Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Iva Babić

Dokazi u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Iva Babić

Dokazi u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

1 Uvod

Za matematičare dokazi imaju bitnu ulogu u utvrđivanju valjanosti matematičkih tvrdnji. No, kakva je situacija u školama? Imaju li dokazi svoje mjesto u nastavi matematike i je li uopće potrebno učiti dokaze u školi? Mnogi učenici ne shvaćaju razloge dokazivanja i rijetko kad vide potrebu za dokazivanjem. Stručnjaci se slažu oko toga da učenici trebaju učiti dokaze u školama jer tako uče rasuđivati i zaključivati, a to je upravo jedan od glavnih zadataka nastave matematike. Dokazivanje bi u nastavi stalno trebalo biti uključeno, bez obzira koja se tema uči. Poučavanje dokaza za učitelje matematike predstavlja velik izazov. Zbog poteškoća s kojima se susreće većina učenika pri učenju dokazivanja, mnogi učitelji odustaju od poučavanja dokaza, ali naravno postoje odgovarajuće nastavne metode pomoću kojih je moguće prevladati te poteškoće.

U radu ćemo navesti koje su glavne funkcije dokaza te objasniti potrebu za poučavanjem dokaza iz znanstvene i pedagoške perspektive. Reći ćemo nešto i o povijesti dokaza te kakav utjecaj ima na današnje dokaze. Zatim ćemo govoriti o potrebama učenika za dokazivanjem i što bi ih moglo potaknuti na dokazivanje.

Predstavit ćemo i rezultate jednog istraživanja u kojem su osmišljenje aktivnosti koje kod učenika potiču potrebu za dokazivanjem. Nakon toga navest ćemo što je to heuristički dokaz i objasniti na temelju primjera. Na kraju rada predstavit ćemo neke primjere dokaza koji se nalaze u udžbenicima matematike posebno za osnovne i posebno za srednje škole.

2 Potreba za dokazima i dokazivanjem iz znanstvene i pedagoške perspektive

Postavlja se pitanje zašto učiti dokaze i koja je svrha učenja dokaza. Glavne uloge dokaza u matematici su valjanost, objašnjenje, sistematizacija rezultata i prenošenje matematičkog znanja. Dokaz pokazuje da je matematička tvrdnja istinita uz pretpostavke određenih aksioma. Ipak, matematičari gledaju izvan utvrđivanja istine, zanima ih zašto neka tvrdnja vrijedi. Stoga dokazi mogu imati moć objašnjenja. Tijekom dokazivanja, matematičari mogu otkriti nove rezultate. Dokazi su od primarne važnosti za matematiku jer obuhvaćaju alate, metode i strategije za rješavanje problema.

2.1 Potreba za poučavanjem dokaza

Matematički kurikulumi u zemljama širom svijeta imaju isti cilj koji se temelji na poučavanju učenika deduktivnom razmišljanju i logičkom zaključivanju. I u osnovnoj i u srednjoj školi učitelji imaju ulogu u prosuđivanju i poučavanju o tome koji argumenti mogu utvrditi valjanost dokaza ili se mogu računati kao dokaz. Još jedna uloga dokaza u matematici je objasniti zašto je matematička tvrdnja istinita uz određene pretpostavke. Matematičari često provode dokaze jer su uvjereni u istinitost ili valjanost matematičke tvrdnje nakon što su je empirijski istražili. Kada bi jedina svrha dokaza bila utvrditi valjanost matematičke tvrdnje, ne bi bilo potrebno dokazivati tvrdnju na više načina. Različite perspektive koje su dobivene iz različitih dokaza, zajedno s primjerima, pružaju mrežu povezivanja i dublje razumijevanje matematičkih koncepata. Matematičari također stvaraju više dokaza teorema kako bi pokazali različite metode ili kako bi otkrili nove tehnike. Još jedan razlog za poučavanje dokaza je mogućnost da iz dokaza možemo naučiti metode rješavanja problema. Hanna i Barbeau tvrde da bi učitelji matematike mogli iskoristiti dokaze koji su zajednički u nastavnim programima škola kako bi se uvele strategije, metode i alati za rješavanje problema. Na primjer, predlažu izvođenje kvadratne formule, koja uvodi učenike u strategiju dopunjavanja do potpunog kvadrata. Na taj način učenici mogu naučiti tehniku čija primjenjivost nadilazi tu situaciju.

Dokazi iz geometrije isto tako mogu biti iskorišteni. S prvim dokazima učenici se najčešće susreću u srednjoškolskoj geometriji. Geometrija je dio srednjoškolske matematike, koji se temelji na strogoj matematičkoj strukturi. To bi se moglo poboljšati programom koji počinje tzv. neutralnom geometrijom, tj. geometrijom bez postulata o paralelama.

Iskustva učenika s dokazima razlikuju se od iskustava matematičara jer se njihove svrhe razlikuju. Učenici se u školama ne bave dokazivanjem kako bi otkrili nove matematičke rezultate. Razlozi za poučavanje dokaza i dokazivanja u školama polaze od očekivanja da učenici steknu iskustva u razmišljanju sličnima onima matematičara: učenje tijela matematičkog znanja i stjecanje uvida u zašto su tvrdnje istinite. Dokazi koje učenici susreću u školi često su predstavljeni potpuni kako bi naučili učenike procesima logičkog razmišljanja i komuniciranja, a možda i implicitnom rješavanju problema pomoću primjera. Iz perspektive učenika, dokazivanje samo kao vježba u potvrđivanju tvrdnji i izvođenju teorema nema intelektualnu svrhu jer u takvoj situaciji učenici nisu potpuno angažirani u pokušaju traženja rješenja matematičkog problema.

3 O povijesti dokaza

Povijesno gledano, dokaz je retorički uređaj za uvjeravanje nekoga da je matematička tvrdnja istinita. Kako bi se uvjerili, dokaz se mora uskladiti s normama (oblicima razmišljanja, logičkim pravilima zaključivanja, načinima argumentacije) zajednice kojoj se predstavlja. Norme koje dokaz mora ispuniti proizlaze iz sporazuma među članovima zajednice. Pregled povijesti razvoja dokaza pokazuje da su se pravila i forme razvili tijekom vremena i da se razlikuju od kulture do kulture. Navest ćemo povijesne načine dokazivanja i motive promjena jer se odnose na moguću povezanost s pedagogijom. Povjesničari navode tri faze: prije Grčke, poslije Grčke i modernu fazu. Prije grčkog koncepta deduktivnog zaključivanja unutar aksiomatskog sustava, Babilonci i Kinezi dali su opravdanja za matematičke tvrdnje. Dokazi, kao objašnjenja koja su imala ulogu uvjeravanja, nalazili su se u drevnim tekstovima. Pretpostavke su bile dokazane empirijskim dokazima i obično su bile uključene kvantitativne mjere stvarnih fizičkih osoba. Naknadna evolucija u matematičkoj praksi od prijegrčke do grčke faze obuhvatila je pomak na apstraktne idealne cjeline i razvoj formalnog sustava.

Razlozi za promjenu obuhvaćaju i unutarnje i vanjske čimbenike, a povjesničari se ne slažu oko toga što ima prednost. Grci su trebali ispraviti nedosljednosti koje su se nalazile u matematičkom radu njihovih prethodnika. Željeli su stvoriti sustav bez paradoksa. Također su bili potaknuti potrebom za rješavanjem problema nesumjerljivosti i iracionalnosti (npr. kvadratna dijagonala je nesumjerljiva sa svojom stranicom, broj 2 nema racionalni kvadratni korijen). Intelektualna kulturna sredina doprinijela je promicanju pojma deduktivnog dokaza. U poslijegrčkoj eri matematika se nastavila razvijati u Africi, Indiji, Kini i civilizacijama Srednje i Južne Amerike. Arapi su razvili neke od temeljnih ideja u algebri. Simbolička algebra, počevši od Vieteova rada, odigrala je ključnu ulogu u rekonceptualizaciji matematike općenito i posebno dokazima.

