Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Daria Solić

Centralni granični teorem

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Daria Solić

Centralni granični teorem

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Slobodan Jelić

Osijek, 2017.

Sažetak. U ovom radu se analiziraju osnovni pojmovi iz teorije vjerojatnosti, kao što su vjerojatnosni prostor, slučajna varijabla i Bernoullijeva distribucija, a koji su potrebni za iskazivanje i dokazivanje centralnog graničnog teorema.
Iskazat će se klasični centralni granični teoremi koji su se pojavljivali kroz povijest i kojima su znanstvenici postupno dolazili do općeg centralnog graničnog teorema.
Nadalje, analizirati će se i uniformna konvergencija u centralnom graničnom teoremu, karakteristična funkcija, infinitezimalni sistem te još neki pojmovi.
Konačno, iskazat će se i dokazati opći centralni granični teorem.

Ključne riječi: vjerojatnosni prostor, slučajna varijabla, Bernoullijeva shema, konvergencija po distribuciji, karakteristična funkcija, infinitezimalni sistem, de Moivre Laplaceov teorem, centralni granični teorem

Abstract. This paper will reiterate the basic concepts of the probability theory such as probability space, random variable and Bernoulli's distribution that are needed to demonstrate and prove central limit theorem.
It will analyze classical central limit theorems which scientists used throughout history that helped them to discover general theory of central limit theorem.
It will also analyze characteristic function, infinitesimal system, uniform convergence in central limit theorem and other concepts.
Finally, it will show and prove general central limit theorem.

Key words: probability space, random variable, Bernoulli's scheme, convergence by distribution, characteristic function, infinitesimal system, de Moivre Laplace's theorem, central limit theorem.

Sadržaj

1 Uvod

Neki od najvažnijih dijelova moderne teorije vjerojatnosti su centralni granični teoremi. Ovaj termin uveo je mađarski matematičar George Polya (1887.-1985.) kako bi naglasio da je granično ponašanje niza $(Sn, n \in \mathbb{N})$, gdje je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, a $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ $(n \in \mathbb{N})$, u smislu konvergencije po distribuciji bilo u centru istraživanja u teoriji vjerojatnosti od 18.stoljeća.
Četrdesetih godina prošlog stoljeća objavljeno je potpuno rješenje proširene verzije centralnog graničnog problema, a za čije rješavanje će se koristiti metoda karakterističnih funkcija, pripadnim svojstvima karakterističnih funkcija, teoremom inverzije i teoremom neprekidnosti.
Prvi rezultat centralnog graničnog teorema početkom 18. stoljeća relativno jednostavnim matematičkim metodama dokazali su Abraham de Moivre (1667.-1754.) i Pierre-Simon Laplace (1749.-1827.) za Bernoullijevu shemu.
Zbog boljeg razumijevanja centralnih graničnih teorema, u poglavlju 2, definiramo osnovne pojmove iz teorije vjerojatnosti s naglaskom na Bernoullijevu shemu. U poglavlju 3 iskazali smo Levyjev teorem koji je prirodna generalizacija de Moivre-Laplaceovog teorema te još neke teoreme koji su nastali nastojanjem da se taj teorem generalizira. Rad se bavi integralnim de Moivre Laplacovim teoremom koji je poseban slučaj centralnog graničnog teorema te analizira uniformnu konvergenciju centralnog graničnog teorema. Konačno, definirati će se opći centralni granični teorem za čije rješenje je potrebna složena teorija beskonačno djeljivih distribucija.

2 Osnovni pojmovi iz teorije vjerojatnosti

Kako bismo mogli bolje razumjeti centralni granični teorem, definirajmo prvo osnovne pojmove iz teorije vjerojatnosti o kojima se može više saznati u [1].

Definicija 2.1 *Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nepraznog skupa elementarnih događaja, $\sigma-$algebre $\mathcal{F}$ na Ω i funkcije $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ koja je vjerojatnost zovemo* ***vjerojatnosni prostor****.*

Za vjerojatnosni prostor kažemo da je diskretan ako je $\sigma-$algebra $\mathcal{F}$ na Ω jednaka partitivnom skupu od Ω, pišemo $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Za primjene vrlo važan slučaj niza n ponovljenih nezavisnih pokusa je tzv. Bernoullijeva shema.

Definicija 2.2 ***Bernoullijeva shema*** *je diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ gdje je $\Omega = \Omega_1^n$, $P = P_1^n$. Pri tome je $\Omega_1 = \{0, 1\}$ dvočlani skup i $P_1 = \mathcal{P}(\Omega_1) \to [0, 1]$ vjerojatnost na Ω_1 takva da je $P_1(\{1\}) = p$, $P_1(\{0\}) = q = 1 - p$, za $0 \leq p \leq 1$.*

Dakle, Bernoullijeva shema metematički je model za n nezavisnih pokusa, koje nazivamo Bernoullijevi pokusi, od kojih svaki ima samo dva moguća ishoda $-$ "uspjeh" (1) i "neuspjeh" (0) $-$ pri čemu je vjerojatnost uspjeha u svakom pokusu ista.

Definicija 2.3 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $B(\mathbb{R})$ $\sigma-$ algebra na $\mathbb{R}$ određena svim otvorenim podskupovima na $\mathbb{R}$ koju zovemo Borelova $\sigma-$algebra. Svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju je skup $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, za svaki $B \in B(\mathbb{R})$ zove se* ***slučajna varijabla****.*

Slučajna varijabla može biti neprekidna ili diskretna, ovisno o tome je li joj slika neprekidan ili diskretan skup.

Definicija 2.4 *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, gdje je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija gustoće slučajne varijable X. Tada kažemo da je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (apsolutno)* ***neprekidna slučajna varijabla****.*

Definicija 2.5 *Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je* ***diskretna*** *ako postoji diskretan skup $D \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $P(X \in D) = 1$.*

Teorem 2.1 *Na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ je svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla i to diskretnog tipa.*

Teorem je iskazan i dokazan u [1].

