Jakobsonov radikal

Bulajić, Ivana

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Bulajić

Jacobsonov radikal

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Bulajić

Jacobsonov radikal

Završni rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2017.

Sažetak: Cilj ovog završnog rada bio je definirati Jacobsonov radikal, kao jedan od primjera ideala te proučiti njegova svojstva i primjene. U prvom dijelu rada definirani su neki osnovni pojmovi, te svojstva radikala i Wedderburnov pristup. Nadalje, uvedeno je nekoliko definicija potrebnih za samo definiranje Jacobsonovog radikala. U drugom dijelu rada iskazane su neke od tvrdnji i njihovi dokazi, u kojima se proučava odnos između elemenata u prstenima i idealima te samim time navedena su neka od svojstava Jacobsonovog radikala. Zbog lakšeg razumijevanja iskazane tvrdnje su potkrijepljene primjerima.

Ključne riječi: prsteni (prosti, poluprosti, primitivni), ideali, kvaziregularni elementi, Jacobsonov radikal, anihilatori, moduli

Abstract: The aim of this final paper was to define Jacobson radical, as one of the ideal examples, and to study its properties and applications. In the first part of the paper some basic concepts, such as the radical properties were defined, and the Wedderburn's process of radicals was mentioned. Furthermore, several definitions were introduced before the definition of the Jacobson radical. In the second part of the paper, some of the statements and their proofs were presented, where the relationships between the elements in the rings and the ideals were studied, and thus some of the properties of the Jacobson radical were provided. For easier understanding of the statements, they were covered by examples.

Key words: rings (simple, semisimple, primitive), ideals, quasi-regular elements, Jacobson radical, annihilators, modules

Sadržaj

1 Uvod

Prsteni su jedna od osnovnih algebarskih struktura. Pojavljuju se u analizi, u algebri, u teoriji brojeva, u algebarskoj geometriji i u mnogim drugim granama matematike. U teoriji prstena centralno mjesto pripada idealima te ćemo se u ovom završnom radu bazirati na proučavanje jednog od primjera ideala proizvoljnog prstena koji se naziva Jacobsonov radikal.

Ispitivat ćemo odnose između prostih, primitivnih i poluprostih prstena te navesti neke od primjera. Kako bismo uopće mogli započeti rad na ovu temu moramo uvesti i poznavati neke od osnovnih pojmova, kao što su: prsten, ideal, primitivni prsten i ideal, prosti i poluprosti prsteni, maksimalni ideali, moduli, kvaziregularni elementi, anihilatori te brojne druge definicije i tvrdnje koje će nam biti potrebne kako bi došli do same definicije Jacobsonovog radikala.

2 Svojstva radikala

Neka je P svojstvo prstena. Ideal [prsten] I nazovimo P-ideal [P-prsten] ako I ima svojstvo P. Pretpostavimo da:

(i) slika homomorfizma P-prstena je P-prsten;

(ii) svaki prsten R (ili barem svaki prsten u nekoj određenoj klasi $\mathcal{C}$) sadrži P-ideal $P(R)$ (nazvan P-radikal od R) koji sadrži sve ostale P-ideale od R;

(iii) P-radikal kvocijentnog prstena $R/P(R)$ je nul-radikal;

(iv) P-radikal prstena $P(R)$ je $P(R)$.

Svojstvo P koje zadovoljava pretpostavke (i) - (iv) nazivamo **svojstvo radikala**.

P-radikal nam govori u kolikoj mjeri određeni prsten posjeduje "nepoželjna" svojstva P. Kada biramo P-radikal, tada želimo pronaći strukturne rezultate za "poželjne" prstene za koje je P-radikal nul-radikal. Takav prsten naziva se slobodni P-radikal ili P-poluprost prsten. U praksi smo obično više zabrinuti sa samim P-radikalom nego sa svojstvom P iz kojeg on proizlazi. Prema pretpostavci (iii) svaki prsten koji ima P-radikal ima P-poluprost kvocijentni prsten. Prilikom proučavanja P-poluprostih prstena P-radikal je veći što je više faktora odbačeno. Osnovni problem je pronaći radikal koji nam omogućava odbaciti što je manje moguće čimbenika, a da pri tome i dalje dobijemo dovoljno razumne strukturne rezultate.

