

# Hermite - Hadamardova nejednakost

---

Maglič, Matej

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:484419>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2022-12-05**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Department of Mathematics Osijek](#)



Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matej Maglić

**Hermite-Hadamardova nejednakost**

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matej Maglić

**Hermite-Hadamardova nejednakost**

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2017.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>5</b>
1.1	Povijesni pregled . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Konveksne funkcije</b>	<b>6</b>
2.1	Definicija i osnovna svojstva . . . . .	6
2.2	Funkcije povezane s konveksnim funkcijama . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Nejednakosti</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Hermite-Hadamardova integralna nejednakost</b>	<b>11</b>
4.1	H.-H. nejednakost za log-konveksne funkcije . . . . .	17
4.2	H.-H. nejednakost za Godnova-Levin klase funkcija . . . . .	19
4.3	H.-H. nejednakost za kvazi-konveksne funkcije . . . . .	22
4.4	H.-H. nejednakost za s-konveksne funkcije . . . . .	24
4.4.1	Orliczove funkcije . . . . .	24
4.4.2	Brecknerove funkcije . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Primjene H.-H. nejednakosti</b>	<b>30</b>
5.1	Kvadraturene formule . . . . .	31
	<b>Literatura</b>	<b>33</b>

## Sažetak

U ovom završnom radu upoznat ćemo se s Hermite-Hadamardovom nejednakošću za konveksne funkcije. Povezat ćemo konveksne funkcije s raznim klasama funkcija. Kroz cijeli rad bavit ćemo se generalizacijom Hermite-Hadamardove nejednakosti na nekoliko klasa funkcija. U zadnjem dijelu rada naglasak će biti na primjenama te nejednakosti u raznim područjima matematike.

**Ključne riječi:** konveksne funkcije, Hermite-Hadamardova nejednakost, log-konveksne funkcije, Godnova-Levin klase funkcija, kvazi-konveksne funkcije, s-konveksne funkcije

## Abstract

In this final paper we will be introduced to Hermite-Hadamard inequality for convex functions. Relations between various classes of functions and convex functions will be formulated and proven. Also, some generalization of the Hermite-Hadamard inequalities for several classes of functions will be given. In the last part of the paper we will see some applications of this inequality in different areas of Mathematics.

**Keywords:** convex functions, Hermite-Hadamard inequality, Log-Convex Mappings, Godnova-Levin class of function, Quasi-Convex functions, s-Convex functions

# 1 Uvod

U ovom završnom radu bavimo se jednom od najvažnijih nejednakosti vezanih uz konveksne funkcije. Zato ćemo u drugom poglavlju definirati konveksnu funkciju i navesti fundamentalne rezultate. Povezat ćemo konveksne funkcije s raznovrsnim klasama funkcija. Nakon što navedemo i pokažemo najvažnije rezultate, prisjetit ćemo se određenih nejednakosti i sredina. U četvrtom poglavlju usredotočit ćemo se na samu Hermite-Hadamardovu integralnu nejednakost, te provesti njezin dokaz. Pokazat ćemo brojne ocjene nejednakosti vezane za određene klase funkcija. Konačno ćemo se baviti primjenama Hermite-Hadamardove nejednakosti u raznim područjima matematike. Neki od dobivenih rezultata bit će temelji poznatih nejednakosti.

## 1.1 Povijesni pregled

U 19. stoljeću Hermite\* u pismu tada prestižnom matematičkom časopisu *Mathesis*, navodi sljedeće nejednakosti

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Zapravo je već pokazao nejednakost kojom se mi danas bavimo, iako će više od dvadeset godina proći prije nego što Jensen definira konveksne (odnosno J-konveksne) funkcije. Zanimljivo je kako ovaj zapis nije priznat te nije objavljen niti u jednoj tadašnjoj matematičkoj literaturi. Matematičar Fejér† je također u svojim radovima obuhvatio nejednakosti koje generaliziraju one Hermitove, ali čak ni tada njegov rad nije prihvaćen. Krajem stoljeća Hadamard‡ dokazuje nejednakost

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx,$$

neovisno o Hermitovim radovima, pa se navedene nejednakosti citiraju kao Hadamardove nejednakosti. No, danas u čast obojici velikih matematičara, nejednakost o kojoj ćemo govoriti u radu nazivamo Hermite-Hadamardova integralna nejednakost.

---

\*Charles Hermite (1822-1901), francuski matematičar.

†Lipót Fejér (1880-1959), mađarski matematičar.

‡Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), francuski matematičar.

## 2 Konveksne funkcije

### 2.1 Definicija i osnovna svojstva

Teorija konveksnih funkcija ima veliku ulogu u različitim granama matematike. Nama je taj pojam potreban za razumijevanje Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti, stoga ćemo definirati konveksnu funkciju i navesti nekoliko osnovnih rezultata vezanih uz nju.

**Definicija 2.1.** *Neka je zadana funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $I$  interval u  $\mathbb{R}$ .*

i) *Tada za funkciju  $f$  kažemo da je konveksna ako za sve  $x, y \in I$  i za svako  $t \in [0, 1]$  vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \quad (2.1)$$

*Ako u (2.1) vrijedi stroga nejednakost za sve  $x \neq y$  i  $t \in (0, 1)$ , tada kažemo da je  $f$  strogo konveksna.*

ii) *Slično, funkcija  $f$  je konkavna ako u (2.1) vrijedi obrnuta nejednakost. Ukoliko vrijedi stroga nejednakost za sve  $x \neq y$  i  $t \in (0, 1)$ , tada kažemo da je  $f$  strogo konkavna.*

Prethodna definicija je teško provjerljiva u primjerima. Postoji međutim zanimljivo svojstvo dano u sljedećem teoremu.

**Teorem 2.1.** *Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Funkcija  $f$  je konveksna na  $I$  onda i samo onda ako je  $f''(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in I$ .*

Sada konačno možemo iskazati teorem koji ćemo upotrebljavati u ostatku rada.

**Teorem 2.2.** *Diferencijabilna funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , je konveksna na  $I$  onda i samo onda ako  $f'$  raste na  $I$ .*

### 2.2 Funkcije povezane s konveksnim funkcijama

Ovdje ćemo se upoznati sa osnovnim klasama funkcija za koje će kasnije biti prezentirane ocjene Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti. Svaku od tih klasa ćemo definirati i povezati sa konveksnim funkcijama. Više detalja o ovim klasama funkcija može se pronaći u [11, str. 1-9].

**Definicija 2.2.** *Kažemo da je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ , log-konveksna ili multiplikativno konveksna ako za sve  $x, y \in I$  i za svako  $t \in [0, 1]$  vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}. \quad (2.2)$$

Sada kada smo definirali log-konveksnu funkciju iskazat ćemo i dokazat teorem koji govori o njenoj povezanosti s konveksnom funkcijom.

**Teorem 2.3.** *Neka je dana funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ . Funkcija  $f$  je log-konveksna onda i samo onda ako je funkcija  $\log f$  konveksna funkcija.*

*Dokaz.*  $\square$  Pretpostavimo da je  $\log f$  konveksna funkcija. Tada prema (2.1) vrijedi

$$\begin{aligned} \log f(tx + (1-t)y) &\leq t \log f(x) + (1-t) \log f(y) \\ &= \log f(x)^t + \log f(y)^{1-t} \\ &= \log f(x)^t \cdot f(y)^{1-t}. \end{aligned}$$

Odakle, zbog eksponencijalne funkcije koja je monotono rastuća, dobivamo

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(x)^t \cdot f(y)^{1-t}.$$

Dakle, funkcija  $f$  je log-konveksna.

