Učenje otkrivanjem u nastavi matematike

Čuljak, Tajana

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Tajana Čuljak

UČENJE OTKRIVANJEM U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Osijek, rujan 2017.

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

SMJER: Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Tajana Čuljak

Diplomski rad

Učenje otkrivanjem u nastavi matematike

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

Uspješnost nastave matematike, koja je vrlo zahtjevan i složen proces, ovisi o različitim čimbenicima, pri čemu je jedan od glavnih zasigurno interes učenika. Kako bi se učenike zainteresiralo za matematiku, važno im je približiti nastavne sadržaje na što pristupačniji, zanimljiviji i što kreativniji način.

Učenje otkrivanjem kao nastavna metoda prvotno se javila u SAD-u gdje se njenim začetnikom smatra Jerome Bruner i upravo je ova metoda jedan od načina kako učenicima približiti matematičke sadržaje.

Učenici uz različite nastavne materijale, poput primjerice štapića ili kockica, otkrivaju različita svojstva i odnose u matematici te tako najčešće i puno lakše svladavaju samo gradivo.

Osim nastavnih materijala, od velike pomoći su svakako različite aktivnosti koje nastavnici daju učenicima, a koje učenike vode kroz gradivo te ih navode na otkrivanje različitih pravila i svojstava. U diplomskom radu navedeno je nekoliko takvih aktivnosti vezanih uz pojmove kruga i kružnice.

Kako je u nastavi matematike poželjno koristiti različite nastavne metode, korištenje računala za provođenje aktivnosti odlična je metoda koja na jednostavan i dinamičan način učenicima približava matematičke sadržaje.

Otkrivanje zamjenjuje suhoparnu frontalnu nastavu te učenicima omogućuje temeljitiji i potpuniji proces učenja.
Cilj ovog diplomskog rada je pobliže objasniti metodu učenja otkrivanjem te ukazati na korisnost njenog korištenja u nastavi matematike.

1 Učenje otkrivanjem

Riječi kao što su „otkrivanje“, „istraživanje “, „aktivnost“ i „rješavanje problema“ postali su vrlo velik dio jezika kojim se danas koristimo kada govorimo o nastavi matematike. Međutim, mnogi učenici još uvijek uče tako da im nastavnik izravno predaje gradivo te je nastava izričito frontalna i učenicima je dano vrlo malo mogućnosti da se učenje otkrivanjem ostvari.

Neki nastavnici, u vrijeme kada su i sami bili učenici, nisu dobili mnogo prilika za učenje matematike otkrivanjem iako je u svakoj generaciji sigurno postojao nastavnik koji je smatrao kako samo podučavanje i objašnjavanje nema pretjeranog učinka, naročito kod mlađih učenika. Međutim, u današnje je vrijeme pritisak na nastavnike da koriste pristupe koji će aktivirati i same učenike, puno veći.

Tako se već od najranije dobi, tokom prva četiri razreda osnovne škole, učenici susreću sa pojmovima zbrajanja i oduzimanja, a na učitelju je da te pojmove što jasnije predoči učenicima. Učitelji stoga često u nastavi koriste obojane štapiće kako bi uveli pojam prebrojavanja. Zagovornici korištenja takvih i sličnih materijala tvrde kako već i sama igra sa štapićima učenike dovodi do razumijevanja odnosa među brojevima. Učenici će tako primjerice otkriti da određeni par različito obojenih štapića poredanih jedan uz drugi duljinom odgovaraju nekom trećem štapiću.

SLIKA 1.

Često se tvrdi da je učenje temeljitije i potpunije ukoliko se od učenika traži da samostalno otkriju različita svojstva i principe u matematici, za razliku od učenja koje podrazumijeva predavanje nastavnika te izričito frontalnu nastavu. Međutim, prije samog učenja otkrivanjem, nastavnik bi trebao uvesti odgovarajući jezik i simboliku koju će učenici koristiti pri istraživanju.

Nažalost, iskustvo pokazuje kako neki učenici otkriju razočaravajuće malo od onoga što se od njih traži te se radi toga nastavnici osjećaju dužnima dati učenicima detaljnije smjernice. Ukoliko učenik nije u stanju otkriti ono što se od njega traži, nastavnik može pokušati ubrzati učenje na izravan ili neizravan način. S druge strane, upitno je hoće li učenik koji ne uspijeva otkriti svojstva ili odnose iz danih smjernica imati išta više koristi od direktnog nastavnikovog objašnjavanja.

Još uvijek postoji stupanj nedorečenosti kod pojmova „otkrivanje“, „istraživanje“ i „rješavanje problema“, za koje će neki reći kako ne smeta toliko koliko smeta pitanje pasivnog učenja koje se želi zamijeniti aktivnim.

Glavni zagovornik učenja otkrivanjem u SAD-u bio je Jerome Bruner. U SAD-u je to bila relativno revolucionarna ideja za mnoge nastavnike, s obzirom da je prethodno dominirala bihevioristička teorija učenja koja promatra učenje uvjetovano stimulansima iz vanjskog okruženja. Brunerov rad u poticanju učenja otkrivanjem u SAD-u odrazio se i na Veliku Britaniju u kojoj se u isto vrijeme javlja sličan interes za aktivnijim pristupom učenju.

Bruner je tvrdio da istraživanje ili otkrivanje potiče učenje matematike što čini matematiku procesom, a ne gotovim proizvodom. Također je tvrdio kako učenje otkrivanjem daje intrinzičnu motivaciju učenicima te nastavnici stoga nemaju potrebe koristiti vanjske oblike nagrada.

U službenom glasilu školskog vijeća u SAD – u (1965.) također je dano niz referenci o učenju otkrivanjem. Središnja poruka bila je da nastavnici moraju poučavati osnove matematike uz što više aktivnog uključivanja učenika koristeći različite aktivnosti te, ukoliko je moguće, uz korištenje različitih materijala.

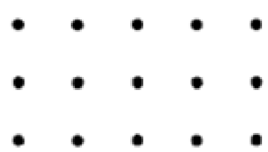
1.1 Klasifikacija metoda učenja otkrivanjem

Brojni autori su pokušali klasificirati metode učenja otkrivanjem. Edith Biggs, glavna autorica spomenutog glasila, navela je pet metoda: slučajno, slobodno i istraživačko, vođeno, usmjereno te programirano otkrivanje.

Dok metoda slučajnog otkrića, kako joj sam naziv kaže, podrazumijeva otkriće koje nije planirano te se njime ne može izgraditi program učenja, metoda programiranog otkrivanja, s druge strane, osigurava da će se proces učenja zaista dogoditi. Primjer takve metode prikazan je u poglavlju 5. u kojem su opisane različite aktivnosti provođenja učenja otkrivanjem.

Slobodnu i istraživačku metodu otkrivanja najbolje može opisati slijedeća aktivnost:

Aktivnost 1. ***Pravokutnici*** *Koliko pravokutnika možete načiniti na ploči dimenzije 5x3? Što ukoliko je ploča drugačijih dimenzija?*



Slika 2.

Kod ovakve aktivnosti, nije sigurno što će učenici točno otkriti, a nastavniku može biti teže pri provjeravanju učeničkih odgovora na ovakve i slične zadatke zbog velike opširnosti mogućih odgovora.

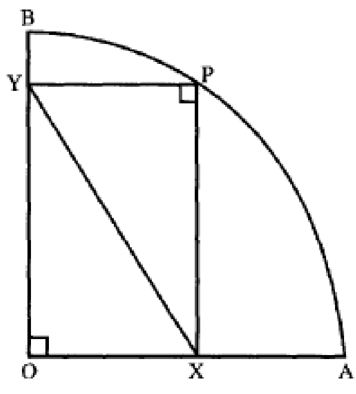
Vođena i usmjerena metoda otkrivanja, kako joj sam naziv kaže, podrazumijeva nastavnikovu pomoć u procesu otkrivanja. Gagne i Brown (1961.) smatrali su kako je upravo ova metoda, gdje nastavnik u svakom trenutku provođenja aktivnosti može priskočiti i pomoći učeniku, najbolja za učenje različitih matematičkih pravila.

Učenje otkrivanjem bilo je predmet mnogih rasprava i ponekih neslaganja kod školskih psihologa. Također je bilo važno obilježje Madison projekta u SAD-u u kojem je opisana dodatna tehnika učenja otkrivanjem kod koje je specifično to da nakon što učenici misle kako su otkrili određeno svojstvo, odnos ili pravilo, dobiju primjer koji ne odgovara tom otkrivenom svojstvu ili odnosu te učenike potiče da ponovo promisle o mogućim rješenjima. Međutim, ova tehnika nije bila dovoljno uspješna u promicanju učenja da bi se zagovarala kao vrijedna tehnika koja bi se koristila u velikim razmjerima.

Biggs je odlično sumirala značaj učenja otkrivanjem : „Vjerujem kako je ova metoda učenja najbolji način da našim učenicima damo pravo uzbuđenje u matematici. Također vjerujem da kada našim učenicima damo priliku da razmišljaju za sebe, oni ostvaruju svoj puni potencijal.“

2 Gestalt psihologija

Učenje otkrivanjem ovisi o načinu na koji učenik povezuje i vidi veze bez potrebe da ih nastavnik objašnjava. Primjerice, „Problem četvrtine kruga“ u kojem se od učenika traži da za danu četvrtinu kruga čiji je radijus poznat, odredi duljinu dijagonale $\overline{XY}$, pri čemu je OXPY pravokutnik. U ovom slučaju dijete iz danih informacija treba shvatiti kako je duljina |XY| jednaka duljini druge dijagonale tog pravokutnika, koja je upravo radijus dane četvrtine kruga. Takvo uočavanje se često traži kod rješavanja problema.

