Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij - matematika i računarstvo

Nikolina Mihić

Modeliranje slobodnih bacanja

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski smjer - matematika i računarstvo

Nikolina Mihić

Modeliranje slobodnih bacanja

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. I. Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

U današnje vrijeme košarkaši se smatraju superzvijezdama. Da bi igrao današnju košarku moraš imati sve, od dobre fizičke spreme pa do visokog postotka šuta. Slobodna bacanja bitan su dio košarkaške utakmice te ponekad upravo ona odlučuju o pobjedniku. Upravo iz tih razloga njihovo šutanje trebala bi biti čista formalnost. Najčešće to nije slučaj.
Najbolji primjer je Shaquille O'Neal, koji se smatra jednim od najboljih košarkaša u povijesti. Tijekom regularnog dijela sezone 2004./05. njegov postotak šuta slobodnih bacanja bio je 53.1%, dok mu je za vrijeme playoff-a postotak pao na 43%. Dobrim šuterom slobodnih bacanja smatra se osoba sa postotkom šuta iznad 75%. U sezoni 2016./17. u NBA ligi igra 455 igrača, a njih 208 ima postotak šuta manji od 75%, što znači da je njih 45% ispod željenog postotka.
Kada igrač stoji na liniji slobodnih bacanja, osim ako nije matematičar, teško da će se pitati što sve utječe na to hoće li lopta ući u koš. Ima li utjecaj brzina kojom će ispucati loptu na to hoće li zabiti koš ili je bitan kut pod kojim će baciti loptu? Treba li gađati centar obruča ili tablu koša? Utječe li otpor zraka na putanju lopte? Upravo ove značajke će utjecati na to hoćemo li zabiti slobodno bacanje ili ne.
U matematičkom modelu prvi fokus je na kutu izbacivanja lopte. Nešto kasnije ćemo model proširiti. Vidjeti ćemo da su bitni faktori visina i konzistentnost osobe u kontroliranju brzine i kuta izbačaja. Viši igrači imaju više prostora za pogreške te im je lakše zabiti slobodno bacanje. Proučiti ćemo i putanju te vidjeti da je najbolja putanja ona koja prolazi između centra i drugog obruča.

1 Matematičko modeliranje

Kako bi mogli modelirati slobodna bacanja, prvo moramo definirati matematičko modeliranje.

Definicija 1. *Matematičko modeliranje je postupak opisivanja realnog sustava matematičkim jednadžbama s ciljem razvoja i upotrebe matematičkog modela za kasnije analize, projektiranja i optimiranja sustava za koji je model izrađen. Sastoje se od varijabli, koeficijenata i matematičkih operatora. Matematički modeli se obično koriste u prirodnim znanostima kao što su fizika, biologija, te društvenim znanostima kao što su ekonomija i statistika.*

To znači da matematičko modeliranje uzima nekakve stvarne situcije te ih onda opisuje pomoću matematičkih formula i jednadžbi. Možemo ih pronaći svuda. Sve formule iz fizike, biologije i kemije koje smo učili u školi su zapravo matematički modeli. Korisni su jer pomoću njih možemo opisati ponašanja u svijetu te predvidjeti što će se dogoditi. Postoje ljudi koji su plaćeni kako bi pravili matematičke modele. Uzmimo za primjer burzu, gdje pomoću matematičkih modela rade predviđanja te time mogu utjecati na određene situacije. Modeliranje ne mora nužno riješiti problem, ali nam može pojasniti situaciju.
Navedimo standardne korake u konstrukciji matematičkih modela:

1. **Identificiranje problema.** Što želimo saznati?

2. **Izvođenje modela.** Identificiranje konstanti i varijabli koje ćemo koristiti u modelu, te određivanje veza među njima.

3. **Riješiti jednadžbu i protumačiti model.**

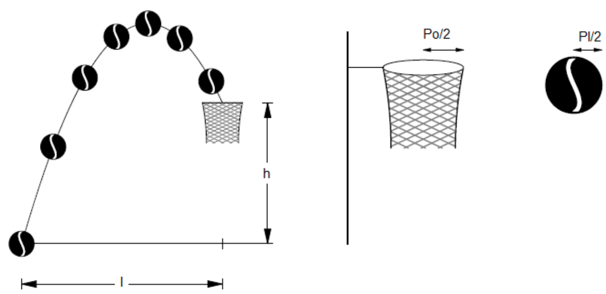
4. **Provjeriti model.** Odgovara li stvarnom problemu? Slaže li se sa stvarnim podacima?

5. **Poboljšati model.** Ako model ne zadovoljava, ukloniti neke od pretpostavki.

Modeliranje obično počinje sa konstrukcijom jednostavnog modela koji je lako za riješiti. Bilo bi previše komplicirano odmah ubaciti sve čimbenike koji utječu na naš model. Posljedica toga može biti da model ne možemo riješiti. Nakon toga poboljšavamo model da bi postao što realniji ali u isto vrijeme rješiv. Kako bi to postigli morat ćemo koristi "snažniju" matematiku.

2 Identificiranje konstanti i varijabli

Za stvaranje modela potrebne su nam konstante čije smo vrijednosti preuzeli iz knjiga ili s interneta.
Promjer košarkaške lopte je između 24 i 25 cm. Mi ćemo uzeti da je promjer lopte 24.384 cm, a označavat ćemo ga s P_l.
Promjer košarkaškog obruča je 45.72 cm, a označavat ćemo ga P_o.
Udaljenost od linije slobodnih bacanja pa do središta obruča iznosi 4.2672 m. Slobodna bacanja šutamo nekoliko centimetara ispred linije slobodnih bacanja tako da ćemo za horizontalnu udaljenost uzeti da je $l = 4.1257m$.
Visina obruča je na 3.05 m od poda. Mi ćemo promatrati visinu koju lopta postigne nakon što je šutirao. U prosjeku visina koju lopta postigne jednaka je 1.25 m visine igrača. S obzirom da je Shaq visok 2.16 m, njegova lopta će dosegnuti visinu od 2.7 m. Prijeđenu vertikalnu udaljenost ćemo dobiti tako da izračunamo $h = 3.05 - 1.25 \cdot H$, gdje ćemo s H označiti visinu igrača. U našem slučaju $h = 0.35m$.

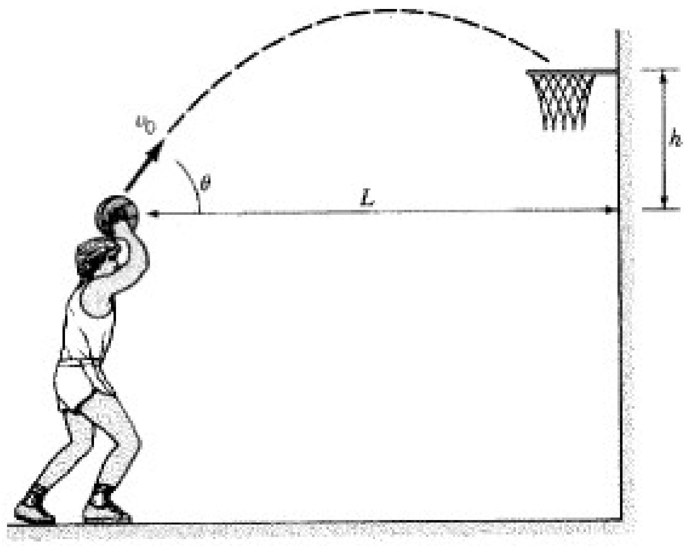


Slika 1: Lijeva slika prikazuje putanju lopte koja počinje kad lopta napusti igračevu ruku. Desna slika prikazuje radijus obruča i radijus lopte.