$\Rightarrow$  Neka je funkcija  $f$  log-konveksna, tj.

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(x)^t \cdot f(y)^{1-t},$$

pa zbog  $f(x) > 0, \forall x \in I$ , i monotonosti logaritamske funkcije je

$$\log f(tx + (1 - t)y) \leq \log (f(x)^t \cdot f(y)^{1-t}).$$

Zbog svojstava logaritamske funkcije slijedi

$$\log f(tx + (1 - t)y) \leq t \log f(x) + (1 - t) \log f(y).$$

Prema tome,  $\log f$  je konveksna funkcija. □

Godine 1985., matematičari Godnova i Levin definirali su sljedeću klasu funkcija.

**Definicija 2.3.** Za funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ , kažemo da pripada klasi  $Q(I)$  ukoliko je ona nenegativna, te za sve  $x, y \in I$  i svako  $t \in (0, 1)$  zadovoljava nejednakost

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1 - t}. \quad (2.3)$$

Također su ustanovili da sve nenegativne monotone i nenegativne konveksne funkcije pripadaju ovoj klasi funkcija, te dokazali sljedeći rezultat.

**Lema 2.1.** Ako je  $f \in Q(I)$  i  $x, y, z \in I$ , tada vrijedi

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - x)(z - y) \geq 0.$$

Uočimo kako je izraz u prethodnoj lemi zapravo ekvivalentan izrazu (2.3). Stoga taj izraz može poslužiti kao alternativna definicija klase  $Q(I)$ . Upoznajmo se sa još jednom klasom funkcija kroz sljedeću definiciju.

**Definicija 2.4.** Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Kažemo da je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $I$  konveksan skup u  $\mathbb{R}$ , kvazi-konveksna ako vrijedi

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\},$$

za sve  $x, y \in I$  i svako  $t \in [0, 1]$ .

**Napomena 2.1.** Svaka konveksna funkcija je kvazi-konveksna, ali obrat ne vrijedi.

**Primjer 2.1.** Funkcija  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definirana na sljedeći način

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ \sqrt{x}, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

primjer je funkcije koja je kvazi-konveksna, no nije konveksna.



Za nastavak, prisjetimo se sljedeće dvije definicije.

**Definicija 2.5.** Za funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , kažemo da je Jensen-konveksna ( $J$ -konveksna) ako za sve  $x, y \in I$  vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

**Definicija 2.6.** Kažemo da je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , Jensen-kvazi-konveksna ili  $J$ -kvazi-konveksna ako vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\},$$

za sve  $x, y \in I$ .

Sada možemo uočiti kako klasa  $JQC(I)$   $J$ -kvazi-konveksnih funkcija na  $I$  sadrži klasu  $J(I)$   $J$ -konveksnih funkcija na  $I$ . Sljedeću ideju predstavio nam je poljski matematičar Orlicz<sup>§</sup>, koji je taj pojam uspješno koristio u teoriji Orliczovih prostora.

**Definicija 2.7.** Neka je  $0 < s \leq 1$ . Za funkciju  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$ , kažemo da je  $s$ -konveksna u prvom smislu ili  $s$ -konveksna u Orliczovom smislu ako vrijedi

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y), \quad (2.4)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}_0^+$  i  $\alpha, \beta \geq 0$  takve da je  $\alpha^s + \beta^s = 1$ . Ovu klasu realnih funkcija označavamo sa  $K_s^1$ .

Važno svojstvo  $s$ -konveksnih funkcija u prvom smislu dano je u sljedećem teoremu.

**Teorem 2.4.** Neka je  $f \in K_s^1$  i  $0 < s \leq 1$ . Tada nejednakost (2.4) vrijedi za sve  $x, y \in \mathbb{R}_0^+$  i sve  $\alpha, \beta \geq 0$  takve da je  $\alpha^s + \beta^s \leq 1$  ako i samo ako je  $f(0) \leq 0$ .

**Napomena 2.2.** Valja uočiti da prema prethodnom teoremu uvjet  $\alpha^s + \beta^s = 1$  u Definiciji 2.7, može se zamijeniti sa  $\alpha^s + \beta^s \leq 1$ .

Po uzoru na  $s$ -konveksne funkcije u prvom smislu, definirana je još jedna klasa funkcija.

**Definicija 2.8.** Za funkciju  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je  $s$ -konveksna u drugom smislu ili  $s$ -konveksna u Brecknerovom smislu ako vrijedi

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y), \quad (2.5)$$

za sve  $x, y \geq 0$  i  $\alpha, \beta \geq 0$  takve da je  $\alpha + \beta = 1$  i  $s$  fiksna u  $(0, 1]$ . Skup svih  $s$ -konveksnih funkcija u drugom smislu označava se sa  $K_s^2$ .

Sljedeći teorem daje vezu između dviju  $s$ -konveksnosti. U dokazu tog teorema pomoći će nam sljedeća lema.

**Lema 2.2.** Neka je  $f \in K_s^2$ . Tada nejednakost (2.5) vrijedi za sve  $x, y \in \mathbb{R}_0^+$  i  $\alpha, \beta \geq 0$  takve da je  $\alpha + \beta \leq 1$  onda i samo onda ako je  $f(0) = 0$ .

---

<sup>§</sup>Władysław Roman Orlicz (1903-1990), poljski matematičar.

**Teorem 2.5.** *Neka je  $0 < s \leq 1$ . Ako je  $f \in K_s^2$  i  $f(0) = 0$  onda je  $f \in K_s^1$ .*

*Dokaz.* Neka je  $f \in K_s^2$  i  $f(0) = 0$ . Za  $x, y \in \mathbb{R}_0^+$  i  $\alpha, \beta \geq 0$ , gdje je  $\alpha^s + \beta^s = 1$  imamo

$$\alpha + \beta \leq \alpha^s + \beta^s = 1.$$

Sada, iskoristimo li Lemu 2.2, nejednakost

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

vrijedi za sve  $x, y \in \mathbb{R}_0^+$  i  $\alpha, \beta \geq 0$ . Dakle,  $f \in K_s^1$ . □

Objekti s-konveksnosti svode se na konveksnost u slučaju da je  $s = 1$ . Dakle, svaka 1-konveksna funkcija je konveksna funkcija. Engleski matematičar Wright<sup>¶</sup> definirao je novu klasu funkcija, generalizirajući princip konveksnosti.

**Definicija 2.9.** *Kažemo da je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , Wright-konveksna ili W-konveksna na  $I$  ako za svaki  $y > x$  i  $t > 0$  takvi da  $y + t, x \in I$  vrijedi*

$$f(x + t) - f(x) \leq f(y + t) - f(y).$$

Karakterizaciju Wright-konveksnih funkcija daje sljedeći teorem, a njegov se dokaz može pronaći u [13].

**Teorem 2.6.** *Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Za funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sljedeće tvrdnje su ekvivalentne*

*i)  $f$  je W-konveksna na  $I$ ;*

*ii) za sve  $a, b \in I$  i  $t \in [0, 1]$ , vrijedi sljedeća nejednakost*

$$f((1-t)a + tb) + f(ta + (1-t)b) \leq f(a) + f(b).$$

Prethodni teorem motivira sljedeću klasu funkcija.