Definicija 2.6 *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s pripadnim nizom funkcija distribucije $(F_n, n \in \mathbb{N})$. Ako postoji funkcija distribucije F tako da $F_n(x)$ konvergira u $F(x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$ u kojem je funkcija distribucije F neprekidna, onda kažemo da niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$* ***konvergira po distribuciji*** *prema slučanoj varijabli X kojoj je F funkcija distribucije. Oznaka $X_n \xrightarrow{D} X$.*

Konvergencija po distribuciji znači da , za dovoljno velik n, $PX_n \leq x$ možemo aproksimirati $F(x)$.

Sada ćemo navesti neke od glavnih primjera parametarski zadanih diskretnih slučajnih varijabli.

Slučajna varijabla X je **Bernoullijeva** ako može poprimiti točno dvije vrijednosti, odnosno ako joj je slika neki dvočlan skup. Distribucija Bernoullijeve slučajne varijable izgleda ovako:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{1-p} & \text{p} \end{pmatrix}.$$

Očekivanje Bernoullijeve slučajne varijable je $EX = p$, a varijanca $\text{Var}X = p(1-p)$. Navedimo jedan primjer Bernoullijeve slučajne varijable.

Primjer 2.1 *Slučajan pokus sastoji se od bacanja simetričnog novčića. Neka je X Bernoullijeva slučajna varijabla kojom modeliramo ishod bacanja (pismo ili glava). Primjerice, smatramo da je uspjeh ako je palo pismo, a neuspjeh ako je pala glava. Distribucija slučajne varijable je*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad 1 - \textit{palo je pismo}, \; 0 - \textit{pala je glava}.$$

Slučajna varijabla X čija je realizacija broj uspjeha u n (nezavisnih) ponavljanja Bernoullijevog pokusa naziva se **binomna slučajna varijabla**. Slika binomne slučajne varijable je skup $\{0, 1, \ldots, n\}$, a pripadne vjerojatnosti su $p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 0, 1 \rangle$.
Oznaka $X \sim B(n, p)$. Očekivanje binomne slučajne varijable je $EX = np$, a varijanca $\text{Var}X = np(1-p)$.

Primjer 2.2 *Stroj proizvodi CD-ove. Vjerojatnost da bude proizveden neispravan CD je p. Zanima nas broj neispravnih CD-ova ako s beskonačne trake uzimamo njih 100. Slučajna varijabla kojom modeliramo broj neispravnih CD-ova među 100 odabranih jest binomna slučajna varijabla X s parametrima $n = 100$ i p, a zadana je sljedećom tablicom distribucije:*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 100 \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_{100} \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = P(X = x_i) = \binom{100}{i} p^i (1-p)^{100-i}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, 100\}.$$

Osim diskretnih slučajnih varijabli, važne su i parametarski zadane neprekidne slučajne varijable. Jedna od takvih je normalna slučajna varijabla.

Slučajna varijabla X ima **normalnu distribciju** s parametrima $\mu = EX$ i $\sigma^2 = \text{Var}X$ ako joj je funkcija gustoće dana s

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x, \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Oznaka: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Najčešće se koristi **jedinična (standardna) normalna slučajna varijabla** za koju je karakteristično da joj je očekivanje $\mu = 0$ i varijanca $\sigma^2 = 1$.

Bernoullijeva shema bitna je jer su prvi tip centralnog graničnog teorema dokazali de Moivre i Laplace upravo za nju, što ćemo razmatrati u sljedećem poglavlju.

3 Centralni granični teorem

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$. U ovome poglavlju proučavat ćemo granično ponašanje niza $(S_n, n \in \mathbb{N})$ u smislu konvergencije po distribuciji.

3.1 Klasični centralni granični teoremi

Prvi rezultat tipa centralnog graničnog teorema dokazali su de Moivre i Laplace za Bernoullijevu shemu.

Teorem 3.1 *(de Moivre-Laplace)*
Neka je $S_n \sim B(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$. Tada vrijedi

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \text{ za } n \to \infty. \tag{1}$$

Dokaz. Slijedi iz teorema 3.2 koji je njegova prirodna generalizacija. □

Općenito, centralni granični teoremi govore o uvjetima pod kojima niz funkcija distribucije standardiziranih suma slučajnih varijabli konvergira prema funkciji distribucije standardne normalne slučajne varijable, pa navedimo neke od njih.

Teorem 3.2 *(Levy)*
Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem μ i varijancom σ^2, $\sigma^2 \in \langle 0, +\infty \rangle$, $\mu \in \mathbb{R}$ i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$\frac{S_n - ES_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{za } n \to +\infty. \tag{2}$$

Napomena 3.1 *Iznimno, ako je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz jednako distribuiranih Bernoullijevih slučajnih varijabli*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1\text{-}p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, 1 \rangle,$$

tada je $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, $ES_n = np$, $\mathrm{Var} S_n = np(1-p)$, pa možemo zaključiti da

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\mathrm{Var} S_n}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1).$$

Dakle, za velike n vjerojatnosti po binomnoj distribuciji mogu se približno računati koristeći normalnu distribuciju.

Primjer 3.1 *Neka je $X \sim \mathcal{B}(500, 0.4)$. Tada znamo da je*

$$P(X \leq 175) = \sum_{i=0}^{175} \binom{500}{i} 0.4^i 0.6^{500-i}.$$

Budući da je izračunavanje te sume komplicirano, a n velik, za izračun vjerojatnosti $P(X \leq 175)$ možemo koristiti aproksimaciju binomne distribucije normalnom distribucijom. Uočimo da je $np = 200$ i $\sqrt{np(1-p)} = 10.95$, pa slijedi da je

$$P(X \leq 175) = P\left(\frac{X-200}{10.95} \leq \frac{175-200}{10.95}\right) = P\left(\frac{X-200}{10.95} \leq -2.28\right) \approx P(Z \leq -2.28),$$

gdje je Z standardna normalna slučajna varijabla. Prethodnu vjerojatnost možemo izračunati korištenjem prikladnog matematičkog softvera:

$$P(X \leq 175) \approx 0.0113.$$

Analognim postupkom možemo aproksimirati i mnoge druge vjerojatnosti - tako je, npr. $P(175 < X \leq 225) \approx 0.98$.