Wedderburn je prvi uveo radikale u istraživanju konačnodimenzionalne algebre. Njegova su istraživanja kasnije proširena na (lijeve) Artinove prstene. Međutim, Wedderburnov radikal (poznat kao maksimalni nilpotentni ideal) i nastali izrazito jaki strukturni rezultati primjenjuju se samo na (lijeve) Artinove prstene. U narednim godinama uvedeni su brojni drugi radikali. Općenito govoreći, svaki od njih se podudarao s Wedderburnovim radikalom u slučaju lijevog Artinovog prstena, ali su također definirani i za ne-Artinove prstene. Stoga je cilj ovoga završnog rada proučiti jedan od radikala, Jacobsonov radikal.

3 Uvod u definiciju i definicija Jacobsonovog radikala

Prije samog uvođenja pojma Jacobsonovog radikala potrebno je iskazati nekoliko definicija.

Definicija 3.1 *Kažemo da je prsten R lijevi [desni] primitivni prsten ukoliko postoji pravi prosti lijevi [desni] R-modul.*

Definicija 3.2 *Ideal P prstena R je **lijevi [desni]** primitivni ideal ako je kvocijentni prsten R/P lijevi [desni] primitivni prsten.*

NAPOMENA: Kako nul-prsten nema prostih modula i zbog toga nije primitivan, zaključujemo da R sam po sebi nije lijevi (ili desni) primitivni ideal.

Definicija 3.3 *Element a prstena R naziva se lijevi kvaziregularni element ako postoji $r \in R$ takav da je $r + a + ra = 0$. Element r naziva se lijevi kvaziinverz od a. Ideal I prstena R (lijevi, desni ili obostrani) naziva se lijevi kvaziregularni ako je svaki element ideala I lijevi kvaziregularni ideal. Slično, $a \in R$ naziva se desni kvaziregularni element ako postoji $r \in R$ takav da je $a + r + ar = 0$. Desni kvaziinverzi i desni kvaziregularni ideali definiraju se na analogan način.*

NAPOMENA: Ponekad je praktično pisati $r \circ a$ umjesto $r + a + ra$. Ako R ima jedinicu, tada je a lijevi [desni] kvaziregularni element ako i samo ako $1_R + a$ je lijevo [desno] invertibilan.

Kako bi pojednostavili neke od sljedećih rezultata, koristit ćemo sljedeću tvrdnju: (*)Ako je klasa $\mathcal{C}$ podskupova prstena R koji zadovoljavaju dano svojstvo prazna, tada je $\bigcap_{I \in \mathcal{C}} I$ isto što i R.

Definicija 3.4 *Ako je R prsten, M R-modul i X podskup od M, tada anihilator od X u oznaci Ann(X), definiramo s $Ann(x) = \{a \in R : ax = 0 | x \in X\}$.*

Definicija 3.5 *Za element $a \in R$ kažemo da je regularan element, ukoliko postoji $ab \in R$ takav da je $a = a^2 b$. Kažemo da je ideal prstena R regularan, ukoliko sadrži regularan element a prstena R.*

Teorem 3.1 *Ako je R prsten, postoji ideal $J(R)$ od R takav da:*

(i) $J(R)$ je presjek svih lijevih anihilatora prostih lijevih R-modula;

(ii) $J(R)$ je presjek svih regularnih maksimalnih lijevih ideala prstena R;

(iii) $J(R)$ je presjek svih lijevih primitivnih ideala od R;

(iv) $J(R)$ je lijevi kvaziregularni lijevi ideal koji sadrži svaki lijevi kvaziregularni lijevi ideal prstena R;

(v) tvrdnje (i) - (iv) vrijedit će i u slučaju kada "lijevi" zamijenimo s "desni".

Ideal $J(R)$ naziva se **Jacobsonov radikal** prstena R. Povijesno gledano on je najprije definiran u terminima kvaziregularnosti, što se pokazalo kao ranije definirano svojstvo radikala. Kako je važnost uloge modula u proučavanju prstena postala jasnija, razvijeni su i drugi opisi ideala $J(R)$.

NAPOMENA: Prema Teoremu 3.1 (i) i ranije iskazanoj tvrdnji (označenoj s (*)), $J(R)$ je R ako R nema prostih lijevih R-modula (pa stoga nema ni anihilatora). Ako R ima jedinicu svaki ideal je regularan i maksimalni lijevi ideali uvijek postoje, odakle prema Teoremu 3.1 (ii) slijedi da je $J(R) \neq R$. Teorem 3.1 (iv) ne implicira da $J(R)$ sadrži svaki lijevi kvaziregularni element od R.