Pomak od grčke do moderne matematike značio je pomak od idealiziranih fizikalnih stvarnosti do proizvoljnih entiteta koji nisu nužno vidljivi u prirodnom iskustvu. U suvremenoj matematici, matematički entitet ovisi o njegovoj povezanosti s drugim entitetima unutar strukture. Od početka 20. stoljeća rasprave o temeljima matematike rezultirale su uvidom u potrebu za aksiomima. Aksiomi nisu bili promatrani kao apsolutne istine, već kao dogovorene tvrdnje.

Posljedice navedenog su značajne u današnjem poučavanju dokaza. Srednjoškolska geometrija s euklidskom tradicijom je često možda i jedino mjesto gdje učenici uče dokazivati, ali u takvom dokazivanju nedostatak su metode otkrivanja, dok su naglašene metode dokazivanja bez objašnjenja. Iako moderni matematičari prihvaćaju aksiome ili hipoteze bez da ih svaćaju kao očiglednu ili apsolutnu istinu, euklidski pogled na dokaze koji se uče u školama danas govori da takav dokaz uspostavlja istinu umjesto da potvrđuje tvrdnje na temelju dogovorenih aksioma. Hipotetska priroda aksioma ostaje skrivena od većine učenika. Osim toga, euklidska matematika okarakterizirana je željom za dokazivanjem čak i kada je sve očigledno. Učitelji matematike trebaju razumjeti perspektive učenika o potrebi dokaza i koje situacije, zadaci i znanja potiču tu potrebu u učenicima.

4 Potreba za dokazima i dokazivanjem iz učeničke perspektive

Učenici često ne razumiju koja je funkcija dokaza u matematici. U provedenom istraživanju među učenicima nižih razreda srednje škole više od 60% učenika nije shvatilo zašto su potrebni dokazi iako je većina njih bila uspješna u pisanju dokaza. Healy i Hoyles su 2000. godine ispitali oko 2500 britanskih učenika u dobi od 14 i 15 godina, a više od četvrtine njih nisu mogli shvatiti svrhu ili značenje dokaza. Oko polovice učenika navelo je potvrdu kao svrhu dokaza, a otprilike jedna trećina njih je navela objašnjenje i komunikaciju kao funkciju dokaza. U daljnjim ispitivanjima, mnogo više učenika se izjasnilo da gleda na dokaz kao objašnjenje. U Williamsovom istraživanju provedenom 1980. godine, u kojem je sudjelovalo 255 kanadskih učenika 11. razreda u deset slučajno odabranih razreda različitih srednjih škola, polovica učenika je izjavila da nema potrebu za dokazivanjem tvrdnje koju smatra očitom. Manje od 30% učenika je pokazalo razumijevanje značenja dokaza.

Istraživanje Coea i Ruthvena pokazalo je kako učenici mogu teoretski razumjeti funkciju dokaza, ali ih ne primjenjuju u praksi. Istraživanje je provedeno na skupini naprednih studenata matematike na kraju prve godine fakulteta. Ispitali su 60 studentskih radova i analizirali koje su vrste dokaza studenti koristili. Sedam studenata je bilo intervjuirano. Studenti su bili svjesni da su dokazi potrebni za matematičko znanje, ali samo su najbolji studenti rekli da ih je dokaz uvjerio u istinitost matematičkih tvrdnji.

Često vanjski čimbenici utječu na potrebu za dokazivanjem. Neki učenici daju dokaze jer njihovi učitelji to zahtijevaju, a ne zato što prepoznaju da je dokaz neophodan u njihovom problemu. Kao posljedica tome, učenici ne razumiju razloge zbog kojih je tvrdnja istinita, već su uvjereni u to jer tako tvrdi učitelj. Balacheff tvrdi da razlog zbog kojeg učenici nisu toliko uključeni u dokazivanje nije taj što ne mogu, već ne vide razloge ili potrebu za tim. Ako učenici ne razumiju ulogu dokaza, postavlja se pitanje postoji li samo vanjska potreba za dokazivanjem ili možemo pronaći neku unutarnju potrebu koja bi mogla potaknuti učenike na dokazivanje. Kao odgovor na ovo pitanje, ispitano je pet kategorija intelektualnih potreba: potreba za sigurnošću, potreba za uzročnosti, potreba za računanjem, potreba za komunikacijom i potreba za strukturom. Te su potrebe povezane i odnose se na funkcije dokaza koji se koriste u matematici. Prve dvije potrebe, za sigurnosti i za uzročnosti, osobito su važne u istraživanju učenja i poučavanja dokaza.

4.1 Potreba za sigurnosti

Prva potreba, za sigurnošću, ljudska je želja za potvrđivanjem tvrdnje. Iako je potvrđivanje jedna od glavnih uloga dokaza, učenici ne vide potrebu za matematičkim dokazima jer je njihova potreba za sigurnošću osobna, u smislu zahtijevanja osobnog, a ne matematičkog uvjeravanja. Za mnoge učenike je empirijski dokaz osobno uvjerljiv.

Fischbein i Kedem su proučavali 400 srednjoškolskih učenika kojima je bio predstavljen matematički teorem i njegov potpun formalni dokaz. Većina učenika je bila sigurna da je dokaz potpun i nepobitan, ali su istovremeno tvrdili da bi analiza primjera ojačala njegovu vjerodostojnost. Na neki način to ne iznenađuje, s obzirom na povijest dokaza prije Grka, kada su pretpostavke bile dokazivane empirijskim dokazima. Osim toga, ovakvo traženje primjera i protuprimjera nakon čitanja dokaza je jedno sredstvo koje koriste matematičari. Međutim, kada izjavljuju da bi se moglo doći do proturječnih dokaza ispitivanjem daljnjih primjera, učenici pokazuju da ne razumiju značenje matematičkog dokaza.

Također u istraživanju Fischbeina i Kedema, učenici su trebali potvrdu na primjeru uz formalni dokaz. U mnogim drugim slučajevima, pokazivanje na primjeru zamijenilo je formalni dokaz. Na primjer, Thompson je ispitivao napredne studente na smjeru na kojem je naglašeno razumijevanje i dokaz, ali velik broj studenata dokazao je tvrdnju samo dajući primjer. Mnogi učenici, uključujući i napredne učenike i studente matematike te studente drugih fakulteta, smatraju takve dokaze kao dokaze matematičkih generalizacija. Ovakvo mišljenje onemogućuje učenicima da percipiraju intelektualnu potrebu za dokazima. Osim toga, učenici koji su u takvoj zabludi, čak i ako vide razlog za razvoj dokaza, vjerojatno će navesti primjer, tj. empirijski argument za matematičku generalizaciju. Ti učenici ne prepoznaju važnost stvaranja općenitijih argumenata koji zadovoljavaju standard dokaza za matematičara, za njih je empirijski argument dokaz. Učenik koji je zadovoljan empirijskim argumentom ima malo razloga učiti kako konstruirati općenitije argumente, odnosno dokaze. Konstruiranje općenitih argumenata neusporedivo je teže i kompleksnije od konstruiranja empirijskih argumenata. Općeniti argumenti nastoje pokriti cijelu domenu generalizacije (koja može biti beskonačne kardinalnosti), dok empirijski argumenti mogu biti zadovoljeni samo na nekom podskupu te domene. Oni mogu provjeriti taj podskup, ali generalizacija ostaje neprovjerena i stoga je nesigurna, iako učenik to možda neće prepoznati.

4.2 Potreba za uzročnosti

Baš kao i sa sigurnošću, ljudi žele odrediti i uzrok pojave, objasniti zašto je tvrdnja istinita. Uzročnost kao funkcija dokaza predstavlja objašnjenje.

