, 1, 2, ..., n$. Lagrangeov intepolacijski polinom je oblika:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)P_k(x), \qquad P_k(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Uvrštavanjem u $I^*_{(n)} = \int_a^b P_n(x)dx$ i sređivanjem dobije se Newton - Cotesova formula n-tog reda:

$$I^*_{(n)} = (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k), \quad gdje\ je\ \ w_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b P_k(x)dx = \int_0^1 \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{nt - i}{k - i}.$$

3. Simpsonova formula



Slika 4.3: Simpsonovo pravilo

Specijalan slučaj Newton - Cotesove formule za n = 2 je Simpsonovo pravilo. U tom slučaju $x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b$. Izračunajmo $w_k,\ za\ k = 0, 1, 2:$

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (2t-1)(2t-2)dt = \frac{1}{6},\ w_1 = -\int_0^1 2t(2t-2)dt = \frac{2}{3},$$

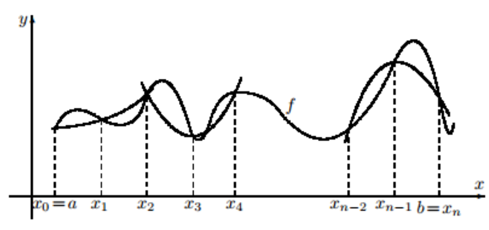
$$w_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 2t(2t-1)dt = \frac{1}{6}.$$

Nakon toga dobivamo Simpsonovo pravilo:

$$I^* = \int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big)$$

3.1. Produljena Simpsonova formula

U cilju postizanja bolje aproksimacije I^* integrala I podijelit ćemo interval [a,b] na parni broj podintervala duljine $h = \frac{b-a}{n}$ čvorovima $x_i = a + ih,\ i = 0, 1, ..., n$. Pretpostavit ćemo da znamo izračunati $y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$. Lako se može pokazati da vrijedi generalizirano Simpsonovo pravilo:



Slika 4.4: Generalizirano Simpsonovo pravilo

$$I^* = \frac{h}{3}((y_0 + y2m) + 4(y_1 + ... + y_{2m-1}) + 2(y_2 + ... + y_{2m-2}))$$

Primjer 4.2. *Izračunajmo sada Primjer 4.1 pomoću generalizirane (produljene) Simpsonove formule.*

Rješenje: *Naš integral glasio je:* $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$*. Za n ćemo uzeti 4.*

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4},\quad x_0 = 0,\ x_1 = x_0 + h = \frac{1}{4},\ x_2 = x_0 + 2h = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$$

Zatim izračunamo y ako nam je dana funkcija: $y(x_i) = \frac{1}{1+x_i{}^2}$*. Uvrstimo li* $x_i,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$ *dobijemo:*

$$y_0 = 1;\ y_1 = \frac{16}{17};\ y_2 = \frac{4}{5};\ y_3 = \frac{16}{25};\ y_4 = \frac{1}{2}.$$

Uvrstimo još to u produljenu Simpsonovu formulu:

$$I^* = \frac{h}{3}(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = 0,78536$$

Poglavlje 5

Primjene integrala u ekonomiji

1. Količina investicija

Glavni cilj u ekonomiji je promatrati količinu invesicija kao akumulirani kapital tijekom vremena. Kapital kojim neka tvrtka raspolaže u određenom vremenskom trenutku t označit ćemo sa K(t). Sa I(t) označit ćemo brzinu pristizanja investicija u vremenskom trenutku t, tada je I(t) = K'(t).

$$\Rightarrow K(t) = K(0) + \int_0^t I(t)dt,$$

gdje je K(0) početni kapital.

Primjer 5.1. *Ako je brzina pristizanja investicja $I(t) = 50e^{0.5t}$ tokom jedne godine, izračunajte ukupan akumulirani kapital tokom 20 godina.*
Rješenje:

$$K(20) = \int_0^{20} I(t)dt = \int_0^{20} 50e^{0.5t}dt = 50\int_0^{20} 50e^{0.5t}dt = 50\frac{1}{0.5}e^{0.5t}\Big|_0^{20} = 50(e^{10}-1)$$

Prosječnu akumulacju tijekom promatranog vremenskog intervala dobijemo tako da ukupnu akumulaciju podijelimo dužinom trajanja intervala.

Primjer 5.2. *Neka je funkcija godšnje dobiti $A(t) = 0.04\cdot\sqrt{2t+3}$, gdje vrijeme $t = 0$ predstavlja sadašnji trenutak. Kolika će biti prosječna godišnja dobit tijekom sljedeće 3 godine.*
Rješenje: *Prvo ćemo izračunati prosječnu godišnju dobit:*

$$\frac{1}{3}\int_0^3 A(t)dt = 0.04\cdot\frac{1}{3}\int_0^3 \sqrt{2t+3}dt =$$

$$= \left\| y^2 = 2t + 3,\ 2ydy = 2dt,\ t = 0 \to y = \sqrt{3},\ t = 3 \to y = 3 \right\|$$

$$= \frac{0.04}{3} \int_{\sqrt{3}}^{3} y^2 dy = \frac{0.04}{3} (\frac{y^3}{3}) \Big|_{\sqrt{3}}^{3} = \frac{0.04}{3} (9 - \sqrt{3}),$$

što je jednako prosječnoj godišnjoj dobiti nakon tri godine.