Pokažimo sada primjenu teorema 3.2 na aritmetičku sredinu. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem μ i varijancom σ^2 i

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

S obzirom da je

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} S_n, \quad E\overline{X_n} = \mu, \quad \mathrm{Var}\overline{X_n} = \frac{\sigma^2}{n},$$

očito je

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\mathrm{Var} S_n}} = \sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}.$$

Dakle, prema teoremu 3.2 slijedi da

$$\sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1),$$

pa kažemo da se $\sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$ asimptotski ponaša kao slučajna varijabla s distribucijom $\mathcal{N}(0,1)$, odnosno da $\overline{X_n}$ asimptotski ima $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ distribuciju.

U teoremu 3.2, vrlo jaka pretpostavka je da su slučajne varijable jednako distribuirane. Kako bi generalizirali taj teorem, u sljedećem teoremu je dan prvi opći dovoljan uvjet za konvergenciju po distribuciji prema normalnoj razdiobi.

Teorem 3.3 *(Ljapunov)*
Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, *a* $s_n^2 = \mathrm{Var} S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var} X_k$, $n \in \mathbb{N}$. *Pretpostavimo da je* $s_1 > 0$ *i da postoji* $\delta > 0$ *takav da je* $E(|X_n|^{2+\delta}) < \infty$ *za sve n i da vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E[|X_k - EX_k|^{2+\delta}] = 0. \tag{3}$$

Tada $\dfrac{S_n - ES_n}{s_n} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$ *za* $n \to \infty$.

U ovome teoremu jak zahtjev je da se traži konačnost momenta reda većeg od 2. Teorem nećemo dokazivati, jer ćemo pokazati da je on posljedica sljedećeg općenitijeg teorema.
No prije toga definirajmo mjeru i integraciju po mjeri o čemu se može više saznati u [5].

Definicija 3.1 *Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra*[1] *na skupu X. Mjera na $\mathcal{A}$ svako je preslikavanje $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s ovim svojstvima:*

(i) (nenegativnost) $\mu(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$,

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$,

(iii) (σ-aditivnost ili prebrojiva unija) Za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathcal{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{4}$$

*Za $\mu(A)$ kaže se da je **mjera skupa** A. Trojka (X, A, μ) zove se **prostor mjere**. Kažemo da je mjera μ **konačna** ako je $\mu(X) < \infty$.*
*Mjera μ je σ-**konačna** ako se skup X može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne μ-mjere, tj. ako postoji niz $(A_i)_{i\in\mathcal{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ takvih da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i $\mu(A_i) < \infty$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.*
*Skup $A \in \mathcal{A}$ je σ-**konačan** s obzirom na mjeru μ ako se može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne μ-mjere.*

Za bolje razumjevanje definicije navedimo nekoliko primjera.

Primjer 3.2 *a) Ako za svaki $A \in \mathcal{A}$ stavimo $\mu(A) = 0$, dobivamo tzv. **trivijalnu mjeru**.*

b) Funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definirana formulom

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je} \quad A = \emptyset \\ \infty, & \text{ako je} \quad A \neq \emptyset \end{cases}$$

je mjera.

c) Funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definirana formulom

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je} \quad A = \emptyset \\ 1, & \text{ako je} \quad A \neq \emptyset \end{cases}$$

nije mjera. Zaista, ako su A_1,A_2 disjunktni neprazni skupovi iz $\mathcal{A}$, onda je $\mu(A_1 \cup A_2) = 1$, $\mu(A_1) + \mu(A_2) = 2$, što nam govori da nije σ-aditivna funkcija.

[1] Familiju $\mathcal{A}$ podskupova skupa X nazivamo σ-algebrom skupova na skupu X, ako ona ima sljedeća svojstva:

- (σ_1) $X \in \mathcal{A}$,
- (σ_2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
- (σ_3) unija prebrojivo mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$.

Za uređeni par $(X, \mathcal{A})$ kažemo da je izmjeriv prostor, a elemente iz $\mathcal{A}$ nazivamo izmjerivim skupovima. Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ skup i $f : A \to Y$ funkcija. Funkcija f je izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, ili kraće $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ izmjeriva, ako je $f^1(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$. Pritom $f^{-1}(B)$ označava original skupa B, tj.

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\} \subseteq A.$$

Definicija 3.2 *(Integral izmjerive funkcije)*
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija.

1. *Ako je barem jedan od brojeva $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ konačan, onda se definira broj*

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

i zovemo ga integral funkcije f s obzirom na mjeru μ ili kraće integral funkcije f. Za funkciju f kažemo da je integrabilna ako je $\int f d\mu$ konačan.

2. *Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Ako je definiran integral $\int \chi_E f d\mu$, onda broj*

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu$$

zovemo integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ ili kraće integral funkcije f na skupu E. Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E ako je $\int_E f d\mu < \infty$.

Za kraj definirajmo integraciju na izmjerivom skupu.

Definicija 3.3 *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$. Ako je definiran integral $\int f \chi_A d\mu$, onda broj*

$$\int_A f d\mu := \int f \chi_A d\mu$$

zovemo integral funkcije f na skupu A s obzirom na mjeru μ. Funkcija f je integrabilna na skupu $A \in \Sigma$ ako je $\int_A f d\mu$ konačan broj.

Teorem 3.4 *(Lindeberg) Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s konačnim varijancama i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m_n = EX_n$, $s_n^2 = \mathrm{Var} S_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $s_1 > 0$. Ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{x; |x - m_k| \geq \varepsilon s_n\}} (x - m_k)^2 dF_{x_k}(x) = 0, \tag{5}$$

Tada $\dfrac{S_n - ES_n}{s_n} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$ za $n \to \infty$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $m_k = 0$ za sve k. Zaista, ako je teorem dokazan za taj slučaj, stavimo

$$X_k' = X_k - m_k \quad \text{(dakle je} \quad EX_k' = 0)$$
$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} X_k'$$

Tada imamo $\dfrac{S_n' - ES_n'}{S_n'} = \dfrac{S_n - ES_n}{S_n}$ i vrijedi

$$\int\limits_{\{x; |x - m_k| \geq \varepsilon S_n\}} (x - m_k)^2 dF_{X_k}(x) = E[(X_k - m_k)^2 K_{\{|X_k - m_k| \geq \varepsilon S_n\}}] =$$
$$= E[(X_k')^2 K_{\{|X_k'| \geq \varepsilon S_n\}}] = \int\limits_{\{x; |x| \geq \varepsilon S_n'\}} x^2 dF_{X_k'}(x).$$

$\square$

Sada pokažimo da Ljapunovljev uvjet (3) povlači Lindebergov uvjet (5).