Kidron i Dreyfus opisuju potrebu za uzročnosti u njihovom istraživanju učitelja i procesa matematičkog opravdanja jednog učenika u istraživanju točaka grananja dinamičkih sustava. Učenikova potreba za utvrđivanjem uzročnosti pojavljuje se zbog opravdanja dobivenih numeričkih rezultata, tj. rezultata dobivenih pomoću računala. Učenik je bio siguran u taj rezultat, budući da se složio s prethodnim empirijskim rezultatima. Dakle, učenik nije bio zainteresiran niti za provjeravanje niti za formalni dokaz, ali je imao potrebu za objašnjenjem kako bi imao bolji uvid u veze među podacima.

Ovakva vrsta potrebe za uvidom u "zašto" se može razlikovati od osobe do osobe i od konteksta do konteksta. Uzročnost pripada shemi deduktivnog dokaza. Može se pojaviti u situacijama kontradikcije, nakon čega slijedi iznenađenje ili nesigurnost, što vodi učenike do traženja objašnjenja. Učenici bi mogli tražiti uzročnost nakon što se uvjere eksperimentom i potaknuti su istražiti uzrok. Može se pojaviti u međusobnom djelovanju pretpostavki i provjere sigurnosti i nesigurnosti, npr. kada učenici osjećaju potrebu za otkrivanjem uzroka neistinite tvrdnje.

4.3 Potreba za računanjem, komunikacijom i strukturom

Potrebe za računanjem i komunikacijom su međusobno povezane i često se podudaraju. Harel objašnjava potrebu za računanjem kao čovjekovu prirodnu sklonost za određivanjem ili konstrukcijom objekta, ili za određivanjem svojstava objekta ili odnosa između objekata (npr. broj, geometrijski lik, funkcija) pomoću simboličke algebre. Ta nužnost je bila značajna u razvoju matematike i posebno dokaza. Računanje pomoću simboličke algebre omogućilo je u 19. stoljeću istraživanja s temeljnim operacijama, algebarskim prikazima i njihovim strukturama.

Potreba za komunikacijom odnosi se na formuliranje i formalizaciju, temelji se na prenošenju i razmjeni ideja. Učenici koji imaju intuitivno objašnjenje za "zašto" bi trebali biti sustavni u izražavanju svojih razmišljanja i koristiti potrebnu notaciju kako bi bolje izrazili ono što imaju na umu. Ova se potreba također povezuje s ulogom dokaza u komunikacijskoj metodologiji i tehnikama za rješavanje problema.

Potreba za strukturom odnosi se na potrebu organiziranja informacija u logičku strukturu. Harel razlikuje dvije faze, prvu u kojoj se znanje pojedinca organizira prilagođujući se u njegovu postojeću kognitivnu strukturu koja možda nije logički hijerarhijska, i drugu fazu u kojoj postoji potreba za reorganizacijom strukture u logičku strukturu. Povijesno gledano, potreba za strukturom euklidske geometrije u Euklidovim elementima proizašla je iz potrebe za organizacijom i komunikacijom nakupljenog znanja. Potreba za usavršavanjem ove strukture dovela je do pokušaja dokazivanja postulata o paralelama. Potreba za strukturom može voditi od nepovezanih ideja do ujedinjenja načela ili koncepata.

5 Kako pomoći učenicima: perspektiva učitelja

Prema Harelu "učenici se osjećaju besciljno na satovima matematike jer ih mi (učitelji) obično ne prikazujemo s jasnom intelektualnom svrhom". Učenici su upoznati s matematičkim konceptima, ali ne vide potrebu za učenjem onoga čemu ih namjeravamo poučiti. Kao rezultat toga, učenici nemaju mnogo smisla za matematičke koncepte općenito, a osobito za konstruiranje dokaza.

Kao što je već navedeno, učenici često ne vide pravi razlog za razvijanjem dokaza u kontekstu pojedinih aktivnosti koje zahtijevaju dokaz (s matematičkog stajališta), ili imaju duboko ukorijenjene pogrešne predodžbe o tome što znači da je matematička tvrdnja valjana. Prvi problem se odnosi na nedostatak procjene za potrebom za dokazima na lokalnoj razini, a drugi na nedostatak procjene za širu potrebu za dokazima kao matematičkim konstrukcijama. Ova dva problema su očito povezana, iako se drugi čini više obuhvatniji: učenik koji ne razumije što se smatra matematičkim dokazom vjerojatno ne vidi razlog za razvojem dokaza (kao što ga podrazumijeva matematičar) u smislu pojedinih aktivnosti. Stoga su učitelji suočeni s izazovima kako olakšati razvoj intelektualne potrebe za dokazima među učenicima, i u kontekstu pojedinih aktivnosti i u kontekstu šire potrebe za dokazima kao matematičkim konstrukcijama. Raspravljajući o tome kako poučavanje može pomoći učenicima da vide intelektualnu potrebu za učenjem onoga što ih učitelji namjeravaju poučavati, Harel ističe:

"Intelektualna potreba je izraz prirodnog ljudskog ponašanja. Kada se nađemo u situaciji s kojom smo nespojivi ili kada naiđemo na problem koji ne možemo riješiti pomoću našeg postojećeg znanja, vjerojatno ćemo tražiti rješenje ili rješenje i konstrukciju kao rezultat, novo znanje. Takvo znanje je značajno za osobu koja ga konstruira jer je to produkt osobne potrebe i povezano je s prijašnjim iskustvom."

Ovdje Harel postavlja temelje za tri glavne strategije za pristupe podučavanja koji mogu dovesti do nužnosti dokaza kod učenika, a to su izazivanje nesigurnosti i kognitivnog sukoba, učenje temeljeno na istraživanju i prenošenje matematičke kulture.

5.1 Nesigurnost i kognitivni sukob kao pokretačka snaga za stvaranje potrebe za dokazima

Nesigurnost i kognitivni sukob mogu motivirati ljude na promjenu ili proširenje postojećih načina razmišljanja o pojedinim konceptima ili na učenje koncepata. Termini "kognitivni sukob" i "nesigurnost" imaju preklapajuća, ali različita značenja. Zaslavsky je detaljno istraživao o korijenima pojma kognitivnog sukoba u Deweyjevom konceptu reflektivnog mišljenja i njegovim vezama s psihološkim teorijama kao što su Piagetova teorija kognitivnog razvoja, Festingerova teorija kognitivne disonance i Berlyneova teorija kognitivnog sukoba. Zaslavsky ukazuje na to da te teorijske perspektive podupiru korištenje zadataka koji izazivaju nesigurnost i kognitivni sukob.

Nedavna istraživanja o poučavanju i učenju dokaza ispitivala su ulogu kognitivnog sukoba kao pokretačke snage za stvaranje potrebe za dokazima među učenicima. Ta su istraživanja potkrijepila i pokazala na primjerima tvrdnju da kroz odgovarajuću didaktičku organizaciju kognitivni sukob može kod učenika stvoriti potrebu za dokazima. Međutim, različita istraživanja razvijala su tu tvrdnju na različite načine. Dva primjera koja ćemo predstaviti, prvenstveno se odnose na stvaranje potrebe za dokazima u kontekstu pojedinih aktivnosti. Hadas i suradnici osmislili su dvije aktivnosti u okruženju za dinamičku geometriju, čiji je cilj navoditi učenike na suprotnosti između pretpostavki i zaključaka, čime se potiče potreba za dokazima. Navode da "dvije aktivnosti pokazuju dizajn u kojem učenje u okruženju dinamičke geometrije otvara mogućnosti za osjećaj potrebe za dokazivanjem, a ne razmatranje da je dokazivanje nepotrebno". U drugoj aktivnosti učenici su bili nesigurni oko ispravnosti rezultata kojeg su dobili pomoću programa dinamičke geometrije. Kao rezultat te nesigurnosti (koja se nije pojavila u prvoj aktivnosti), učenici su oscilirali između dvije alternativne hipoteze i oslanjali su se na deduktivna razmatranja. Posljedično, druga aktivnost izazvala je mnogo veći udio deduktvnih argumenata među studentima (56%) nego prva aktivnost (18%).