3 Prvi model: Najbolji kut

Ako ste ikada igrali košarku ili ju gledali mogli ste primjetiti da lopta ponekad uđe u koš iako šut nije bio savršen, tj. lopta se prvo odbije o obruč ili udari o tablu. Što sve utječe na to hoće li lopta ući u koš?
Kako bi lopta došla iz ruke do obruča šuter ju mora uputiti prema košu pod određenim kutem i lukom, šutnuti određenom brzinom i u smjeru obruča. Šuter mora paziti pod kojim kutem će se nalaziti njegova ruka, koliko će se spustiti u koljenima, hoće li pri šutiranju koristiti samo ruke ili će uključiti noge i leđa, hoće li ruku ispružiti do kraja ili će ju ostaviti pod određenim kutem. Ovo su samo neke od stvari koje utječu na to hoće li se postići koš. Kad bi uključili sve ove komponente vjerojatno bi dobili prekompliciran model koji ne bi bio rješiv.
Možemo zaključiti da je među bitnijim čimbenicima početni kut tako da ćemo za početak naš problem definirati na sljedeći način:

"Imamo igrača određene visine, trebamo pronaći najbolji kut pod kojim će on šutati slobodna bacanja."



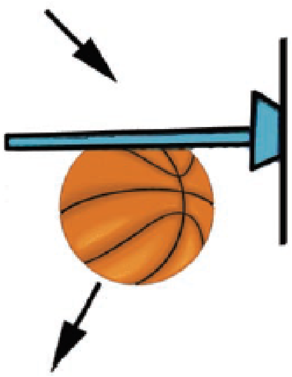
Slika 2: Konceptualizacija slobodnih bacanja

3.1 Pojednostavljenje pretpostavki

1. **Zanemarit ćemo otpor zraka**
   S obzirom da se košarka igra u dvorani, otpor zraka je zanemariv u odnosu na to koliko matematički komplicira naš model.

2. **Nema skretanja s putanje**
   Pretpostaviti ćemo da šuteri bacaju loptu u pravcu obruča, tj. da lopta ne skreće s putanje. Zbog toga ćemo imati dvodimenzionalni sustav. Kad bi dopustili da lopta može skrenuti s putanje imali bi trodimenzionalni sustav što bi naš model dodatno otežalo.

3. **Dopustit ćemo samo skoro "koš bez kostiju"**
   Dopustit ćemo samo putanje koje ulaze direktno ili pogode drugi obruč pa ulaze u koš. Time ćemo obuhvatiti veliki postotak koševa, a u isto vrijeme si pojednostavili model. Kako bi se nakon što je lopta udarila drugi obruč osigurali da neće iskočiti van, u obzir ćemo uzeti samo putanje gdje je centar lopte na ili ispod visine obruča u trenutku kad ga lopta udari.



Slika 3: Lopta udara u drugi obruč i prolazi kroz koš

4. **Zanemarit ćemo rotaciju lopte**
   S obzirom da smo dopustili samo "koševe bez kostiju" zanemarit ćemo rotaciju. Rotacija će nam postati bitna kad dopustimo lopti da skakuće prije nego što uđe u koš.

5. **Nema pogrešaka u brzini izbacivanja**
   U ovom modelu pretpostavljamo da igrači imaju problem s kutem izbacivanja, a ne s brzinom.

6. **Najbolji je šut koji ide kroz središte obruča**
   Uzeti ćemo brzinu izbacivanja koja će loptu ubaciti kroz središte obruča.

7. **Šuter je visok 2.16 m**
   Pronaći ćemo najbolji početni kut za Shaqua.

Ako pogledamo sve ove pretpostavke mogu nam se činiti jako stroge zato jer se košarka ne igra u vakuumu i nisu svi košarkaši visoki kao Shaq. Za početak ćemo uzeti ovako jednostavan model pa ćemo kasnije izbaciti neke pretpostavke i učiniti ga realnijim.

3.2 Izvođenje prvog modela

Pokušat ćemo dobiti formulu koja će nam prikazati koliku pogrešku igrač može napraviti u kutu izbacivanja u ovisnosti o varijablama koje smo naveli.
Koristit ćemo se jednadžbom pokreta projektila koju smo dobili iz drugog Newtonovog zakona.

3.2.1 Kretanje projektila

U dvodimenzionalnoj ravnini promatramo kretanje projektila koja ima početnu brzinu $\vec{v_0}$ i akceleraciju $\vec{g}$ koja je slobodan pad.
To možemo zapisati u obliku

$$\vec{v_0} = \vec{v_H}\vec{i} + \vec{v_V}\vec{j}.$$

Komponente v_H i v_V možemo pronaći ako znamo koliko je početni kut izbacivanja ϕ_0. Jednadžba horizontalne komponente će imati oblik

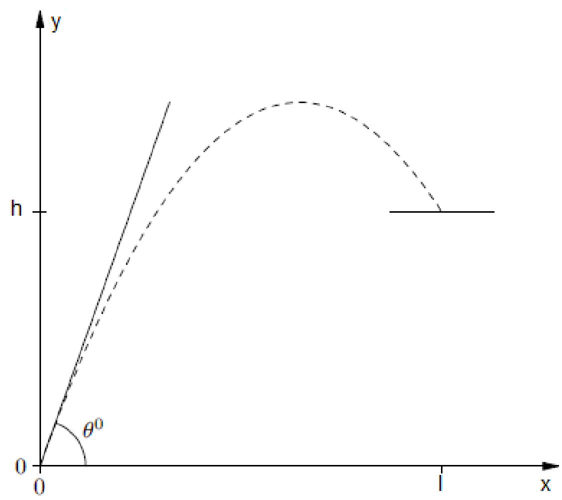
$$v_H = v_0 \cos \phi_0,$$

dok će jednadžba vertikalne komponente imati oblik

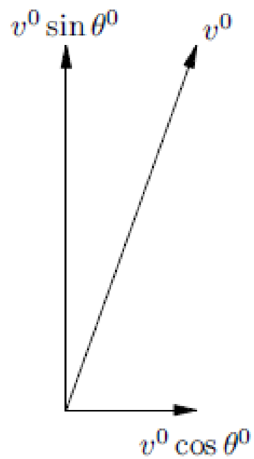
$$v_V = v_0 \sin \phi_0.$$

Tijekom kretanja brzina i pozicija projektila stalno se mijenjaju, dok je akceleracija konstantna i uvijek usmjerena silazno. Projektil nema horizontalnu akceleraciju. U kretanju projektila horizontalna i vertikalna kretnja neovisne su jedna o drugoj. To nam svojstvo omogućava da separiramo dvodimenzionalni problem u dva jednodimenzionalna. Podijelit ćemo ih na horizontalnu i vertikalnu kretnju. Sada možemo analizirati kretnju projektila.

Pogledajmo kako izgleda putanja lopte kad ju smjestimo u dvodimenzionalni koordinatni sustav.



Slika 4: Putanja lopte u ovisnosti o početnom kutu.



Slika 5: Dekompozicija početne brzine.