Napomena 3.2 *Neka niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ zadovoljava uvjete teorema 3.3. Vrijedi*

$$E[|X_k - EX_k|^{2+\delta}] = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m_k|^{2+\delta} dF_{x_k}(x) \geq$$
$$\geq \int_{\{x;|x-m_k|\geq \varepsilon s_n\}} |x - m_k|^{\delta} |x - m_k|^2 dF_{x_k}(x) \geq$$
$$\geq \varepsilon^{\delta} s_n^{\delta} \int_{\{x;|x-m_k|\geq \varepsilon s_n\}} (x - m_k)^2 dF_{x_k}(x).$$

Prema tome, imamo

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{x;|x-m_k|\geq \varepsilon s_n\}} (x - m_k)^2 dF_{x_k}(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^{\delta} s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E[|X_k - EX_k|^{2+\delta}] \to 0 \quad \textit{za } n \to \infty.$$

Pokažimo da Lindebergov uvjet nije nužan za konvergenciju prema $\mathcal{N}(0,1)$. Najprije dokažimo da, ako je ispunjen Lindebergov uvjet, tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} P\left\{ \frac{|X_k - m_k|}{s_n} \geq \varepsilon \right\} = 0,$$

u tome slučaju kažemo da su slučajne varijable $\dfrac{X_k - m_k}{s_n}$ **uniformno asimptotski zanemarive** ili da čine **infinitezimalni sistem** (vidi definiciju). Zaista, vrijedi

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{x;|x-m_k|\geq \varepsilon s_n\}} (x - m_k)^2 dF_{x_k}(x) \geq$$
$$\geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k - m_k| \geq \varepsilon s_n\} \geq$$
$$\geq \varepsilon^2 \max_{1\leq k\leq n} P\{|X_k - m_k| \geq \varepsilon s_n\}.$$

Dakle, ako nađemo primjer niza koji nije uniformno asimptotski zanemariv i $\dfrac{S_n - ES_n}{s_n} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$, tada imamo konvergenciju prema $\mathcal{N}(0,1)$ bez Lindebergovog uvjeta.
S druge strane, ako su slučajne varijable uniformno asimptotski zanemarive, tada je Lindebergov uvjet nužan i dovoljan za konvergenciju prema $\mathcal{N}(0,1)$. Ta tvrdnja je iskazana i dokazana u [2].
Kako bismo bolje razumjeli prethodno razmatranje, definirajmo još neke pojmove.

Definicija 3.4 *Familiju slučajnih varijabli oblika*

$$\begin{array}{l} X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1k_1} \\ X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2k_2} \\ \ldots \\ X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}, \end{array}$$

gdje je $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$ *zovemo* ***dvostruki niz*** *slučajnih varijabli i označavamo sa* $\{\{X_{nk}\}\}$.

Definicija 3.5 *Kažemo da je dvostruki niz* $\{\{X_{nk}\}\}$ ***infinitezimalan sistem*** *slučajnih varijabli ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le k_n} P\{|X_{nk}| \ge \varepsilon\} = 0.$$

Općenito, klasični centralni granični teoremi bave se konvergencijom po distribuciji niza $\left(\frac{S_n}{a_n} - b_n, n \in \mathbb{N}\right)$ prema mogućoj nedegeneriranoj distribuciji, gdje su $(a_n, n \in \mathbb{N})$ i $(b_n, n \in \mathbb{N})$ nizovi konstanti, a $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

3.2 Integralni oblik centralnog graničnog teorema

U ovom poglavlju govorit ćemo o integralnom Moivre-Laplaceovom teoremu koji je specijalan slučaj centalnog graničnog teorema.
Za početak iskažimo i dokažimo lokalni Moivre –Laplaceov teorem koji je potreban za dokaz integralnog oblika.

Teorem 3.5 *(Lokalni Moivre-Laplaceov teorem) Neka je* $0 < p < 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ *i* $x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $K = 0,1,2,\dots,n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi npq}P(X_n = k)}{e^{-\frac{x^2 k}{2}}} = 1, \tag{6}$$

i to uniformno na svakome ograničenomm segmentu $[a,b]$, $a \le x_k \le b$, *za sve k i n.*

Dokaz. Neka su $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i stavimo $n-k = m$. Iz $a \le x_k \le b \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} k &= \lim_{n\to\infty}(np + x_k\sqrt{npq}) = \infty, \\ \lim_{n\to\infty} m &= \lim_{n\to\infty}(nq - x_k\sqrt{npq}) = \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Za svako $r \in \mathbb{N}$ vrijedi Stirlingova formula

$$r! = \sqrt{2\pi r}r^r e^{-r} e^{t_r}, \quad \left(0 < t_r < \frac{1}{12r}\right). \tag{8}$$

Odavdje izlazi

$$P(X_n = k) = \frac{n!}{k!m!}p^k q^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{km}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{m}\right)^m e^t, \tag{9}$$

gdje je $t = t_n - t_k - t_m$. Tada je

$$|t| < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right). \tag{10}$$

Budući da je $k = np + x_k\sqrt{npq} \ge np + a\sqrt{npq} = np\left(1 + a\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$ i $m = nq - x_k\sqrt{npq} \ge nq - b\sqrt{npq} = nq\left(1 - b\frac{p}{nq}\right)$, iz (10) slijedi

$$|t| < \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p\left(1 + a\sqrt{\frac{q}{np}}\right)} + \frac{1}{q\left(1 - b\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)}\right). \tag{11}$$

Prema tome, ocjena (11) vrijedi uniformno po $x_k \in [a,b]$, a odatle slijedi da za $n \to \infty$ faktor e^t iz (9) uniformno za $x_k \in [a,b]$ konvergira prema 1.

$$K_n = \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{m}\right)^m. \tag{12}$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} \ln K_n &= -k \ln \frac{k}{np} - m \ln \frac{m}{nq} = \\ &= -(np + x_k\sqrt{npq}) \ln \left(1 + x_k\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - \\ &\quad -(nq - x_k\sqrt{npq}) \ln \left(1 - x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \end{aligned}$$

Za n dovoljno velik, za svako $x_k \in [a,b]$ izrazi $x_k\sqrt{\frac{q}{np}}$ i $x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}$ proizvoljno su blizu nuli. Za takve n načinimo razvoj u red potencija