5.2 Prva aktivnost: Zbroj vanjskih kutova mnogokuta

Ova aktivnost je osmišljena kako bi došlo do iznenađenja koje proizlazi iz kontradikcije između učeničkih pretpostavki o zbroju vanjskih kutova mnogokuta i dobivenih rezultata te dovodi do potrebe za objašnjenjem. Cilj je istražiti učinak aktivnosti na učenička objašnjenja i njihov osjećaj za nužnost dokazivanja. Aktivnost je prvo provedena s 4 para učenika 8. razreda u obliku intervjua. Voditelj aktivnosti potaknuo je učenike da naprave pretpostavke prije nego počnu s mjerenjem kako bi provjerili svoje pretpostavke mjerenjem i zatim usmeno objasnili njihovu općenitost. Uz to, svaki par učenika je iznio svoje pretpostavke i objašnjenja na radnom listu. U drugoj fazi ispitivanja sudjelovalo je 82 učenika iz tri osma razreda. Učenici su radili u parovima. Ukupno je prikupljeno i analizirano 45 radnih listova (4 iz prvog dijela ispitivanja i 41 iz drugog dijela).

Zadatak A: Izmjerite (pomoću programa dinamičke geometrije) zbroj unutarnjih kutova mnogokuta, povećavajući broj stranica mnogokuta. Generalizirajte i objasnite svoj zaključak.

Zadatak B: Izmjerite (pomoću programa dinamičke geometrije) zbroj vanjskih kutova četverokuta. Postavite hipotezu o zbroju vanjskih kutova mnogokuta kako se povećava broj stranica. Provjerite svoju hipotezu mjerenjem i objasnite što ste otkrili.

5.2.1 Analiza zadataka i rezultati

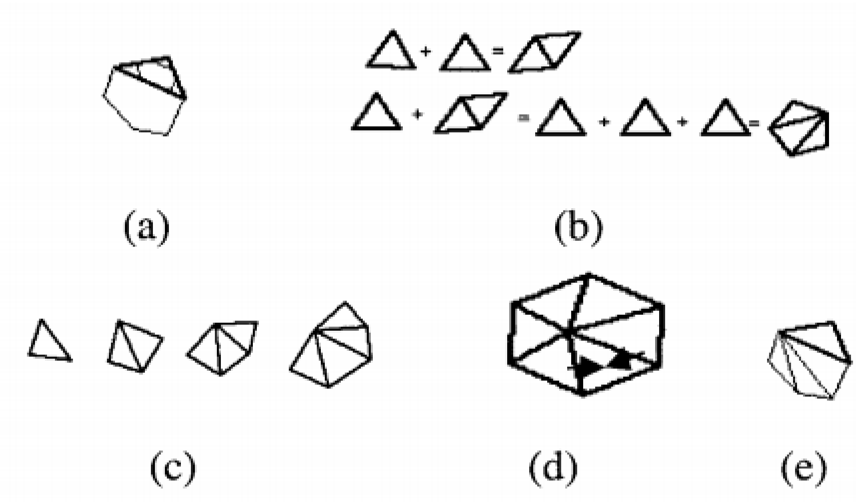
Zadatak A:
U 32 rada učenici su na temelju programa dinamičke geometrije generalizirali tvrdnju da se zbroj unutarnjih kutova mnogokuta poveća za 180° kada se broj stranica poveća za 1. U 18 radova učenici su algebarski izrazili generalizaciju:

$$180^\circ(n-2),$$

$$180^\circ(n-4)+360^\circ,$$

$$180^\circ n-360^\circ,$$

gdje je n broj stranica mnogokuta.
Pet parova učenika dalo je obje generalizacije. Nakon zahtjeva za potkrjepljenjem njihovih generalizacija, učenici su dali razna objašnjenja. Većina njih temelji svoje objašnjenje na generalizaciji mjerenja ili dodavanjem trokuta kada se broj stranica poveća za 1.



Slika 1: *Crteži učenika u Zadatku A*

Zadatak B:
U 37 od 49 odgovora, učenici su pretpostavili da se zbroj vanjskih kutova mnogokuta povećava s povećanjem broja stranica. Deset učenika, koji su bili iz istog razreda, pretpostavili su da je zbroj vanjskih kutova mnogokuta stalan, ali njihovi učitelji su potvrdili da su učenici to znali od prije. Dvije učenice iz prvog dijela ispitivanja nisu dale nikakvu pretpostavku. Zadatak A je kod učenika prouzročio pretpostavku da se zbroj vanjskih kutova u mnogokutu povećava i bili su snažno uvjereni da je njihova pretpostavka istinita. Tijekom rasprave, jedan je učenik tvrdio da je zbroj uvijek isti, 360°. Kada ga je druga učenica pitala misli li da će zbroj i dalje ostati 360° kada se broj stranica mnogokuta poveća za 100, on se ipak složio da će se zbroj povećati. Ova situacija ukazuje na to da je intuitivno vjerovanje da se zbroj povećava s povećanjem broja stranica snažno, čak i kada učenik ima neko znanje o istinitoj tvrdnji. Ta uvjerenja mogu uzrokovati kontradikciju i iznenađenje tijekom provjere ove pretpostavke, a kontradikcija može potaknuti potrebu za objašnjenjem.

5.2.2 Vrste objašnjenja

U Zadatku B učenici su dali 50 objašnjenja (u prvom dijelu ispitivanja su dali više od jednog objašnjenja) kako bi opovrgnuli ili potvrdili početnu pretpostavku. Objašnjenja su klasificirana u 5 kategorija. Kako Zadatak A ne vodi do kontradikcije, nisu uključena objašnjenja koja su učenici dali u tom zadatku.

1. Bez kategorije objašnjenja

   U ovu kategoriju pripalo je 17 od 50 objašnjenja (34%). Tu su uključeni odgovori bez ikakvih argumenata, odgovori u kojima su učenici preformulirali rezultate mjerenja i odgovore čiji su se argumenti oslanjali na vanjski autoritet.

   Primjer 1.

   Zbroj vanjskih kutova u svakom mnogokutu, bilo peterokut ili mnogokut sa 7 *stranica, je uvijek* 360°.

2. Kategorija induktivnih objašnjenja

   U dva objašnjenja (4%) su zaključci, koji se ne temelje na općim deduktivnim argumentima, izvučeni iz svojstava jednog ili više primjera. Na primjer, dvoje učenika iz prvog dijela ispitivanja su objasnili da je zbroj vanjskih kutova mnogokuta uvijek 360° provjeravajući to numerički kako je pokazano u Primjeru 2:

   Primjer 2.

   Učenik 1: *Pomnožit ćemo* 180° *s brojem stranica i oduzet ćemo zbroj unutarnjih kutova koji smo dobili u Zadatku A.*
   Voditelj: *I što ćemo dobiti time? Hoće li se povećati ili smanjiti? Za koliko?*
   Učenici: *Ne znamo.*
   Napravili su tablicu:

Interiors + Exteriors		Interiors		Exteriors
180*4	–	360	=	360°
180*5	–	540	=	360°
180*6	–	720	=	360°

Slika 2: *Tablica učenika u zadatku B*

Učenik 1: *Zbroj je uvijek* $360°$ *i ne moramo nastaviti kako bi provjerili. Ali i dalje ne znamo zašto se zbroj ne mijenja.*

Iako su učenici razradili postupak za računanje zbroja vanjskih kutova i uvjereni su u njegovu općenitost, nisu uzeli u obzir njihov induktivni proces kao objašnjenje zašto je to istina.

3. Kategorija djelomičnih deduktivnih objašnjenja

   U ovoj je kategoriji bilo 6 objašnjenja (12%).

   Primjer 3.