Kako bi dokazali Teorem 3.1 potrebno je najprije iskazati nekoliko pomoćnih lema. Leme će biti iskazane i dokazane za lijeve ideale. Međutim, svaka od iskazanih lema biti će valjana i u slučaju kada "lijevi" zamijenimo s "desni".

Lema 3.1 *Ako je I ($\neq R$) regularni lijevi ideal prstena R, tada je I sadržan u maksimalnom lijevom idealu koji je regularan.*

SKICA DOKAZA. Kako je I regularan, postoji $e \in R$ takav da je $r–re \in I$, za svaki $r \in R$. Prema tome svaki lijevi ideal J koji sadrži I također je regularan (s istim elementom $e \in R$). Ako je $I \subset J$ i $e \in J$, tada $r–re \in I \subset J$ implicira da je $r \in J$ za svaki $r \in R$, odakle slijedi da je $R = J$. Ova činjenica se koristi kako bi se potvrdilo da je Zornova lema primjenjiva na skup $\mathcal{S}$ svih lijevih ideala L takvih da je $I \subset L \subsetneqq R$, parcijalno uređen inkluzijom. Maksimalni element skupa $\mathcal{S}$ je regularni maksimalni lijevi ideal koji sadrži I. $\square$

Lema 3.2 *Neka je R prsten i K presjek svih regularnih maksimalnih lijevih ideala od R. Tada je K lijevi kvaziregularni lijevi ideal od R.*

DOKAZ. K je očito lijevi ideal. Ako je $a \in K$ neka je $T = \{r + ra | r \in R\}$. Ako je $T = R$, tada postoji $r \in R$ takav da je $r + ra = -a$. Dakle, $r + a + ra = 0$ i stoga je a kvaziregularan. Prema tome, dovoljno je pokazati da je $T = R$.

Provjerimo da je T regularan lijevi ideal od R (s $e = -a$). Ako je $T \neq R$, tada je T sadržan u regularnom maksimalnom lijevom idealu I_0 prema Lemi 3.1 (Stoga je $T \neq R$ nemoguće ako R ne sadrži regularne maksimalne lijeve ideale.). Budući da je $a \in K \subset I_0$, tada je $ra \in I_0$ za svaki $r \in R$. Kako bi vrijedilo $r + ra \in T \subset I_0$, mora vrijediti $r \in I_0$ za svaki $r \in R$. Iz toga slijedi da je $R = I_0$, što je u kontradikciji s činjenicom da je I_0 maksimalan ideal. Prema tome je $T = R$. $\square$

Lema 3.3 *Neka prsten R ima prosti lijevi R-modul. Ako je I lijevi kvaziregularni lijevi ideal od R, tada je I sadržan u presjeku svih lijevih anihilatora prostih lijevih R-modula.*

DOKAZ. Ako $I \not\subset \cap Q(A)$, pri čemu se u presjeku nalaze svi prosti lijevi R-moduli od A, tada $IB \neq 0$ za neke proste lijeve R-module od B, odakle je $Ib \neq 0$ ili za sve ili za neke elemente $b \in B$ koji su različiti od nula. Kako je I lijevi ideal, Ib je nenul submodul od B. Jednostavnije je $B = Ib$ pa stoga $ab = -b$ za neke $a \in I$. Budući da je I lijevi kvaziregularan ideal, postoji $r \in R$ takav da je $r + a + ra = 0$. Pema tome je

$0 = 0b = (r + a + ra)b = rb + ab + rab = rb - b - rb = -b$. Kako je ovaj zaključak u kontradikciji s pretpostavkom da je $b \neq 0$, mora vrijediti $I \cap \subset Q(A)$. $\square$

Lema 3.4 *Ideal P prstena R je lijevi primitivni ideal ako i samo ako je P lijevi anihilator prostog lijevog R-modula.*

DOKAZ. Ako je P lijevi primitivni ideal, neka je A pravi prost R/P-modul. Provjerimo da je A R-modul s elementom ra ($r \in R, a \in A$), koji je definiran tako da je $(r + P)a$. Tada $RA = (R/P)A \neq 0$ i svaki R-submodul od A je R/P-submodul od A, odakle je A prost R-modul. Ako je $r \in R$, tada $rA = 0$ ako i samo ako $(r + P)A = 0$. Ali $(r + P)A = 0$ ako i samo ako je $r \in P$, a A pravi R/P-modul. Prema tome je P lijevi anihilator prostog R-modula A.

