Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivan Katić

Mengerov teorem

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivan Katić

Mengerov teorem

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Domagoj Ševerdija

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Mengerov teorem **2**

2 Dokaz Mengerovog teorema **8**

Zaključak **15**

Literatura **16**

Uvod

Kada imamo veliki broj međusobno povezanih računala koji dijele neke resurse, odnosno računalnu mrežu, može se dogoditi da neka računala ne mogu međusobno razmjenjivati informacije zato što računalo koje ih povezuje nije dobro postavljeno ili veze među njima ne rade. U tome slučaju nas zanima da li je moguće računala povezati nekim drugim putevima. Takve probleme u računalnim mrežama možemo matematički modelirati grafovima.

Naprimjer, neka je graf model neke mreže računala i to takav da vrhovi odgovaraju računalima, a bridovi vezama te mreže. Povezanost u grafu definiramo kao postojanje puta između svaka dva vrha toga grafa. Problem povezanosti računala, iako neka računala ili veze ne rade, odgovara problemu najmanjeg broja vrhova ili bridova čijim izbacivanjem graf podijelimo na dvije nepovezane komponente.

U prvom poglavlju ovoga rada definirati ćemo osnovne pojmove teorije grafova i iskazati Mengerov teorem u dva oblika, to su Mengerov teorem za grafove i Mengerov teorem za digrafove. Oni će nam otkriti vezu između povezanosti i broja puteva u grafovima i digrafovima, te dati neke karakterizacije povezanosti. U drugom poglavlju dokat ćemo oba oblika teorema i pokazati da je Mengerov teorem za grafove zapravo specijalni slučaj Mengerovog teorema za digrafove.

Mengerov teorem vrijedi, kako za konačne grafove i digrafove, tako i za beskonačne grafove i digrafove, no u ovom radu ćemo se baviti isključivo konačnim grafovima i digrafovima.

1 Mengerov teorem

Definicija 1.1. *Graf je uređeni par $G = (V, E)$, koji se satoji od nepraznog skupa vrhova $V = V(G)$ i skupa $E = E(G)$ 2-članih podskupova od V. Za svaki brid $e = \{v, w\} \in E$ kažemo da spaja dva vrha $v, w \in V$ koji se zovu krajevi od brida e. Kažemo još da su tada vrhovi v i w incidentni s bridom e, a vrhovi v i w susjedni i pišemo $e = vw$.*

Za graf G kažemo da je konačan ako su $V(G)$ i $E(G)$ konačni skupovi, a inače je beskonačan. Graf G zovemo prazan graf ako je $E(G) = \emptyset$. U ovome radu ćemo proučavati isključivo konačne grafove.

Dva osnovna parametra vezana uz konačan graf su broj vrhova i bridova od G, a zovemo ih red i veličina od G te definiramo:

$$v(G) := |V(G)|, \quad e(G) := |E(G)|$$

Graf sa samo jednim vrhom zove se trivijalni graf.

Brid čiji se krajevi podudaraju zove se petlja, a ako su krajevi različiti naziva se pravi brid ili karika. Dva brida ili više njih s istim parom krajeva zovu se višestruki bridovi, a u tom slučaju skup E iz Definicije 1.1 je multiskup. Graf je jednostavan ako nema ni petlji ni višestrukih bridova.

Definicija 1.2. *Neka su G i H grafovi. Ako je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$, a svaki brid iz H ima iste krajeve u H kao što ih ima u G, onda kažemo da je H podgraf od G i pišemo $H \subseteq G$, a G zovemo nadgraf od H. Ako je $H \subseteq G$ i $H \neq G$, pišemo $H \subset G$ i zovemo pravi podgraf od G.*

Neka je $G = (V, E)$, a $V' \subseteq V$. Podgraf od G čiji je skup vrhova $V \backslash V'$, a skup bridova se sastoji od bridova iz G čija su oba kraja u $V \backslash V'$, označavamo s $G - V'$. Slično za $E' \subseteq E$, podgraf od G čiji je skup vrhova V, a skup bridova $E \backslash E'$, označavamo s $G - E'$.

Skup susjednih vrhova od vrha $v \in V(G)$ u grafu G označavamo s $N_G(v)$. Ako je G jednostavan graf, onda definiramo stupanj vrha v, $d_G(v)$ kao broj susjednih vrhova od v. Općenito, u bilo kojem grafu, stupanj od v je broj $d_G(v)$ bridova od G incidentnih s v, pri čemu se svaka petlja računa kao dva brida.

Definicija 1.3. *Šetnja u grafu G je niz $W := v_0e_1v_1e_2 \dots e_kv_k$, čiji članovi su naizmjenice vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, $1 \leq i \leq k$. Kažemo da je v_0 početak, a v_k kraj šetnje W ili da je W šetnja od v_0 do v_k ili (v_0, v_k)-šetnja.*

Vrhovi $v_1v_2 \dots v_{k-1}$ su unutarnji vrhovi šetnje, a broj k se zove duljina šetnje W. Kažemo da v_i prethodi vrhu v_j u W ako je $i < j$. Šetnja je zatvorena ako je $v_0 = v_k$.

Dio šetnje W je podniz $v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots e_j v_j$ susjednih članova od W i zove se (v_i, v_j)-dio od W. Ako su $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ i $W' = v_k e_{k+1} v_{k+1} \dots e_l v_l$ dvije šetnje, onda se šetnja $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k e_{k+1} \dots e_l v_l$ dobivena nadovezivanjem W i W' kod vrha v_k obilježava s WW', a šetnja $v_k e_k \dots e_1 v_0$ dobivena obrnutim redosljedom obilaska od W zove se inverzna šetnja od W i označava s W^{-1}.

Ako su svi bridovi šetnje W međusobno različiti, onda se W zove staza, a ako su na stazi i svi vrhovi međusobno različiti, ona se zove put.

Familija (v, w)-puteva u grafu je *bridno disjunktna* ako nikoja dva puta nemaju zajednički brid, a *vršno disjunktna* ako nikoja dva puta nemaju zajednički unutarnji vrh.