   Par učenika koji su u Zadatku A zaključili da je zbroj unutarnjih kutova $180°(n-2)$, objasnili su u Zadatku B: *Trebali bi oduzeti zbroj unutarnjih kutova od zbroja svih susjednih kutova (unutarnjeg i vanjskog) i zatim se dobije* $360°$.

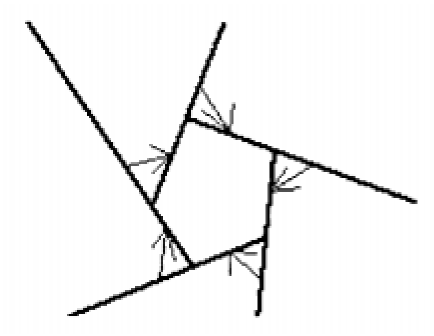
   Ovo je deduktivna vrsta objašnjenja u kojoj nedostaju računanja: $180°n$ i $180°n - 180°(n-2)$.

4. Kategorija vizualnih objašnjenja

   U ovu kategoriju uključeni su crteži i skice na papiru ili u programu dinamičke geometrije. Tu pripada 16 objašnjenja (32%).

   Primjer 4.

   Par učenika primijetili su vizualno svojstvo zbroja vanjskih kutova: *Oko mnogokuta je cijeli krug, stoga je zbroj* $360°$. Nacrtali su i sliku:



Slika 3: *Puni krug oko mnogokuta*

Njihova upotreba slike za izražavanje općeg vizualnog svojstva mnogokuta, neovisno o broju stranica, je jasna. Ovaj primjer je također uključen u kategoriju 3 jer su učenici temeljili svoje objašnjenje na tvrdnji da je puni krug 360°.

Primjer 5.

Tipičan odgovor u ovoj kategoriji:

Kad se poveća broj stranica mnogokuta, imamo više kutova. Ali oni su manji jer unutarnji kutovi postaju veći.

Program dinamičke geometrije omogućuje učenicima izabrati mnogokut s određenim brojem stranica. Mnogokut se pojavljuje u pravilnom obliku koji se može „pokvariti" povlačenjem. Dakle, kada učenici povećavaju broj stranica mnogokuta, mogu vidjeti kako se dodavanjem kuta istovremeno smanjuju mjere vanjskih kutova.

5. Kategorija deduktivnih objašnjenja

   U ovu kategoriju pripada 9 objašnjenja (18%). Sastoje se od niza logičkih argumenata kao što je prikazano u sljedećem primjeru.

   Primjer 6.

   U prvom dijelu ispitivanja, dvoje učenika je pretpostavilo da će zbroj vanjskih kutova mnogokuta uvijek biti jednak zbroju njegovih unutarnjih kutova (kao kod četverokuta). Nakon mjerenja pomoću programa dinamičke geometrije, zaključili su da je zbroj vanjskih kutova konstantan i jednak 360°. Potom su numerički provjeravali niz mnogokuta kojima su povećavali broj stranica, slično kao u Primjeru 2. Izračunali su zbroj za četverokute, peterokute i šesterokute i zatim su pokušali izračunati za mnogokut s 12 stranica, gdje su zapeli.

   Učenik 1: *Ako imamo* 12 *stranica, trebamo* 12 *pomnožiti sa* 180° *i oduzeti zbroj unutarnjih kutova, što je...*

   Učenici nisu imali formulu niti numeričke podatke o zbroju unutarnjih kutova dvanaesterokuta.

   Učenik 1: *Mogu reći da je zbroj svih parova susjednih kutova (unutarnjih i vanjskih) minus zbroj svih unutarnjih kutova jednak zbroju vanjskih kutova.*

Ispitivač: *Ok, ali kako možeš biti siguran da će, kad oduzmeš zbroj unutarnjih kutova, koji se mijenja cijelo vrijeme, zbroj vanjskih kutova biti* $360°$*?*

Učenik 1: *Mogu vam to objasniti. Zbroju svih unutarnjih kutova dodamo* $180°$*, također je i zbroju svih susjednih kutova dodano* $180°$*. Ako oduzmem zbroj unutarnjih kutova...*

Učenik 2: *Nadoknadi se* $180°$ *i rezultat ostaje isti.*

Zapisali su: *Kada dodamo stranicu mnogokutu, zbroj unutarnjih kutova se poveća za* $180°$*, i zbroj svih susjednih kutova se poveća za* $180°$*. Zato kad oduzmemo zbroj unutarnjih kutova od susjednih, dobijemo isti broj. I počinje s* $360°$ *jer je tako u trokutu, a to je najmanji mnogokut.*

Osim što su objasnili zašto je zbroj vanjskih kutova u mnogokutima konstantan, učenici su imali potrebu i dati objašnjenje zašto je taj zbroj jednak $360°$. Možemo zaključiti da su učenici osjetili da je njihovo objašnjenje adekvatno zbog njihove potrebe za zapisivanjem.

Na kraju, možemo zaključiti da su mnogi učenici u zadatku B došli do kontradikcije između njihove pretpostavke i rezultata. Generalizacije i objašnjenja iz zadatka A poslužili su učenicima u objašnjenju zadatka B. Od ukupno 50 objašnjenja, njih 9 su bila potpuna deduktivna, a 8 ih je bilo djelomično deduktivnih ili induktivnih.

5.3 Druga aktivnost: Sukladnost trokuta

Druga aktivnost provedena je s učenicima 10. razreda. Učenici su trebali istražiti dovoljne uvjete (jednakost stranica i kutova) za sukladnost u situaciji nesigurnosti. Nesigurnost je nastala u situacijama u kojima je konstrukcija moguća, ali se suprotstavljala intuitivnim pretpostavkama učenika ili u situacijama u kojima je konstrukcija nemoguća, a neki učenici su pretpostavili da je moguća. Učenici su bili upoznati sa sukladnosti i sličnosti trokuta i iskoristili su teoreme koje su učili. Aktivnost je prvo provedena s dva para učenika 10. razreda u obliku intervjua, koji su snimljeni i analizirani. Zatim se aktivnost provela u 10. razredu, gdje su učenici radili u parovima. Ukupno je bilo 12 pisanih izvještaja (2 iz intervjua i 10 iz razreda) koji su analizirani.

Zadaci glase:

Zadatak 1a. S obzirom na dani trokut $\triangle ABC$ (u programu dinamičke geometrije), konstruirajte trokut $\triangle DEF$ koji ima jedan kut i jednu susjednu stranicu jednaku jednom kutu i susjednoj stranici trokuta $\triangle ABC$. Povlačite vrhove oba trokuta i istražite kako se oni međusobno odnose.

Zadatak 1b. S obzirom na dani trokut $\triangle ABC$ (u programu dinamičke geometrije), konstruirajte trokut $\triangle DEF$ koji ima dva kuta i stranicu između njih jednake kutovima i stranici između njih trokuta $\triangle ABC$. Povlačite vrhove oba trokuta i istražite kako se oni međusobno odnose.

Zadatak 2. Je li moguće konstruirati trokut s jednom stranicom i dva kuta jednaka onima u trokutu $\triangle ABC$, ali koji nije sukladan s trokutom $\triangle ABC$? Ako je moguće, konstruirajte takav trokut, inače objasnite zašto.

Zadatak 3a. Koliko jednakih stranica i kutova postoji u nesukladnim trokutima konstruiranima u Zadatku 2?

Zadatak 3b. Je li moguće konstruirati dva nesukladna trokuta s pet jednakih elemenata (stranica i kutova)?

Zadatak 4. Je li moguće konstruirati dva nesukladna trokuta sa šest jednakih elemenata? Ako jest, konstruirajte takve trokute, inače objasnite zašto nije moguće.

Zadatak 5a. Pretpostavimo da imamo dva nesukladna trokuta s pet jednakih elemenata, navedite jednake elemente.