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + x_k\sqrt{\frac{q}{np}}\right) &= x_k\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{qx_k^2}{2np} + R_1(x_k), \\ \ln \left(1 - x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) &= -x_k\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{px_k^2}{2nq} + R_2(x_k). \end{aligned}$$

Stavimo $Q = \max\{|a|,|b|\}$. Tada za svako $x_k \in [a,b]$ vrijedi

$$\begin{aligned} |R_1(x_k) &\leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{Q^k}{k} \left(\frac{q}{np}\right)^{\frac{k}{2}} \\ |R_2(x_k) &\leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{Q^k}{k} \left(\frac{p}{nq}\right)^{\frac{k}{2}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Iz (13) slijedi da je uniformno za $x_k \in [a,b]$, $R_1(x_k) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, $R_2(x_k) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} n\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) = 0\right)$.
Sada imamo

$$\begin{aligned} \ln K_n = -(np + x_k\sqrt{npq}) &\left(x_k\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{qx_k^2}{2np} + R_1(X_K)\right) - \\ -(nq + x_k\sqrt{npq}) &\left(x_k\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{px_k^2}{2nq} + R_2(X_K)\right) = \\ &= -\frac{x_k^2}{2} + \mathcal{O}(1), \end{aligned} \tag{14}$$

s tim da je $\lim\limits_{n\to\infty} \wr(1) = 0$ uniformno za $x_k \in [a,b]$.
Iz (12) i (14) slijedi je uniformno za $x_k \in [a,b]$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{m}\right)^m}{e^{-\frac{x^2k}{2}}} = 1. \tag{15}$$

Dalje imamo

$$\frac{km}{n} = n\left(p + x_k\sqrt{\frac{pg}{n}}\right)\left(q - x_k\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = npq + (q-p)x_k\sqrt{npq} - pqx_k^2.$$

Odavdje dobijemo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{km}{n}}{npq} = 1 \tag{16}$$

uniformno za $x_k \in [a,b]$.
Sada (6) slijedi iz (9), (15) i (16). □

Formula (6) za primjene ima ovu interpretaciju: ako je n dovoljno velik i $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, $0 < p < 1$, tada je

$$P(X_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}. \tag{17}$$

Primjetimo da iz uvjeta teorema 3.5 slijedi da iz $n \to \infty$ slijedi da i $k \to \infty$ tako da kod primjene relacije (17), ako želimo dovoljno dobar rezultat, k ne treba uzimati "suviše" malo. U izrazu (17) pojavljuje se Gaussova ili normalna funkcija koja je u vezu sa jediničnom normalnom razdiobom, a definirina je s

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad x \geq 0$$

Funkcija je parna, a njezin graf izgleda ovako

norm.png

Slika 1: Graf normalne distribucije

Dakle relacija (17) prelazi (uz $x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$) u

$$P(X_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_k). \tag{18}$$

Navedimo sad primjer u kojem pri rješavanju koristimo izraz (18).

Primjer 3.3 *Vjerojatnost da pojedini proizvod izabran nasumce iz velike serije proizvoda bude škartan jest* 0.001- *Kolika je vjerojatnost da će među* 10000 *nasumce izabranih proizvoda iz te serije biti točno* 100 *škartova?*
Sa X označimo slučajan broj škartova u ovom uzorku od 10000 *proizvoda. Tada je* $X \sim \mathcal{B}(10000, 0.01)$, *dakle* $n = 10000$, $p = 0.01$, $q = 0.99$, $k = 100$, $np = 100$, $\sqrt{npq} = \sqrt{99} = 9.95$. *Dalje je* $\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = 0$, *pa iz* (18) *slijedi*

$$P(X = 100) \approx \frac{1}{9.95}\varphi(0) = \frac{0.3989}{9.95} \approx 0.04.$$

Definirali smo sve što nam je potrebno za integralni de Moivre-Laplaceov teorem pa iskažimo ga onda.

Teorem 3.6 *(Integralni Moivre-Laplaceov teorem) Neka je* $0 < p < 1$ *i* $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Tada za proizvoljne* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{19}$$

Dokaz. Neka je $x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Tada imamo

$$\left| P\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \right| = \sum_{\substack{k \\ x_k \in [a,b]}} P(X_n = k). \tag{20}$$

Iz teorema 3.5 slijedi da za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj $n_0(\varepsilon)$ takav da je

$$\frac{P(X_n = k) - \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_k)}{P(X_n = k)} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \geq n_0(\varepsilon),$$

uniformno po k za koje je $x_k \in [a,b]$. Odavdje slijedi

$$\left| \sum_{x_k \in [a,b]} P(X_n = k) - \sum_{x_k \in [a,b]} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{x_k \in [a,b]} P(X_n = k) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{21}$$

Zbog $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ (21) prelazi u

$$\left| P\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) - \sum_{x_k \in [a,b]} \varphi(x_k) \Delta x_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \geq n_0(\varepsilon). \tag{22}$$

Neka je $k' = min\{k; k = 0, 1, \ldots, n,\ x_k \in [a,b]\}$, $k'' = \max\{k; k = 0, 0, \ldots, n,\ x_k \in [a,b]\}$ i

$$x' = \frac{k' - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k'' - np}{\sqrt{npq}}.$$

Tada je $\sum\limits_{k=k'+1}^{k''} \varphi(x_k) \Delta x_k$ integralna suma funkcije $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ na segmentu $[x', x'']$. Budući da dijametar subdivizije kojoj odgovara ova integralna suma $\left(\frac{1}{\sqrt{npq}}\right)$ teži k nuli za $n \to \infty$, to za dano $\varepsilon > 0$ postoji broj $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left| \sum_{x_k \in [a,b]} \varphi(x_k) \Delta x_k - \int\limits_{x'}^{x''} \varphi(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \geq n_1(\varepsilon). \tag{23}$$

No $x' - a, b - x'' \leq \frac{1}{\sqrt{npq}}$ i $|\varphi(x)| < 1$, $x \in \mathbb{R}$ pa postoji $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\left| \int\limits_{x'}^{x''} \varphi(x) dx - \int\limits_{a}^{b} \varphi(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \geq n_2(\varepsilon). \tag{24}$$

Neka je $n(\varepsilon) = \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Tada iz (22), (23) i (24) slijedi

$$\left| P\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| < \varepsilon, \quad n \geq n(\varepsilon),$$

dakle vrijedi (19). $\square$

U slučaju da imamo velike n vrijedi

$$P\left(a < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) \approx F^*(b) - F^*(a),$$

odnosno

$$P(a < X < b) \approx F^*\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F^*\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Gdje je $F^*(x)$ funkcija distribucije standardne normalne distribucije definirana s

$$F^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo ovo što bolje razumjeli navedene izraze primjenimo na nekom jednostavnom primjeru.