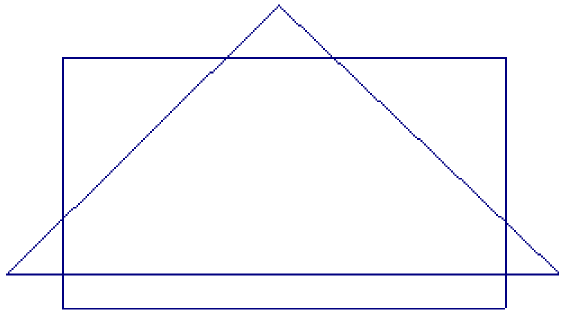


Slika 3.

Gestalt psiholozi su priznali upravo to uočavanje kao stavku koja je bitna za samostalno učenje. Gestalt psihologija izvorno je razvijena u Njemačkoj, dok sama riječ „gestalt“, grubo prevedena, znači „oblik“ ili „forma“.

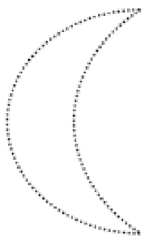
Bit Gestalt psihologije je da um pokušava interpretirati mentalne doživljaje i iskustva kao jedinstvenu cijelinu koja ima drugačije karakteristike od njenih sastavnih elemenata. Ukoliko se temeljna struktura problema odmah percipira na smislen način, učenik je u stanju nastaviti sa njegovim rješavanjem. Nastavnici mogu pomoći učenicima upravo pružanjem raznih primjera u kojima je struktura očigledna te vođenjem i usmjeravanjem učenika na danu strukturu.

Tako će u primjeru na slici ispod, učenici vidjeti dva geometrijska lika: trokut i i pravokutnik, a ne više složenijih oblika.



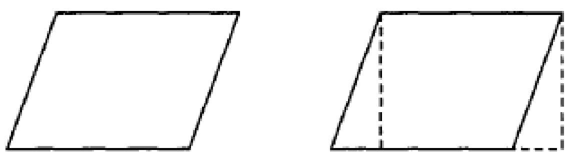
Slika 4.

Također će skup točkica na slijedećoj slici vidjeti kao polumjesec, a ne kao skup točkica.



Slika 5.

Vodeći matematički Gestalt psiholog Max Wertheimer poznat je po primjeru paralelograma. Naime, pretpostavimo da je učeniku koji od prije zna izračunati površinu pravokutnika, postavljen problem računanja površine paralelograma. Ukoliko učenik razmisli o danom problemu, shvatit će da bi paralelogram izgledao poput pravokutnika ukoliko mu jedna strana ne bi bila „izbočena“, a druga ne bi imala „prazninu“ (Slika 6.). Također shvaća kako je „izbočina“ baš jednaka „praznini“ te ukoliko pomiče izbočeni kut prema uvučenoj strani, dobiva baš sliku pravokutnika iste duljine i širine pa je i sama površina paralelograma jednaka površini pravokutnika.



Slika 6.

Ono što Gestalt teorija jasno sugerira je da učiteljeva demonstracija rezultata ne mora dovesti do učenikova shvaćanja tog danog rezultata. Primjerice, izlaganje načina računanja površine paralelograma, možda zasnovano na dokazivanju sukladnosti dvaju manjih trokuta, neće nužno osigurati da učenici razumiju zašto se baš dokazuje sukladnost trokuta. To razumijevanje i shvaćanje izloženog dolazi kao dio procesa otkrivanja. Dobiveno razumijevanje se tada može prenjeti i na razumijevanje površine trokuta ili trapeza.

3 Nastavni materijali

Jednostavni materijali za učenje poput štapića ili kockica koriste se u učionicama dugi niz godina. Pojmovi „manipulativni“ i „nastavni materijali“ često su se koristili kao sinonimi u brojnim časopisima za metodiku nastave iako ta dva pojma zapravo znače dvije različite stvari. Pojam „manipulativan“ sugerira bilo koji objekt kojim će djeca rukovati u procesu učenja, dok „nastavni materijali“ sugeriraju kako postoji određena struktura u opremi koja se koristi, struktura namijenjena usmjeravanju učenika prema ekvivalentnoj matematičkoj strukturi.

Tijekom proteklih nekoliko stoljeća bilo je mnogo različitih oblika aparata pa tako i nastavnih materijala. Tako je primjerice Maria Montessori koristila razne oblike materijala poput štapića, abakusa, materijala za množenje i dijeljenje, za učenje razlomaka itd.

U šezdesetim godinama prošlog stoljeća došlo je do velikog zanimanja za nastavne materijale prvenstveno radi izgradnje razumijevanja dobivenog raznim aktivnostima i interakcijom s okolinom za učenje, ali i zbog sve većeg zanimanja za učenje otkrivanjem za koje se smatralo da je neka vrsta teorije o tome kako djeca mogu učinkovitije učiti.

Tijekom posljednjih 40 godina i više, skeptici su sugerirali kako je pokret uvođenja nastavnih materijala iz šezdesetih godina bio još samo jedan od brojnih obrazovnih trendova. Tako su brojni nastavnici u Velikoj Britaniji, koji su vjerovali kako su pod velikim pritiskom zahtjeva Nacionalnog kurikuluma, odbacili korištenje nastavnih materijala uz opravdanje da im oduzima previše vremena. Cockcroft je s druge strane zagovarao njihovu uporabu kroz čitavu osnovnu školu te i u nekim srednjim školama jer je smatrao kako upravo praktičan rad pruža najučinkovitiji način razvijanja razumijevanja u matematici.

Korištenje takvih materijala kroz proces učenja danas se snažno zagovara kao i prije, no i dalje postoje kritičari istog pa se postavlja pitanje kako odgovoriti na kritike.

Korištenje nastavnih materijala bilo bi nadmoćno ukoliko bi dokazi istraživanja provedenih s njima, pokazali kako su oni zaista korisni. Nažalost, kako to obično bude sa obrazovanjem, to nije baš tako jednostavno i lako za istražiti. Neka istraživanja iz 1950-ih i 1960-ih su sugerirala postojanje koristi, no obično je bilo vrlo malo dokaza koji bi to potkrijepili. Tako su teškoće svojstvene provođenju obrazovnih istraživanja bile odabir eksperimentalne, odnosno kontrolne grupe. Ako se eksperimentalna skupina

uspoređuje sa kontrolnom skupinom, kako se može osigurati da su dvije grupe točno usporedive i da je bilo koja grupa u potpunosti zanemarila bilo koje znanje koje imaju osim onoga što su primili od svojih "službenih" lekcija? Također se postavlja pitanje kako se može uvjeriti da je svaki izmjereni učinak kod grupa neovisan o učincima pojedinih nastavnika?
Još jedna poznata poteškoća s istraživanjima je da su nastavnici koji žele sudjelovati u eksperimentu, u nastavi i učenju često stimulirani cijelom idejom i jako su željni vidjeti da istraživanje uspije. Štoviše, njihov entuzijazam prenosi se na učenike, što onda njih čini entuzijastičnima, a time im se i samo učenje može poboljšati.
U takvim će okolnostima svaka mjerena dobit vjerojatno biti rezultat kombinacije učinaka novih materijala i metoda te ukupnog uključivanja učitelja i učenika.

Glavni zaključak bi trebao biti da pružanje nastavnih materijala učenicima često nije dovoljno samo po sebi jer djeca ne moraju nužno vidjeti vezu između, primjerice, štapića i zbrajanja. Dearden je tako naglasio važnost koju ima nastavnik u tome da bude puno više od samog pružatelja materijala ili osobe koja će pružiti strukturiranu okolinu učenicima iz koje će oni naučiti nove koncepte. Dakle, nastavnici su ti koji trebaju postavljati pitanja, raspravljati, savjetovati, predlagati te uputiti učenike na ono što trebaju učiniti kako bi došli do novih spoznaja. Stoga se može zaključiti kako nastavni materijali neće pokazati svoju punu vrijednost ukoliko se ne koriste pravilno.

Dokazi o razočaranjima pri korištenju nastavnih materijala ne znače kako je rad s njima gubitak vremena. To samo sugerira kako su naša očekivanja u prošlosti možda bila nerealna, kako korištenje materijala bez dodatne nastavnikove pomoći i pojašnjenja nije dovoljno, kako pitanje spremnosti učenika za nove spoznaje nije uvijek jasno, nije lako ni organizirati učenje na način da svi učenici mogu koristiti materijale kako bi razvili svoje razmišljanje te nije uvijek lako znati što učiniti i reći dok se kao nastavnik krećemo među učenicima tijekom procesa otkrivanja kako bi im pomogli da napreduju sa zadatkom.

4 Rješavanje problema i istraživanje

Iako se smatra kako su sve kognitivne aktivnosti po prirodi temeljene na rješavanju problema, treba biti jasan kada se govori o rješavanju problema u matematici. Potrebno je naglasiti kako postoji više vrsta problema u matematici kao što su rutinski zadaci ili pak zadaci sa primjenom u svakodnevici.

Johnson i Rising izjavili su da je "učiti kako se rješavaju problemi najvažniji dio nastave matematike". Dali su pet razloga za to: način učenja novih pojmova, način otkrivanja novih znanja, smislen način vježbanja računalnih vještina, način poticanja intelektualne znatiželje te način učenja kako prenijeti koncepte i vještine u nove situacije.