**Definicija 2.10.** *Funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , je Wright-kvazi-konveksna ako za sve  $x, y \in I$  i svako  $t \in [0, 1]$ , vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{2}[f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty)] \leq \max\{f(x), f(y)\}. \quad (2.6)$$

Klasa Wright-kvazi-konveksnih funkcija na  $I$ , u oznaci  $WQC(I)$ , sadržana je u klasi  $W(I)$  Wright-konveksnih funkcija na  $I$ . Sljedeći teorem povezuje klase W-kvazi-konveksnih funkcija i J-kvazi-konveksnih funkcija, a njegov dokaz se može pronaći u [4, str. 80-81].

**Teorem 2.7.** *Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Tada vrijedi sljedeće*

$$WQC(I) \subset JQC(I).$$

---

<sup>¶</sup>Edward Maitland Wright (1906-2005), engleski matematičar.

### 3 Nejednakosti

U ovom poglavlju razmotrit ćemo određene nejednakosti potrebne za daljnje razumijevanje rada. Osnovne sredine brojeva neizostavni su dio ovoga rada, stoga ih je potrebno definirati.

**Definicija 3.1.** *Neka su  $a = (a_1, \dots, a_n)$  i  $w = (w_1, \dots, w_n)$   $n$ -torke pozitivnih realnih brojeva, te  $W_n = \sum_{i=1}^n w_i$ . Tada je*

i) *Aritmetička sredina brojeva  $a_1, \dots, a_n$  s težinama  $w_1, \dots, w_n$  definirana izrazom*

$$A_n(a; w) := \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_n a_n}{W_n};$$

ii) *Geometrijska sredina brojeva  $a_1, \dots, a_n$  s težinama  $w_1, \dots, w_n$  definirana izrazom*

$$G_n(a; w) := (a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdot \dots \cdot a_n^{w_n})^{\frac{1}{W_n}}.$$

Ove sredine se često koriste u numeričkoj analizi i ostalim područjima matematike. Jednostavna poveznica između njih dana je u sljedećem teoremu.

**Teorem 3.1 (AG nejednakost).** *Neka su  $a = (a_1, \dots, a_n)$  i  $w = (w_1, \dots, w_n)$   $n$ -torke pozitivnih realnih brojeva, te  $W_n = \sum_{i=1}^n w_i$ . Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$G_n(a; w) \leq A_n(a; w).$$

**Napomena 3.1.** *Postoji nekoliko vrsta dokaza prethodnog teorema. Jedan od mogućih pristupa je korištenjem matematičke indukcije. Ovaj se dokaz u literaturi može pronaći kao Cauchyjev dokaz AG nejednakosti. Najelegantnijim dokazom se ipak smatra dokaz pomoću Jensenove nejednakosti (više o njoj može se pronaći u [4, str. 43-45]).*

Sljedeća tvrdnja koju ćemo ovdje iskazati je jedna od najvažnijih matematičkih nejednakosti u matematici i statistici. Više o njoj zainteresirani mogu pronaći u [11, str. 43-63].

**Teorem 3.2 (Jensenova<sup>||</sup> integralna nejednakost).** *Neka je  $f$  integrabilna funkcija definirana na  $[a, b]$  te neka je  $\psi$  (ne nužno) neprekidna konveksna funkcija definirana na  $[m, M]$  gdje je  $m = \inf f$  i  $M = \sup f$ . Tada vrijedi*

$$\psi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \psi(f(x)) dx. \quad (3.1)$$

Konačno, oznaka  $L^p[a, b]$  za  $1 \leq p < \infty$  predstavljat će nam prostor svih funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  takvih da je  $|f|^p$  R-integrabilna funkcija, tj. takvih da  $p$ -norma tih funkcija zadovoljava

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

---

<sup>||</sup>Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925), danski matematičar.

## 4 Hermite-Hadamardova integralna nejednakost

Nakon što smo predstavili važne karakteristike konveksnosti, možemo iskazati jednu od najpoznatijih nejednakosti u matematici za konveksne funkcije. Prije nego što ju iskažemo, valja se prisjetiti računanja određenih integrala, pa navedimo dobro poznatu formulu.

**Teorem 4.1 (Newton<sup>\*\*</sup>-Leibnizova<sup>††</sup> formula).** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna na  $[a, b]$  i neka je  $F$  primitivna funkcija od  $f$ . Tada vrijedi Newton-Leibnizova formula*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Teorem 4.2 (Hermite-Hadamardova nejednakost).** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija na  $[a, b]$ . Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (4.1)$$

*Dokaz.* Zbog konveksnosti funkcije  $f$  na  $[a, b]$ , vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

za svako  $t \in [0, 1]$ . Integriramo li tu nejednakost po varijabli  $t$  na  $[0, 1]$ , slijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \leq f(a) \int_0^1 tdt + f(b) \int_0^1 (1-t)dt.$$

Zbog

$$\int_0^1 tdt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 (1-t)dt = \left. \left( t - \frac{t^2}{2} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

vrijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Uvedimo supstituciju  $x = ta + (1-t)b$  i uočimo da vrijedi sljedeće

$$t = \frac{x-b}{a-b} \Rightarrow dt = \frac{dx}{a-b};$$

$$t = 0 \Rightarrow x = b;$$

$$t = 1 \Rightarrow x = a.$$

Odatle dobivamo

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

---

<sup>\*\*</sup>Isaac Newton (1642-1717), engleski fizičar, matematičar i astronom.

<sup>††</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat.

Time smo pokazali kako je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad (4.2)$$

što je zapravo drugi dio nejednakosti (4.1). Zbog konveksnosti funkcije  $f$  slijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] &\geq f\left[\frac{ta + (1-t)b + (1-t)a + tb}{2}\right] \\ &= f\left[\frac{ta + b - tb + a - ta + tb}{2}\right] \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Integriramo li tu nejednakost po varijabli  $t$  na  $[0, 1]$ , dobivamo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb) dt \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

To dokazuje prvi dio nejednakosti (4.1). Sada iz (4.2) i (4.3) slijedi tražena nejednakost (4.1), čime je i dokazan teorem. □

Ono što prethodni teorem zapravo predstavlja jest procjena srednje vrijednosti konveksne funkcije u odnosu na gornju i donju među. Klasične nejednakosti tog teorema poboljšane su i generalizirane na mnogo načina. Sljedeći rezultat predstavlja generalizaciju prvog dijela Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti (više o tome može se pronaći u [7]).

**Teorem 4.3.** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , konveksna funkcija na  $I$  i  $a, b \in \text{Int } I$  takvi da je  $a < b$ . Tada za svako  $t \in [a, b]$  i  $\lambda \in [f'_-, f'_+]$  vrijedi nejednakost*

$$f(t) + \lambda \left( \frac{a+b}{2} - t \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.4)$$

*Dokaz.* Neka je  $t \in [a, b]$ . Za svako  $\lambda \in [f'_-, f'_+]$  vrijedi sljedeća nejednakost (dokaz ove tvrdnje nalazi se u [11, str. 5])

$$f(x) - f(t) \geq \lambda(x - t),$$

za svaki  $x \in [a, b]$ . Integriramo li ovu nejednakost na  $[a, b]$  po varijabli  $x$  dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(t) dx &\geq \int_a^b \lambda(x - t) dx \\ \int_a^b f(x) dx - f(t) \cdot x|_a^b &\geq \lambda \left( \frac{x^2}{2} - t \cdot x \right) \Big|_a^b \\ \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(t) &\geq \lambda(b-a) \left( \frac{a+b}{2} - t \right) \\ \int_a^b f(x) dx &\geq (b-a)f(t) + \lambda(b-a) \left( \frac{a+b}{2} - t \right). \end{aligned}$$

Pomnožimo li prethodnu nejednakosti s  $\frac{1}{b-a} > 0$ , slijedi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \geq f(t) + \lambda \left( \frac{a+b}{2} - t \right)$$

što dokazuje tvrdnju (4.4). □

**Napomena 4.1.** Iz prethodnog teorema za  $t = \frac{a+b}{2}$  dobivamo prvi dio Hermite-Hadamardove nejednakosti (4.1).