Primjer 3.4 *Vjerojatnost da novorođenče bude muško ili žensko je $1/2$. Kolika je vjerojatnost da među 1000 novorođenčadi bude barem 490 muških?*
Rješenje: *$X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $n = 1000$, $p = 1/2$. Trebamo izračunati $P(X \geq 490) = 1 - P(X \leq 490)$. Prema integralnom Moivre-Laplaceovom teoremu $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, $n \to \infty$, i vrijedi aproksimacija $P(a < X < b) \approx F^*\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F^*\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$.*

$$P(X \leq 190) \approx F^*\left(\frac{490 - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{1000 \cdot 0.25}}\right) = F^*\left(-\frac{10}{\sqrt{250}}\right) = 1 - F^*\left(\frac{10}{\sqrt{250}}\right) =$$
$$= 1 - F^*(0.63) = 1 - 0.7357 = 0.2643.$$
$$P(X \geq 490) = 1 - P(X \leq 490) \approx 1 - 0.2643 = 0.7357.$$

Integralni de Moivre-Laplaceov teorem za relativne frevencije binomne slučajne varijable ima nešto drugačiji oblik, tj.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2 \lim_{n\to\infty} F^*\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 1.$$

Ova relacija ima sljedeću interpretaciju: ako je u Bernoullijevoj shemi n dovoljno veliko, tada je vjerojatnost da se relativna frekvencija uspjeha u n pokusa $\left(\frac{X_n}{n}\right)$ po apsolutnoj vrijednosti razlikuje od vjerojatnosti uspjeha u svakome pojedinom pokusu (p) za manje od proizvoljnog, unaprijed zadanog broja po volji blizu 1. Potkrijepimo to sljedećim primjerom.

Primjer 3.5 *Kolika je vjerojatnost da prilikom 3600 bacanja simetričnog novčića relativna frekvencija pisama po apsolutnoj vrijednosti razlikuje od $1/2$ za manje od 0.01?*
Neka je $X \sim \mathcal{B}(3600, 1/2)$. Imamo

$$P\left(\left|\frac{X}{3600} - \frac{1}{2}\right| < 0.01\right) = P(1764 < X < 1836) \approx$$
$$\approx 2F^*(0.01 \cdot \sqrt{4 \cdot 3600}) = 2F^*(1.2) \approx 0.76986.$$

3.3 Uniformna konvergencija u centralnom graničnom teoremu

Neka je $(X_k, k \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s konačnim varijancama, neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $a_n = ES_n$, $s_n^2 = \mathrm{Var} S_n \quad (n \in \mathbb{N})$ i neka $T_n = \frac{1}{S_n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ za $n \to \infty$, S_n je približno $N(a_n, s_n^2)$, tj. vrijedi

$$F_{S_n}(x) = \frac{1}{S_n\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(t-a_n)^2}{2s_n^2}} \quad d \to 0 \quad \text{za} \quad n \to \infty. \tag{25}$$

Neka je $X^* \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $X \sim N(a_n, s_n^2)$. Tada imamo

$$|P(S_n \leq x) - P(X \leq x))| = \left| P\left(T_n \leq \frac{x-a_n}{S_n}\right) - P\left(X^* \leq \frac{x-a_n}{S_n}\right)\right| =$$

$$= \left| F_{T_n}\left(\frac{x-a_n}{S_n}\right) - F_{X^*}\left(\frac{x-a_n}{S_n}\right)\right|.$$

Odavde slijedi: (25) vrijedi ako $F_{T_n} \to F_{X^*}$ uniformno na $\mathbb{R}$. Ova tvrdnja proizlazi iz sljedeća dva teorema.

Teorem 3.7 *Neka su $F, F_1, F_2, \ldots$ ograničene funkcije distribucije na $\mathbb{R}$ i neka je S gust podskup od $\mathbb{R}$ koji sadrži sve točke prekida od F. Ako vrijedi*

$$\begin{aligned} &F_n(\infty) \to F(\infty) \\ &F_n(-\infty) \to F(-\infty) \\ &F_n(x) \to F(x) \quad \text{za sve} \quad x \in S, \\ &F_n(-x) \to F(-x) \quad \text{za sve} \quad x \in S, \end{aligned} \tag{26}$$

tada $F_n \to F$ uniformno na $\mathbb{R}$.

Teorem 3.8 *Neka su $F, F_1, F_2, \ldots$ ograničene funkcije distribucije na $\mathbb{R}$ i neka je $F_n(-\infty) = 0$. Pretpostavimo da je F svuda neprekidna i da $F_n \xrightarrow{w} F$. Tada F_n konvergira prema F uniformno na $\mathbb{R}$.*

3.4 Opći centralni granični teorem

Prije nego što iskažemo i dokažemo Opći centralni granični teorem potrebno je iskazati određene tvrdnje i teoreme koji su potrebni za njegovo dokazivanje.
Počnimo s karakterističnom funkcijom i tvrdnjama vezanim za nju.

Definicija 3.6 ***Karakteristična funkcija*** *od F jest funkcija φ definirana sa*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos txdF(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin txdF(x), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Za svako $t \in \mathbb{R}$ funkcija $x \mapsto e^{itx}$ je neprekidna i budući da je $|e^{itx}| = 1$, φ je dobro definirana, tj. imamo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Definicija 3.7 *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F_X.* ***Karakteristična funkcija*** *φ_X od X je karakteristična funkcija od F_X.*

Definicija 3.8 *Karakteristična funkcija φ* ***beskonačno*** *je* ***djeljiva*** *ako za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji karakteristična funkcija φ_n takva da je $\varphi = \varphi_n^n$.*

Definicija 3.9 *Funkcija distribucije F* ***beskonačno*** *je* ***djeljiva*** *ako je njezina karakteristična funkcija beskonačno djeljiva.*

Definicija 3.10 *Slučajna varijabla X* ***beskonačno*** *je* ***djeljiva*** *ako je njezina karakteristična funkcija φ_x (odnosno funkcija distribucije F_X) beskonačno djeljiva.*

Teorem 3.9 *Neka su* $\varphi_n \quad (n \in \mathbb{N})$ *i* φ *karakteristične funkcije različite od nule. Tada niz* $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira prema* φ *ako i samo ako niz* $(\ln \varphi_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira prema* $\ln \varphi$.