Početi ćemo, sa horizontalnom kretnjom. S obzirom da u horizontalnom smjeru nema akceleracije njena brzina ostati će ista kroz cijelu kretnju za vrijeme t, pa će jednadžba kretnje u horizontalnom smjeru glasiti

$$x(t) = vt.$$

Ako u tu jednadžbu uvrstimo horizontalnu komponentu dobivamo horizontalnu kretnju

$$x(t) = v_0 \cos(\phi_0)t,$$

gdje $x(t)$ označava udaljenost u trenutku t i brzinu v.
Vertikalna kretnja zapravo je slobodan pad. Bitno je još jednom napomenuti da je akceleracija konstantna i da iznosi $-g = 9.81m/s^2$. Jednadžba kretanja u vertikalnom smjeru glasi

$$y(t) = vt + \frac{1}{2}gt^2.$$

Ako u tu jednadžbu uvrstimo vertikalnu komponentu dobiti ćemo vertikalnu kretnju

$$y(t) = v_0 \sin(\phi_0)t + \frac{1}{2}gt^2.$$

S obzirom da smo udaljenost kretnje lopte od slobodnog bacanja do obruča označili s l te vertikalnu kretnju lopte s h, naše jednadžbe će biti oblika

$$l = v_0 \cos(\phi_0)t,$$

$$h = v_0 \sin(\phi_0)t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Sada ćemo iz horizontalne udaljenosti izlučiti t i ubaciti u vertikalnu udaljenost

$$t = \tfrac{l}{\cos(\phi_0)v_0}$$

$$h = v_0 \sin(\phi_0)\tfrac{l}{\cos(\phi_0)v_0} + \tfrac{1}{2}g(\tfrac{l}{\cos(\phi_0)v_0})^2$$

$$\mathrm{tg}(\phi_0)l + \tfrac{1}{2}g\tfrac{l^2}{\cos^2(\phi_0)v_0^2} - h = 0$$

$$\mathrm{tg}(\phi_0)l - h = -\tfrac{1}{2}gl^2\tfrac{1}{\cos^2(\phi_0)v_0^2}$$

$$\cos^2(\phi_0)v_0^2 = -\tfrac{1}{2}gl^2\tfrac{1}{\mathrm{tg}(\phi_0)l-h}$$

$$v_0 = \frac{l}{\cos(\phi_0)}\sqrt{\frac{-g}{2(\text{tg}(\phi_0)l - h)}}. \tag{1}$$

Prvo ćemo početni kut ograničiti s $0° < \phi_0 < 90°$. Izraz pod korijenom mora biti veći od 0 te ne smijemo zaboraviti da je g negativan. Iz toga slijedi

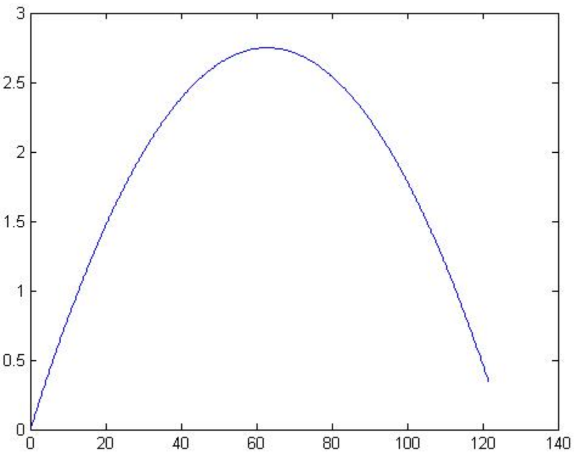
$$l \,\text{tg}\, \phi_0 - h > 0$$

$$\text{tg}\, \phi_0 > \tfrac{h}{l}$$

$$\phi_0 > \text{tg}^{-1}(\tfrac{h}{l}).$$

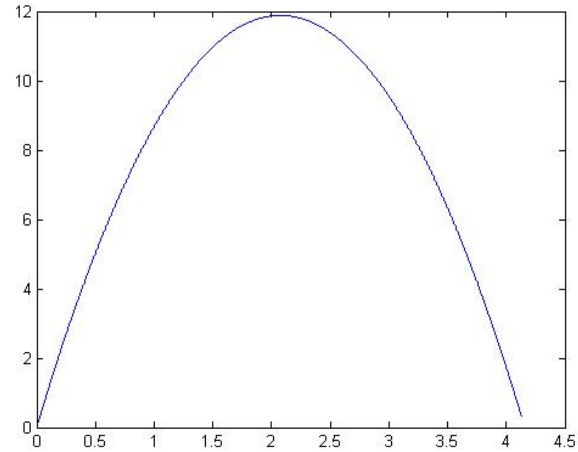
Iz zadnjeg uvjeta dobivamo $\phi_0 \in \langle \text{tg}^{-1}(\frac{h}{l}), 90°\rangle$. Bitno je odrediti intervale u kojima se parametri nalaze kako ne bi dobili rezultate koji su fizički nemogući.

Pogledajmo kako se putanja lopte ponaša u odnosu na različite početne kuteve. Na grafu će x-os označavati udaljenost od crte slobodnih bacanja pa do koša, dok će y-os označavati visine koje je lopta postizala na svom putu od šuterove ruke pa do koša. Kod Shaquillea je dopušteni kut izbacivanja iz intervala $\langle 4.8366°, 90°\rangle$. Ako za ϕ uzmemo da je 5° možemo vidjeti da lopta neće doći do koša.



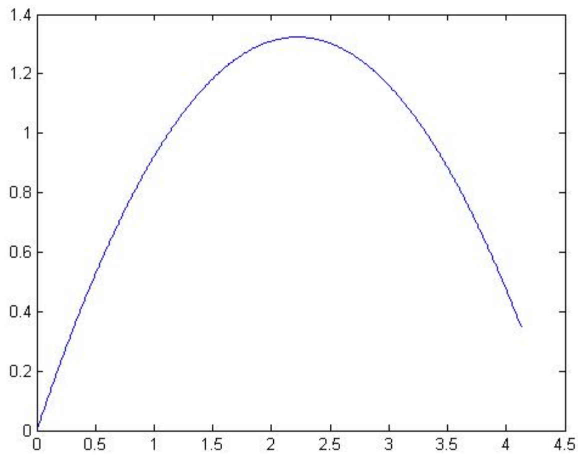
Slika 6: Putanja lopte kada je kut izbacivanja 5°

Ako za ϕ uzmemo da je 85° iz slike možemo vidjeti da će putanja biti previsoka te će lopta vjerojatno udariti u strop dvorane.



Slika 7: Putanja lopte kada je kut izbacivanja 85°

Nakon što smo pogledali putanju lopte na rubnim slučajevima, logički možemo zaključiti da bi kut izbacivanja mogao biti oko 50°.



Slika 8: Putanja lopte kada je kut izbacivanja 50°

3.2.2 Jednadžba početnog kuta

Sada kada imamo modeliranu jednadžbu pokreta, možemo izvesti jednadžbu za početni kut sa mogućim pogreškama, ali tako da lopta ide direktno u koš.
Početnu brzinu ćemo fiksirati, dok ćemo početnom kutu izbacivanja dopustiti da

varira. Sada imamo:

$$v_0 = \frac{x}{\cos(\phi_0)}\sqrt{\frac{-g}{2(x\,\mathrm{tg}(\phi_0)-h)}}$$

$$v_0\cos(\phi_0) = x\sqrt{\frac{-g}{2(x\,\mathrm{tg}(\phi_0)-h)}}$$

$$v_0^2\cos^2(\phi_0) = \frac{-gx^2}{2(x\,\mathrm{tg}(\phi_0)-h)}$$

$$2(x\,\mathrm{tg}(\phi_0)-h) = \frac{-gx^2}{v_0^2\cos^2(\phi_0)}$$

$$\frac{-g^2x^2}{v_0^2\cos^2(\phi_0)} = 2gx\,\mathrm{tg}(\phi_0) - 2gh$$

$$(\frac{gx}{v_0\cos(\phi_0)})^2 + 2gx\,\mathrm{tg}(\phi_0) = 2gh$$

$$(\frac{gx}{v_0\cos(\phi_0)})^2 + \frac{2gx}{\cos(\phi_0)}\sin(\phi_0) + v_0^2\sin^2(\phi_0) - v_0^2\sin^2(\phi_0) = 2gh$$

$$(\frac{gx}{v_0\cos(\phi_0)} + v_0\sin(\phi_0))^2 = 2gh + v_0^2\sin^2(\phi_0)$$

$$(-1)^2(\frac{gx}{v_0\cos(\phi_0)} + v_0\sin(\phi_0))^2 = 2gh + v_0^2\sin^2(\phi_0)$$