Pojam „istraživanje“ se u zadnjih tridesetak godina sve češće pojavljuje u literaturi vezanoj uz učenje matematike. Točna razlika između pojmova problem i istraživanje

rijetko se pojašnjava u nastavnom planu i programu te često nije jasno o čemu je riječ kada se jedan od ta dva pojma spominje.
Obje riječi obuhvaćaju istu ideju: aktivno sudjelovanje učenika u procesu učenja. Nekima je to dovoljno i jedino važno pa stoga i poistovjećuju te dvije riječi. Drugi pak smatraju kako ipak treba pokušati napraviti razliku kako bi nastavnici učenicima mogli točno pojasniti što se od njih traži u određenom zadatku.
Rješavanje problema je na neki način statično iako je uključena poneka aktivnost, dok je istraživanje aktivno premda ono može dovesti do problema ili uključivati problem. I dok problem ima određenu krajnju točku kao cilj (postoji rješenje ili ne postoji), istraživanje često nudi više otvorenih opcija za dolazak do cilja.

Frobisher je tako dao prijedloge o tome kako se neke rutinske zadaće mogu pretvoriti u istraživanje s čime je zapravo i nagovijestio razliku između problema i istraživanja. Najjednostaviji primjer za to je zbrajanje brojeva. Ako je postavljen slijedeći zadatak:

$$\begin{array}{r} 3\,6 \\ +\,2\,3 \\ \hline 5\,9 \end{array}$$

vrlo ga se lako može pretvoriti u istraživački zadatak. Primjerice zadatak u kojem je potrebno pronaći brojeve koji nedostaju:

$$\begin{array}{r} 4\ 8 \\ +\,2\ \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B}\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ \mathrm{X} \\ +\,1\ \mathrm{X} \\ \hline \mathrm{Y}\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 6 \\ +\,3\ \mathrm{L} \\ \hline 5\,\mathrm{M} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 5 \\ +\,1\,\mathrm{P} \\ \hline 4\,\mathrm{Q} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\ 7 \\ +\,\mathrm{T}\,\mathrm{U} \\ \hline 9\ \mathrm{V} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathrm{A}\,\mathrm{B} \\ +\,\mathrm{B}\,\mathrm{A} \\ \hline \mathrm{C}\,\mathrm{D} \end{array}$$

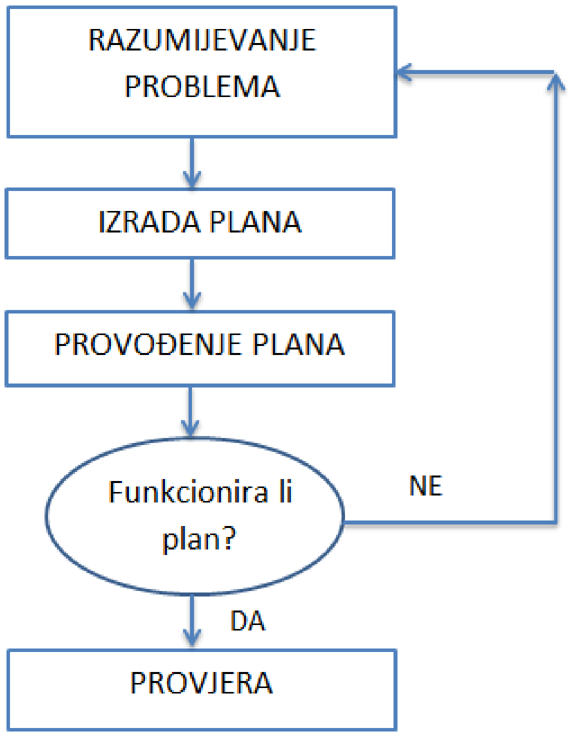
Iako postoji razlika između rješavanja problema i istraživanja, jasno je da i jedno i drugo potječu iz iste osnovne ideje.

Ranu, opsežnu i poznatu studiju o rješavanju problema u matematici dao je poznati mađarski matematičar George Polya. U njoj je predložio načine kako poboljšati podučavanje i učenje rješavanja problema. U njegovoj knjizi „Kako riješiti matematički zadatak?“ razrađen je postupak riješavanja problema. Postupak uključuje 4 stupnja:

1. razumijevanje problema,
2. izrada plana,
3. provođenje plana,
4. gledanje unatrag.

Pri tome se prvi stupanj nikako ne treba smatrati trivijalnim jer uključuje bitne korake poput crtanja dijagrama te uvođenja prikladnih oznaka, ali i odlučivanje o tome jesu li dane informacije dovoljne ili je možda dobiven višak informacija. Posljedni stupanj uključuje konačnu provjeru, ali i razmatranja o eventualnom proširenju problema, primjerice može li se dobiveni rezultat generalizirati te postoje li kakve alternative za njega. Ključni i ponekad teški stupnjevi su 2. i 3., osobito 2. koji zahtjeva dozu inventivnosti.

U stvarnosti proces rješavanja problema može biti kružan, kako je prikazano na slici:



Slika 7.

Brojna istraživanja su pokazala kako je možda važnije pokušati naučiti učenike postavljati prava pitanja i postavljati nove probleme, a ne dati im rutinu koja će se moći primjenjivati na vrlo ograničen broj problema.

Polya je vjerojatno bio prvi koji je pokušao dati popis pogodnih pitanja za svaki od stupnjeva koje je naveo iako neka pitanja nisu bila pogodna za sve probleme. Njegov najduži popis pitanja bio je za najkritičniji drugi stupanj. On je uključivao povezivanje novog zadatka sa nekim ranije riješenim problemima, pokušaja rješavanja kraće verzije problema i slično. Nakon što se problem riješi, Polya predlaže provjeravanje, traženje moguće alternative za dokazivanje rješenja, isprobavanje postupka na drugim problemima i općenito gledanje izvan samog problema.

Problema je mnogo i raznovrsni su pa ih nije lako klasificirati. Stoga nije iznenađujuće da je teško podučavati učenike o tome kako ih riješiti.

Ponekad težak, ali vrlo bitan korak u rješavanju nekih problema je pronalazk pravila iz uzorka. U tom slučaju, ključna je generalizacija koju je Polya razmatrao. Jednostavan primjer generalizacije je traženje formule za sumu kubova prirodnih brojeva. Isprobavanje jednostavnih slučajeva daje:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1^3 & = & 8 \\ 1^3 & + & 2^3 & = & 9 \\ 1^3 & + & 2^3 & + & 3^3 & = & 36 \\ 1^3 & + & 2^3 & + & 3^3 & + & 4^3 & = & 100 \\ 1^3 & + & 2^3 & + & 3^3 & + & 4^3 & + & 5^3 & = & 225 \end{array}$$

Ukupni iznosi odmah sugeriraju da se radi o kvadratima, $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $36 = 6^2$, $100 = 10^2$, $225 = 15^2$, pri čemu su 1, 3, 6, 10 i 15 prvih pet trokutastih brojeva (gdje je trokutasti broj dobiven sumom uzastopnih prirodnih brojeva).

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & = & 1 \\ 1 & + & 2 & = & 3 \\ 1 & + & 2 & + & 3 & = & 6 \\ 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & = & 10 \\ 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & = & 15 \end{array}$$

To nas dovodi do generalizacije koju i želimo:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

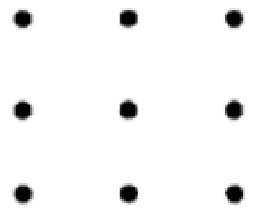
No nisu svi pokušaji generalizacije u problemskim situacijama tako jednostavni poput prethodnog. Čak je i navedeni primjer, koji se temelji na poznatim uzorcima brojeva, težak za većinu učenika srednjih škola.

Kako bi se cjelokupni postupak završio, potrebno je dokazati izvedenu generalizaciju. Uobičajeni način izvođenja dokaza u ovom slučaju je indukcija koju učenici često vrlo teško prihvaćaju kao metodu za dokazivanje jer se od njih očekuje da pretpostave što trebaju dokazati,a zbog te pretpostavke smatraju da to ne može biti dokaz. Dakle, postoje prepreke za koje učenici trebaju puno vremena kako bi ih prešli. Osim ove, postoje i brojne druge barijere pri rješavanju problema.

4.1 Prepreke i poteškoće pri rješavanju problema

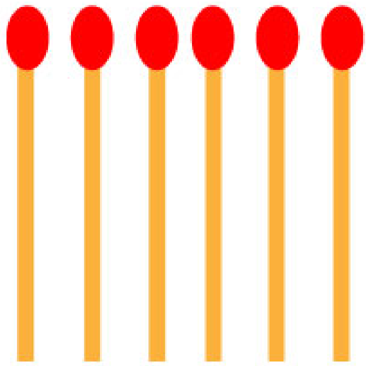
Postoji nekoliko poznatih prepreka i poteškoća koje mogu ometati pokušaje rješavanja problema. Najjednostavnije ih je pojasniti na konkretnim primjerima poput slijedećih:

Problem 1. *Koristeći 4 ravne linije spoji slijedećih devet točaka bez dizanja olovke sa papira.*



SLIKA 8.

Problem 2. *Rasporedi 6 šibica tako da formiraju 4 jednakostranična trokuta čije su duljine stranica jednake duljini jedne šibice.*



SLIKA 9.