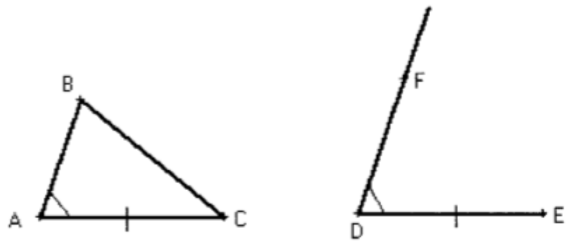
Zadatak 5b. Pokušajte konstruirati dva nesukladna trokuta s pet jednakih elemenata.

5.3.1 Analiza zadataka i rezultati

Zadaci 1a i 1b bili su usmjereni na to da učenici shvate pojam sukladnosti kao moguću invarijantu povlačenjem vrhova trokuta u programu dinamičke geometrije. U Zadatku 1a oba trokuta se mogu mijenjati povlačenjem njihovih vrhova i mogu ili ne moraju biti sukladni jer imaju samo jedan kut i jednu stranicu jednaku. U Zadatku 1b postoji dodatni jednaki kut, pa se trokut $\triangle DEF$ ne može mijenjati povlačenjem njegovih vrhova i kada se trokut $\triangle ABC$ promijeni povlačenjem, tako se mijenja i trokut $\triangle DEF$ i ostaje sukladan trokutu $\triangle ABC$.

U Zadatku 2 četiri para učenika konstruirala su nesukladne trokute koji zadovoljavaju tražene uvjete. Ostalih osam parova tvrdilo je da je konstrukcija nemoguća zbog teorema o sukladnosti trokuta (S-K-S). Ovih osam parova dobili su **Zadatak 2***:

Na Slici 4, stranice AC i DE su jednake i kut pri vrhu A je jednak kutu pri vrhu D. Ispitajte sve moguće načine "kopiranja" dodatnog kuta trokuta $\triangle ABC$, kako bi nadopunili drugi trokut. Je li takav trokut sukladan trokutu $\triangle ABC$ za svaku mogućnost?



Slika 4: *Slika uz zadatak 2**

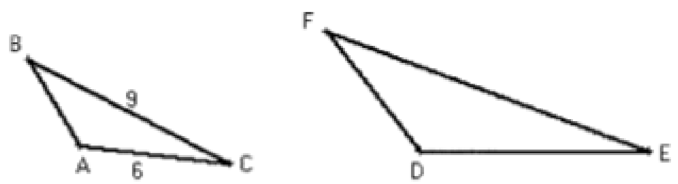
Ovaj zadatak potaknuo je učenike da konstruiraju nesukladne trokute s jednakom jednom stranicom i dva kuta. Kopiranjem kutova trokuta $\triangle ABC$ u programu dinamičke geometrije učenici su shvatili da takvi trokuti ne moraju nužno biti sukladni.

U Zadatku 3a, osam parova učenika bilo je iznenađeno kad su otkrili četiri jednaka elementa u dva nesukladna trokuta. Preostala četiri para učenika je tvrdilo da su tri elementa koja su korištena u konstrukciji jedini jednaki elementi. Tijekom rješavanja Zadatka 3b, nekoliko je učenika razmatralo mogćnost konstruiranja nesukladnog trokuta sa šest jednakih elemenata kao kod trokuta $\triangle ABC$. Zato je odlučeno ubaciti Zadatak 4 i tako dobiti tri dijela: pretpostavku (Zadatak 3b), raspravu o slučaju šest jednakih elemenata (Zadatak 4) i konstrukciju trokuta s pet elemenata jednakih elementima trokuta $\triangle ABC$, koji mu nije sukladan (Zadatak 5b).

Dva para učenika je pretpostavilo da je moguće konstruirati neuskladne trokute s pet ili šest jednakih elemenata, dok je 10 parova učenika pretpostavilo da to nije moguće jer su bili uvjereni da tri jednaka elementa jamče sukladnost, iako su već konstruirali nesukladne trokute s četiri jednaka elementa.

Zadatak 5 je osmišljen tako da učenici pretpostave da trokuti s pet jednakih elemenata moraju biti sukladni. Taj zadatak dolazi nakon Zadatka 2, u kojem su učenici bili iznenađeni otkrićem da mogu konstruirati dva nesukladna trokuta s četiri jednaka elementa, i nakon Zadatka 4, u kojem su objasnili zašto je nemoguće konstruirati nesukladne trokute sa šest jednakih elemenata. Takav slijed donio je nesigurnost kod učenika u problemu s pet jednakih elemenata. Samo je jedan par učenika počeo s konstrukcijom, dok su ostali dobili dodatni zadatak (Zadatak 5*) koji im je pomogao da dođu do rješenja.

Zadatak 5*. U trokutu $\triangle ABC$ (vidi Sliku 5) jedna stranica je duljine 6, a druga duljine 9. Konstruirajte trokut $\triangle DEF$ sa stranicama duljine 6 i 9 i kutovima jednakim kutovima u trokutu $\triangle ABC$, ali koji nije sukladan trokutu $\triangle ABC$. (Napomena: Prvo izračunajte duljinu treće stranice u svakom trokutu.)



Slika 5: *Slika uz zadatak 5**

5.3.2 Vrste objašnjenja

1. Bez kategorije objašnjenja

   U ovu kategoriju pripalo je 23 odgovora (27%).

Primjer 7.

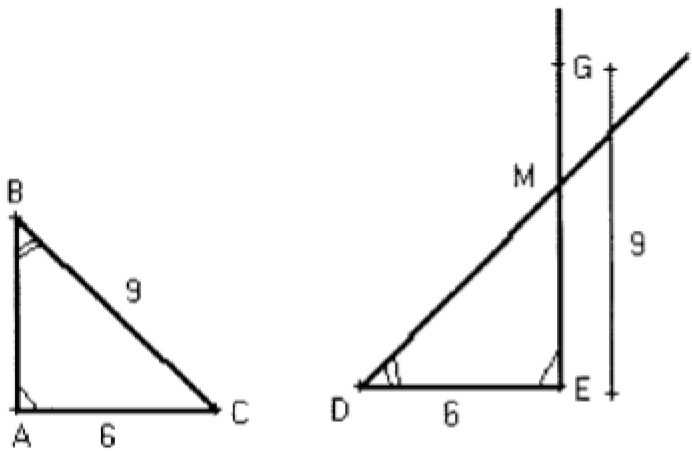
Dva trokuta s pet jednakih elemenata moraju biti sukladna.

2. Kategorija induktivnih objašnjenja

   Tri odgovora (4%) pripadaju ovoj kategoriji.

   Primjer 8.

   Par učenika, dok su objašnjavali zašto ne postoje dva sukladna trokuta s pet jednakih elemenata, nacrtali su sliku (Slika 6) i napisali:



Slika 6: *Objašnjenje učenika za Zadatak 5**

   Pokušali smo i dobili smo ovo (Slika 6*). Možemo vidjeti da ako želimo da trokuti budu nesukladni, jedna od dvije stranice koju izaberemo nikad neće biti jednaka* 9.

   Učenici su se oslonili na jedan primjer kako bi objasnili njihovo pogrešno zaključivanje.

3. Kategorija djelomičnih deduktivnih objašnjenja

   U 9 odgovora (11%) učenici su konstruirali djelomični deduktivni niz argumenata, koji je najčešće vodio krivim zaključcima.

Primjer 9.