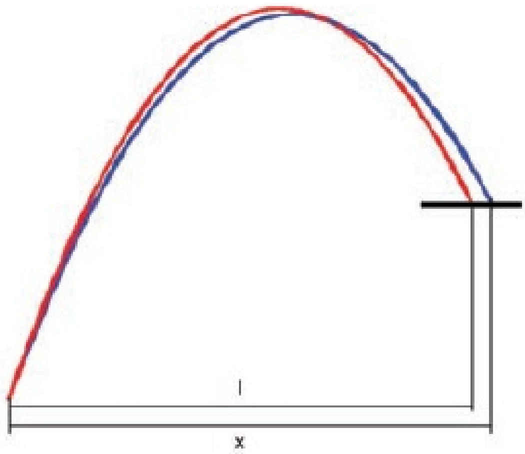
$$\frac{-gx}{v_0\cos(\phi_0)} - v_0\sin(\phi_0) = \sqrt{2gh + v_0^2\sin^2(\phi_0)}$$

$$x = \frac{v_0\cos(\phi_0)}{-g}(v_0\sin(\phi_0) + \sqrt{2gh + v_0^2\sin^2(\phi_0)}).$$

Dobili smo novu jednadžbu horizontalne pozicije lopte x u trenutku kad se vraća na visinu obruča.

$$x = \frac{v_0\cos(\phi_0^{oops})}{-g}(v_0\sin(\phi_0^{oops}) + \sqrt{2gh + v_0^2\sin^2(\phi_0^{oops})})$$

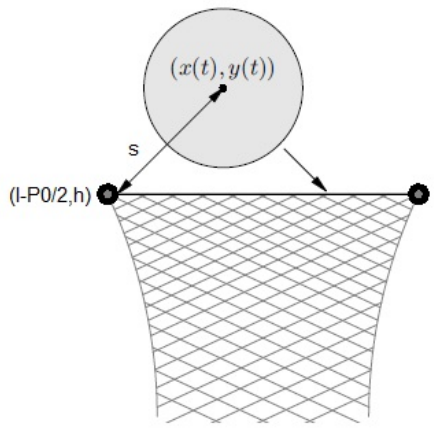
Oznaka kuta ϕ_0^{oops} odgovara većem ili manjem kutu izbacivanja (greška) od idealnog početnog kuta ϕ_0 gdje lopta prolazi kroz centar obruča.



Slika 9: Usporedba putanja kada lopta prolazi kroz centar obruča (v_0, ϕ_0) (crvena) i kada postoji greška u kutu izbacivanja (v_0, ϕ_0) (plava).

Sada ćemo izvesti dva kriterija za prolazak lopte kroz obruč

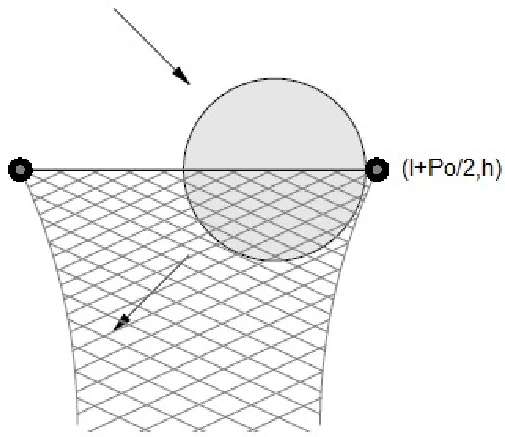
1. Sa s ćemo označiti udaljenost između obruča i centra lopte. Kako bi izbjegli kontakt lopte sa prednjim dijelom obruča, s mora ostati veća od radijusa lopte tijekom njene putanje, tj. za svo vrijeme T tako da je $0 < T < t$. Koristiti ćemo kvadratnu udaljenost kako bi stvorili kriterij da lopta ne dira prednji dio obruča
$$s^2 = (x(t) - (l - P_o/2))^2 + (y(t) - h)^2 > (P_l/2)^2.$$



Slika 10: Udaljenost s između obruča i centra lopte

2. $x + P_l/2$ je horizontalna udaljenost do krajnjeg desnog dijela lopte kada je centar lopte na istoj razini kao i koš. S obzirom da je $l + P_o/2$ horizontalna udaljenost do zadnjeg obruča, kriterij da lopta udari drugi obruč dok centar lopte prolazi kroz koš je

$$x + P_l/2 = l + P_o/2.$$



Slika 11: Lopta udara u obruč na visini h i ulazi u koš

3.3 Rješavanje jednadžbe

Kako bi pronašli dozvoljene pogreške, za dani početni kut ϕ_0 držati ćemo v_0 fiksiranim.
Za kut ϕ_{low}, odnosno za pogodak u prednji obruč, moramo izračunati jednadžbu

$$s^2 - (P_l/2)^2 = 0. \tag{2}$$

Za pogođen drugi obruč, odnosno kut ϕ_{high}, moramo izračunati jednadžbu

$$x - l + \frac{P_l + P_o}{2} = 0. \tag{3}$$

Na grafovima koji pokazuju putanju lopte u ovisnosti o početnom kutu, mogli smo vidjeti da kad povećamo početni kut povećavamo i visinu koju lopta postigne na svom putu do koša. No, svakako će se u jednom trenutku ta udaljenost početi smanjivati. To se može dogoditi prije nego lopta udari drugi obruč. To znači da u nekim situacijama za određene putanje nećemo imati rješenje jednadžbe (3), već su ϕ_{low} i ϕ_{high} rješenja od jednadžbe (2).

Nakon što smo pronašli ϕ_{low}, ϕ_{high} tražimo devijaciju od ϕ_0, tj. mjeru raspršenosti podataka u skupu:

$$e(\phi_0) = \min\{\phi_{high} - \phi_0, \phi_0 - \phi_{low}\}.$$

Treba napomenuti da su ϕ_{low} i ϕ_{high} najmanja odnosno najveća devijacija kuta ϕ_0 za koji lopta ulazi u koš. Interval $[\phi_{low}, \phi_{high}]$ je najveći interval za kut ϕ_0 za koji vrijedi da ako izaberemo bilo koji kut iz tog intervala, šut će rezultirati pogotkom.

Najbolji kut izbacivanja je onaj koji maksimizira ovu funkciju.
Za Shaqa smo dobili da je $\phi_{low} = 44°51'$, a $\phi_{high} = 49°55'$ iz čega slijedi da je funkcija koja će dati najbolji kut izbacivanja za Shaqa oblika

$$e(\phi_0) = \min\{49°55' - \phi_0, \phi_0 - 44°50'\}.$$

Kako pronaći maksimum funkcije?