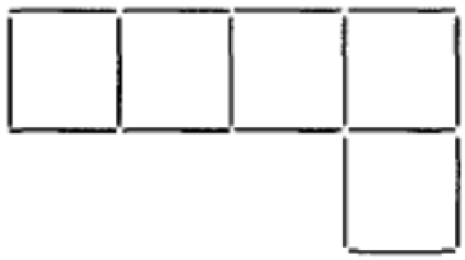
Problem 3. *Četiri vojnika moraju prijeći rijeku. Jedino prijevozno sredstvo je mali čamac u kojem se igraju dva dječaka. Čamac može prevoziri najviše dva dječaka ili jednog vojnika. Na koji način vojnici mogu prijeći na drugu stranu rijeke?*

Problem 4. *Dane su 3 posude i mnogo vode, a ono što treba napraviti je odmjeriti potrebnu količinu vode.*
Primjerice: Dane su posude koje redom mogu sadržavati 3, 21 i 127 litara vode. Odmjerite 100 litara vode.
Odgovor: 100 = 127 - 21 - 3 - 3.

Problemi:

	Posude			Ciljno stanje
	a	*b*	*c*	
1	*21*	*127*	*3*	*100*
2	*14*	*46*	*5*	*22*
3	*18*	*43*	*10*	*5*
4	*7*	*42*	*6*	*23*
5	*20*	*57*	*4*	*29*
6	*23*	*49*	*3*	*20*
7	*15*	*39*	*3*	*18*

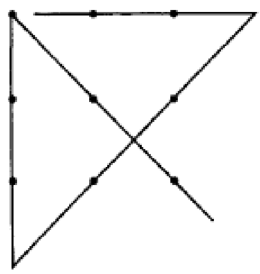
Problem 5. *Dano je 16 šibica koje formiraju 5 kvadrata kao na slici. Pomaknite 3 šibice tako da dobijete 4 kvadrata (ne mijenjajući dimenziju kvadrata).*



Slika 10.

Navedeni problemi se toliko često koriste da nije poznato odakle su nastali. Korišteni su u mnogim istraživanjima koja su se bavila ljudskim ponašanjem pri rješavanju problema.

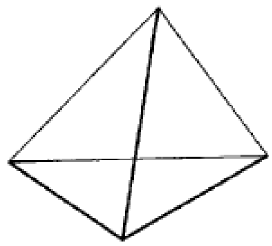
Vrlo mali broj ljudi, uključujući i studente matematike, može riješiti prvi problem u ograničenom vremenskom razdoblju. Ono što je potrebno je crtati linije koje idu izvan oblika kojeg implicira zadanih 9 točaka.



Slika 11.

No većina ljudi rješava problem pod pretpostavkom da četiri tražene linije moraju činiti formu oblika impliciranog sa danim točkama, iako takvo ograničenje uopće nije navedeno u pitanju. Scheerer je takvu pojavu nazvao "fiksiranje", a poznata je i pod nazivom "postavke za rješavanje problema". Takav način rješavanja problema sugerira da su ljudi skloni stvaranju početnih pretpostavki koje nisu uključene u specifikaciju problema.

Drugi problem također otkriva još jedan primjer fiksiranja. Naime, većina ljudi će pokušati organizirati šibice na ravnoj površini i neće razumijeti kako trebaju upotrijebiti trodimenzionalnost. Rješenje danog problema je sastavljanje šibica u tetraedar. Ovakav problem je dobra motivacija za učenike pri uvođenju pojma geometrije prostora.

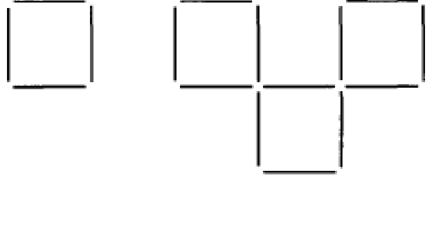


Slika 12.

Treći problem, možda nešto manji problem od prethodnih za studente matematike, ovisi o iteraciji ili broju poteza. Scheerer opisuje fiksiranje kao nespremnost da prihvatimo „skretanja“ od rješenja kada nam se čini da to nepotrebno odgađamo. Rješenje zahtjeva da ako su u početku oba dječaka i vojnici na desnoj strani rijeke, dvojica dječaka otplove na lijevu obalu, jedan od njih se vrati na desnu stranu sa čamcem. Zatim jedan od vojnika prijeđe na lijevu stranu, a drugi dječak vrati čamac na desnu stranu. Time je dovršen prvi ciklus, a problem će biti riješen nakon još tri ciklusa. Ono što se dogodi kod rješavanja ovakvog tipa problema je da neki ljudi ne mogu nadvladati tu barijeru 'poništavanja' onoga što se već naizgled ostvarilo.

U četvrtom problemu, svih sedam dijelova problema može se izvršiti na rutinski način računajući b - a - c - c. Predodžba koju svi imaju, nakon što uđu u rutinu rješavanja, nije tražiti drugu metodu. Time onda neće vidjeti da dio u 6. retku zahtijeva samo a – c, dok dio u 7. retku samo a + c. Općenito, u matematici se ponekad nastoji zanemariti brži put u žurbi da se primijeni utvrđena rutina. Ovu posebnu prepreku Scheerer je opisalo kao 'navikavanje'.

Peti problem je jedna od brojnih varijacija problema pomicanja šibica, štapića ili drugih predmeta kako bi se postigla određena transformacija. Očekivano rješenje je:



Slika 13.

Katona je koristio ovakve tipove problema u Gestaltovim studijama rješavanja problema. Od tri metode koje su korištene u tim studijama kako bi se poboljšalo rješavanje takvih problema, Katona je otkrio kako je najmanje djelotvorno pokazati rješenje, a zatim se osloniti na to da će se osoba koja rješava problem prisjetiti danog postupka rješavanja. Takva metoda je zapravo učenje napamet i ne pruža nikakvu povezanost sa prethodno stečenim znanjima osobe koja rješava problem.

Druga metoda koja je bila korištena je osmišljavanje korisnih izjava poput „šibice koje imaju dvostruku funkciju trebaju se premjestiti tako da imaju pojedinačne funkcije“ ili „nastavite stvaranjem rupa i općenito stvaranjem praznina u danom liku“. Iako je ova metoda bila učinkovita, najučinkovitijom se pokazala metoda skiciranja promjena koje će se dogoditi nakon pomicanja pojedinačnih šibica, kao što je primjerice pomicanje jedne šibice koja ima dvostruku funkciju.

I druga i treća metoda zasnovane su na pružanju ograničenih smjernica, pri čemu se druga metoda zasnivala na izradi usmenih izjava, a treća na provođenju određenih radnji i prisiljavanju učenika na isprobavanje različitih poteza te razmišljanju o posljedicama tih poteza.

Newell i Simon također su ukazali na poteškoće u rješavanju problema koje proizlaze iz ograničenja ljudskog sustava za obradu informacija. Prvo, možemo raditi samo serijski, jedan po jedan proces, a ne nekoliko procesa paralelno. Drugo, svaka obrada koju činimo mora proći kroz naše kratkotrajno pamćenje, koje ima ograničeni kapacitet od pet do deset informacijskih jedinica. Treće, iako imamo prilično neograničenu pohranu kapaciteta u dugotrajnom pamćenju, teško je iz njega izvući znanje potrebno za određeni problem. Potrebno je dosta vremena da se to napravi u usporedbi s vrlo kratkim vremenom potrebnim za stvarnu obradu. Također to može biti teško učiniti ako ne možemo povezati novo znanje sa postojećim znanjem. Dohvaćanje znanja koje se održava u dugoročnoj memoriji nikako nije automatsko.

5 Učenje otkrivanjem na primjeru kruga i kružnice

Prema trenutnom planu i programu učenici se sa kružnicom i krugom prvi put susreću u 5. razredu gdje pobliže upoznaju njihovu definiciju te osnovne pojmove vezane uz njih (poput radijusa, tetive, kružnog odsječka i isječka, kružnog vijenca i slično).
U 7. razredu nadopunjuju do tada stečeno znanje o krugu i kružnici te uče o razlici između središnjeg i obodnog kuta, o međusobnim položajima pravca i kružnice, upoznaju način računanja opsega i površine kruga te računanje površine kružnog isječka i duljine kružnog luka.
Nakon 7. razreda, ponovni susret učenika sa pojmovima kruga i kružnice je u 1. razredu srednje škole gdje učenici ponavljaju gradivo osnovne škole te proširuju svoje znanje.

Učenici otkrivanjem različitih svojstava i pravila lakše svladavaju gradivo, povećava im se motivacija za učenje te im se razvija njihovo induktivno zaključivanje.
Nastavnici stoga kroz brojne aktivnosti učenicima omogućavaju samostalan rad, rad u paru ili u grupama čime naglasak stavljaju na razumijevanje različitih matematičkih koncepata.

Proučavajući različite udžbenike za srednje škole, može se uočiti kako svi oni imaju vrlo sličan pristup poučavanju.
Kroz nekoliko aktivnosti vezanih uz kružnicu i krug, usporedila sam učenje otkrivanjem sa onim što je dano u najkorištenijem udžbeniku [2].