Propozicija 3.10 *Beskonačno djeljiva karakteristična funkcija nigdje ne iščezava.*

Propozicija 3.11 *Produkt od konačno mnogo beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija jest beskonačno djeljiva karakteristična funkcija.*

Propozicija 3.12 *Karakteristična funkcija koja je limes niza beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija, također je beskonačno djeljiva.*

Propozicija 3.13 *Neka su* $Y, X_1, X_2, \ldots$ *nezavise slučajne varijable, pri čemu je* $Y \sim P(\lambda)$, *a* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *su jednako distribuirane sa zajedničkom karakterističnom funkcijom* φ. *Tada je* $Z = X_1 + \ldots + X_Y$ *beskonačno djeljiva slučajna varijabla s karakterističnom funkcijom* $e^{\lambda(\varphi - 1)}$.

Navođenjem svih ovih tvrdnji vezanih za karakteristične funkcije, zaključujemo da one imaju ključnu ulogu u rješavanju centralnog graničnog problema.
Nadalje, kako bi mogli iskazati sljedeći teorem koji nam je potreban, najprije trebamo definirati Levy-Hinčinov par.

Teorem 3.14 *(Levy-Hinčin) Funkcija* φ *je beskonačno djeljiva karakteristična funkcija ako i samo ako postoji* $\gamma \in \mathbb{R}$ *i ograničena funkcija distribucije* G *na* $\mathbb{R}$ *takva da je*

$$\varphi(t) = \exp\left[i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x)\right], \quad t \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Osim toga, ova reprezentacija je jedinstvena.

Dakle, relaciju (28) zovemo **Levy-Hinčinova reprezentacija** od φ. Uređen par (γ, G) zovemo **Levy-Hinčinov par pridružen** φ odnosno njezinoj funkciji distribucije.
Sada možemo iskazati teorem koji ćemo koristit u dokazu općeg centralnog graničnog teorema.

Teorem 3.15 *Neka je* $(F_n, n \in \mathbb{N})$ *niz beskonačno djeljivih funkcija distribucije s pridruženim Levy-Hinčinovim parovima* (γ_n, G_n) $(n \in \mathbb{N})$. *Ako* $F_n \xrightarrow{w} F$, *pri čemu je* (γ, G) *par pridružen* F, *tada* $\gamma_n \to \gamma$ *i* $G_n \xrightarrow{w} G$ *za* $n \to \infty$. *Obratno, ako postoje* $\gamma \in \mathbb{R}$ *i ograničena funkcija distribucije* G *takvi da* $\gamma_n \to \gamma$ *i* $G_n \xrightarrow{w} G$ *za* $n \to \infty$, *tada* $F_n \xrightarrow{w} F$, *pri čemu je* F *beskonačno djeljiva s pridruženim parom* (γ, G).

Osim tvrdnji vezanih za karakterističnu funkciju za dokaz su potrebne i neke tvrdnje koje vrijede za infinitezimalan sistem kojeg smo definirali u poglavlju 3.1.

Propozicija 3.16 *Dvostruki niz* $\{\{X_{nk}\}\}$ *infinitezimalan je sistem ako i samo ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le k_n} |\varphi_{nk}(t) - 1| = 0, \tag{29}$$

uniformno na svakom ograničenom intervalu.

Propozicija 3.17 *Dvostruki niz* $\{\{X_{nk}\}\}$ *infinitezimalan je sistem ako i samo ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x) = 0. \tag{30}$$

Korolar 3.1 *Ako je $\{\{X_{nk}\}\}$ infinitezimalan sistem, tada je i $\{\{X_{nk} - a_{nk}\}\}$ infinitezimalan sistem.*

Teorem 3.18 *Neka je $\{\{X_{nk}\}\}$ infinitezimalan sistem koji je nezavisan po recima i neka je $(c_n, n \in \mathbb{N})$ niz konstanti takav da niz $\left(\sum\limits_{k=1}^{k_n} X_{nk} - c_n, n \in \mathbb{N}\right)$ konvergira po distribuciji. Tada postoji konstanta C koja zavisi samo o τ, takva da za sve n vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk}) < C, \tag{31}$$

gdje je $a_{nk} = \int\limits_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x)$ i $\tau > 0$.

Teorem 3.19 *Neka je $\{\{X_{nk}\}\}$ infinitezimalan sistem i neka je*

$$\beta_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) dF_{nk}(x + a_{nk}). \tag{32}$$

Tada postoji konstanta C koja zavisi samo od τ i t takva da za sve n vrijedi

$$\sum_{k=1}^{k_n} |\beta_{nk}(t)| \leq C \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk}). \tag{33}$$

Definicija 3.11 *Neka je $\{\{X_{nk}\}\}$ infinitezimalan sistem slučajnih varijabli koji je nezavisan po recima, tj. za svako n su $X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}$ nezavisne ($\lim\limits_n k_n = \infty$). Stavimo $Z_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n} - c_n (n \in \mathbb{N})$, gdje je $(c_n, n \in \mathbb{N})$ niz u $\mathbb{R}$. Niz $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ zovemo* ***niz centriranih suma nezavisnih slučajnih varijabli iz inifintezimalnog sistema****, a c_n zovemo* ***konstante centriranja****.*

Sada imamo sve što nam je potrebno pa iskažimo opći centralni teorem.