Osim toga, pretpostavimo da je P lijevi anihilator prostog R-modula B. Provjerimo da je B prost R/P-modul s $(r + P)b = rb$ za $r \in R$, $b \in B$. Nadalje, ako je $(r + P)B = 0$, tada $rB = 0$, odakle je $r \in Q(B) = P$ i $r + P = 0$ u R/P. Zaključno, B je pravi R/P-modul. Prema tome je R/P lijevi primitivni prsten, odakle je P lijevi primitivni ideal od R. $\square$

Lema 3.5 *Neka je I lijevi ideal prstena R. Ako je I lijevi kvaziregularni ideal, tada je I i desni kvaziregularni ideal.*

DOKAZ. Ako je I lijevi kvaziregularni ideal i $a \in I$, tada postoji $r \in R$, takav da je $r \circ a = r + a + ra = 0$. Kako je $r = -a - ra \in I$, postoji $s \in R$, takav da je $s \circ r = s + r + sr = 0$, odakle slijedi s je desni kvaziregularni element. Jednostavno se vidi da je operacija $\circ$ asocijativna. Dakle,

$$a = 0 \circ a = (s \circ r) \circ a = s \circ (r \circ a) = s \circ 0 = s.$$

Iz toga slijedi da je a, a samim time i I, desni kvaziregularni. $\square$

DOKAZ TEOREMA 3.1. Neka je $J(R)$ presjek svih lijevih anihilatora prostih lijevih R-modula. Ako R nema prostih lijevih R-modula tada je $J(R) = R$ (što smo ranije označili s (*)). Može se vidjeti da je $J(R)$ ideal. Sada ćemo pokazati da tvrdnje (ii) - (iv) vrijede za sve lijeve ideale.

Najprije ćemo promotriti da R sam po sebi ne može biti anihilator prostog lijevog R-modula A (u suprotnom $RA = 0$). Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(a) $J(R) = R$;

(b) R nema prostih lijevih R-modula;

(c) R nema regularnih maksimalnih lijevih ideala;

(d) R nema primitivnih ideala.

Prema pretpostavci koju smo ranije označili s (*), (ii), (iii) i (iv) vrijede ako je $J(R) = R$.

(ii) Pretpostavimo da je $J(R) \neq R$ i neka je K presjek svih regularnih maksimalnih lijevih ideala od R. Tada $K \subset J(R)$. Isto tako pretpostavimo $c \in J(R)$. Može se vidjeti da je $J(R)$ presjek lijevih anihilatora kvocijenta R/I. Za svaki regularni maksimalni ideal I postoji $e \in R$ takav da je $c - ce \in I$. Kako je $c \in Q(R/I)$, $cr \in I$ za svaki $r \in R$; posebno $ce \in I$. Dakle, $c \in I$ za svaki regularni maksimalni ideal I. Stoga, $J(R) \subset \cap I = K$. Iz toga slijedi $J(R) = K$.

(iii) je neposredna posljedica Leme 3.4

(iv) $J(R)$ je prema (ii) i Lemi 3.2 lijevi kvaziregularni lijevi ideal. $J(R)$ prema Lemi 3.3 sadrži svaki lijevi kvaziregularni lijevi ideal.

Kako bi dovršili dokaz potrebno je pokazati da tvrdnje (i) - (iv) vrijede i u slučaju kada "lijevi" zamijenimo s "desni". Neka je $J_1(R)$ presjek svih desnih anihilatora svih prostih desnih R-modula. Tada dokaz vrijedi ako "lijevi" zamijenimo s "desni", pri čemu se pretpostavke (i) - (iv) odnose na ideal $J_1(R)$. Kako je prema (iv) i Lemi 3.5 $J(R)$ desni kvaziregularni ideal tada je prema (iv) $J(R) \subset J_1(R)$. Slično $J_1(R)$ je lijevi kvaziregularni ideal, odakle slijedi da je $J_1(R) \subset J(R)$. Prema tome, $J(R) = J_1(R)$. □

Primjer 1 *Neka je R lokalni prsten s jedinstvenim maksimalnim idealom M (koji sadrži sve elemente koji nisu u R). Potrebno je pokazati da je $J(R) = M$. Budući da R ima jedinicu, $J(R) \neq R$. Kako pravi ideal sadrži samo elemente koji nisu u R slijedi da je $J(R) \subset M$.*

U drugom slučaju, ako je $r \in M$, tada $1_R + r \notin M$ (u suprotnom $1_R \in M$). Dakle, $1_R + r$ je jedinica, iz čega slijedi da je r lijevi kvaziregularni element. Zbog toga je $M \subset J(R)$. Dakle, $J(R) = M$.