1. Derivirati funkciju te pronaći kada je njena vrijednost 0.

2. Vrijednost druge derivacije mora biti negativna kako bi se osigurali da je to maksimum.

Za početak moramo rješiti $e'(\phi_0) = 0$, odnosno pronaći prvu derivaciju funkcije ϕ_0. Ako pogledamo malo bolje funkciju $e(\phi_0)$, možemo vidjeti da se unutar nje nalazi funkcija minimuma iz čega možemo zaključiti da nije derivabilna. To znači da na ovaj način nećemo moći dobiti rješenje funkcije. Većina metoda optimizacije zahtjeva da funkcija ima makar prvu derivaciju. Ovakva funkcija je u matematičkoj optimizaciji definirana kao nelinearna univarijantna funkcija cilja. Neke od metoda koje rješavaju ovakvu funkciju su metoda bisekcije i metoda zlatnog reza.
Kako bi dobili rješenje funkcije koristiti ćemo se matematičkim alatom Wolfram Alpha, koji je dostupan na internetu. Nakon što smo unijeli ovu funkciju za najbolji kut koji maksimizira ovu funkciju dobijemo $\phi_0 = 47°22'36.66''$, te pripadnu brzinu koja iznosi $v_0 = 6.6379 m/s$.

3.4 Interpretacija modela

Uspjeli smo pronaći najbolji kut za Shaqa, ali pod uvjetom da on uvijek uspjeva iskontrolirati brzinu kojom će izbaciti loptu, što realno nije moguće. Za očekivati je da će igrač pod pritiskom i umorom raditi greške u oba segmenta. Postavlja se pitanje je li ovo najbolji kut izbacivanja? Vjerovatno nije, pogotovo ako igrač ima problema sa kontroliranjem brzine.

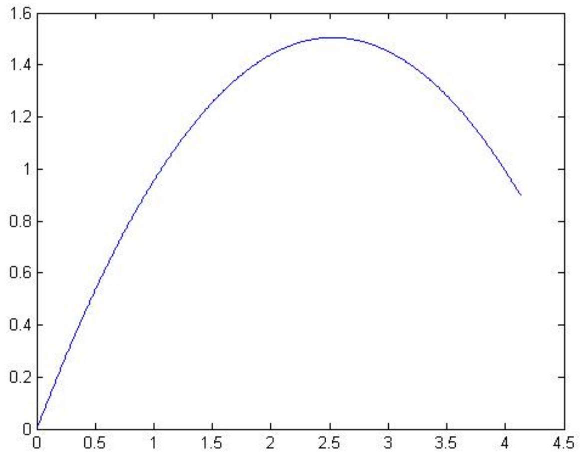
3.5 Poboljšanje modela

Kad krećemo s modeliranjem, normalno je početi s prepostavkama kako bismo si olakšali pronalazak rješenja. Jedna od pretpostavki s kojom smo započeli modeliranje je ta da Shaq kontrolira brzinu izbačaja lopte. Što više pretpostavki imamo, naše rješenje će biti manje točno. Nakon što smo kreirali prvi model, dalje ćemo nastaviti tako što ćemo neke od tih pretpostavki izbaciti i time naš model učiniti realniji. No, prije toga ćemo izračunati koji je najbolji kut izbacivanja za igrača moje visine 172 cm.

3.6 Najbolji kut izbacivanja za igrača moje visine

U računanju prvog modela koristit ćemo se matematičkim alatom MATLAB. Računanje ćemo raditi za osobe koje su visoke $1.72m$. Prvo ćemo odrediti u kojem se intervalu treba nalaziti početni kut kako ne bi dobili rješenja koja su fizički nemoguća.
MATLAB KOD: $dkut = atand(h/l)$
rješenje: $\phi_0 \in \langle 12.3008°, 90° \rangle$
Vidimo da je donja granica za početni kut veća nego kod Shaqa. To je zato što igrač niži od njega treba loptu ispucati pod većim kutem kako bi dosegnula potrebnu visinu da dođe do koša.
Pogledajmo kako izgleda putanja lopte kada dopuštamo pogreške u kutu.
MATLAB KOD:
$l = 4.1275$
$h = 3.05 - 1.25 * 1.72$
$g = -9.81$
$Pl = 0.24384$
$Po = 0.4572$
$kut = 50$
$v0 = (l/cosd(kut)) * sqrt(-g/(2 * (l * tand(kut) - h)))$
$vx = v0 * cosd(kut)$
$vy = v0 * sind(kut)$

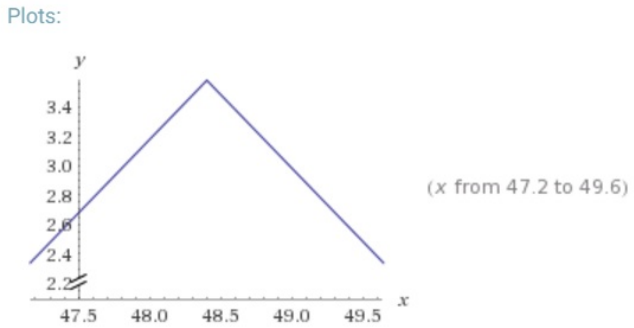
$T = (vy + sqrt(vy * vy + 2 * g * h))/(-g)$
$nt = 500$
$t = linspace(0, T, nt)$
$x = vx * t$
$y = vy * t + g * t. * t/2$
$plot(x, y)$



Slika 12: Putanja lopte za igrača visine 1.72 m

Nakon toga trebamo izračunati koliki su ϕ_{low} i ϕ_{high}. Parametri nam ostaju isti.
MATLAB KOD
$function f = funmin(n)$
$v0 = (l/cosd(kut)) * sqrt(-g/(2 * (l * tand(kut) - h)))$
$t = (v0 * sind(kut) + sqrt(v0 * v0 * sind(kut) * sind(kut) + 2 * g * h))/(-g)$
$f = (v0 * cos(n) * t - (l - Po/2))^2 + (v0 * sin(n) + 0.5 * g * t^2 - h)^2 - (Pl/2)^2$
end
$x = fminbnd(@funmin, 44, 50, optimset('TolX', 1e-8, 'Display', 'iter'))$
rješenje: $\phi_{low} = 44.8254°$
$function f = funmax(n)$
$v0 = (l/cosd(kut)) * sqrt(-g/(2 * (l * tand(kut) - h)))$
$t = (v0 * sind(kut) + sqrt(v0 * v0 * sind(kut) * sind(kut) + 2 * g * h))/(-g)$
$f = ((v0 * cosd(n)/(-g)) * (v0 * sind(n) + sqrt(v0^2 * sind(n)^2 + 2 * g * h))) + ((Pl - Po)/2) - l$
end

rješenje: $\phi_{high} = 51.98$
Dobili smo funkciju oblika $e(\phi_0) = \min\{51.98° - \phi_0, \phi_0 - 44.8254°\}$. Kada tu funkciju ubacimo u Wolfram Alphu dobijemo da je najbolji početni kut $\phi_0 = 48.4027°$, a početna brzina $v_0 = 7.1110 m/s$.



Slika 13: Grafički prikaz funkcije

Vidimo da je početni kut i početna brzina u odnosu na Shaqa veća zbog razlike u visini.

4 Drugi model: Najbolja putanja

U prvom modelu smo izračunali početni kut ϕ_0 i interval pogrešaka $[\phi_{low}, \phi_{high}]$ tako da šut rezultira pogotkom i prolazi kroz centar obruča. Početna brzina v_0 bila je fiksirana. Sada ćemo otežati naš model tako što ćemo izbaciti pretpostavku da je najbolji šut onaj koji prolazi kroz centar obruča i da je brzina fiksirana.
Ostavit ćemo istu visinu igrača, te istu jednadžbu pokreta. Dopustit ćemo da u isto vrijeme i neovisno variraju početna brzina i kut. Time smo dobili par (v_0, ϕ_0) koji će dati lopti određenu putanju, koja će na kraju rezultirati promašajem ili pogotkom. Kako smo u prvom modelu odredili funkciju, tako ćemo i u ovom modelu, samo što će naša funkcija sada ovisiti o dva parametra, ϕ_0 i v_0.