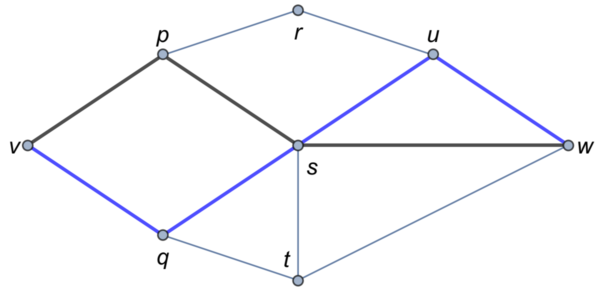
Definicija 1.4. *Dva vrha v, w grafa G su povezana ako postoji (v, w)-put u G. Graf G je povezan ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem. Komponenta povezanosti grafa je maksimalan povezan podgraf* (tj. povezani podgraf koji nije sadržan ni u jednom većem povezanom podgrafu).

Definicija 1.5. *Bridni (Vršni) rez u povezanom grafu G je podskup $S \subseteq E(G)$ $(S \subseteq V(G))$ tako da je $G - S$ nepovezan.*

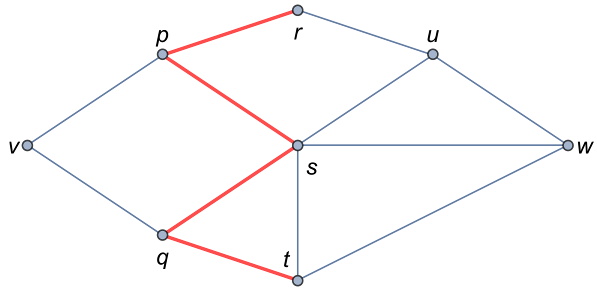
Ako su $v \neq w$ (nesusjedni) vrhovi grafa G onda se bridni rez $S \subseteq E$ (vršni rez $S \subseteq V \backslash \{v, w\}$) za kojeg v i w leže u različitim komponentama povezanosti od $G - S$ zove vw-bridni-separator (vw-vršni-separator) ili samo vw-separator. Svaki bridni (vršni) rez je separator za neka dva vrha iz različitih komponenti povezanosti.

Definicija 1.6. *Graf G s barem dva vrha je k-bridno povezan ako ne postoji bridni rez s $k - 1$ bridova, a k-povezan ako je reda barem $k + 1$ i ne postoji vršni rez s $k - 1$ vrhova. Bridna povezanost $\kappa'(G)$ grafa G je najveći cijeli broj k za kojeg je G k-bridno povezan, a povezanost $\kappa(G)$ je najveći cijeli broj k za kojeg je G k-povezan.*

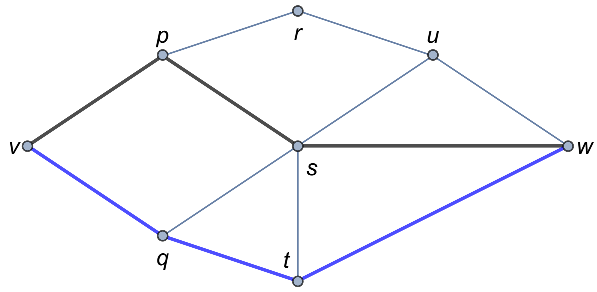
Neka su v i w dva vrha grafa G. *Bridna povezanost između vrhova v* i w ili (v, w)-bridna-povezanost, označeno s $\kappa'_G(v, w)$, ili samo $\kappa'(v, w)$, je minimalna kardinalnost vw-bridnog-separatora. Ako v i w nisu susjedni onda *vršna povezanost između vrhova v* i w ili (v, w)-vršna-povezanost, označeno s $\kappa_G(v, w)$, ili samo $\kappa(v, w)$, jest minimalna kardinalnost vw-vršnog-separatora.



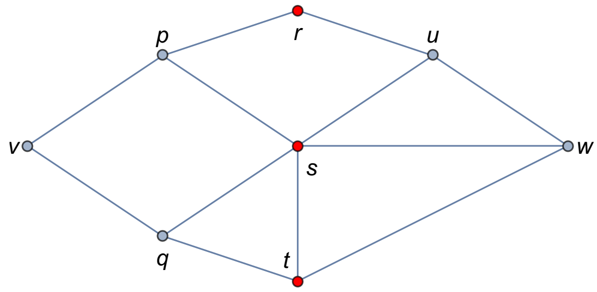
Bridno disjuktni (v, w)-putevi



vw-bridni-separator



Vršno disjuktni (v, w)-putevi



vw-vršni-separator

Slika 1: Primjer puteva i separatora na grafu

Neka je G graf i S vw-vršni-separator. Ako maksimalni broj vršno disjuktnih (v, w)-puteva označimo s $\Pi(v, w)$, tada svaka dva različita vršno disjunktna (v, w)-puta sijeku S u različitim vrhovima, tj.

$$\Pi(v, w) \leq \kappa(v, w) \tag{1.1}$$

Slično, ako je S vw-bridni-separator u grafu G, tada svaka dva različita bridno disjunktna (v, w)-puta sijeku S u različitim bridovima. Ako označimo s $\Pi'(v, w)$ maksimalni broj bridno disjuktnih (v, w)-puteva vrijedi

$$\Pi'(v, w) \leq \kappa'(v, w) \tag{1.2}$$

Mengerov teorem pokazuje da su nejednakosti (1.1) i (1.2) zapravo jednakosti.

Teorem 1.1. (K. Menger, 1927.)

(i) *Bridna povezanost:*
Neka je G graf, a v i w dva vrha. Tada je maskimalni broj bridno disjunktnih (v, w)-puteva u G jednak minimalnom broju bridova vw-bridnog-separatora, tj.

$$\Pi'(v, w) = \kappa'(v, w)$$

(ii) *Vršna povezanost:*
Neka su v, w nesusjedni vrhovi grafa G. Tada je maksimalan broj vršno disjunktnih (v, w)-puteva u G jednak minimalnom broju vrhova vw-vršnog-separatora, tj.

$$\Pi(v, w) = \kappa(v, w)$$

Sada kao posljedicu prethodnog teorema imamo sljedeće:

Korolar 1.1. *Neka je G graf s barem dva vrha.*

(i) G je k-povezan ako i samo ako se svaka dva vrha mogu spojiti s k različitih vršno disjunktnih puteva.