Navest ćemo dva specijalna slučaja:

Primjer 2 *Prsten reda potencija $F[[x]]$ nad poljem F je lokalni prsten s glavnim maksimalnim idealom (x). Prema tome $J(F[[x]]) = (x)$.*

Primjer 3 *Ako je p glavni ideal, tada $\mathbb{Z}_{p^n} (n \geq 2)$ je lokalni prsten sa glavnim maksimalnim idealom (p), koji je izomorfan kao Abelova grupa na $\mathbb{Z}_{p^{n-1}}$. Zbog toga je $J(\mathbb{Z}_{p^n}) = (p)$.*

Definicija 3.6 *Za prsten R kažemo da je (Jacobsonov) poluprost prsten ukoliko je njegov Jacobsonov radikal $J(R)$ nula. Ukoliko je $J(R) = R$, tada R nazivamo radikalni prsten.*

NAPOMENA: U ostatku ovog rada pod "radikal" ćemo uvijek podrazumijevati "Jacobsonov radikal", a kada kažemo"poluprost", uvijek ćemo misliti na "Jacobsonov poluprost".

Obično u literaturi koja se odnosi na teoriju prstena uvijek moramo paziti u kojem kontekstu se koriste pojmovi "poluprost" i "radikal" u određenim teoremima.

Brojne definicije radikala (i poluprostih prstena) zahtijevaju da prsten bude (lijevi) Artinov. To nije slučaj s Jacobsonovim radikalom, koji se definira za svaki prsten.

Primjer 4 *Prema Teoremu 3.1 (ii) svaki kvocijentni prsten u kojem je regularni maksimalni lijevi ideal nul-ideal mora biti poluprost.*

Primjer 5 *Svaki maksimalni ideal u* $\mathbb{Z}$ *je oblika* (p)*, gdje je* p *glavni ideal.*

Dakle, $J(\mathbb{Z}) = \cap_p(p) = 0$, odakle slijedi da je $\mathbb{Z}$ Jacobsonov poluprosti ideal.

Primjer 6 *Ako je* D *kvocijentni prsten, tada je prsten polinoma* $R = D[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ *poluprost. Ako je* $f \in J(R)$*, tada je* f *lijevi i desni kvaziregularni element prema Teoremu 3.1 (iv). Dakle,* $1_R + f = 1_D + f$ *je jedinica u* R*. Budući da su jedine jedinice u* R *nenul elementi u* D*, slijedi da je* $f \in D$*. Stoga je* $J(R)$ *ideal u* D*, sve dok je* $J(R) = 0$ *ili* $J(R) = D$*, što slijedi iz činjenice da je* D *prost. Budući da* -1_D *nije lijevi kvaziregularni element, tada* $-1_D \notin J(R)$*. Iz toga slijedi da je* $J(R) = 0$ *i* R *je poluprost.*

Teorem 3.2 *Neka je* R *prsten.*

(i) Ako je R *primitivan prsten, tada je* R *i poluprost;*

(ii) Ako je R *prost i poluprost, tada je* R *primitivan;*

(iii) Ako je R *prost, tada je* R *ili primitivni ili poluprost ili radikalan prsten.*

DOKAZ.(i) R ima pravi prost lijevi R-modul A, odakle slijedi $J(R) \subset Q(A) = 0$.
(ii) $R \neq 0$ zbog pretpostavke da je R prost. Tada mora postojati prost lijevi R-modul A (u suprotnom prema Teoremu 3.1 (i) $J(R) = R \neq 0$) što je u kontradikciji s pretpostavkom da je R poluprost). Lijevi anihilator $Q(A)$ je ideal od R i $Q(A) \neq R$ (ukoliko je $RA \neq 0$). Dakle, $Q(A) = 0$ (zbog pretpostavke da je A prost), ukoliko je A pravi prost R-modul. Slijedi da je R primitivan.
(iii) Ako je R prost, tada je ideal $J(R)$ ili R ili nul-ideal. U prvom slučaju R je radikalan prsten, a u drugom je poluprost ili primitivan (prema (ii)). $\square$

Primjer 7 *Prsten endomorfizma (lijevog) vektorskog prostora nad kvocijentnim prstenom je poluprost prema Teoremu 3.2 (i). Dakle, prema Teoremu o izomorfizmu prstena prsten svih* $n \times n$ *matrica nad kvocijentnim prstenom je poluprost.*

Klasičan Wedderburnov radikal (u lijevom Artinovom prstenu) je maksimalan nilpotentan ideal. Sada želimo istražiti vezu između tog radikala i Jacobsonovog radikala.