Uz pretpostavku da je funkcija  $f$  diferencijabilna na  $(a, b)$ , istaknimo još jednu ocjenu aritmetičke integralne sredine te funkcije.

**Teorem 4.4.** Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , konveksna funkcija na  $I$  i  $a, b \in \text{Int } I$  takvi da je  $a < b$ . Tada za svako  $t \in [a, b]$  vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bf(b) - af(a) - t(f(b) - f(a))}{b-a}. \quad (4.5)$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je funkcija  $f$  diferencijabilna na  $(a, b)$ . Stoga možemo napisati nejednakost

$$f(t) - f(x) \geq (t-x)f'(x),$$

za sve  $t, x \in (a, b)$ . Integriramo li tu nejednakost po  $x$  na  $[a, b]$  dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t)dx - f(x))dx &\geq \int_a^b (t - xf'(x))dx \\ \int_a^b f(t)dx - \int_a^b f(x)dx &\geq \int_a^b tdx - \int_a^b xf'(x)dx \\ f(t) \cdot x|_a^b - \int_a^b f(x)dx &\geq t \cdot x|_a^b - \int_a^b xf'(x)dx \\ (b-a)f(t) - \int_a^b f(x)dx &\geq t(f(b) - f(a)) - \int_a^b xf'(x)dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Parcijalnom integracijom dobije se

$$\begin{aligned} \int_a^b xf'(x)dx &= xf(x)|_a^b - \int_a^b f(x)dx \\ &= bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Sada iz nejednakosti (4.6) slijedi

$$(b-a)f(t) - t(f(b) - f(a)) + bf(b) - af(a) \geq 2 \int_a^b f(x)dx,$$

što je ekvivalentno sa traženom nejednakošću (4.5). □

Kao primjedbu iskazat ćemo činjenicu koja je posljedica prethodnog teorema, no zbog složenosti dokaz ne navodimo.

**Napomena 4.2.** *Uz prethodne pretpostavke i uvjet  $0 \leq a < b$ , vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \min \{M(a, b), N(a, b), O(a, b)\}, \quad (4.7)$$

gdje su

$$\begin{aligned} M(a, b) &:= \frac{1}{2} \left[ f \left( \frac{2ab}{a+b} \right) + \frac{bf(b) + af(a)}{b+a} \right]; \\ N(a, b) &:= \frac{1}{2} \left[ f \left( \sqrt{ab} \right) + \frac{\sqrt{b}f(b) + \sqrt{a}f(a)}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \right]; \\ O(a, b) &:= \frac{1}{2} \left[ f \left( \frac{a+b}{2} \right) + \frac{f(b) + f(a)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Dokaz nejednakost (4.7) za  $O(a, b)$  napravio je Bullen 1978. godine i može se pronaći u [11, str. 140], a dokaz iste nejednakosti za  $N(a, b)$  objavio je Sándor 1988. godine u [12]. Jedan od najvažnijih rezultata daje nam profinjenje drugog dijela Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti, a izrečen je sljedećim teoremom.

**Teorem 4.5.** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , konveksna funkcija,  $a, b \in \text{Int } I$  takvi da je  $a < b$  i  $x_i \in [a, b]$ ,  $w_i \geq 0$ , te  $W_n := \sum_{i=1}^n w_i > 0$ . Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx &\leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \frac{1}{b-a} [(b-\Phi)f(b) + (\Phi-a)f(a)] \right\} \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdje je

$$\Phi = \frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^n w_i x_i.$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je funkcija  $f$  diferencijabilna na  $(a, b)$ . Za svaki  $x, y \in (a, b)$  vrijedi

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x).$$

Dodatno je

$$f(x_i) - f(x) \geq f'(x)(x_i - x),$$

za sve  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Integriramo li prethodnu nejednakost po  $x$  na  $[a, b]$  dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x_i)dx - \int_a^b f(x)dx &\geq \int_a^b x_i f'(x)dx - \int_a^b x f'(x)dx \\ (b-a)f(x_i) - \int_a^b f(x)dx &\geq x_i(f(b) - f(a)) - \int_a^b x f'(x)dx. \end{aligned}$$

Iskoristimo li već dokazani indetet

$$\int_a^b x f'(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx,$$

onda je

$$(b-a)f(x_i) - \int_a^b f(x)dx \geq x_i(f(b) - f(a)) - (bf(b) - af(a)) + \int_a^b f(x)dx.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx &\leq f(x_i) - \frac{x_i}{b-a}(f(b) - f(a)) + \frac{1}{b-a}(bf(b) - af(a)) \\ &= f(x_i) - \frac{x_i(f(b) - f(a))}{b-a} + \frac{bf(b) - af(a)}{b-a} \\ &= f(x_i) + \frac{(b-x_i)f(b) + (x_i-a)f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

Preostaje nam pomnožiti prethodnu nejednakost sa  $w_i \geq 0$  i sumirati po  $i$  od 1 do  $n$ . Time smo pokazali da je

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \frac{1}{b-a} [(b-\Phi)f(b) + (\Phi-a)f(a)],$$

što je upravo prvi dio nejednakosti (4.8). Kako bismo pokazali ostatak teorema uvedimo sljedeće supstitucije

$$\lambda = \frac{b-x_i}{b-a} \quad \text{i} \quad \mu = \frac{x_i-a}{b-a},$$

gdje je  $x_i \in [a, b]$ , za  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pretpostavili smo da je funkcija  $f$  konveksna i očito je  $\lambda + \mu = 1$ . Zbog toga prema (2.1) vrijedi

$$\frac{b-x_i}{b-a} f(a) + \frac{x_i-a}{b-a} f(b) \geq f(x_i),$$

za sve  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Analognim množenjem i sumacijom kao u prvom dijelu dokaza, slijedi

$$\frac{1}{b-a} [(b-\Phi)f(a) + (\Phi-a)f(b)] \geq \frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^n w_i f(x_i). \quad (4.9)$$

Nadalje, dodamo li toj nejednakosti sa obje strane

$$\frac{1}{b-a} [(b-\Phi)f(b) + (\Phi-a)f(a)],$$

dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \frac{1}{b-a} [(b-\Phi)f(b) + (\Phi-a)f(a)] \\ &\leq \frac{1}{b-a} [(b-\Phi)f(a) + (\Phi-a)f(b) + (b-\Phi)f(b) + (\Phi-a)f(a)] \\ &= \frac{1}{b-a} [bf(a) - \Phi f(a) + \Phi f(b) - af(b) + bf(b) - \Phi f(b) + \Phi f(a) - af(a)] \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Time je nejednakost (4.8) u potpunosti dokazana. □



Nejednakost (4.9) u literaturi pronalazimo pod nazivom Lah-Ribarićeva nejednakost (više o ovoj nejednakosti zainteresirani mogu pronaći u [9, str. 9]). Izravna posljedica Teorema 4.5 izrečena je sljedećim korolarom.