Sada možemo naš problem definirati na sljedeći način:

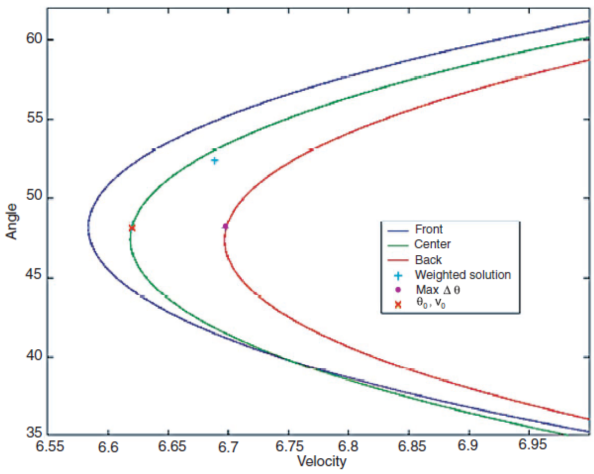
"Za košarkaša određene visine, odredimo putanju (koja ovisi o početnom kutu i brzini) koja dopušta najveća moguća odstupanja uz koja lopta i dalje ulazi u koš."

Prije nego što krenemo u kreiranje modela moramo odrediti dopuštene parove (v_0, ϕ_0).

4.1 Konstrukcija dopuštenog područja

Dopušteno područje putanje čine svi parovi (v_0, ϕ_0) koji će rezultirati pogođenim slobodnim bacanjem.

Dopušteno područje ćemo odrediti numeričkom metodom na sljedeći način. Za fiksirani početni kut ϕ_0 izračunat ćemo početnu brzinu v_{0front}, gdje lopta udara prednji dio obruča (s tim da ulazi u koš) i početnu brzinu v_{0back} gdje lopta udara u drugi obruč na visini h. Ako napravimo takav izračun za 100 različitih vrijednosti početnog kuta iz intervala $[35°, 65°]$ dobit ćemo sljedeću sliku koja prikazuje dopušteno područje.



Slika 14: Dopušteno područje za Shaqua

Plava granica predstavlja rješenje jednadžbe (2), odnosno udarac u prednji obruč. Crvena granica predstavlja rješenje jednadžbe (3) gdje lopta udara u drugi obruč. Zelena granica predstavlja rješenje jednadžbe (1) kada lopta prolazi kroz centar obruča.

Pogledajmo na slici gdje se nalazi najbolja putanja iz našeg prvog modela. Treba se nalaziti na zelenoj granici zato jer smo dupustili samo koševe kroz središte obruča. Vidimo da imamo više mjesta desno, nego što imamo lijevo, odnosno da ima više mjesta za prebaciti loptu, nego podbaciti. Iz toga možemo zaključiti da je ova putanja dobra za osobe koje će u većini slučajeva prebaciti loptu, dok za one koji će podbaciti loptu ovo nije dobra putanja.

"Najbolja putanja će ovisiti o individualcu i načinu na koji on šutira."

Proučimo sada koji par (ϕ_0, v_0) dopušta najveće pogreške u kutu. Ako dopustimo da lopta prođe kroz obruč sa bilo koje pozicije i ne nužno kroz centar obruča i ako maksimiziramo dopuštene pogreške u početnom kutu, dobit ćemo točku na crvenoj granici označenu s max. Ali ova putanja ne dopušta pogreške u početnoj brzini.

Ranije smo napomenuli da za neke kuteve nećemo imati rješenje za jednadžbu (3). Pogledajmo donji desni kut gdje se plava i zelena granica sjeku. Vidimo da ćemo za male kuteve dobiti putanju gdje lopta prolazi kroz obruč bez da dosegne centar obruča.

Par koji će maksimizirati dozvoljene pogreške u početnoj brzini nije tako jednostavno pronaći. Kako povećavamo početni kut, tako ćemo povećavati i dozvoljene

pogreške u brzini. Pogledajmo gornji desni kut slike i udaljenost između plave i zelene granice. Horizontalna udaljenost će se povećavati (na ovoj slici to ne vidimo), tj. povećavati će se dozvoljena pogreška u početnoj brzini. Vidimo da je dozvoljena greška u kutu vrlo mala. Drugi problem je i sama brzina, jer je velika vjerojatnost da će pogoditi strop šutnemo li ju velikom brzinom.
Gornja analiza potvrđuje da istovremeno trebamo proučavati početnu brzinu i početni kut kako bi dobili najbolju putanju zato što:

1. Putanja koja maksimizira dozvoljene pogreške u kutu izbacivanja je također putanja koja ne dopušta greške u brzini izbacivanja.

2. Putanja koja maksimizira dozvoljene pogreške u brzini izbacivanja je također putanja koja ne dozvoljava greške u kutu izbacivanja.

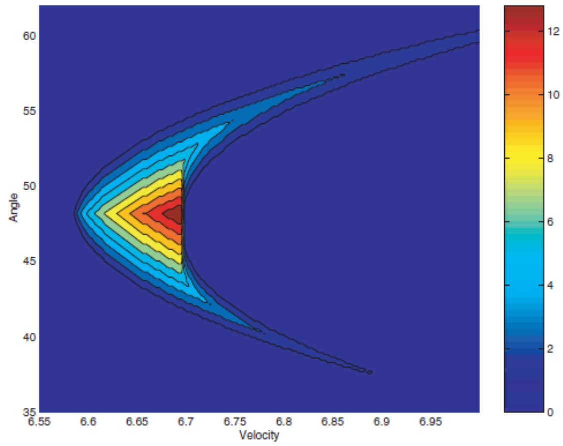
3. Najbolji kut iz našeg prvog modela ostavlja malo mjesta za podbacivanje, a to je najčešći problem koji igrači imaju. Zato je vrlo vjerojatno da najbolja putanja neće ići kroz centar obruča.

Zbog navedenih razloga u ovom modelu izbacujemo navedene pretpostavke.
Nadalje, moramo objasniti što mislimo pod najbolja putanja s obzirom da postotci i metri po sekundi nisu direktno povezani.
Jedan od načina proučavanja dvije različite greške je proučavanje grešaka u postotcima. Ako za dani par (ϕ_0, v_0) odredimo ϕ_{low} i ϕ_{high} (v_0 ćemo fiksirati), kako bi dobili početni kut ϕ_0 koji će rezultirati pogotkom, te odredimo odgovarajuće v_{0front} i v_{0back} (ϕ_0 ćemo fiksirati) kako bi dobili početnu brzinu v_0 koja će rezultirati pogotkom imamo jednadžbe oblika

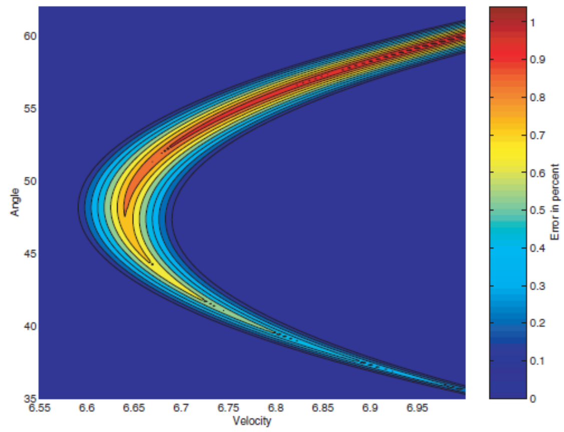
$$e_\phi(\phi_0, v_0) = \min\{(\phi^0_{low} - \phi_0)/\phi_0, (\phi_0 - \phi^0_{high})/\phi_0\} \tag{4}$$

$$e_v(\phi_0, v_0) = \min\{(v^0_{front} - v_0)/v_0, (v_0 - v^0_{back})/v_0\}. \tag{5}$$

Sljedeće slike prikazuju te dvije funkcije pomnožene sa brojem 100. Dopuštena greška u postotcima za kut je ograničena intervalom $[35°, 60°]$, a brzina s intervalom $[6.6m/s, 7m/s]$. Koliko igrač može griješiti u brzini i kutu, a opet zabiti slobodno bacanje?