U Zadatku 3b jedan par učenika je dao objašnjenje: *Ako su tri stranice i dva kuta jednaka, nemoguće je konstruirati nesukladne trokute. Ako su dvije stranice i tri kuta jednaka, to je također nemoguće jer su tada trokuti slični.*

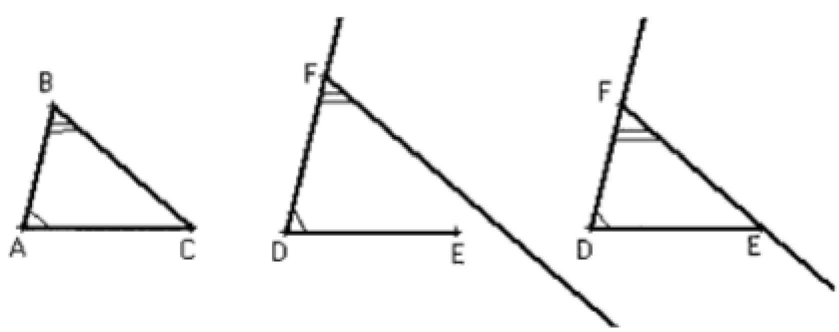
Učenici nisu uzeli u obzir da slični trokuti mogu imati dvije jednake (neodgovarajuće) stranice i biti nesukladni. Unatoč tome što je njihov zaključak bio pogrešan, argumenti koji povezuju različite tvrdnje su bili deduktivni. Pogrešan zaključak ukazuje na teškoću prihvaćanja situacije u kojoj dolaze do kontradikcije s intuicijom temeljenom na prethodnom znanju da su tri jednaka elementa dovoljna za sukladnost.

4. Kategorija vizualnih objašnjenja

   Dva odgovora (2%) pripala su ovoj kategoriji, od kojih jedan također pripada i deduktivnoj kategoriji.

Primjer 10.

U Zadatku 2, jedan par učenika je konstruirao drugi trokut (Slika 7) u kojem je $|DE| = |AC|$, kut pri vrhu D je jednak kutu pri vrhu A i kut pri vrhu F je jednak kutu pri vrhu B, i zatim su povlačili stranice kako bi dobili nesukladne trokute, ali su shvatili da to nije moguće. Objasnili su: *Nije moguće postaviti vrh B ili vrh F tako da stranice DF i AB budu različite.*



Slika 7: *Pokušaj konstruiranja nesukladnih trokuta u Zadatku 2*

5. Kategorija deduktivnih objašnjenja

   U ovu kategoriju pripalo je 48 odgovora (56%). Svih 12 parova učenika konstruirali su nesukladne trokute s jednom stranicom i dva kuta jednaka, ili u Zadatku 2 ili u dodatnom Zadatku 2*.

   Primjer 11.

   Jedan par učenika u Zadatku 2 je napisao da je nemoguće konstruirati nesukladne trokute s jednom jednakom stranicom i dva jednaka kuta zbog K-S-K teorema. Kasnije su u Zadatku 2* napisali: *Kut pri vrhu B može se preslikati na dva različita načina, pri vrhu E ili pri vrhu F. Mora se preslikati u kut pri vrhu E jer bi inače trokuti bili sukladni.*

   U Zadatku 3 su napisali da je nemoguće konstruirati nesukladne trokute s pet jednakih elemenata, i dodali: *Na ovaj način sigurno ćemo dobiti sukladnost jer će vrijediti jedan od teorema o sukladnosti.*

   U Zadatku 5a napisali su da jednaki elementi moraju biti tri kuta i dvije stranice: *...jer inače bi vrijedio S-S-S teorem.. Ali mislimo da će čak i u tom slučaju trokuti biti sukladni, zbog nekog drugog teorema.*

   U dodatnom Zadatku 5* učenici su uspjeli izračunati treću stranicu u svakom od dva nesukladna trokuta i zapisali su: *Zbog novih podataka koje smo otkrili, moramo priznati da postoje dva nesukladna trokuta s pet jednakih elemenata.*

   Ovaj primjer pokazuje kako deduktivno zaključivanje može otkloniti nesigurnost.

6 Heuristički dokaz u nastavi matematike

Heuristički dokaz u nastavi matematike služi kao pomoć učenicima kako bi shvatili logiku pojedinih matematičkih tvrdnji. Koriste ga učitelji matematike u svom argumentiranju, učenici kako bi se uvjerili u istinitost nekih matematičkih tvrdnji, ali i matematičari kako bi se uvjerili u valjanost teorema prije nego ga formalno dokažu. Heuristički dokaz može biti od velike pomoći pri shvaćanju matematičkih koncepata i zato bi se trebao koristiti u nastavi.
Postoje tri kriterija koje mora zadovoljavati heuristički dokaz kako bi bio valjan:

1) Nikada ne smije biti teži za razumjeti od formalnog dokaza kojeg zamjenjuje. Inače ne bi bilo opravdanja za nepredstavljanje pravog formalnog dokaza.

2) Treba jasno predstavljati matematički koncept koji je uključen, i to bez dvosmislenosti. Ako taj koncept nije jasan iz samog teksta dokaza, od učenika se može očekivati razumijevanje dokaza, ali mogu i zaboraviti ono što su dokazali.

3) Ako heuristički dokaz uključuje priču ili opisuje poznatu situaciju, kao što je u većini slučajeva, tada priča mora biti jednostavna i smislena. Učenik bi se trebao moći prisjetiti problema kojeg pokušava dokazati nakon prve faze heurističkog dokaza, a ostatak bi trebao uslijediti pozivom na njegovo iskustvo i zdrav razum. Inače heuristički dokaz ne pomaže učeniku u shvaćanju da je matematička tvrdnja prihvatljiva i logična.

Učitelji moraju biti oprezni kad koriste heurističke dokaze u nastavi, jer se zna dogoditi da neki ne zadovoljavaju sve kriterije. U srednjoškolskoj matematici heuristički dokazi mogu se koristiti u mnogim nastavnim jedinicama. Uzmimo naprimjer Pitagorin poučak: *Kvadrat nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednak je zbroju kvadrata nad katetama.* Postoji niz formalnih dokaza za to, ali učenici bi trebali vidjeti da je ta tvrdnja istinita i prije formalnog dokaza. Tu je potrebno heurističko dokazivanje koje najčešće počinje s crtanjem pravokutnih trokuta i računanjem površine kvadrata izravnim mjerenjem. To može voditi do otkrivanja odgovarajućeg uzorka. Potom se mogu istražiti razne analize dokaza sve dok učenici dobro ne prihvate tu ideju i budu spremni za formalni dokaz.

U algebarskom području također postoji mnogo dobrih heurističkih dokaza. Na primjer, srednjoškolci ponekad imaju teškoća s razumijevanjem aksioma distributivnosti u polju realnih brojeva (koji se zapravo ne dokazuje). Ali ako pitamo učenike: *Ako svako pakiranje bombona sadrži 10 crvenih i 15 zelenih, koliko ima crvenih, a koliko zelenih bombona u 6 pakiranja? Što je s 4, 8, 3 pakiranja?*, oni će na to znati točno odgovoriti. Svaki od tih rezultata može se zapisati kao:

$$8(10C + 15Z) = 80C + 120Z.$$

Nekoliko ponavljanja tog postupka lako navodi na distibuciju množenja nad zbrajanjem.

6.1 Primjer heurističkog dokaza

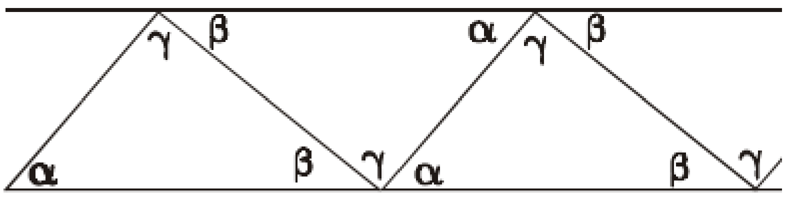
Navest ćemo jedan primjer heurističkog dokaza kojeg možemo provesti s učenicima. Želimo dokazati da zbroj unutarnjih kutova trokuta iznosi 180°. Učenicima možemo zadati problem na sljedeći način:
Ivan i Marko su nacrtali različite trokute i izračunali zbroj kutova svakog od njih. Obojica su bili iznenađeni otkrićem da je taj zbroj iznosio 180° *u svim trokutima. Bili su sigurni da to nije slučajnost. Njihova pretpostavka je: "U svakom trokutu, zbroj unutarnjih kutova je* 180°*".*

Zatim učenicima damo zadatke:

a) Nacrtaj trokut $\triangle ABC$, označi njegove kutove s α, β i γ. Izmjeri mjere tih kutova. Koliki je zbroj od α, β i γ? Zapiši rezultat. Ponovi postupak nekoliko puta i zapiši mjere svih kutova.

b) Nacrtaj trokut $\triangle ABC$, označi njegove kutove s α, β i γ. Uzmi škare i izreži trokute, otkini kutove trokuta i spoji ih tako da tvore novi kut. Kolika će biti mjera tog kuta? Zapiši rezultat. Ponovi postupak nekoliko puta, zapiši mjere svih kutova.