**Korolar 4.1.** *Neka vrijede pretpostavke Teorema 4.5 i neka je  $t \in [a, b]$ . Za  $x_i = t$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bf(b) - af(a) - t(f(b) - f(a))}{b - a} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Više ocjena Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti za konveksne funkcije može se pronaći u [5].

## 4.1 H.-H. nejednakost za log-konveksne funkcije

Povezali smo log-konveksne funkcije s konveksnim funkcijama. Stoga je prirodno pokušati proširiti Hermite-Hadamardovu integralnu nejednakost na ovu klasu funkcija. O tome upravo govori glavni rezultat ovoga poglavlja, a vezan je uz ocjenu prvog dijela H.-H. nejednakosti.

**Teorem 4.6.** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , gdje je  $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ , log-konveksna funkcija na  $I$ . Ako su  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$ , tada vrijede sljedeće nejednakosti*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq e^{\frac{1}{b-a}} \int_a^b \ln f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x)) dx \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &\leq L(f(a), f(b)), \end{aligned} \tag{4.10}$$

gdje je  $G(a, b)$  geometrijska sredina i  $L(a, b)$  logaritamska sredina brojeva  $a$  i  $b$  definirana izrazom

$$L(a, b) := \begin{cases} \frac{b-a}{\ln b - \ln a}, & a \neq b \\ a, & a = b \end{cases}.$$

*Dokaz.* Iskoristimo li Hermite-Hadamardovu nejednakost (4.1) za konveksnu funkciju  $\ln f$  dobivamo sljedeću nejednakost

$$\ln f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx,$$

iz koje očitó slijedi prvi dio nejednakosti (4.10). Integracijom jednakosti

$$G(f(x), f(a+b-x)) = e^{\ln(G(f(x), f(a+b-x)))}$$

na intervalu  $[a, b]$  i primjenom Jensenove integralne nejednakosti (3.1) za eksponencijalnu funkciju, slijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x)) dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{\ln(G(f(x), f(a+b-x)))} dx \\ &\geq e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln[G(f(x), f(a+b-x))] dx} \\ &= e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{\ln f(x) + \ln f(a+b-x)}{2}\right) dx} \\ &= e^{\frac{1}{2(b-a)} \left(\int_a^b \ln f(x) dx + \int_a^b \ln f(a+b-x) dx\right)}. \end{aligned}$$

Lako se pokaže identitet

$$\int_a^b \ln f(a+b-x) dx = \int_a^b \ln f(x) dx,$$

pa je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x)) dx \geq e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx}.$$

Prema već dokazanom prvom dijelu nejednakosti (4.10), vidimo da vrijedi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x)) dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Dakle, i druga nejednakost u (4.10) je dokazana. Prema AG nejednakosti je

$$G(f(x), f(a+b-x)) \leq \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2},$$

za sve  $x \in [a, b]$ . Nadalje, neka je  $F$  primitivna funkcija od  $f$ . Vrijedi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(a+b-x) dx = \frac{-F(a+b-x)}{b-a} \Big|_a^b = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

pa je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x)) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

To dokazuje treću nejednakost u (4.10). Kako bismo pokazali posljednju nejednakost, iskoristit ćemo definiciju log-konveksnosti funkcije  $f$ . Integriramo li (2.2) uz supstituciju  $x = a$  i  $y = b$  po  $t$ , dobivamo

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \leq \int_0^1 [f(a)]^t [f(b)]^{1-t} dt.$$

Sada kako je

$$\int_a^b f(ta + (1-t)b) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

i

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(a)]^t [f(b)]^{1-t} dt &= f(b) \int_0^1 \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t dt \\ &= f(b) \left[ \frac{\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t}{\ln\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)} \right]_0^1 \\ &= f(b) \left[ \frac{\frac{f(a)}{f(b)} - 1}{\ln\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)} \right] \\ &= L(f(a), f(b)), \end{aligned}$$

tvrdnja je dokazana. □

Prethodni teorem i njegov dokaz mogu se naći u [4, str. 71-73]. Autori Dragomir i Mond dokazali su više ocjena H.-H. integralne nejednakosti za log-konveksne funkcije u [6].

## 4.2 H.-H. nejednakost za Godnova-Levin klase funkcija

Kao što smo već spomenuli, sve nenegativne konveksne funkcije pripadaju Godnova-Levin klasi funkcija. Ta činjenica nam govori kako ima smisla tražiti ocjene Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti za takve funkcije. Istaknut ćemo dva važnija rezultata, a prvi od njih dan je u sljedećem teoremu.

**Teorem 4.7.** *Neka je  $f \in Q(I)$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$  i  $f \in L^1[a, b]$ . Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{4}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \quad (4.11)$$

Konstanta 4 u (4.11) je najbolji mogući izbor.

*Dokaz.* Kako je  $f \in Q(I)$ , za sve  $x, y \in I$  (uz  $\lambda = \frac{1}{2}$  u nejednakosti (2.3)) vrijedi

$$2(f(x) + f(y)) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Supstituiramo li

$$x = ta + (1-t)b$$

i

$$y = (1-t)a + tb,$$

dobivamo

$$\begin{aligned} 2(f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)) &\geq f\left(\frac{ta + (1-t)b + (1-t)a + tb}{2}\right) \\ &\geq f\left(\frac{ta + b - tb + a - ta + tb}{2}\right) \\ &\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nadalje, integriramo li (4.12) po  $t \in [0, 1]$ , slijedi

$$2 \left[ \int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt \right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Lako se pokaže da vrijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

pa dobivamo traženu nejednakost (4.11). Pokažimo sada ostatak teorema. U tu svrhu definirajmo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ 4, & x = \frac{a+b}{2} \\ 1, & \frac{a+b}{2} < x \leq b. \end{cases}$$

Jednostavno se provjeri kako se za tu funkciju u (4.11) postiže jednakost. Dakle, 4 je zaista najbolja moguća konstanta.

□

Kako bi smo pokazali drugu, mnogo precizniju ocjenu H.-H. nejednakosti za ovu klasu funkcija, upoznajmo se najprije sa klasom  $P(I) \subset Q(I)$ .

**Definicija 4.1.** *Kažemo da funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , pripada klasi  $P(I)$  ako je nenegativna i zadovoljava sljedeće*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(x) + f(y), \quad (4.13)$$

za sve  $x, y \in I$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Valja uočiti da se klasa  $P(I)$  sastoji samo od nenegativnih funkcija koje zadovoljavaju

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\},$$

za sve  $x, y \in I$  i svako  $t \in [0, 1]$ .

**Teorem 4.8.** *Neka je  $f \in P(I)$ ,  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$  i  $f \in L^1[a, b]$ . Tada vrijede sljedeće nejednakosti*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq 2(f(a) + f(b)). \quad (4.14)$$

*Obje nejednakosti su najbolje moguće.*

*Dokaz.* Uvedemo li u nejednakost (4.13) sljedeće supstitucije varijabli

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b;$$

$$y = (1 - \lambda)a + \lambda b;$$

$$t = \frac{1}{2},$$

vidimo kako za svako  $\lambda \in [0, 1]$  vrijedi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(\lambda a + (1 - \lambda)b) + f((1 - \lambda)a + \lambda b).$$

Integracijom prethodne nejednakosti na  $[0, 1]$  dobivamo sljedeće

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 [f(\lambda a + (1 - \lambda)b) + f((1 - \lambda)a + \lambda b)]d\lambda.$$

Već smo rekli kako je

$$\int_0^1 f(\lambda a + (1 - \lambda)b)d\lambda = \int_0^1 f((1 - \lambda)a + \lambda b)d\lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

iz čega slijedi prvi dio tražene nejednakosti (4.14). Uočimo kako se ovdje jednakost postiže za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ 1, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b. \end{cases}$$

Kako bismo dokazali drugi dio nejednakosti (4.14) također ćemo iskoristiti nejednakost (4.13), ali uz zamjenu  $x = a$  i  $y = b$ . Sada je

$$f(ta + (1 - t)b) \leq f(a) + f(b).$$

Integriramo li tu nejednakost po  $t$  na  $[0, 1]$ , dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt &\leq \int_0^1 f(a)dt + \int_0^1 f(b)dt \\ &\leq f(a) + f(b).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(a) + f(b),$$

što je drugi dio nejednakosti (4.14). Slučaj jednakost vrijedi za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ 1, & a < x \leq b. \end{cases}$$

Prema tome, obje nejednakosti su najbolje moguće. Time je dokaz dovršen.