Slika 15: Dopuštena postotna greška u kutu



Slika 16: Dopuštena postotna greška za brzinu

Na slikama crvena boja označava najveću mogućnost pogreške, dok tamno plava označava najmanje moguće pogreške u postotcima. Iz slika možemo vidjeti da veće postotne greške možemo raditi u kutu, nego u brzini, tj. možemo zaključiti da je putanja osjetljivija na promjenu brzine nego kuta. Također vidimo da veće greške možemo raditi u većim brzinama za koje smo zaključili da bi vjerojatno rezultirale pogotkom u strop.

"Bitnije je koristiti točnu brzinu, nego točan kut."

4.2 Ponovno definiranje problema

Sljedeće pitanje koje ćemo si postaviti je kako pronaći optimalno rješenje u slučaju da imamo dva mjerenja koja se međusobno suprostavljaju. Drugim riječima, kako ćemo istovremeno maksimizirati funkcije (4) i (5)? Problemi ove vrste se zovu višekriterijski problemi optimizacije.

Višekriterijsko optimiziranje je grana matematike koja se bavi optimizacijom problema uz postojanje više kriterija, tj. više funkcija cilja. Najčešće su ti kriteriji u konfliktu, te imaju neusporedive mjerne jedinice. U ovakvim slučajevima se ne može govoriti o najboljoj niti optimalnoj odluci u klasičnom smislu, nego o odluci koja najbolje zadovoljava kriterije. Problem se odnosi na minimiziranje ili maksimiziranje dvije ili više funkcija cilja na nekom skupu mogućih rješenja.

Jedan od načina rješavanja takvog problema je fiksiranje kuta koji će dopustiti najveću grešku za najviše brzina a zatim maksimiziranje greške u brzini. Ovo možemo napraviti samo zato što smijemo razdvojiti te dvije optimizacije.

Druga, šire primjenjiva metoda za rješavanje takvih problema, je pridruživanje težina svakom objektu i optimiziranje težinskih kombinacija tih objekata. U ovom našem slučaju kombinirat ćemo dva težinska objekta tako što ćemo uzeti minimalnu postotnu grešku u kutu i pet puta postotnu grešku u brzini. Dolazimo do sljedeće definicije

"Najbolja putanja je ona koja ističe 5 *puta više greške u brzini, nego u kutu."*

$$e(\phi_0, v_0) = \min\{e_\phi(\phi_o, v_0), 5e_{v_0}(\phi_0, v_0)\}$$

Uzmimo za primjer da naša funkcija ima vrijednost $e(\phi_0, v_0) = 0.05$. To znači da će slobodno bacanje biti uspješno ako postotna greška u početnom kutu iznosi 5% ili u početnoj brzini 1%. Na kraju za Shaqa dobivamo da je najbolji kut izbacivanja $\phi_0 = 52.37°$, a brzina izbacivanja $v_0 = 6.7m/s$.

4.3 Interpretacija modela

Kako bi pogodili slobodno bacanje važan nam je početni kut, ali i početna brzina. Problem smo riješili pomoću višekriterijske optimizacije tako da smo objektima pridodali težine. Višekriterijsko optimiziranje je dosta zahtjevno, ali istovremeno dopušta veliku fleksibilnost. Ako ste zabrinutiji za konzistentnost kuta izbacivanja, nego za brzinu izbacivanja, onda ćete na kut staviti veću težinu nego na brzinu kako bi dobili veću mogućnost za pogreške. Isto tako, onaj tko ima problema s konstantnom brzinom izbacivanja bi trebao ispuštati loptu s malo većim kutem nego prosječni šuter. Iz toga možemo zaključiti da svaki igrač treba sam izabrati optimalnu putanju u ovisnosti o tome ima li više problema sa kontroliranjem početnog kuta ili početne brzine. To vrijedi i za igrače kao što je Shaq koji je uglavnom slobodna bacanja šutirao prekratko. On ima premalen početni kut i nestalnu brzinu izbacivanja.

5 Najbolji mogući model

U ovom poglavlju ćemo ukratko pogledati što bi se dogodilo kad bi iz našeg modela nastavili izbacivati pretpostavke. Nećemo se time detaljno baviti jer bi bilo potrebno napraviti dodatna istraživanja. Ako stvarno želite učiniti svoj model realnim, trebali biste i njih izbaciti.
Jedna od pretpostavki koja nam je ostala je zanemarivanje otpora zraka. Kako bi se otpor zraka mogao uključiti u model, prvo se mora promijeniti jednadžba kretnje. Ona se izvodi iz Stokesovog zakona koji je poznat kao vučna sila. Ta sila će uz gravitaciju uzrokovati da lopta ide prema dolje. Proporcionalna je sa brzinom koju lopta postiže u svakom trenutku. Jednadžba Stokesovog zakona je oblika

$$F = 3\pi\mu Plv.$$

Na silu će osim veličine lopte utjecati viskoznost zraka (μ), temperatura i pritisak, te se na to treba dodatno pripaziti.
Nakon što smo izveli jednadžbu kretnje, dopustit ćemo da početni kut i početna brzina variraju u isto vrijeme, te rješavamo problem na isti način kao i u drugom modelu. Rezultati koje dobijemo kada uključimo otpor zraka biti će slični rezultatima drugog modela. Zbog toga možemo zaključiti da otpor zraka stvarno nema toliko veliki utjecaj na putanju slobodnog bacanja.

Uklonimo li pretpostavku da dopuštamo samo koševe koji ulaze skoro "bez kostiju", dopustit ćemo lopti da odskakuje i da ima rotaciju. U tom slučaju moramo uzeti u obzir da lopta može odspakivati po obruču, izletjeti iz obruča ili se odbiti o tablu. Koliko će lopta odskakivati ovisiti će o koeficijentu restitucije lopte. Primjerice, ako bacimo loptu s visine od $1.8m$ možemo očekivati da će se vratiti do visine između $1.2 - 1.4m$. Također je bitna i tvrdoća obruča. Ukoliko je obruč pretvrd, veća je vjerojatnost da će lopta ako dodirne obruč iz njega iskočiti i koš neće biti postignut. Posljedica rotacije lopte još se zove Magnus Effect i definiran je kao sila koja savija let lopte. Rotacija lopte može kreirati trodimenzionalni model zato jer postoji vjerojatnost da će lopta odletjeti bočno.
Znači da bi na putanju u ovom modelu, osim početnog kuta i brzine, utjecaj imali i lopta i obruč. Prva je pomisao da bi najbolja putanja trebala biti ona koja prolazi kroz centar obruča. Ipak, istraživanja su pokazala da je najbolja putanja ona gdje lopta udara u tablu, te nakon toga ide u koš.