(ii) G je k-bridno povezan ako i samo ako se svaka dva vrha mogu spojiti s k različitih bridno disjunktnih puteva.

U ovom djelu ćemo iskazati verziju teorema za digrafove, ali prije toga ćemo definirati što su digrafovi, kako izgledaju putevi u njima i definirati povezanost za digrafove.

Definicija 1.7. *Usmjereni graf ili digraf je uređeni par $D = (V, A)$, koji se sastoji od nepraznog skupa vrhova V i $A \subseteq V \times V$ skupa bridova. Za brid $a = (v, w) \in A$ kažemo da se zove luk i vrh v zovemo početak, a w kraj luka. Kažemo još da je $a = vw$ luk od v prema w.*

Dva ili više luka s istim početkom i krajem zovu se višestruki lukovi. Za D kažemo da je jednostavni digraf ako nema višestrukih lukova i petlji.

Definiramo ulazni stupanj $d^-(v)$ i izlazni stupanj $d^+(v)$ vrha v kao broj lukova s krajem, odnosno početkom u v.

Pripadni graf $G(D)$ digrafa D je graf dobiven iz D tako da svaki luk (v, w) zamjenimo bridom $\{v, w\}$.

Definicija 1.8. *Usmjerena šetnja u digrafu D je niz $W := v_0a_1v_1a_2 \dots a_kv_k$, čiji članovi su naizmjenice vrhovi v_i i lukovi a_i tako da, za $1 \leq i \leq k$, v_{i-1} je početak, a v_i je kraj luka a_i. Kažemo da je v_0 početak, a v_k kraj usmjerene šetnje W ili da je W usmjerena šetnja od v_0 do v_k ili usmjerena (v_0, v_k)-šetnja.*

Ako su svi lukovi usmjerene šetnje W međusobno različiti, onda se W zove usmjerena staza, a ako su na stazi i svi vrhovi međusobno različiti, ona se zove usmjereni put.

Skup svih vrhova šetnje W označavamo $V(W)$, a skup svih lukova $A(W)$.

Dio usmjerene šetnje W je podniz $v_ia_{i+1}v_{i+1} \dots a_jv_j$ susjednih članova od W i zove se (v_i, v_j)-dio od W. Ako su $W = v_0a_1v_1a_2 \dots a_kv_k$ i $W' = v_ka_{k+1}v_{k+1} \dots a_lv_l$ dvije usmjerene šetnje, onda se usmjerena šetnja $v_0a_1v_1a_2 \dots a_kv_ka_{k+1} \dots a_lv_l$ dobivena nadovezivanjem W i W' kod vrha v_k obilježava s WW'.

Familija usmjerenih (v, w)-puteva u grafu je lučno disjunktna ako nikoja dva puta nemaju zajednički luk, a vršno disjunktna ako nikoja dva nemaju zajednički unutarnji vrh.

Definicija 1.9. *Digraf D je slabo povezan ako je pripadni graf povezan, a jako povezan ako za svaka dva vrha $u, v \in V(D)$ postoji usmjereni (u, v) i (v, u)-put.*

Definicija 1.10. *Lučni (Vršni) rez u jako povezanom digrafu D je podskup $S \subseteq A(D)$ $(S \subseteq V(D))$ tako da je $D - S$ nepovezan.*

Ako su $v \neq w$ (nesusjedni) vrhovi digrafa D onda se lučni rez $S \subseteq A$ (vršni rez $S \subseteq V \backslash \{v, w\}$) za kojeg v i w leže u različitim komponentama povezanosti od $D - S$ zove vw-lučni-separator (vw-vršni-separator) ili samo vw-separator. Svaki lučni (vršni) rez je separator za neka dva vrha iz različitih komponenti povezanosti.

Definicija 1.11. *Digraf D s barem dva vrha je k-lučno povezan ako ne postoji lučni rez s $k - 1$ lukova, a k-jako povezan ako je reda barem $k + 1$ i ne postoji vršni rez s $k - 1$ vrhova. Lučna povezanost $\kappa'(D)$ digrafa D je najveći cijeli broj k za kojeg je D k-lučno povezan, a jaka povezanost $\kappa(D)$ je najveći cijeli broj k za kojeg je D k-jako povezan.*

Neka su v i w dva vrha digrafa D. Lučna povezanost između vrhova v i w ili (v, w)-lučna-povezanost, označavamo s $\kappa'_D(v, w)$, ili samo $\kappa'(v, w)$, je minimalna kardinalnost vw-lučnog-separatora. Ako v i w nisu susjedni onda je vršna povezanost između vrhova v i w ili (v, w)-vršna-povezanost, označavamo sa $\kappa_D(v, w)$, ili samo $\kappa(v, w)$, minimalna kardinalnost vw-vršnog-separatora.

Neka je D digraf i S vw-vršni-separator. Ako maksimalni broj vršno disjuktnih usmjerenih (v, w)-puteva označimo s $\Pi(v, w)$, tada svaka dva različita vršno disjunktna usmjerena (v, w)-puta sijeku S u različitim vrhovima, tj.

$$\Pi(v, w) \leq \kappa(v, w) \tag{1.3}$$

Slično, ako je S vw-lučni-separator u grafu G, tada svaka dva različita lučno disjunktna usmjerena (v, w)-puta sijeku S u različitim lukovima. Ako označimo s $\Pi'(v, w)$ maksimalni broj lučno disjuktnih usmjerenih (v, w)-puteva vrijedi

$$\Pi'(v, w) \leq \kappa'(v, w) \tag{1.4}$$

Analogno Teoremu 1.1., verzija Mengerova teorema za digrafove pokazuje da su nejednakost (1.3) i (1.4) ustvari jednakosti.

Teorem 1.2. (K. Menger, 1927.)