Definicija 3.7 *Kažemo da je element* a *prstena* R *nilpotentan ako je* $a^n = 0$*, za neke pozitivne brojeve* n*. Ideal* I *(lijevi, desni, obostrani) prstena* R *je nul-ideal ako je svaki element ideala* I *nilpotentan.* I *je nilpotentan ako je* $I^n = 0$ *za neki* n*. Svaki nilpotentan ideal je nul-ideal ukoliko* $I^n = 0$ *implicira da je* $a^n = 0$*, za svaki* $a \in I$*. Također je moguće da postoji nul-ideal koji je nilpotentan.*

Teorem 3.3 *Ako je* R *prsten, tada je svaki desni ili lijevi nul-ideal sadržan u radikalu* $J(R)$*.*

DOKAZ TEOREMA 3.3. Ako je $a^n = 0$, označimo s $r = -a + a^2 - a^3 + \cdots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$. Tvrdimo da je $r + a + ra = 0 = a + r + ar$, odakle slijedi da je a i lijevi i desni kvaziregularni element. Dakle, svaki nul-lijevi [desni] ideal je lijevi [desni] kvaziregularni ideal i stoga je sadržan u $J(R)$ prema Teoremu 3.1 (iv).

NAPOMENA: Teorem implicira da je svaki nul-prsten radikalan prsten.

Propozicija 3.1 *Ako je R lijevi [desni] Artinov prsten, tada je $J(R)$ nilpotentan ideal. Posljedica toga je da je svaki nul-lijevi ili desni ideal od R nilpotentan i $J(R)$ je jedinstven maksimalan nilpotentan lijevi (ili desni) ideal od R.*

DOKAZ PROPOZICIJE 3.1. Neka je $J = J(R)$ i promotrimo lanac (lijevih) ideala $J \supset J^2 \supset J^3 \supset \ldots$. Prema pretpostavci postoji k takav daje $J^i = J^k$ za svaki $i \geq k$. Tvrdimo da je $J^k = 0$. Ukoliko je $J^k \neq 0$, tada je S skup svih lijevih ideala I takvih da je $J^k I \neq 0$ neprazan ($J^k J^k = J^{2k} = J^k \neq 0$).Može se vidjeti da S ima minimalni element I_0. Kako je $J^k I_0 \neq 0$, postoji nenul element $a \in I_0$ tadav da je $J^k a \neq 0$. Jasno je da je $J^k a$ lijevi ideal od R koji je sadržan u I_0. Osim toga, $J^k a \in S$ što slijedi iz $J^k(J^k a) = J^{2k}a = J^k a \neq 0$. Dakle, $J^k a = I_0$, što slijedi iz pretpostavke da je I_0 minimalan. Prema tome za neki nenul element $r \in J^k$, $ra = a$. Kako je $-r \in J^k \subset J(R)$, $-r$ je lijevi kvaziregularni element, odakle je $s - r - sr = 0$ za neki $s \in R$. Dakle,

$$\begin{aligned} a &= ra = -[-ra] = -[-ra + 0] = -[-ra + sa - sa] \\ &= -[-ra + sa - s(ra)] = -[-r + s - sr]a = -0a = 0 \end{aligned}$$

Došli smo do kontradikcije s pretpostavkom da je $a \neq 0$. Slijedi da je $J^k = 0$. Posljednja tvrdnja teorema je neposredna posljedica Teorema 3.3. □

Na samom kraju želimo pokazati da desna kvaziregularnost je svojstvo radikala kako smo definirali na samom početku. Prema Teoremu 3.1 (iv) njegov povezani radikal je očito Jacobsonov radikal i lijevi kvaziregularni prsten je radikalni prsten (Definicija 3.6). Budući da homomorfizam prstena nužno grupira lijeve kvaziregularne elemente u lijeve kvaziregularne elemente, slika homomorfizma radikalnog prstena također je radikalan prsten.