□

### 4.3 H.-H. nejednakost za kvazi-konveksne funkcije

Svaka konveksna funkcija je kvazi-konveksna, pa je logično pitati se možemo li Hermite-Hadamardovu integralnu nejednakost primjeniti na klasu kvazi-konveksnih funkcija. O tome govori glavni rezultat ovoga poglavlja. On ocjenjuje prvi dio H.-H. nejednakosti, te je iskazan u sljedećem teoremu.

**Teorem 4.9.** *Neka su  $a, b \in I$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , takvi da je  $a < b$ . Ako je  $f \in JQC(I) \cap L^1[a, b]$ , onda vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx + D(a, b), \quad (4.15)$$

gdje je

$$D(a, b) := \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx.$$

*Dokaz.* Kako je  $f$  J-kvazi-konveksna na  $I$ , prema Definiciji 2.6 za sve  $x, y \in I$  vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Iskoristit ćemo sljedeće

$$\max\{f(x), f(y)\} = \frac{f(x) + f(y) + |f(x) - f(y)|}{2}.$$

Prethodna tvrdnja se lako pokaže, jer u slučaju da je

$$\max\{f(x), f(y)\} = f(x)$$

dobivamo

$$\frac{f(x) + f(y) + |f(x) - f(y)|}{2} = \frac{f(x) + f(y) + f(x) - f(y)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Analogno se pokazuje za slučaj

$$\max\{f(x), f(y)\} = f(y).$$

Iz toga slijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y) + |f(x) - f(y)|}{2}.$$

Uz supstituciju

$$x = ta + (1-t)b \in I$$

i

$$y = (1-t)a + tb \in I,$$

za  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \\ &\quad + |f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)|]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Integriramo li nejednakost (4.16) po  $t$  na  $[0, 1]$  dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt \right] \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 |f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)|dt.$$

Kako znamo da vrijedi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt$$

i uz supstituciju

$$x = ta + (1-t)b,$$

slijedi

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |f(ta + (1-t)b) - f((1-t)a + tb)|dt \\ = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx.$$

Dakle,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx \\ \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx$$

i uz oznaku

$$D(a, b) := \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx$$

nejednakost (4.15) je dokazana. □

Konačno, iskazat ćemo ocjenu H.-H. nejednakosti za klasu Wright-kvazi-konveksnih funkcija.

**Teorem 4.10.** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , Wright-kvazi-konveksna funkcija na  $I$ . Neka su  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$  i  $f \in L^1[a, b]$ . Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \max\{f(a), f(b)\}. \quad (4.17)$$

*Dokaz.* Prema Definiciji 2.10 za svako  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$\frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

Najprije, integriramo ovu nejednakost po  $t$  na  $[0, 1]$ . Imamo

$$\int_0^1 \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)]dt \leq \int_0^1 \max\{f(a), f(b)\}dt.$$

Iskoristimo li identitet

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

dobivamo traženu nejednakost (4.17). □



## 4.4 H.-H. nejednakost za s-konveksne funkcije

Devedesetih godina prošloga stoljeća matematičari H. Hudzik i L. Maligranda poopćili su pojam konveksnosti uvodeći s-konveksne funkcije. U ovom poglavlju dokazat ćemo da i za s-konveksne funkcije vrijedi Hermite-Hadamardova integralna nejednakost. Također, proučit ćemo razne ocjene koje iz nje proizlaze.

### 4.4.1 Orliczove funkcije

U sljedećem teoremu dan je opći oblik prvog dijela Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti za s-konveksne funkcije u prvom smislu.

**Teorem 4.11.** *Neka je  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  s-konveksna funkcija u prvom smislu za  $s \in (0, 1)$ . Ako su  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$  takvi da je  $a < b$ , tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \quad (4.18)$$

*Dokaz.* Ako u (2.4) izaberemo  $\alpha = \beta = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$ , onda je  $\alpha^s + \beta^s = 1$ . Dakle, za sve  $x, y \in \mathbb{R}_0^+$  vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Stavimo li u gornju nejednakost

$$x = ta + (1-t)b$$

i

$$y = (1-t)a + tb,$$

dobivamo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{ta + (1-t)b + (1-t)a + tb}{2^{\frac{1}{s}}}\right) &\leq \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \\ f\left(\frac{ta + b - tb + a - ta + tb}{2^{\frac{1}{s}}}\right) &\leq \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \\ f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) &\leq \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)], \end{aligned}$$

za svako  $t \in [0, 1]$ . Integriramo li gornju nejednakost po varijabli  $t$  slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) dt &\leq \int_0^1 \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)]dt \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt \right]. \end{aligned}$$

Znamo da vrijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

pa je

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

što je upravo tražena nejednakost (4.18). □

Sljedeći rezultat je vrlo sličan i predstavlja generalizirani oblik drugog dijela Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti.

**Teorem 4.12.** *Neka je  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$   $s$ -konveksna funkcija u prvom smislu za  $s \in (0, 1)$ . Ako su  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$  takvi da je  $a < b$ , tada vrijedi nejednakost*

$$\int_0^1 f\left(ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right) \vartheta(t) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (4.19)$$

gdje je

$$\vartheta(t) := \frac{1}{2} \left[ 1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1} \right], \quad t \in (0, 1]. \quad (4.20)$$

*Dokaz.* Iskoristimo Definiciju 2.7 za

$$\alpha = t \quad \text{i} \quad \beta = (1-t^s)^{\frac{1}{s}}, \quad t \in [0, 1].$$

Tada vrijedi

$$\alpha^s + \beta^s = 1$$

i

$$f\left(ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right) \leq t^s f(a) + (1-t^s) f(b),$$

za svako  $t \in [0, 1]$ . Na analogan način se za svako  $t \in [0, 1]$  dobije i

$$f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a + tb\right) \leq (1-t^s) f(a) + t^s f(b).$$

Zbrojimo li prethodne dvije nejednakosti i pomnožimo sve sa  $\frac{1}{2}$  dobivamo

$$\frac{1}{2} \left[ f\left(ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right) + f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a + tb\right) \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Integriramo li ovu nejednakost po  $t$  na  $[0, 1]$ , slijedi

$$\frac{1}{2} \left[ \int_0^1 f\left(ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right) dt + \int_0^1 f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a + tb\right) dt \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (4.21)$$

Uvedimo sljedeću oznaku

$$u := (1-t^s)^{\frac{1}{s}}, \quad t \in [0, 1].$$

Odatle je

$$t = (1-u^s)^{\frac{1}{s}}$$

i vrijedi

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{s} \cdot (1-u^s)^{\frac{1}{s}-1} \cdot (-su^{s-1}) du \\ &= -(1-u^s)^{\frac{1}{s}-1} u^{s-1} du, \end{aligned}$$

gdje je  $u \in (0, 1]$ . Nakon zamjene varijable  $t$  slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}a+tb\right) dt &= -\int_1^0 f\left(ua+\left(1-u^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\left(1-u^s\right)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1} du \\ &= \int_0^1 f\left(ua+\left(1-u^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\left(1-u^s\right)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1} du. \end{aligned}$$

Neka je sada  $t \in (0, 1]$ . Iskoristimo li nejednakost (4.21) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right) dt + \int_0^1 f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1} dt \right] \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[1+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right] \cdot f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right) dt \\ \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Uz oznaku

$$\vartheta(t):=\frac{1}{2}\left[1+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right],$$

smo pokazali da vrijedi (4.19), čime je i dokazan teorem. □

Navest ćemo nekoliko posljedica prethodnih teorema čiji se dokazi u cijelosti mogu pronaći u [4, str. 90-93].