5.1 Tangenta na kružnicu

Učenici 1. razreda srednje škole upoznaju pojam tangente na kružnicu te se na početku nastavne jedinice susreću sa Poučkom o tangenti kružnice:

Teorem 1. *Neka je D točka na kružnici, a S njezino središte. Pravac t koji prolazi točkom D tangenta je kružnice onda i samo onda ako je okomit na spojnicu SD.*

Kao motivaciju za ovaj poučak, učenicima se može dati zadatak poput slijedećeg:

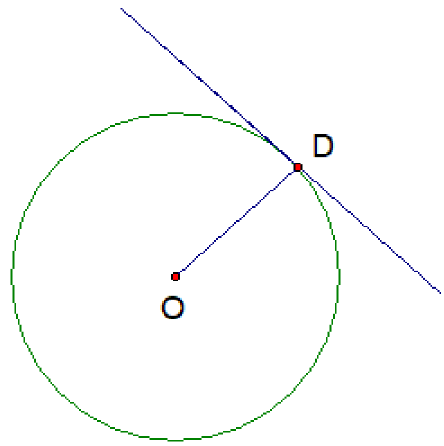
Zadatak 1. *Meteor prolazi ravnom putanjom pored Zemljine atmosfere. Pod kojim kutom će se meteor nalaziti kada bude najbliži Zemlji? Pretpostavimo kako putanja meteora ima jednu zajedničku točku sa Zemljinom atmosferom.*

Kod ovakvog zadatka bitno je da učenici znaju dobro prikazati situaciju danu u zadatku te da iz nje zaključe kako će meteor biti najbliži onda kada se nalazi u točki dodira njegove putanje i Zemljine atmosfere. Nakon toga mogu im se dati dodatne upute koje će ih dovesti do pravog zaključka.
Stoga nastavnik prije nego uvede prethodno navedenu karakterizaciju tangente, učenicima može dati slijedeći zadatak:

Aktivnost 2. *1. Konstruirajte kružnicu proizvoljnog radijusa te joj središte označite sa O (pri tome kružnica predstavlja Zemljinu atmosferu, a O središte Zemlje).*

2. Koristeći ravnalo, nacrtajte pravac koji dira kružnicu u jednoj točki te točku označite sa D (D je točka u kojoj se nalazi meteor). Konstruirajte dužinu $\overline{OD}$.

3. Koristeći kutomjer, izmjerite kutove uz točku D. Što možete zaključiti o odnosu radijusa $\overline{OD}$ i tangente kroz D?



Slika 14.

Dok se u samom udžbeniku [2] karakterizaciji tangente pristupa na način da se odmah iznosi iskazana tvrdnja (prethodno navedeni poučak), a nakon toga i njen dokaz, prethodna aktivnost učenicima omogućava da sami otkriju danu karakterizaciju i time ju puno lakše pamte nego što bi to bilo u slučaju da nastavnik izrekne dani poučak te prijeđe preko njega bez dodatnog pojašnjavanja.

5.2 Tetiva na kružnicu

Tetiva kružnice se kao pojam pojavljuje već u 5. razredu gdje se učenici upoznaju sa njenom definicijom, dok u 7. razredu pobliže upoznaju neka svojstva tetive. Jedno od svojstava je slijedeće:

Simetrala tetive kružnice prolazi središtem pripadne kružnice.

Učenici i ovdje mogu sami izvesti zaključak o prethodnom svojstvu kroz aktivnosti koje im nastavnici mogu zadati. Uvijek je dobro učenicima dati motivacijski zadatak koji će ih potaknuti na razmišljanje, a zatim razraditi taj zadatak putem aktivnosti.
Primjer motivacijskog zadatka može biti slijedeći:

Zadatak 2. *Šimun i Jakov voze dva čamca jezerom oblika kruga. Oba čamca prešla su jednaku duljinu puta prelazeći sa jednog kraja jezera na drugi kraj, pri čemu niti jedan nije prošao sredinom jezera te su se nalazili na suprotnim stranama. Šimun i Jakov odlučili su se susresti točno na sredini jezera. Kako će znati gdje se sredina jezera nalazi?*

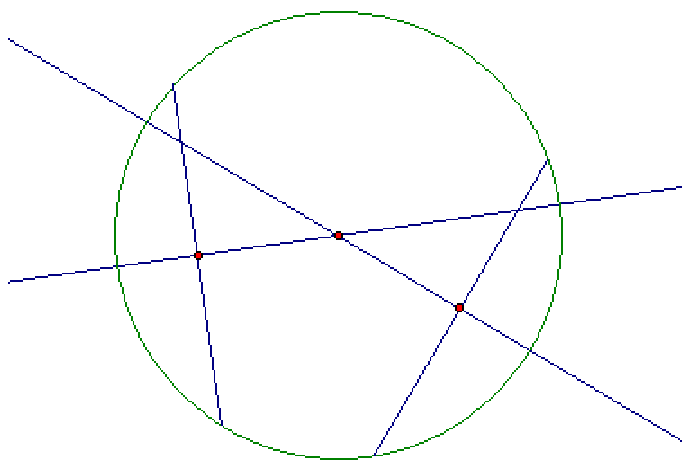
Kod svakog motivacijskog zadatka ovog oblika, važno je priču prevesti na matematički jezik te sukladno tome nacrtati pravilnu skicu.
Aktivnost koja bi pomogla učenicima izvesti zaključak za ovakav zadatak bila bi slijedeća:

Aktivnost 3. 1. *Konstruirajte kružnicu proizvoljnog radijusa te joj označite središte točkom S. Zatim konstruirajte danoj kružnici dvije neparalelne tetive jednake duljine.*

2. *Konstruirajte okomice iz središta kružnice na obje tetive.*

3. *Kako okomice dijele dane tetive?*

4. *Prema odgovoru na prethodno pitanje, što okomice na dane tetive predstavljaju?*



Slika 15.

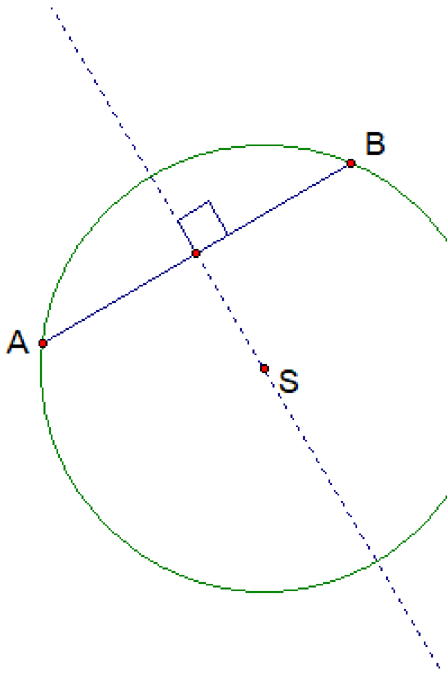
Otkrivanje se može nastaviti i slijedećim pitanjima:

5. *Usporedite udaljenosti (izmjerene duž okomice) od središta kružnice do tetive.*

6. *Hoće li rezultati biti isti ukoliko promjenite veličinu kružnice i duljinu tetiva?*

Ovakvom aktivnosti će učenici osim što će zaključiti kako je okomica na tetivu kroz središte kružnice ujedno i simetrala dane tetive, također doći do zaključka kako su dane tetive jednako udaljene od središta kružnice.

U ovom slučaju, nastavnik bi trebao dodatno pojasniti ovo svojstvo te objasniti zašto ono zaista vrijedi nadovezujući se na znanje koje su učenici ranije stekli. Naime, ono što učenici znaju od ranije je da je svaka točka simetrale dužine jednako udaljena od njezinih krajnjih točaka. Stoga je i u slučaju dane aktivnosti, svaka točka simetrale (okomice na tetivu) jednako udaljena od krajnjih točaka A i B tetive $\overline{AB}$. Kako točke A i B leže na kružnici, jednako su udaljene od središta kružnice iz čega učenici onda mogu zaključiti da središte kružnice upravo pripada simetrali svake tetive te kružnice.



SLIKA 16.

Otkrivanje se također može proširiti ukoliko nastavnik da dodatni uvjet u prethodnom zadatku gdje od učenika zahtijeva da konstruiraju dvije neparalelne jednake tetive kružnice od kojih ni jedna nije promjer te kružnice te da konstruiraju simetrale tih tetiva. Uz takav uvjet, učenici dobivaju situaciju iz motivacijskog zadatka te vrlo jednostavno dolaze do odgovarajućeg zaključka. Ono što učenici u ovom slučaju trebaju primjetiti, a što se dalo naslutiti i iz prethodnog zadatka, je da se simetrale tetiva sijeku u jednoj točki koja je upravo središte dane kružnice. Dakle, učenici će u ovom slučaju otkriti kako je vrlo lako pronaći središte bilo koje proizvoljne kružnice u kojoj ono nije naznačeno, odnosno pronaći će način pomoću kojeg bi odredili sredinu jezera.

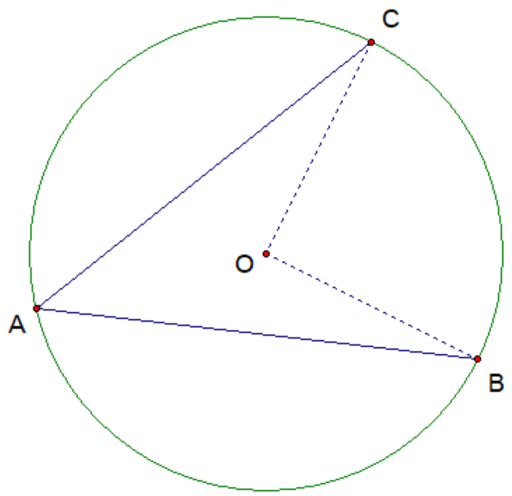
5.3 Obodni i središnji kut

Učenici se sa pojmom središnjeg i obodnog kuta susreću u 7. razredu, a kasnije i u 1.razredu srednje škole gdje detaljnije pojašnjavaju poučak o obodnom i središnjem kutu:

Teorem 2. *Neka je $\widehat{AB}$ luk kružnice, α obodni i β središnji kut nad tim lukom. Onda vrijedi $\beta = 2\alpha$*

I dok udžbenik [2] odmah izravno nudi prethodni poučak, za učenike bi vrlo korisna bila slijedeća aktivnost iz koje bi samostalno došli do zaključka o odnosu središnjeg i obodnog kuta:

Aktivnost 4. *1. Na danoj kružnici izmjerite mjeru kuta $\angle COB$, a zatim i kuta $\angle CAB$. Što možete zaključiti uspoređujući mjere obaju kuteva?*



Slika 17.