Zadnja pretpostavka koja nam je ostala je skretanje s putanje. Logično je ako želimo postići koš da ćemo loptu pokušati ispucati što više u smjeru obruča, odnosno pravocrtno. Ovaj model je kompliciran zato jer postaje trodimenzionalan, te bi imali dvije početne brzine i dva kuta, u vertikalnom i u horizontalnom smjeru.

U obzir moramo uzeti i nematematički utjecaj na učinak slobodnih bacanja, a to je koncentracija igrača. Kao što je navedeno na početku rada, slobodna bacanja često puta imaju glavnu ulogu u tome hoće li tim dobiti utakmicu ili ne. To može izazvati tremu koja će sigurno ostaviti posljedice na koncentraciju igrača, a time i na kontroliranje početnog kuta i brzine, za koje smo vidjeli da utječu na to hoće li lopta ući u koš ili ne. Jedno od rješenje za takve situacije je praksa gdje nam šutiranje slobodnih bacanja postaje rutina. Osim toga, većina igrača ima "preshot routine" u kojoj prije svakog izvođenja slobodnog bacanja ponavljaju određene radnje, kao što su tapkanje lopte o pod, rotiranje lopte u ruci, gledanje u koš, tapkanje nogama u mjestu i slično. Zaključak je da je naša psiha jednako bitna za dobro izvođenje slobodnih bacanja kao i sama matematika i fizika.

6 Zaključak

Kao osoba koja se cijelog života bavi košarkom, šutiranje slobodnih bacanja gledala sam kao rutinu i kao zadatak koji moram odraditi sa pozitivnim ishodom. Slobodna bacanja sam izvodila po nekakvom osjećaju i automatizmom, bez razmišljanja pod kojim kutem trebam šutirati ili koliko brzo izbaciti loptu. Smatrala sam da najveću ulogu u tome hoću li zabiti slobodno bacanje ima moja koncentracija i koliko sam umorna. Nakon ovoga rada, shvatila sam koliko sam zapravo bila u krivu. Sada, kad stanem na crtu slobodnih bacanja, pokušavam razmišljati o početnom kutu i brzini. Shvatila sam da sam zapravo kroz treninge i utakmice, iskustvom pronašla najbolji kut i najbolju brzinu. Kada budem umorna zna mi se događati da loptu ispucam pod manjim kutem. Time putanja lopte automatski bude niža te lopta dođe samo do prvog obruča. Ali kada loptu ispucam pod većim kutem i malo većom brzinom, u pravilu skoro uvijek lopta uđe u koš “bez kostiju”. Također, ako ciljam da mi lopta udari prvo o tablu, u pravilu lopta ulazi u koš. Zaključak je da se rezultati koje sam dobila ovim modelom podudaraju sa iskustvom koje imam u košarci.

Literatura

[1] J.M. Gablonsky, A. S.I.D. Lang, *Modeling Basketball Free Throws, Society for Industrial and Applied Mathematics*, SIAM Review, 47(2005), 775-798

[2] F. Hausser, Y. Luchko, *Mathematische Modellierung mit MATLAB*, Springer Spektrum, Berlin, 2011.

[3] J. Walker, D. Halliday, R. Resnick, *Fundamentals of Physics —10th ed.*, John Wiley & Sons, New York, 2014.

[4] `http://stats.nba.com/players/drives/#!?sort=DRIVE_FT_PCT&dir=1&Season=2016-17&SeasonType=Regular%20Season`

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Free_throw`

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_model`

[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Multi-objective_optimization`

Sažetak

U ovom radu smo izveli model slobodnih bacanja kako bi zaključili što je sve potrebno za uspješno slobodno bacanje. Započeli smo sa pojednostavljenim modelom s određenim pretpostavkama te smo pretpostavili da su nam za model najbitniji visina igrača i početni kut. Ne možemo očekivati da će igrač pri svakom izvođenju slobodnog bacanja moći držati početnu brzinu konstantnom pa se ovaj model nije pokazao najboljim. Vidjeli smo da postoje razlike u početnoj brzini i kutu kod igrača različitih visina te da niži igrači trebaju ispucati loptu pod većim kutem.

U drugom modelu smo dopustili da u isto vrijeme i neovisno variraju početna brzina i kut. Tražili smo idealnu putanju lopte sa najvećim mogućim odstupanjima u početnom kutu i brzini, ali pod uvjetom da lopta i dalje ulazi u koš. Izbacili smo pretpostavku da lopta mora proći kroz centar obruča. Prvi zaključak do kojeg smo došli je da će najbolja putanja prvenstveno ovisiti o individualcu i načinu na koji on šutira. Iz slika smo vidjeli da najbolja putanja nije ona koji prolazi kroz centar obruča te da je putanja koja dozvoljava maksimalu pogrešku ona koja prolazi između centra obruča i drugog obruča. Također smo vidjeli da nam je bitnija konzistentnost u brzini, nego u kutu, tj. da je putanja osjetljivija na promjene u brzini, nego u kutu. Veće greške možemo raditi pri većim brzinama. Igrači koji imaju problem s kontroliranjem brzine, trebali bi loptu ispuštati pod većim kutem u odnosu na prosjek. Ako imamo više problema sa kontroliranjem brzine, onda ćemo na brzinu staviti veću težinu kako bi dobili više prostora za pogreške.

Vidjeli smo da na model mogu utjecati i otpor zraka, tvrdoća obruča, koeficijent, odskakivanje ili rotacija lopte. Model možemo promatrati i u trodimenzionalnom sustavu, koji dobijemo ukoliko izbacimo pretpostavku da lopta neće skrenuti sa putanje.

Ključne riječi: košarka, matematičko modeliranje, početni kut, početna brzina, putanja

Summary

In this paper, we conducted a free throw model to find out what is needed for a successful free throwing. We started with a simplified model with certain assumptions and we assumed that player's height and the initial angle are the most important for the model. We can not expect from player to keep the initial velocity constant at each free throw he perform, so this model is not quite the best. We have seen that there are differences in initial angel and velocity for players of different altitudes, so the lower player should shot the ball at greater angle.

In the second model we allowed variation of initial speed and angle at the same time and independently. We were looking for an ideal velocity for the ball with the maximum possible deviations in the initial angel and velocity, but providing that ball still enters the basket. Furthermore, we have excluded the assumption that the ball must pass through the center of the hoop. The first conclusion we come across is that the best trajectories will primarily depend on the individual and the manner in which he or she shots the ball. From the pictures we saw that the best trajectory is not the one that passes through the center of the hoop and that the trajectory that permits the maximum mistake is the one that passes between the center of the hoop and the second hoop. Also, we noticed that consistency in velocity is more important than one in the angle, that is, the trajectory is more sensitive to velocity changes rather than the angle's. Bigger mistakes we can still make at high velocity. Players who have problems with velocity control should drop the ball at a greater angle than the average. If we have problems controlling the velocity, then we should put weight on the velocity in order to get more space for the mistakes.

To conclude, we have seen that the model can also be affected by air resistance, coefficient of restitution of the ball, softness of the rim, bounce or rotation of the ball. We can also observe the model in a three-dimensional system which we get removing the assumption that the ball will not turn from the path.

Keywords: basketball, mathematical modeling, initial angel, initial velocity, trajectory

Životopis

Nikolina Mihić je rođena 29. svibnja 1991. godine u Osijeku. Pohađala je Osnovnu školu Vladimir Nazor u Čepinu, a nakon završetka osnovne škole upisala je III. Gimnaziju u Osijeku. Godine 2010. upisala je preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku, te ga završila 2014. godine. Nakon toga je upisala diplomski studij matematike, smjer Matematika i računarstvo na istom odjelu.