**Korolar 4.2.** *Uz pretpostavke Teorema 4.11, vrijede sljedeće nejednakosti*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) &\leq \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}\right]\right) dt \\ &\leq \int_0^1 f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\vartheta(t) dt, \end{aligned}$$

gdje je  $\vartheta$  definiran sa (4.20).

**Korolar 4.3.** *Neka je  $f:\mathbb{R}_0^+\rightarrow\mathbb{R}$   $s$ -konveksna funkcija u prvom smislu za  $s\in(0,1)$ . Ako su  $a,b\in\mathbb{R}_0^+$  takvi da je  $a<b$ , onda vrijedi sljedeće*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right) &\leq \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t^{\frac{1}{s}}+\left(1-t\right)^{\frac{1}{s}}\right]\right) dt \\ &\leq \int_0^1 f\left(at^{\frac{1}{s}}+b\left(1-t\right)^{\frac{1}{s}}\right) dt \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Konačno, sljedeći rezultat predstavlja gornju granicu za integralnu sredinu  $s$ -konveksne funkcije u prvom smislu.

**Teorem 4.13.** *Neka je  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$   $s$ -konveksna funkcija u prvom smislu za  $s \in (0, 1)$ . Ako je integral*

$$\int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x) dx$$

*konačan i  $0 < a < b$ , tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{s}{1-s} \left[ a^{\frac{2s}{1-s}} + b^{\frac{2s}{1-s}} \right] \int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x) dx. \quad (4.22)$$

*Dokaz.* Zbog  $s$ -konveksnosti funkcije  $f$  na  $\mathbb{R}_0^+$ , vrijedi

$$f\left(t^{\frac{1}{s}}v + (1-t)^{\frac{1}{s}}w\right) \leq tf(v) + (1-t)f(w),$$

za svako  $t \in [0, 1]$  i  $v, w \geq 0$ . Uvedimo sljedeće supstitucije

$$v = t^{1-\frac{1}{s}}a, \quad t \in (0, 1]$$

i

$$w = (1-t)^{1-\frac{1}{s}}b, \quad t \in [0, 1).$$

Tada iz prethodne nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} f\left(t^{\frac{1}{s}} \cdot t^{1-\frac{1}{s}}a + (1-t)^{\frac{1}{s}} \cdot (1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right) &\leq tf(t^{1-\frac{1}{s}}a) + (1-t)f((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b) \\ f\left(t^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{s}}a + (1-t)^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{s}}b\right) &\leq tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right) + (1-t)f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right) \\ f\left(ta + (1-t)b\right) &\leq tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right) + (1-t)f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

za svako  $t \in (0, 1)$ . Integracijom nejednakosti (4.23) po  $t$  dobivamo

$$\int_0^1 f\left(ta + (1-t)b\right) dt \leq \int_0^1 tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right) dt + \int_0^1 (1-t)f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right) dt.$$

Iskoristimo li identitet koji smo prethodno spomenuli

$$\int_0^1 f\left(ta + (1-t)b\right) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

slijedi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \int_0^1 tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right) dt + \int_0^1 (1-t)f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right) dt.$$

Pokažimo sada kako je integral

$$\int_0^1 tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right) dt \quad (I_1)$$

konačan. U tu svrhu neka je

$$x = t^{1-\frac{1}{s}}a, \quad t \in (0, 1].$$

Tada je

$$t = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{s}}} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{s}{s-1}} = \frac{x^{\frac{s}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}}$$

i

$$dt = \frac{s}{s-1} \cdot \frac{x^{\frac{s}{s-1}-1}}{a^{\frac{s}{s-1}}} dx = \frac{s}{s-1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}} dx.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int_0^1 t f\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right) dt &= - \int_{\infty}^a \left[ \frac{x^{\frac{s}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}} \cdot \frac{s}{s-1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}} f(x) \right] dx \\ &= \frac{s}{1-s} \cdot a^{\frac{2s}{1-s}} \int_a^{\infty} x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x) dx < \infty. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Prema tome, integral  $(I_1)$  je konačan. Na analogan način se dobije i

$$\int_0^1 (1-t) f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right) dt = \frac{s}{1-s} \cdot b^{\frac{2s}{1-s}} \int_a^{\infty} x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x) dx < \infty. \quad (4.25)$$

Sada iz (4.24) i (4.25), slijedi tražena nejednakost (4.22).

□

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [4, str. 92-93].

#### 4.4.2 Brecknerove funkcije

U prethodnom smo poglavlju razmatrali ocjene Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti za  $s$ -konveksne funkcije u prvom smislu. Sada ćemo to isto učiniti za  $s$ -konveksne funkcije u drugom smislu. Ovaj rezultat, kao i brojne druge, objavili su autori Hudzik i Maligranda u [8].

**Teorem 4.14.** *Neka je  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$   $s$ -konveksna funkcija u drugom smislu,  $s \in (0, 1)$  i  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$  takvi da je  $a < b$ . Ako je  $f \in L^1[a, b]$ , tada vrijedi*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}. \quad (4.26)$$

*Dokaz.* Prema Definiciji 2.8 za svako  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b).$$

Integriramo li ovu nejednakost na  $[0, 1]$ , dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt &\leq f(a) \int_0^1 t^s dt + f(b) \int_0^1 (1-t)^s dt \\ &= f(a) \cdot \left( \frac{t^{s+1}}{s+1} \right) \Big|_0^1 + f(b) \cdot \left( -\frac{(1-t)^{s+1}}{s+1} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{s+1}. \end{aligned}$$

Otprije znamo kako za

$$x = ta + (1-t)b$$

vrijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Time je drugi dio nejednakosti (4.26) dokazan. Kako bi smo dokazali prvu nejednakost u (4.26), uočimo da za sve  $x, y \in I$  vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2^s}.$$

Sada za

$$x = ta + (1-t)b$$

i

$$y = (1-t)a + tb,$$

gdje je  $t \in [0, 1]$ , dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)}{2^s}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Integracijom prethodne nejednakosti po  $t$  na  $[0, 1]$  slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt &\leq \frac{1}{2^s} \left[ \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb) dt \right] \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2^{s-1}} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Dakle, nejednakost (4.26) je u potpunosti dokazana. □

## 5 Primjene H.-H. nejednakosti

U ovome poglavlju ćemo pokazati kako se razne algebarske nejednakosti mogu uspješno pokazati primjenom Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti, ukoliko se stvore uvjeti za tu primjenu. To ćemo demonstrirati na nekoliko primjera koji se mogu pronaći u [10].