(*i*) *Lučna povezanost:*

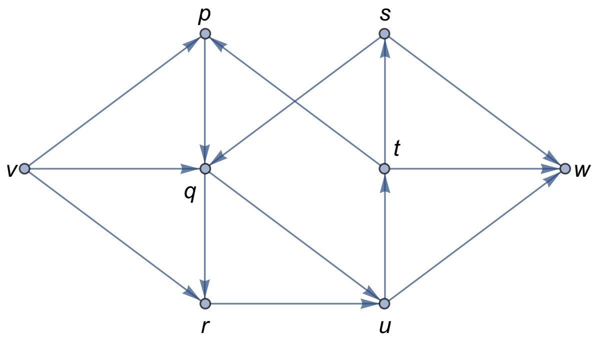
Neka je D *digraf, a* v *i* w *dva vrha. Tada je maskimalni broj lučno disjunktnih usmjerenih* (v, w)*-puteva u* D *jednak minimalnom broju lukova* vw*-lučnog-separatora, tj.*

$$\Pi'(v, w) = \kappa'(v, w)$$

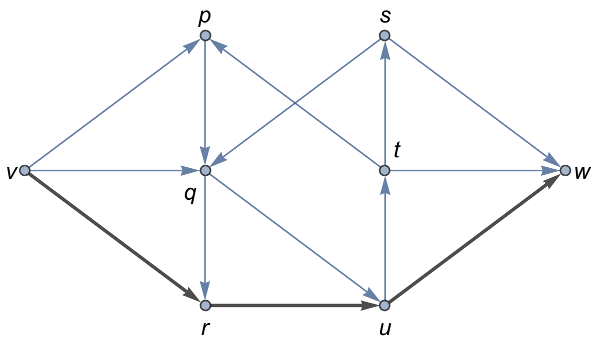
(*ii*) *Vršna povezanost:*

Neka su v*,* w *nesusjedni vrhovi digrafa* D*. Tada je maksimalan broj vršno disjunktnih usmjerenih* (v, w)*-puteva u* D *jednak minimalnom broju vrhova* vw*-vršnog-separatora, tj.*

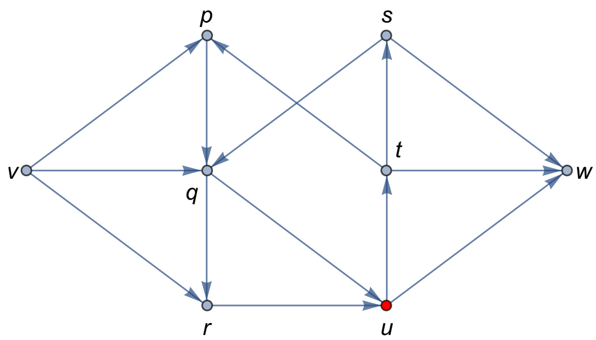
$$\Pi(v, w) = \kappa(v, w)$$



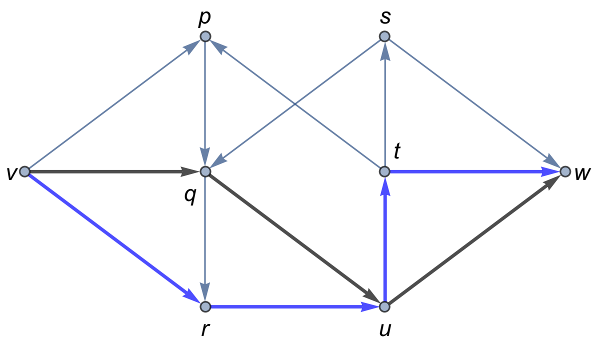
Digraf D



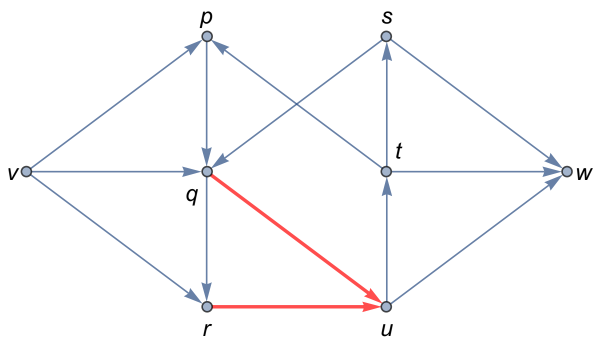
Maksimalan broj vršno disjuktnih usmjerenih (v, w)-puteva



Minimalni vw-vršni-separator



Maksimalan broj lučno disjuktnih usmjerenih (v, w)-puteva



Minimalni vw-lučni-separator

Slika 2: Primjer jednakosti iz Mengerovog teorema za digrafove

2 Dokaz Mengerovog teorema

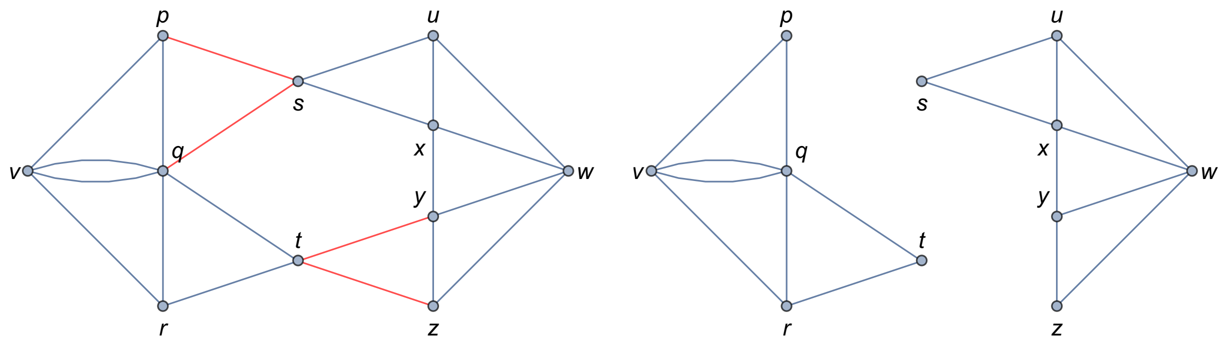
Prvo ćemo dokazati bridnu povezant za grafove, odnosno prvu tvrdnju Mengerovog teorema za grafove, ali prije toga, za dokaz nam je potrebna još jedna definicija.