2. *Konstruirajte proizvoljnu kružnicu te proizvoljan obodni kut. Zatim konstruirajte središnji kut nad istim lukom kružnice. Kolika je mjera obodnog kuta, a kolika središnjeg kuta? U kakvom su odnosu ta dva kuta? Usporedite svoje rezultate sa ostalim učenicima.*

Usporedbom rezultata sa ostalim učenicima, učenik može doći do zaključka da je odnos obodnog i središnjeg kuta nad istim kružnim lukom uvijek isti, neovisno o veličini kružnice i mjeri obodnog kuta.
Kod ovakvog zadatka, vrlo je korisno prikazati različite veličine kružnica uz različite mjere obodnog kuta, što je puno jednostavnije u nekom od programa dinamične geometrije o kojima će biti spomena u poglavlju 6.

Nakon prethodnog poučka učenicima se u udžbeniku [2] predočava slijedeće:

1. Svi obodni kutovi kružnice nad istim lukom su sukladni.

2. Obodni kutovi koji odgovaraju lukovima jednakih duljina (iste kružnice) su sukladni.

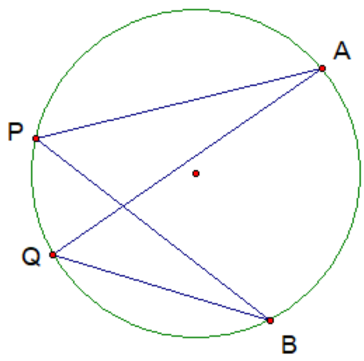
I u ovom slučaju je vrlo lako učenike aktivirati da sami otkriju prethodno svojstvo. Nastavnik učenicima može dati nešto poput slijedećeg zadatka:

Aktivnost 5. *1. Konstruirajte proizvoljnu kružnicu te označite dvije točke A i B na njoj. Zatim odaberite proizvoljnu točku P na kružnom luku $\widehat{AB}$. Pomoću kutomjera odredite mjeru kuta $\angle APB$.*

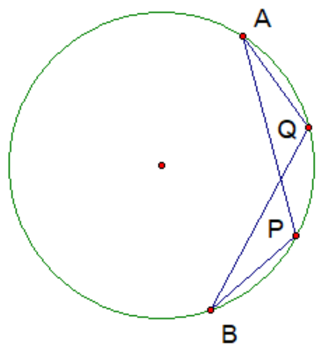
2. *Odaberite još jednu proizvoljnu točku Q na istom kružnom luku te nacrtajte obodni kut $\angle AQB$. Pomoću kutomjera odredite mjeru toga kuta.*

3. *Uspoređujući kutove $\angle APB$ i $\angle AQB$, što možete zaključiti?*

4. *Ponovite korake 1.— 3. pri čemu točke P i Q postavite na kružni luk $\widehat{BA}$. Usporedite rezultate s ostalim učenicima.*



Slika 18.



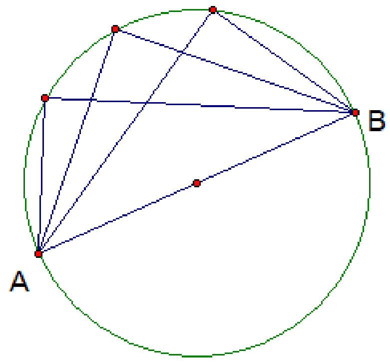
Slika 19.

I u ovom slučaju će učenik uspoređujući rezultate sa ostatkom razreda uvidjeti kako dobiveno svojstvo ne ovisi o izboru kružnice ili kružnog luka.

Nadovezujući se na poučak o obodnom i središnjem kutu, vrlo je lako doći do specijalnog slučaja poznatog kao Talesov poučak:

Teorem 3. *Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.*

Kako je mjera središnjeg kuta u ovom slučaju $180°$, prema poučku o središnjem i obodnom kutu, obodni kut će u tom slučaju iznositi $90°$. No, učenici i ovdje na vrlo jednostavan način mogu otkriti da to zaista vrijedi i sami iznijeti prethodni zaključak o obodnom kutu nad promjerom kružnice. Naime, ponovno im se može dati zadatak u kojem će na proizvoljnoj kružnici nacrtati tetivu koja je ujedno i promjer te kružnice, a zatim će nacrtati barem tri obodna kuta nad tom tetivom. Ono što trebaju napraviti nakon toga je kutomjerom odrediti mjere tih kutova te zaključiti kako svi oni iznose upravo 90°. Uspoređujući svoje rezultate sa rezultatima ostalih učenika, zaključuju kako isto svojstvo vrijedi za svaku kružnicu, neovisno o veličini njenog radijusa.

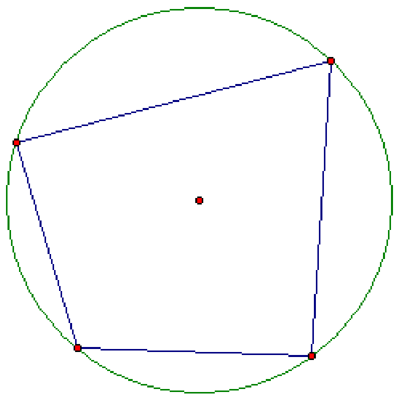


Slika 20.

Udžbenik ni u ovom slučaju ne daje učenicima slobodu da svojstvo otkriju sami, iako se ono vrlo jednostavno može otkriti na prethodno opisan način.

5.4 Tetivni četverokut

Kako je tetivni četverokut logičan nastavak na gradivo o središnjem i obodnom kutu, tako udžbenik daje jasno pojašnjenje o tome zašto suma nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta iznosi 180°.
No prije samog pojašnjenja zašto to vrijedi, učenici opet mogu sami otkriti ovo svojstvo putem aktivnosti u kojoj će na proizvoljnoj kružnici konstruirati tetivni četverokut odabirom bilo koje četiri točke koje se nalaze na kružnici. Nakon toga kao zadatak imaju da izmjere sve unutarnje kutove tog četverokuta te da promotre sume svaka dva kuta i time dođu do odgovarajućeg zaključka.



Slika 21.

Zatim bi nastavnik trebao objasniti zašto to zaista vrijedi, što je vrlo dobro prikazano u udžbeniku. Naime, ako je četverokut ABCD tetivan te ako središte kružnice opisane tom četverokutu označimo sa S, a obodni kut luka $\widehat{BCD}$ je upravo kut uz vrh

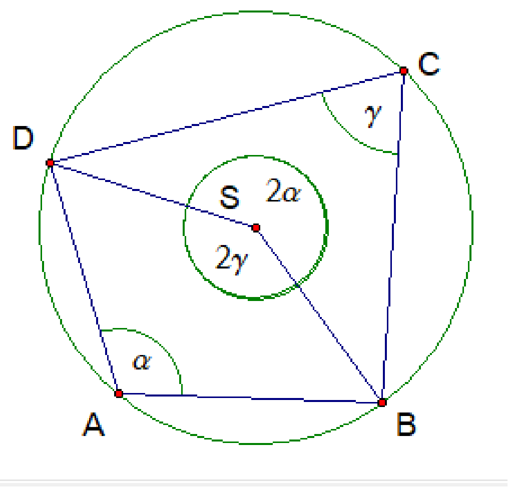
A kojeg označimo sa α, tada je pripadni središnji kut jednak 2α. Analogno je obodni kut za luk $\widehat{DAB}$ kut pri vrhu C kojeg označimo sa γ, a samim time je pripadni središnji kut onda 2γ. Iz toga slijedi da je:

$$2\alpha + 2\gamma = 360°$$

odnosno,

$$\alpha + \gamma = 180°.$$

Na isti način bi se došlo do zaključka kako je $\beta + \delta = 180°$ (što se također može zaključiti i iz činjenice da je zbroj unutarnjih kutova četverokuta jednak $360°$).



SLIKA 22.

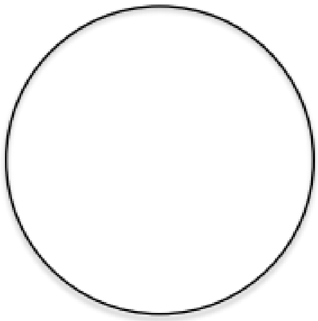
5.5 *Duljina kružnog luka*

Duljina kružnog luka je nastavna jedinica kod koje je za učenike osobito dobro da sami dođu do formule za njeno računanje i time otkriju ovisnost veličine središnjeg kuta i duljine kružnog luka dane kružnice.
Učenicima se na početku može dati motivacijski zadatak kojeg interpretiraju matematičkim jezikom. Primjerice:

Zadatak 3. *Rotirajuća prskalica rotira se 300° prskajući travnjak u duljini 20 metara od prskalice. Odredite duljinu ruba kruga koji je ostao suh.*

Kod ovakvog zadatka, bitno je da učenici zaključe da moraju pronaći duljinu kružnog luka onog dijela kružnice koji nije poprskan vodom. Zadatak se nadopunjuje dodatnim uputama koje učenike postepeno dovode do rješenja:

Aktivnost 6. *1. Skicirajte situaciju iz zadatka na danoj kružnici.*



Slika 23.