**Primjer 5.1.** Za funkciju  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  zadanu s

$$f(x) := \frac{1}{1+x},$$

vrijedi

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}.$$

Kako bismo to pokazali uočimo da je funkcija  $f$  konveksna zbog

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)^2} > 0.$$

Neka je

$$a = 0 \quad i \quad b = x.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= x \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = x - \frac{x^2}{2+x}; \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x); \\ (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} &= x \cdot \frac{1+\frac{1}{1+x}}{2} \\ &= \frac{x}{2} \left[ 1 + \frac{1}{1+x} \right] \\ &= x - \frac{x^2}{2(1+x)}, \end{aligned}$$

pa zbog Hermite-Hadamardove nejednakosti (4.1) slijedi tražena nejednakost.

**Napomena 5.1.** Prethodni primjer implicira općenitiju nejednakost. Za svaki pozitivan prirodan broj  $n$  vrijedi

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right).$$

Kako bismo to pokazali dovoljno je iskoristiti Hermite-Hadamardovu nejednakost (4.1) za konveksnu funkciju  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ , na intervalu  $[n, n+1]$ , gdje je  $n > 0$ . Važnost te nejednakosti je u tome što se primjenjuje u dokazu Stirlingove<sup>‡‡</sup> formule

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n}.$$

---

<sup>‡‡</sup>James Stirling (1692-1770), škotski matematičar.

Sljedeći primjer je dokaz odnosa između geometrijske, logaritamske i aritmetičke sredine brojeva. Više o njihovim odnosima može se pronaći u [2].

**Primjer 5.2.** Za eksponencijalnu funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$f(x) := e^x$$

vrijedi

$$e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^b - e^a}{b - a} < \frac{e^a + e^b}{2}$$

za  $a, b \in \mathbb{R}$  takve da je  $a \neq b$ . Iz Hermite-Hadamardove nejednakosti (4.1) uz zamjenu

$$a = \ln x \quad i \quad b = \ln y,$$

vrijedi

$$\sqrt{xy} = e^{\ln \sqrt{xy}} = e^{\frac{\ln x + \ln y}{2}} < \frac{x - y}{\ln x - \ln y} < \frac{x + y}{2},$$

za  $x, y \in \mathbb{R}^+$  takve da je  $x \neq y$ .

Hermite-Hadamardova integralna nejednakosti primjenjuje se i u Choquetovoj<sup>⊕</sup> teoriji, o kojoj se detaljnije može pročitati u [10].

## 5.1 Kvadraturene formule

Prirodno je razmišljati o povezanosti Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti i različitih formula u matematici. Osobito su zanimljive kvadraturene formule za numeričku aproksimaciju konačnih integrala. Izdvojiti ćemo dvije važnije kvadraturene formule, te njih povezati sa H.-H. nejednakošću. U nastavku se koristi teorija Gaussovih<sup>◇</sup> kvadraturenih formula o kojoj se detaljno može pogledati u [3].

**Definicija 5.1.** Kažemo da je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  klase  $C^p([a, b], \mathbb{R})$ ,  $p > 1$ , ili  $p$ -puta neprekidno diferencijabilna onda i samo onda ako sve parcijalne derivacije do uključivo  $p$ -tog reda postoje i neprekidne su.

**Teorem 5.1 (Trapezna formula).** Za funkciju  $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  vrijedi sljedeća kvadraturena formula

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f''(x) \frac{(b-x)(x-a)}{2} dx.$$

*Dokaz.* Dva puta parcijalnom integracijom funkcije  $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  dobivamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[ f(x) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right] dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ x \left( f(x) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) x dx \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ b \cdot \frac{f(b) - f(a)}{2} + a \cdot \frac{f(b) - f(a)}{2} - \int_a^b f'(x) x dx \right] \end{aligned}$$

<sup>⊕</sup>Gustave Choquet (1915-2006), francuski matematičar.

<sup>◇</sup>Carl Friedrich Gauss (1777-1855), njemački matematičar.



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{b-a} \left[ \int_a^b f'(x) \left( \frac{a+b}{2} - x \right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{b-a} \left[ f'(x) \left( x \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_a^b - \int_a^b f''(x) \left( x \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{b-a} \left[ f'(b) \frac{ab}{2} - f'(a) \frac{ab}{2} - \int_a^b f''(x) \left( x \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{b-a} \left[ \int_a^b f''(x) \left( \frac{ab}{2} - x \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}x^2 \right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f''(x) \frac{(b-x)(x-a)}{2} dx.
 \end{aligned}$$

□

**Napomena 5.2.** U slučaju da je  $f'' \geq 0$ , tada prethodna kvadraturna formula predstavlja drugi dio Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti (4.1).

Drugi primjer kvadrature formule dan je sljedećim teoremom.

**Teorem 5.2.** Za funkciju  $f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$  vrijedi

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{8} \left[ f(a) + 3f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 3f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{(iv)}(x) \theta(x) dx,
 \end{aligned}$$

gdje je  $\theta$  po dijelovima nenegativna funkcija takva da je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \theta(x) dx = \frac{(b-a)^4}{6480}.$$

Prethodna kvadraturna formula daje precizniju ocjenu drugog dijela Hermite-Hadamardove nejednakosti. Detaljnije o njezinim ocjenama i samoj kvadraturnoj formuli može se pronaći u [10].

**Korolar 5.1.** Za funkciju  $f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$ , uz uvjet da je  $f^{(iv)} \geq 0$ , vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{8} \left[ f(a) + 3f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 3f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Matematičari M. Bessenyei i Z.Páles su u [1] uspješno proširili Hermite-Hadamardovu integralnu nejednakost za konveksne funkcije višeg reda.

## Literatura

- [1] M. Bessenyei, Z. Páles, *Higher order generalizations of Hadamard's inequality*, Publ. Math., Debrecen, 61 (2002), 623–643.
- [2] F. Burk, *The Geometric, Logarithmic and Arithmetic Mean Inequality*, Amer. Math. Month., 94 (1987), 527–528.
- [3] M. Cameron, *Gaussian quadrature*, University of Maryland. Javno dostupno na: <http://www2.math.umd.edu/mariakc/teaching/gaussian.pdf>.
- [4] P. Cerone, S. S. Dragomir, *Mathematical inequalities*, Taylor & Francis Group, New York, 2011.
- [5] S. S. Dragomir, *On Hadamard's inequality for convex functions*, Mat. Balkanica, 6 (1992), 219–222.
- [6] S. S. Dragomir, B. Mond, *Integral inequalities of Hadamard type for log-convex functions*, Demonstratio Math., 31(2) (1998), 354–364.
- [7] S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, Melbourne, Victoria, Australia, 2000. Javno dostupno na: <http://rgmia.org/papers/monographs/Master2.pdf>.
- [8] H. Hudzik, L. Maligranda, *Some remarks on  $s$ -convex functions*, Aequationes Mathematicae 48 (1994), 100–111.
- [9] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.
- [10] C. P. Niculescu, L.-E. Persson, *Old and new on the Hermite-Hadamard inequality*, Real Analysis Exchange, 29(2) (2003), 663–685.
- [11] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, London, 1992.
- [12] J. Sándor, *Some integral inequalities*, El. Math., 43 (1988), 177–180.
- [13] E. M. Wright, *An inequality for convex functions*, Amer. Math. Monthly, 61 (1954), 620–622.