Definicija 2.1. *Kažemo da je brid $e \in E(G)$ kontrahiran ako je odstranjen, a njegovi vrhovi identificirani. Tako dobiven graf označavamo G/e. Ako je $E' \subseteq E(G)$, onda je G/E' graf dobiven iz G kontrahiranjem svakog brida iz E'.*

Dokaz Teorema 1.1. (i)**:**
(Vidi str. 4)

Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom po broju bridova. Za svaki prazan graf tvrdnja je očita. Pretpostavimo da zadani graf G ima m bridova, te da je tvrdnja istinita za sve grafove s manje od m bridova. Za korak indukcije razlikujemo dva slučaja.

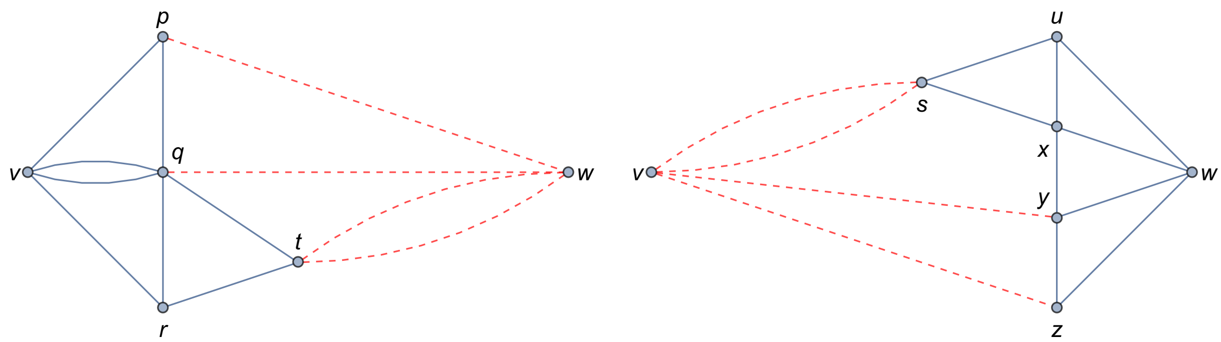
Slučaj 1: Pretpostavimo da postoji vw-bridni-separator S minimalne kardinalnosti k, takav da nisu svi njegovi bridovi incidentni s vrhom v, niti su svi njegovi bridovi incidentni s vrhom w. Kada bi iz grafa G izbacili sve bridove skupa S, dobili bismo dvije komponente povezanosti, nazovimo ih G' i G'', od kojih G' sadrži vrh v, a G'' sadrži vrh w.



Graf G i skup S Komponente povezanost G' i G''

Slika 3: Primjer konstrukcije grafova G' i G''

Neka je G_1 dobiven iz G tako da se kontrahiraju svi bridovi grafa G' (čime se cijeli graf G' zapravo kontrahira u vrh v), a G_2 neka je dobiven tako da se kontrahiraju svi bridovi od G''.



Graf G_2 Graf G_1

Slika 4: Primjer konstrukcije grafova G_1 i G_2

Kako grafovi G_1 i G_2 imaju manje bridova od G, te je S vw-separator minimalne kardinalnosti za G_1 i G_2, po pretpostavci indukcije postoji k bridno disjunktnih puteva iz v u w u G_1 i G_2. Sada se traženi putevi od v do w u cijelom grafu G dobiju nadovezivanjem bridno disjunktnih puteva pronađenih za G_1 odnosno G_2.

Slučaj 2: Neka se svaki vw-separator minimalne kardinalnosti k sastoji samo od bridova koji su incidentni s vrhom v ili w. Bez smanjenja općenitost možemo pretpostaviti da ne postoji brid od G koji nije sadržan u nekom vw-separatoru kardinalnosti k, jer bi inače mogli izbaciti takav brid i primijeniti pretpostavku indukcije, što bi trivijalno dokazalo tvrdnju. Ako je P put iz v u w, onda se P sastoji od najviše dva brida, te sadrži najviše jedan brid nekog vw-separatora kardinalnosti k. Izbacimo li put P iz grafa G po pretpostavci indukcije dobivamo graf s najviše $k-1$ bridno disjunktnih puteva. Ti putevi, zajedno s P, čine traženih k puteva u G.

$\square$

Na sličan način, indukcijom po broju vrhova, ako promatramo vršno disjunktne (v, w)-puteve i vw-vršni-separator, možemo dokazati drugu tvrdnju teroema. U nastavku ćemo dokazati vršnu povezanost za digrafove i iskoristiti taj rezultat kako bi dokazali vršnu povezanost za grafove, odnosno drugu tvrdnju Mengerovog teorema za grafove (*str. 12*).

Kako bi dokazali vršnu povezanost za digrafove, odnosno drugu tvrdnju Mengerovog teorema za digrafove, defnirati ćemo potrebene pojmove, te iskazat drugi oblik Mengerovog teorema. U tom obliku problem se može svesti na slučaj bipartitnih grafova, što ćemo i pokazati kod digrafova.

Graf G je bipartitan ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y. Particija (X, Y) zove se tada biparticija grafa G.

Definicija 2.2. *Sparivanje u grafu G je podskup $M \subseteq E$ bridova koji nisu petlje, a nikoja dva nisu susjedna. Kažemo da su dva kraja brida u M sparena u M. Sparivanje od M zasićuje vrh v, ili se kaže da je v M-zasićen ako je neki brid iz M incidentan s v, a inače je v M-nezasićen.*

M je maksimalno sparivanje u G, ako ne postoji sparivanje M', za koje je $|M'| > |M|$. Ako je svaki vrh iz G M-zasićen, kažemo da je M savršeno sparivanje.

Definicija 2.3. *Pokrivač (ili vršni pokrivač) je skup vrhova $K \subseteq V$, tako da svaki brid iz G ima barem jedan kraj u K, a bridni pokrivač L je skup bridova tako da je svaki vrh incidentan sa barem jednim bridom iz tog skupa.*

K je minimalni pokrivač u G, ako ne postoji pokrivač K', za kojeg je $|K'| < |K|$.