2. Ukupni trošak

Određeni integrali koriste se i pri određivanju dodatnih ukupnih troškova proizvodnje na određenom stupnju proizvodnje. Informacije koje moramo znati su funkcija marginalnih troškova proizvodnje i trenutni stupanj proizvodnje.
Neka je M(Q) funkcija marginalnih troškova proizvodnje, znamo da je $C(Q) = \int M(Q)dQ$. Ako se nalazimo na određenom stupnju proizvodnje od m jedinica proizvoda i želimo saznati koliko dodatnih troškova iziskuje proizvodnja n, $n > m$, jedinica proizvoda, gledat ćemo razliku C(n) - C(m). Zbog Newton - Leibnizove formule i činjenice da je $C(Q) = \int M(Q)dQ$

$$\Rightarrow C(n) - C(m) = C(Q) \Big|_{m}^{n} = \int_{m}^{n} M(Q)dQ.$$

Primjer 5.3. *Neka je $M(Q) = Q^2 - 2Q + 3$ funkcija marginalnih troškova proizvodnje, odredite koliko dodatnih troškova iziskuje povećanje proizvodnje sa 5 jedinica proizvoda na 10 jedinica proizvoda.*
Rješenje:

$$C(10) - C(5) = \int_{5}^{10} (Q^2 - 2Q + 3)dQ = \Big(\frac{Q^3}{3} - Q^2 + 3Q\Big) \Big|_{3}^{9} = 211,66.$$

Zaključujemo kako povećanje proizvodnje sa 5 na 10 jedinica proizvoda iziskuje trošak od dodatnih 211,66 novčanih jedinica.

Literatura

[1] B. Apsen, Riješeni zadaci iz više matematike uz drugi dio repetitorija, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[2] F. M. Brückler, I. Pažanin, Matematika 1 za kemičare: Kako prevoditi s jezika kemije na jezik matematike(i obrnuto)?, PMF, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2012.
URL: http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/main1.pdf

[3] B. P. Demidovič, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.

[4] S. Kurepa,Matematička analiza 1,Školska knjiga, Zagreb,1997.

[5] R. Scitovski, Numerčka matematika, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2004.
URL: http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/ipapic/Num.PDF

[6] L. Smajlović, Matematika za ekonomiste, Ekonomski fakultet Sarajevo, Sarajevo, 2010.
URL: http://bs.scribd.com/doc/97969547/Matematika-za-Ekonomiste#scribd

Sažetak

Cilj je pokušati prikazati razne načine na koje izračunavanje integrala može pomoći u različitim znanostima. Promatrat ćemo kako se integrali primjenjuju u geometrji, fizici, kemiji, ekonomiji, te numeričkoj matematici, uz niz primjera.
U geometriji integral koristimo za izračunavanje površine ravnih likova, rektifikacija krivulje, određivanje volumena i površine rotacijskih tijela.
Zatim primjene u fizici na računanje statičkih momenata i koordinata težišta, te nekoliko primjera za računanje puta,rada sile, kinetičke energije i tlaka tekućine.
Primjene integrala u kemiji prikazat ćemo kroz niz primjera od kojh su neki iz područja kemijske termodinamike, problemi volumnog rada idealnog plina, i sl.
U numeričkoj matematici koristi se aproksimativno izračunavanje vrijednosti integrala na nekom danom segmentu pomoću razlčitih metoda, primjerice trapezna formula, Newton - Cotesove formule, Simpsonova formula, te generalizirane trapezna i Simpsonova formula.
Ekonomija pak koristi integrale pri promatranju količine investicija kao akumulirani kapital tokom vremena. Određeni integral možemo koristiti i pri određivanju dodatnih ukupnih troškova poizvodnje na određenom stupnju proizvodnje.

Abstract

The goal is to try to show different ways how integrals can help in different science. We will consider how we can use integrals in geometry, physics, chemistry, economy and numeric mathematic, with lot of exemples.
In geometry we can use integrals for calculate areas of geometric figures, determining the arc length, determining the volume and the area of rotating bodies. Applications in physics are for caalculating static momets, coordinates of the center of gravity, and few examples for calculating the path, work force, kinetic energy and fluid pressure.
In chemistry we will show some examples from chemical thermodynamics, problems of the volume of work of the ideal gas, etc.
In numeric mathematic we use approximate calculation the values of the integrals on some given segment with different metods such as trapezoidal formula, Newton - Cotes formulas, Simpson's formula, and generalized trapezoidal and Simpson's formula.
Economy use integrals for observing the amount of investment like accumulated capital over time. Definite integral we can use for identifying additional total costs of production on specify level.