2. Napišite formulu po kojoj se računa opseg kruga.

3. Koristeći formulu iz Koraka 2. koliki je opseg kruga danog u zadatku (poprskani i nepoprskani dio)?

4. Kolika je mjera središnjeg kuta nepoprskanog dijela travnjaka?

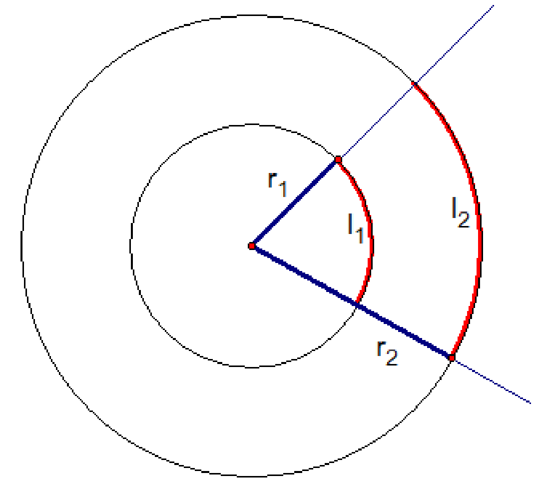
5. Koji dio kruga taj nepoprskani dio čini (izraženo u razlomku)?

6. Kako ste došli do tog razlomka (tj. što je brojnik, a što nazivnik tog razlomka)?

7. Koristeći odgovore dobivene u 3. i 5. koraku, pronađite duljinu ruba kruga koji je ostao suh?

8. Koristeći izračun iz Koraka 7. te formula iz 2. i 5. koraka napišite općenitu formulu za računanje duljine kružnog luka.

Kako bi učenici još bolje shvatili odnos središnjeg kuta i duljine kružnog luka, aktivnost može biti i takva da postepeno otkrivaju kako se duljina kružnog luka mijenja povećanjem ili smanjenjem središnjeg kuta, pri čemu moraju pripaziti na to da ukoliko dvije kružnice različitog polumjera imaju jednak središnji kut, to neće značiti da će im i duljine pripadnih kružnih lukova biti jednake.

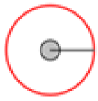
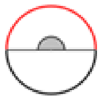
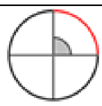
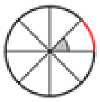
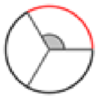
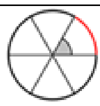
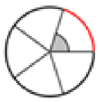
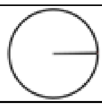


Slika 24.

$$r_1 < r_2 \rightarrow l_1 < l_2$$

Kako bi otkrili u kakvom su odnosu središnji kut i duljina kružnog luka, rješavaju zadatak gdje pomoću razlomaka dolaze do duljina poznatih kružnih lukova, a zatim to proširuju na kružne lukove vezane uz općenite mjere središnjih kutova.

Aktivnost 7. *Dana je kružnica opsega o. Popunite tablicu. Što primjećujete?*

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
			
			
			
			
			
			
			
	$\frac{1}{360}$ kružnice		

TABLICA 1.

Učenici će nakon ove aktivnosti primjetiti kako su duljina kružnog luka i veličina središnjeg kuta proporcionalne veličine. Ono što im preostaje za zaključiti je koliko iznosi koeficijent proporcionalnosti. Nadopunjujući prethodni zadatak slijedećim:

Aktivnost 8. *Popunite tablicu:*

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
1°	
2°	
3°	
4°	
0.5°	
314.7°	
0°	
α	

TABLICA 2.

dolaze do zaključka kako je koeficijent proporcionalnosti upravo $\frac{o}{360}$ te dolaze do formule za računanje duljine kružnog luka:

$$l = \frac{o}{360} \cdot \alpha = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha.$$

Udžbenik [2] ne nudi tako detaljno pojašnjenje formule za duljinu kružnog luka, stoga učenici vrlo teško mogu shvatiti zašto je ona zapisana baš tom formulom, dok će kroz prethodne dvije aktivnosti uočiti vezu središnjeg kuta i duljine luka i sami doći do formule te ju sigurno samim time puno lakše zapamtiti.

5.6 Kutak plus

Kako se u nekim dijelovima udžbenika [2] pojavljuje takozvani Kutak plus u kojem su dane dodatne informacije o određenim pojmovima i svojstvima, tako se za nastavnu cjelinu Krug i kružnica, jedan od ponuđenih Kutak plus dijelova osvrće na broj π.

Osim što je opisana povijest ovog najpopularnijeg broja, dan je i opis Arhimedovog postupka kojim je on došao do njegove približne vrijednosti. Naime, on je promatrao opsege pravilnih mnogokuta upisanih i opisanih danoj kružnici te je provodio račun sve do pravilnog 96 – terokuta. Pri tome je opseg kruga O veći od opsega O_u krugu upisanog pravilnog n – terokuta, a manji od opsega O_o pravilnog n – terokuta opisanog istom krugu: $O_u < O < O_o$. Time je došao do vrlo dobre procjene broja π: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Aritmetička sredina tih dviju ograda daje procjenu $\pi \approx 3.14185$.
Iako se prethodno navedeni postupak danas može lako provjeriti korištenjem kalkulatora, učenicima će zanimljivije biti ukoliko dobiju aktivnost u kojoj će sami doći do procjene broja π.

Primjerice, jedna takva aktivnost bila bi da se učenicima da niz okruglih predmeta kojima bi morali izmjeriti opseg i promjer koristeći uže, krojački metar i slično. Pri tome bi svoja mjerenja zapisivali u tablicu i odredili omjer opsega i promjera za svaki od okruglih predmeta. Na kraju bi trebali odrediti aritmetičku sredinu svih omjera i na taj način doći do procjene broja π. Također bi bilo poželjno da na kraju usporede svoje rezultate sa ostalim učenicima i zaključe kako su svi omjeri približno jednaki broju 3. Iz samog omjera opsega O i promjera d tada lako mogu doći i do formule za opseg kruga. Kako su procjenu broja π dobili upravo iz toga da je $\pi = \frac{O}{d}$ slijedi da je $O = d \cdot \pi = 2r\pi$.

Slika 25.

PREDMET	OPSEG (O)	PROMJER (d)	OMJER $\frac{O}{d}$
Konzerva			
Šalica			
Kotač			

Tablica 3.

6 Učenje otkrivanjem korištenjem računala – Geogebra i Sketchpad

Kako se svi učenici međusobno razlikuju te kako ne odgovaraju svim učenicima iste metode rada, poželjno je u nastavi matematike koristiti više različitih nastavnih metoda među kojima je i simulacija kao dio učenja otkrivanjem.
Stoga učenici osim na papiru, aktivnosti mogu provoditi i pomoću računala putem različitih programa dinamičke geometrije kao što su Geogebra i Sketchpad. Dok je Sketchpad odličan program za izvođenje različitih konstrukcija, Geogebra je specifična po tome što objedinjuje geometriju i algebru gdje algebraski izraz odgovara upravo geometrijskom prikazu. Ona nam nudi grafički, simbolički i tabularni prikaz i kao takva je vrlo jednostavna i intuitivna za korištenje.

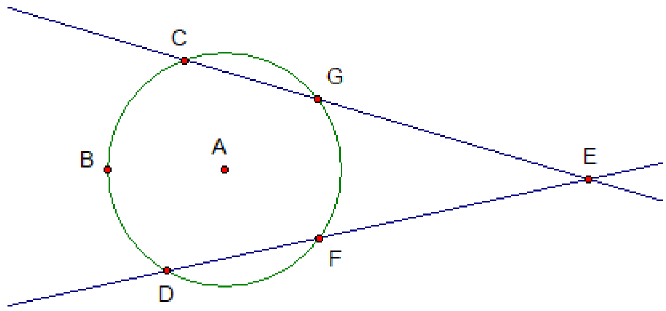
Sve prethodno navedene aktivnosti u poglavlju 5. lako se mogu provesti i u nekom od programa dinamičke geometrije, a učenicima kojima je možda teško vizualizirati dane probleme, programi uvelike pomažu.

Primjerice, učenici mogu uz pomoć Sketchpada otkriti pod kojim se kutom dvije sekante međusobno sijeku te izvesti formulu.

Zadatak 4. 1. *Konstruirajte kružnicu sa središtem u točki A i radijusom $\overline{AB}$. Neka se točka B nalazi lijevo od točke A.*

2. *Naznačite točke C i D na kružnici te točku E izvan kružnice. Pri tome neka se točka C nalazi lijevo iznad točke B, a točka D lijevo ispod točke B. Točka E neka se nalazi sa desne strane.*

3. *Konstruirajte pravce CE i DE. Sjecište pravca DE i kružnice označite sa F, a sjecište pravca CE i kružnice označite sa G. Nakon toga, vaš prikaz bi trebao izgledati slično prikazu ispod:*



SLIKA 26.