Teorem 2.1. (Köing)
Za bipartitan graf G broj bridova maksimalnog sparivanja je jednak broju vrhova minimalnog pokrivača.

Mengerov teorem može bit iskazan i u ovom obliku:
Neka je G konačan graf, a v i w dva vrha. Postoji familija $\mathcal{F}$ vršno disjunktnih (v, w)-puteva i vw-vršni-separator S, takav da S sadrži točno jedan vrh iz svakog puta iz $\mathcal{F}$.

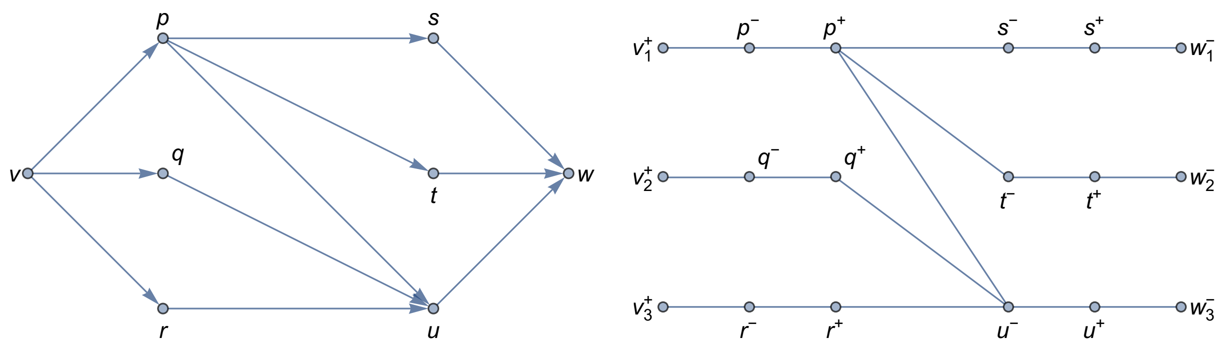
Dokaz Teorema 1.2. (ii)**:**
(Vidi str. 7)

Teorem ćemo dokazati tako da pronađemo familiju $\mathcal{F}$ međusobno disjunktnih usmjerenih (v, w)-puteva i skup $S \subseteq V(D)$ takav da vrijedi:

$$|S \cap V(P)| \geq 1 \text{ za svaki } (x, y)\text{-put } P \text{ i}$$

$$|S \cap V(P)| = 1 \text{ za svaki } (x, y)\text{-put iz } \mathcal{F}$$

Pridružit ćemo digrafu D bipartitni graf G ovako. Svaki vrh $u \neq v$ i $u \neq w$ ćemo rascijepiti u dva nova vrha u^- i u^+, vrh v ćemo zamijeniti s $d^+(v) = k$ novih vrhova $A = \{v_1^+, \ldots, v_k^+\}$, a w s $d^-(w) = l$ novih vrhova $B = \{w_1^-, \ldots, w_l^-\}$. Svakom luku (v, u) iz D pridružimo brid koji spaja u^- s jednim od novih vrhova pridruženih vrhu v, a svakom luku (u, w) iz D pridružimo brid koji spaja u^+ s jednim od novih vrhova pridruženih vrhu w, tako da svaki novi vrh pridružen vrhu v ili w ima stupanj 1. Vrhovi x^+ i y^- u G su susjedni ako i samo ako je $x = y$ ili je (x, y) luk u D.



Digraf D Graf G

Slika 5: Primjer konstrukcije bipartitnog grafa G od digrafa D

Neka je M maksimalno sparivanje u G. Tada je za svaki vrh $u \in V(D) \backslash \{v, w\}$, bar jedan od vrhova u^-, u^+ M-zasićen. Ako je samo jedan od njih M-zasićen, onda ako zamjenimo taj jedan icidentni brid iz M s bridom $u^- u^+$, dobivamo drugo maksimalno sparivanje koje zasićuje oba vrha.

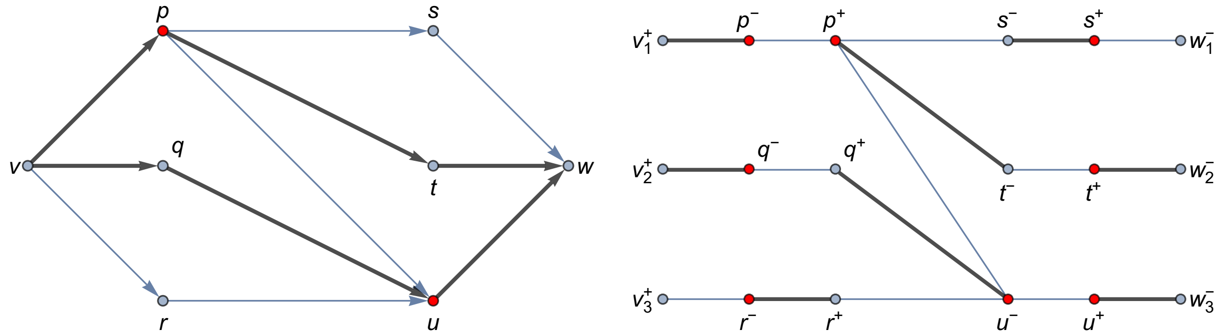
Prema Köing-ovom teoremu (Teorem 2.1.) postoji pokrivač K od G takav da je $|K| = |M|$ (tada za svaki $e \in M$ vrijedi $|e \cap K| = 1$) i možemo uzeti da su jedino u^- ili u^+ iz K.

Ako je K minimalni pokrivač, a jedan od novih vrhova iz A ili B je u K, onda taj vrh ima jedan susjedni vrh i kada bi on bio iz K, K nebi bio minimalan. Takav vrh zamjeniti ćemo s njegovim susjednim vrhom i dobit ćemo drugi minimalni pokrivač.

Neka je S skup vrhova iz D za koje su oba u^- i u^+ iz K.