Teorem 3.20 *(Centralni granični teorem) Neka je $\{\{X_{nk}\}\}$ infinitezimalan sistem slučajnih varijabli koji je nezavisan po recima i neka je $(c_n, n \in \mathbb{N})$ niz konstanti. Niz centriranih suma $\left(\sum\limits_{k=1}^{k_n} X_{nk} - c_n, n \in \mathbb{N}\right)$ konvergira po distribuciji prema slučanoj varijabli Z, koja je nužni beskonačno djeljiva, ako i samo karakteristične funkcije*

$$\varphi(t) = \exp\left\{-ic_n t + \sum_{k=1}^{k_n} \left[ia_{nk} t + \int -\infty^{\infty} (e^{itx} -) dF_{nk}(x + a_{nk})\right]\right\} \tag{34}$$

konvergira prema φ_Z.

Dokaz. Koristeći se propzicijom 3.13 i propozicijom 3.11, zaključujemo da je funkcija φ_n definirana sa (34) beskonačno djeljiva karakteristična funkcija. Prema toma, φ_n nigdje ne iščezava (propozicija 3.10), dakle je $\ln \varphi_n(t)$ definirano za sve t.

Neka je Ψ_n karakteristična funkcija od $\sum_k X_{nk} - c_n (n \in \mathbb{N})$. Prema teoremu neprekidnosti nužan i dovoljan uvjet za $\sum_k X_{nk} - c_n \xrightarrow{D} Z$ za $n \to \infty$ jest da vrijedi

$$\varphi_Z(t) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left[\exp(-ic_n t) \prod_k \varphi_{nk}(t)\right], \quad t \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Neka je φ^*_{nk} karakteristična funkcija od $X_{nk} - a_{nk}$, dakle vrijedi

$$\varphi^*_{nk}(t) = \exp[-ia_{nk}t]\varphi_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{nk}(x + a_{nk}). \tag{36}$$

Stavimo

$$\beta_{nk}(t) = \varphi^*_{nk}(t) - 1. \tag{37}$$

Prema korolaru 3.1 $\{\{X_{nk} - a_{nk}\}\}$ je infinitezimalan sistem, pa iz propozicije 3.16 slijedi

$$\lim_n \max_k |\beta_{nk}(t)| = 0, \tag{38}$$

uniformno na svakome ograničenom intervalu. Osim toga imamo

$$\Psi_n(t) = \exp\left[-ic_n t + it \sum_k a_{nk}\right] \prod_k \varphi^*_{nk}(t). \tag{39}$$

Iz (38) i (39) slijedi da je za svaki ograničeni interval i dovoljno velik n, $\Psi_n(t)$ različito od nule, dakle je definiran $\ln \Psi_n(t)$. Koristeći se (34), (36), (37) i (39) dobijemo

$$|\ln \Psi_n(t) - \ln \varphi_n(t)| = \left|\sum_k [\ln \varphi^*_{nk}(t) - \beta_{nk}(t)]\right|. \tag{40}$$

Neka je n dovoljno velik tako da je $|\beta_{nk}(t)| < \frac{1}{2}$ (neovisno o k). Tada imamo

$$\ln \varphi^*_{nk}(t) = \ln[1 + \beta_{nk}(t)] \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{[\beta_{nk}(t)]^j}{j}, \tag{41}$$

pa iz (40) slijedi

$$\begin{aligned} |\ln \Psi_n(t) - \ln \varphi_n(t)| &\leq \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|\beta_{nk}(t)|^j}{j} \leq \\ \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{|\beta_{nk}(t)|^2}{1 - |\beta_{nk}(t)|} &\leq [\max_k |\beta_{nk}(t)|] \sum_{k=1}^{k_n} |\beta_{nk}(t)|. \end{aligned} \tag{42}$$

Koristeći se teoremom 3.19, zaključujemo da za dovoljno velike n vrijedi

$$|\ln \Psi_n(t) - \ln \varphi_n(t)| \leq C_1[\max_k |\beta_{nk}(t)|] \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk}), \tag{43}$$

pri čemu konstanta C_1 ne ovisi o n.

Pretpostavimo sada da niz $\left(\sum_k X_{nk} - c_n, n \in \mathbb{N}\right)$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli Z. Prema teoremu 3.18 postoji konstanta $C_1 > 0$ koja ne ovisi o n, takva da za sve n vrijedi

$$\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk}) < C_2. \tag{44}$$

Iz (38), (43) i (44) slijedi

$$\lim_{n\to\infty} |\ln \Psi_n(t) - \ln \varphi_n(t)| = 0, \tag{45}$$

a budući da je prema (35) $\varphi_Z(t) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(t)$, zaključujemo (vidi teorem 3.9) da vrijedi $\varphi_Z(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$. φ_Z je beskonačno djeljiva prema propoziciji 3.12.

Obratno, pretpostavimo da niz $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira prema nekoj karakterističnoj funkciji φ_Z. Definirajmo funkciju G_n na $\mathbb{R}$ sa

$$G_n(x) = \sum_k \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2} dF_{nk}(y + a_{nk}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

Tada imamo

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{ i\gamma_n t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_n(x) \right\}, \tag{47}$$

gdje je

$$\gamma_n = -c_n + \sum_k \left[a_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk}) \right]. \tag{48}$$

φ_Z je beskonačno djeljiva karakteristična funkcija prema propoziciji 3.12, pa je ona jednozančno određena svojim Levy-Hinčinovim parom (γ, G). Prema teoremu 3.15 imamo $\gamma_n \to \gamma$ i $G_n \xrightarrow{w} G$ za $n \to \infty$. Specijalno imamo

$$G_n(\infty) = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk}) \to G(\infty) \quad \text{za} n \to \infty. \tag{49}$$

Odavdje zaključujemo da je niz $(G_n(\infty), n \in \mathbb{N})$ ograničen, dakle postoji konstanta C_2 koja ne ovisi o n takva da za sve n vrijedi (44). Budući da (38) i (43) vrijede, zaključujemo da vrijedi (40), a odatle slijedi $\varphi_Z(t) = \lim_n \Psi_n(t)$ za sve t, tj. $\sum_k X_{nk} - c_n \xrightarrow{D} Z$ za $n \to \infty$.

□

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, Uvod u vjerojatnost i statistiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek,2014.

[2] R. Durrett, Probability (Theory and Examples), Fourth Edition, Cambridge Univ. Press, 2010.

[3] G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker, Probability and Random processes, Oxford Univ. Press, 2001.

[4] N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[5] D. Jukić, Mjera i integral, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.