4. *Izmjerite kut $\angle CED$.*

5. *Zatim izmjerite luk $\widehat{CBD}$ tako da označite točke C, B i D te kružnicu, tim redom, a zatim odaberete opciju Measure $\rightarrow$ Arc Angle.*

6. *Zatim izmjerite luk $\widehat{FG}$ tako da označite točke F, G i kružnicu, redom, a zatim odaberete opciju Measure $\rightarrow$ Arc Angle.*

7. *Proučite što se događa ukoliko pomičete točku E. Što primjećujete?*

8. *Što će se dogoditi ukoliko točku E pomaknete tako da leži na kružnici? A što ako leži u središtu kružnice? Čemu odgovaraju ova dva slučaja?*

9. *Povucite točku E ponovno izvan kružnice sa njene desne strane te pomoću opcije Measure $\rightarrow$ Calculate izračunajte razliku duljina luka CBD i luka FG.*

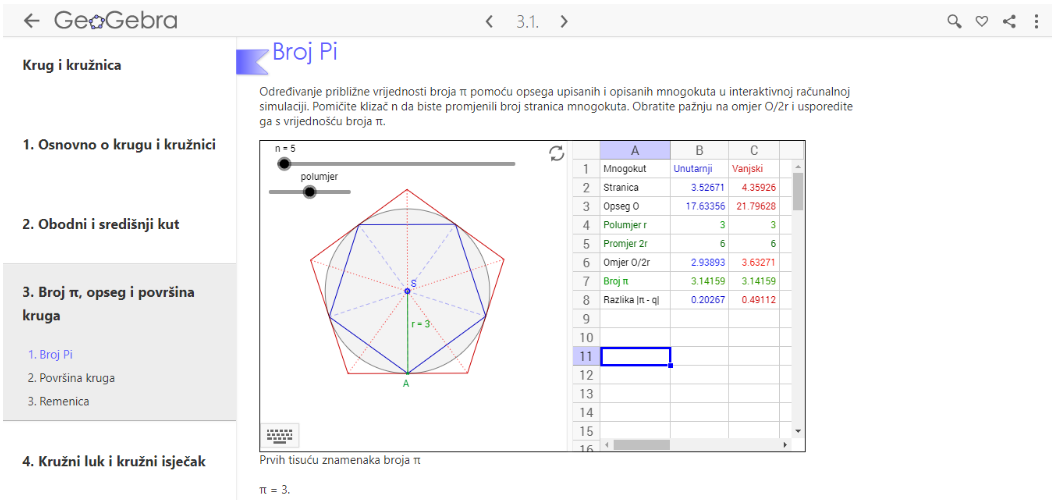
10. *Pomičite točke C,D i E te proučite postoji li neki uzorak. U kakvom su odnosu kut $\angle CED$ i izračunata razlika? Prepravite izračun tako da dobijete upravo mjeru kuta $\angle CED$.*

11. *Dakle, zaključak je kako je mjera kuta nastalog sjecištem dviju sekanti jednaka:* __________.

Nakon ove aktivnosti, učenici zaključuju kako je mjera kuta nastalog sjecištem dviju sekanti jednaka polovini razlike dvaju kružnih lukova određenih sekantama.

Ovakav pristup odrađivanju aktivnosti puno je jednostavniji i dinamičniji nego kada bi se ona odradila preko papira. Sketchpad pa tako i svaki drugi program dinamične geometrije, omogućava učenicima da na vrlo brz način (primjerice pomicanjem točaka) otkriju sve moguće slučajeve koji postoje i istovremeno ih vizualiziraju, što ne bi bili u mogućnosti rješavanjem preko papira.
Sukladno tome, na vrlo jednostavan način (pomicanjem točaka) učenici mogu vidjeti kako se odnos središnjeg i obodnog kuta neće promjeniti promjenom veličine kružnice ili mjere obodnog kuta te tako u vrlo kratkom vremenu vide različite situacije i brže dolaze do zaključka.

Geogebra povezujući algebarski i geometrijski zapis vrlo dobro može prikazati primjerice aktivnost određivanja vrijednosti broja π kako ju je odredio Arhimed. Učenicima se može dati unaprijed napravljen mathlet pomoću kojeg provode danu aktivnost. Mathlet je manji objekt učenja koji obrađuje određenu matematičku temu ili problem namijenjen demonstraciji nastavnika ili samostalnom učenju učenika [1].



SLIKA 27. [9]

Iako učenje otkrivanjem oduzima puno više vremena od nekih drugih metoda učenja te nastavnici moraju izraditi puno opsežnije pripreme za takav sat, iz prethodnih nekoliko primjera vidljivo je kako u udžbeniku otkrivanju nije dana posebna pažnja. Prema jednom empirijskom istraživanju iz 2008. godine o upotrebi matematičkih udžbenika u nastavi matematike u višim razredima osnovne škole u Hrvatskoj [3], utvrđeno je kako se udžbenici zapravo često koriste i imaju veliki utjecaj u nastavi matematike. Naime, oni nastavnicima služe kao glavni izbor kod pripreme za nastavni sat, a predloženi metodički sadržaji služe kao okvir nastavnikove organizacije sata. Matematički udžbenici se tako više osvrću na teorijski dio gradiva koji ostaje neobjašnjen ukoliko ga nastavnik dodatno ne pojasni, a u tom slučaju otkrivanje kao nastavna metoda, može uvelike olakšati, kako nastavniku, tako i učeniku, proces poučavanja, odnosno učenja.

7 Zaključak

Učenje otkrivanjem je metoda koja zahtjeva puno vremena te od nastavnika traži opsežnu pripremu no učenicima daje kompletan proces učenja koji im omogućava lakše i jednostavnije svladavanje gradiva.

Iako današnji udžbenici ne pridaju previše pažnje učenju otkrivanjem, nastavnici bi si za cilj trebali postaviti korištenje ove metode što je češće moguće, čime bi obogatili cjelokupni proces učenja. Time bi nastavni sat postao zanimljiviji, a učenici bi zasigurno bili zainteresiraniji za rad.

George Polya najbolje je opisao što nudi proces učenja otkrivanjem: "Najbolji način da se nešto nauči jest da to sami otkrijete."

Sažetak

Često se tvrdi da je učenje temeljitije i potpunije ukoliko se od učenika traži da samostalno otkriju različita svojstva i principe u matematici, za razliku od učenja koje podrazumijeva predavanje nastavnika te izričito frontalnu nastavu.
Gestalt teorija sugerira da učiteljeva demonstracija rezultata ne mora dovesti do učenikova shvaćanja tog danog rezultata, stoga je otkrivanje ono što pruža razumijevanje i shvaćanje izloženog.
Nastavni materijali poput štapića ili kockica te brojnih drugih, kao i različite aktivnosti koje nastavnici mogu provoditi na satu matematike, olakšavaju učenicima proces učenja.
Problem i istraživanje kao dva pojma koja se često poistovjećuju jer obuhvaćaju istu ideju: aktivno sudjelovanje učenika u procesu učenja, razlikuju se jer je rješavanje problema statično, dok je istraživanje aktivno i može dovesti do rješavanja problema.
Učenici osim na papiru, aktivnosti mogu provoditi i pomoću računala putem različitih programa dinamičke geometrije kao što su Geogebra i Sketchpad.

Ključne riječi: učenje otkrivanjem, nastavne metode, nastavni materijali, rješavanje problema

Summary

It is often argued that learning is more thorough and complete if students are required to independently discover different properties and principles in math, as opposed to learning that involves teacher lectures and explicitly frontal teaching.
Gestalt theory suggests that teachers demonstration of results does not have to lead to a student's understanding of that given result, so discovering it is what gives an understanding of the subject.
Teaching materials such as rods or dices and many others, as well as the various activities that teachers can give to students during math lessons, makes it easier for students to learn.
Problem and investigation as two concepts often identified because they include the same idea: active participation of students in the learning process, are different because problem solving is static while research is active and can lead to problem solving.
Students other than on paper can also perform activities using the computer through various dynamic geometry programs such as Geogebra and Sketchpad.

Keywords: learning by discovery, teaching methods, teaching materials,
problem solving

Literatura

[1] Ž. Bjelanović Dijanić, *Mathlet – interaktivni digitalni materijal namijenjen samostalnom učenju*, Pogled kroz prozor: digitalni časopis za obrazovne stručnjake URL: https://pogledkrozprozor.wordpress.com/2009/03/31/mathlet-interaktivni-digitalni-materijal-namijenjen-samostalnom-ucenju/

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija, 2. dio*, Element, Zagreb, 2013.

[3] D. Glasnović Gracin, V. Domović, *Upotreba matematičkih udžbenika u nastavi viših razreda osnovne škole*, Odgojne znanosti, **11**(2009), 45–65.
URL: https://hrcak.srce.hr/file/74745

[4] L. Kralj, D. Glasnović Gracin, Z. Ćurković, M. Stepić, S. Banić, *Petica +7, udžbenik i zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole, drugi svezak*, SysPrint d.o.o., Zagreb, 2010.

[5] Z. Kurnik, *Motivacija*, Matematika i škola, **31**(2009), 4–10.

[6] A. Orton, *Learning Mathematics: Issues, Theory and Classroom Practice, 3rd edition*, Continuum, New York, 2004.

[7] M. Serra, *Discovering Geometry An Investigative Approach*, Key Curriculum Press, Emeryville, 2008.

[8] *Arc Length Discovery Activity*,
URL: http://merrellmath.weebly.com/uploads/5/3/6/1/53614937/arc_length_discovery.pdf

[9] *Broj pi*,
URL: https://www.geogebra.org/m/AUhsyvvb#material/YFWkBSQq

[10] *Geštalt psihologija*,
URL: http://www.psiholoskicentar-razvoj.hr/?p=40

Životopis

Zovem se Tajana Čuljak i rođena sam 25. ožujka 1994. godine u Slavonskom Brodu. Odrasla sam i živim u Slavonskom Brodu sa mamom Snježanom i bratom Josipom. Školovanje sam započela 2000. godine u osnovnoj školi "Đuro Pilar" u Slavonskom Brodu. Nakon toga 2008. godine upisujem opću gimnaziju u Gimnaziji "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu. U periodu 7. i 8. razreda te kroz cijelo srednjoškolsko obrazovanje bavila sam se latino – američkim i standardnim plesom. 2012. godine upisujem integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.