Kako bi ovaj završni rad priveli kraju, moramo još pokazati da je $R/J(R)$ poluprost i da je $J(R)$ radikalan prsten.

Teorem 3.4 *Ako je R prsten, tada je kvocijentni prsten $R/J(R)$ poluprost.*

DOKAZ. Neka je $\pi : R \to R/J(R)$ kanonski epimorfizam i označimo $\pi(r)$ s $\overline{r}(r \in R)$. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih regularnih maksimalnih lijevih ideala od R. Ako je $I \in \mathcal{C}$, tada je $J(R) \subset I$ prema Teoremu 3.1 (ii), a $\pi(I) = I/J(R)$ je maksimalni lijevi ideal od $R/J(R)$. Ukoliko je $e \in R$ takav da je $r - re \in I$ za svaki $r \in R$, tada je $\overline{r} - \overline{re} \in \pi(I)$ za svaki $\overline{r} \in R/J(R)$. Odavde slijedi da je $\pi(I)$ regularan za svaki I u $\mathcal{C}$. Kako je $J(R) = \bigcap_{I \in \mathcal{C}} \pi(I)$

lako je zaključiti da ako je $\overline{r} \in \bigcap_{I \in \mathcal{C}} \pi(I) = \bigcap_{I \in \mathcal{C}} I/J(R)$, tada je $r \in J(R)$. Prema Teoremu 3.1 (ii) (koji primijenimo na $R/J(R)$) slijedi da je

$$J(R/J(R)) \subset \bigcap_{I \in \mathcal{C}} \pi(I) \subset \bigcap_{I \in \mathcal{C}} \pi(I/J(R)) = 0$$

odakle je $R/J(R)$ poluprost. □

Lema 3.6 *Neka je R prsten i $a \in R$.*

(i) Ako je $-a^2$ lijevi kvaziregularni, to je također i a;

(ii) $a \in J(R)$ ako i samo ako Ra je lijevi kvaziregularni lijevi ideal.

DOKAZ. (i)Ako je $r + (-a^2) + r(-a^2) = 0$, stavimo da je $s = r - a - ra$. Primijetimo da je $s + a + sa = 0$, ukoliko je a lijevi kvaziregularni element.
(ii) Ako je $a \in J(R)$, tada je $Ra \subset J(R)$. Stoga je Ra lijevi kvaziregularni ako je to i $J(R)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je Ra lijevo kvaziregularan. Primijetimo da je $K = \{ra + na | r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ lijevi ideal od R koji sadrži a i Ra. Ako je $s = ra + na$, tada je $-s^2 \in Ra$. Prema pretpostavci je $-s^2$ i stoga je, prema (i) i s lijevi kvaziregularni element . Zaključno, K je lijevi kvaziregularni lijevi ideal, i prema Teoremu 3.1 (iv) $a \in K \subset J(R)$.

Teorem 3.5 *(i) Ako je ideal I prstena R također prsten, tada je $J(I) = I \cap J(R)$;*

(ii) Ako je R poluprost, tada je i svaki ideal od R poluprost;

(iii) $J(R)$ je radikalan prsten.

DOKAZ. (i)$I \cap J(R)$ je očito ideal od I. Ako je $a \in I \cap J(R)$, tada je a lijevi kvaziregularni element iz R, odakle je $r + a + ra = 0$ za neki $r \in R$, ali je i $r = -a - ra \in I$. Dakle, svaki element od $I \cap J(R)$ je lijevo kvaziregularan u I. Odnosno, $I \cap J(R) \subset J(I)$ prema Teoremu 3.1 (iv) (primijenjeno na I).
Pretpostavimo da je $a \in J(I)$. Za svaki $r \in R, -(ra)^2 = -(rar)a \in IJ(I) \subset J(I)$, gdje je $-(ra)^2$ lijevo kvaziregularan u I prema Teoremu 3.1 (iv). Prema Lemi 3.6 (i) ra je lijevo kvaziregularan u I, a također i u R. Dakle, Ra je lijevi kvaziregularni lijevi ideal od R, odakle slijedi da je $a \in J(R)$ prema Lemi 3.6 (ii). Prema tome je $a \in J(I) \cap J(R) \subset I \cap J(R)$. Zaključno, $J(I) \subset I \cap J(R)$, čime smo dovršili dokaz i dokazali da je $J(I) = I \cap J(R)$. Tvrdnje (ii) i (iii) su neposredne posljedice od (i). □

Literatura

[1] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer, New York, 1974.