Neka je $\mathcal{P}$ familija svih usmjerenih (v, w)-puteva u D. Familiju puteva $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$ definiramo tako da je svaki put iz $\mathcal{F}$ sastavljen od lukova čiji su pridruženi bridovi iz G u maksimalnom sparivanju M:

$$\mathcal{F} := \{u_1, u_2, \ldots, u_m \in D : u_i^+ u_{i+1}^- \in M \ za \ 1 \leq i \leq m\}$$



Familija $\mathcal{F}$ i skup S — Sparivanje M i pokrivač K

Slika 6: Konstrukcija puteva i separatora za D, maksimalno sparivanje i minimalni pokrivač za G

Putevi iz $\mathcal{F}$ su međusobno disjunktni:

> Pretpostavimo da postoje dva razlicita puta $P_1, P_2 \in \mathcal{F}$ takva da imaju zajednicki luk a. Neka je vrh u početak (kraj) luka a takav da je i kraj (početak) dva luka $a_1 \in P_1$ i $a_2 \in P_2$. Po definiciji skupa $\mathcal{F}$ postoje pridruženi bridovi e_1 i e_2 lukovima a_1 i a_2 koji su u maksimalnom sparivanju M. Ali kako pridruženi bridovi e_1 i e_2 u G imaju zajednički kraj u^- (početak u^+) M nije sparivanje, što je kontradikcija.

Svaki put iz $\mathcal{P}$ sadrži vrh iz S:

> Neka je $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathcal{P}$ i neka je i najveći indeks za kojeg $u_i^- \in K$. Tada je $u_i^+ \in K$, jer brid $u_i^+ u_{i+1}^-$ mora biti pokriven pokrivačem K.

Svaki put iz $\mathcal{F}$ ne sadrži više od jednog vrha iz S:

> Pretpostavimo da put $P_1 \in \mathcal{F}$ sadrži više od jednog vrha i neka su vrhovi $u_i, u_j \in S \cap V(P_1)$ takvi da vrh $u_k \notin S$ za $i < k < j$. Neka je k najveći indeks, $i < k < j$, takav da je $u_k^+ \in K$. Tada je $u_{k+1}^- \in K$ kako bi pokrio brid $u_{k+1}^- u_{k+1}^+$, što znači da za brid $u_k^+ u_{k+1}^- \in M$ vrijedi $|u_k^+ u_{k+1}^- \cap K| = 2$, a to je kontradikcija.

$\square$

U Mengerovom teoremu za digrafove oslabili smo tvrdnju tako da smo zamjenili puteve s općenitijom klasom usmjernih puteva, ali u ovome odlomku ćemo prikazati kako Teorem 1.1. možemo gledati kao specijalni slučaj Teorema 1.2. za simetrične digrafove i dokazati drugu tvrdnju Teorema 1.1., odnosno vršnu povezanost za grafove.

Za digraf D kažemo da je simetričan ako za svaki luk (x, y) postoji luk (y, x).

Definicija 2.4. *Pridruženi digraf $D(G)$ grafa G je digraf dobiven iz G zamjenom svakog brida dvama suprotno orijentiranim lukovima s istim krajevima.*

Sljedeća propozicija slijedi direktno iz definicije:
Propozicija 2.1. *Neka je G graf i $D(G)$ njegov pridruženi digraf, tada vrijedi:*

(*i*) *$(v_1, v_2, \dots, v_p)$ je put u G ako i samo ako je $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ usmjereni put u $D(G)$*

(*ii*) *G je povezan ako i samo ako je $D(G)$ jako povezan*

Teorem 2.2. *Neka je G graf i $D(G)$ njegov pridruženi digraf, tada vrijedi:*

(*i*) $\kappa(G) = \kappa(D(G))$

(*ii*) $\kappa'(G) = \kappa'(D(G))$

Dokaz. (*i*) Neka je S skup vrhova i $D - S$ pridruženi digraf grafu $G - S$. Prema Propoziciji 2.1. $G - S$ je povezan ako i samo ako je $D - S$ jako povezan, iz čega slijedi da je S vršni rez za G ako i samo ako je vršni rez za D.

Dokaz Teorema 1.1. (*ii*):
(Vidi str. 4)

Za pridruženi digraf D grafa G iz tvrdnje (*ii*) Teorema 1.2. slijedi:

$$\Pi_D(v, w) = \kappa_D(v, w)$$

Iz Propozicije 2.1. za svaka dva vrha v i w slijedi:

$$\Pi_G(v, w) = \Pi_D(v, w)$$

Iz Teorema 2.2. slijedi da je svaki vršni rez grafa G ujedno i vršni rez pridruženog digrafa D. Ako je S minimalni vw-vršni-separator u grafu G tada je S i minimalni vw-vršni-separator u pridruženom digrafu D tj. vrijedi:

$$\kappa_G(v, w) = \kappa_D(v, w)$$

Sada vidimo da vrijedi jednakost:

$$\Pi_G(v, w) = \Pi_D(v, w) = \kappa_D(v, w) = \kappa_G(v, w)$$

tj. tvrdnja (*ii*) teorema 1.1.

□

Na sličan način možemo dokazati i tvrdnju (*i*) Teorema 1.1. kao posljedicu tvrdnje (*i*) Teorema 1.2. koju ćemo dokazati u nastavku.

Dokaz Teorema 1.2. (i)**:**
(Vidi str.7)

Pretpostavit ćemo da smo pronašli k međusobno lučno disjunktnih usmjerenih (v,w)-puteva, tada ćemo, ili konstruirati skup sa $k+1$ međusobno lučno disjunktnih usmjerenih (v,w)-puteva, ili pronaći vw-lučni-separator veličine k.

Indukciju možemo započeti sa $k=0$ ili $k=1$ tako da pronađemo usmjereni (v,w)-put. Neka je $\mathcal{F}=\{P_1,...,P_k\}$ skup k međusobno lučno disjunktnih usmjerenih (v,w)-puteva i neka je $A(F)=A(P_1)\cup\ldots\cup A(P_k)$. Konstruirati ćemo digraf S sljedećim algoritmom.

Algoritam 2.1. (Konstrukcija digrafa S)

1. Stavimo v u $V(S)$
2. Ako postoji $x\in V(S)$ i luk xy u $A(D)\backslash A(\mathcal{F})$, onda dodajemo y u $V(S)$ i xy u $A(S)$. Idi na korak 2.
3. Ako postoji $x\in V(S)$ i luk yx u $A(\mathcal{F})$, onda dodajemo y u $V(S)$ i yx u $A(S)$. Idi na korak 2.

Primjetimo da je tako konstruiran digraf S slabo povezan ali nije nužno jako povezan. Dva slučaja se mogu pojaviti na kraju algoritma:

Slučaj 1: $w\in V(S)$. U tom slučaju konstruirat ćemo skup sa $k+1$ međusobno lučno disjunktnih usmjerenih (v,w)-puteva.
Kako je S slabo povezan tada postoji orijentirani (ne nužno usmjereni) (v,w)-put $P_{k+1}=u_0a_1u_1\ldots u_{j-1}a_ju_j\ldots a_pu_p$ za kojeg vrijedi $u_0=v$, $u_p=w$ i za sve $1\leq j\leq p$, a_j je ili luk $u_{j-1}u_j$ ili luk u_ju_{j-1}. Ako $a_j=u_{j-1}u_j$, tada a_j zovemo luk unaprijed, a ako je $a_j=u_ju_{j-1}$ onda a_j zovemo luk unazad. Primjetimo da s konstrukcijom digrafa S, luk je unaprijed u P_{k+1} ako i samo ako nije u $A(\mathcal{F})$.

Ako P_{k+1} ne sadrži nijedan luk unazad, onda skup puteva $\{P_1,\ldots,P_k,P_{k+1}\}$ je skup sa $k+1$ međusobno lučno disjunktnih usmjerenih (v,w)-puteva. U protivnom, počevši od skupa $\mathcal{F}$ i puta P_{k+1}, konstruirati ćemo skup $\mathcal{F}'=\{P_1',\ldots,P_k'\}$ sa k međusobno lučno disjunktnih usmjerenih (v,w)-puteva i orijentirani (v,w)-put P_{k+1}' koji ima jedan luk unazad manje od P_{k+1}, tako da je luk unaprijed u P_{k+1}' ako i samo ako nije iz $A(\mathcal{F}')$. Ponavljajući taj postupak p puta (gdje je p broj lukova unazad u P_{k+1}), dobit ćemo skup s $k+1$ međusobno lučno disjunktnih usmjerenih (v,w)-puteva.

Konstrukcija novog skupa $\mathcal{F}'$:
Neka je j najmanji indeks za kojeg je a_j unazad i neka je i_0 indeks takav da je $a_j \in A(P_{i_0})$.

(i) $P_i' = P_i$ *za* $i \neq i_0$ *i* $1 \leq i \leq k$

(ii) P_{i_0}' dobivamo nadovezivanjem usmjerenog (v, u_{j-1})-djela puta P_{k+1} i usmjerenog (u_{j-1}, w)-djela puta P_{i_0}.

(iii) P_{k+1}' dobivamo nadovezivanjem usmjerenog (v, u_j)-djela puta P_{i_0} i orjentiranog (u_j, w)-djela puta P_{k+1}.

Slučaj 2: $w \notin V(S)$. U tom slučaju ćemo pronaći vw-lučni separator veličine k.
Neka je $T = V(D) \backslash V(S)$, a R skup lukova s početkom u S i krajem u T, tada R separira S od T i on je vw-lučni separator. Svaki luk iz R je iz $A(\mathcal{F})$, u protivnom bi mogli primjeniti korak 2 iz Algoritama 2.1. što bi značilo da algoritam nije završio. Put P_i ne može sadržavati dva luka iz S u T, u protivnom bi postojao luk yx iz T u S u P_i i takav luk je trebao biti dodan u S korakom 3 Algoritma 2.1. Iz toga slijedi $|R| \leq k$, tj. $\kappa'(v, w) \leq \Pi'(v, w)$.

$\square$

Zaključak

Očito je da ako iz povezanog grafa izbacimo skup vrhova tako da graf podijelimo na dva dijela, broj puteva iz jednog dijela u drugi koji ne dijele iste vrhove ne može biti veći od broja izbačenih vrhova. Zapitamo li se kolika je veličina najmanjeg skupa vrhova čijim izbacivanjem razdvajamo neka dva vrha grafa u različite komponente, odgovor će biti isti kao i na pitanje najvećeg broja puteva između ta dva vrha koji ne dijele iste vrhove. Tu jednakost pokazuje Mengerov teorem. Mengerov teorem govori i više, da vrijedi i jednakost između najmanjeg skupa bridova koji separiraju dva vrha i najvećeg broja bridno disjunktnih puteva između njih.

U ovome radu smo definirali grafove, puteve, povezanost i još neke osnovne pojmove teorije grafova, te iskazali i dokazali Mengerov teorem. Verzija Mengerova teorema za usmjerene grafove ili digrafove isto vrijedi, što smo pokazali za obje tvrdnje, bridnu i vršnu povezanost dva vrha nekog digrafa. Pokazali smo još da Mengerov teorem za grafove možemo gledati i kao specijalni slučaj teorema za digrafove.

Ključne riječi: graf, put, povezanost, separator, Mengerov teorem, digraf, sparivanje, pokrivač, pridruženi digraf

Literatura

[1] D.Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb, 2001.

[2] F.Havet, Combinatorial Optimization, Universite Nice Sophia Atipolis, Nice http://www-sop.inria.fr/members/Frederic.Havet/Cours/ubinet.html

[3] A.Nakić, M.O.Pavčević, Protoci u mrežama, FER, Zagreb, 2014.
https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/6-Protoci.pdf

[4] T. Szabó, Graph Theory, ETHzürich, Zürich, 2005.
https://www.ti.inf.ethz.ch/ew/lehre/GT05/lectures/PDF/lecture8.pdf

[5] R. Aharoni, Menger's Theorem for Graphs Containing no Infinite Paths, European Journal of Combinatorics Volume 4, 201-204, 1983.