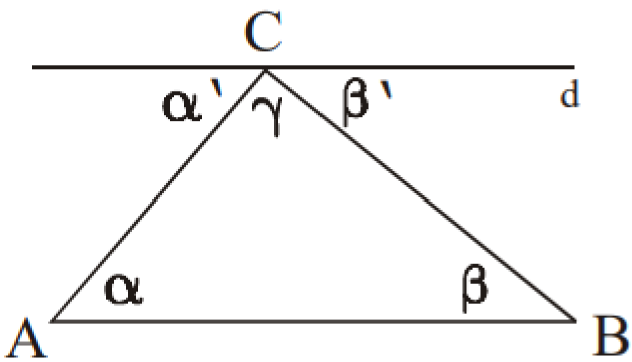
c) Nacrtaj trokut $\triangle ABC$, označi njegove kutove s α, β i γ. Izreži ih škarama. Koristeći trokut $\triangle ABC$ kao uzorak, nacrtaj još takvih trokuta. Izreži ih i spoji tako da se dobije ravna linija na dnu. Vjerojatno će postojati i ravna linija na vrhu. Što to znači za kutove α, β i γ?



Slika 8: *Zbroj unutarnjih kutova trokuta*

Sva tri zadatka upućuju na to da je zbroj unutarnjih kutova u proizvoljnom trokutu 180°.
Nakon toga učenicima možemo dati i formalni dokaz:

Dokaz. Imamo trokut $\triangle ABC$ i neka su α, β i γ njegovi kutovi. Povucimo pravac d, paralelan s AB i koji prolazi točkom C. Označimo kutove α' i β' kao na Slici 9.



Slika 9: *Dokaz: zbroj unutarnjih kutova trokuta*

Znamo da su kutovi α i α', odnosno, β i β' kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca d i AB, pa je $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$. Kutovi α', β' i γ zajedno čine ispruženi kut, tj. $\alpha' + \beta' + \gamma = 180°$, pa je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. □

6.2 Poluformalni dokaz

Kako bi učenicima objasnili da je $(-a)(-b) = +ab$ bez formalnog dokaza? Možemo pokušati pomoću poluformalnog dokaza koristeći brojeve umjesto simbola. Na primjer, zanima nas čemu je $(-7) \cdot (-2)$ jednako. Ne znamo, pa označimo rezultat s x.

$$(-7) \cdot (-2) = x$$

Čemu je jednako $(-7) \cdot (+2)$? Pretpostavimo da su učenici to već shvatili, jer je lako vidjeti istinitost toga.

$$(-7) \cdot (+2) = -14$$

Dodamo x tom izrazu:

$$\begin{aligned}
(-7) \cdot (+2) + x &= (-7) \cdot (+2) + (-7) \cdot (-2) \\
(-7) \cdot (+2) + x &= (-7)[(+2) + (-2)] \\
(-7) \cdot (+2) + x &= (-7) \cdot 0 \\
(-7) \cdot (+2) + x &= 0 \\
-14 + x &= 0 \\
x &= +14
\end{aligned}$$

pa je

$$(-7) \cdot (-2) = +14.$$

Ako učenici mogu shvatiti logiku ovog "dokaza" (koji se temelji na jedinstvenosti inverznog elementa za zbrajanje u polju realnih brojeva), onda je puno bolje koristiti ovakav dokaz nego heuristički. Matematički je sugestivan, nedvosmislen i ima prirodan slijed.

7 Dokazi u udžbenicima

U ovom dijelu rada navest ćemo neke dokaze koji se nalaze u školskim udžbenicima i mogu se izvesti na nastavi. Prvo ćemo dati primjere za osnovnu školu, a zatim za srednju školu.

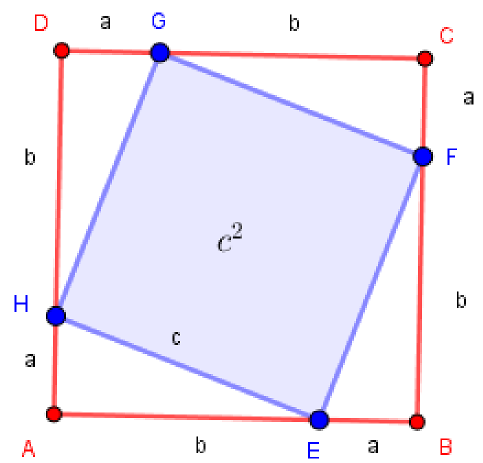
7.1 Dokazi u osnovnoj školi

Primjer 12 (Pitagorin poučak)**.** Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.

Možemo ga iskazati i na sljedeći način:
U pravokutnom trokutu vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$, gdje je c duljina hipotenuze, a a i b su duljine kateta.

Za ovaj poučak postoji velik broj dokaza, ali ovdje ćemo pokazati dva, koja se nalaze u istom udžbeniku.

Dokaz 1.



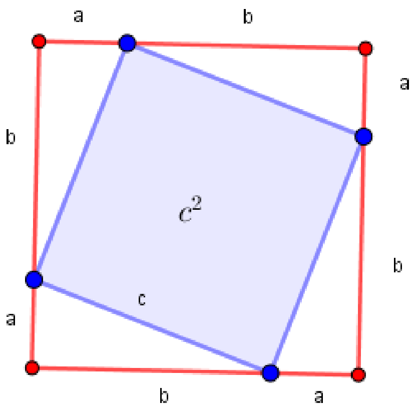
Slika 10: *Pitagorin poučak*

Površina kvadrata $ABCD$ na Slici 10 jednaka je zbroju površina manjeg kvadrata $EFGH$ i 4 sukladna trokuta $\triangle AHE$, $\triangle BEF$, $\triangle CFG$, $\triangle DGH$.

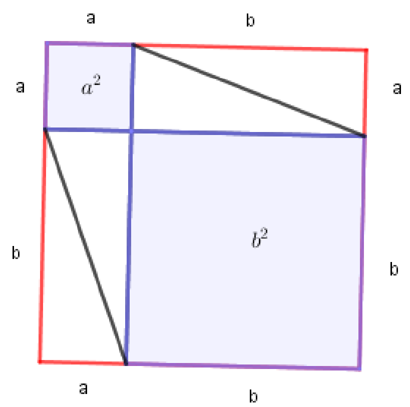
$$
\begin{aligned}
P_{\square ABCD} &= (a+b)^2 \\
P_{\square EFGH} &= c^2 \\
P_{\triangle AHE} &= \frac{a \cdot b}{2} \\
(a+b)^2 &= c^2 + 4\frac{a \cdot b}{2} \\
a^2 + \cancel{2ab} + b^2 &= c^2 + \cancel{2ab} \\
a^2 + b^2 &= c^2.
\end{aligned}
$$

□

Dokaz 2. Nacrtamo dva sukladna kvadrata sa stranicom duljine $a+b$. Jedan podijelimo kao u prethodnom dokazu, a drugi na kvadrate sa stranicom a odnosno b i na četiri pravokutna trokuta s katetama a i b (Slika 12).



Slika 11: *Kvadrat površine* $(a+b)^2$

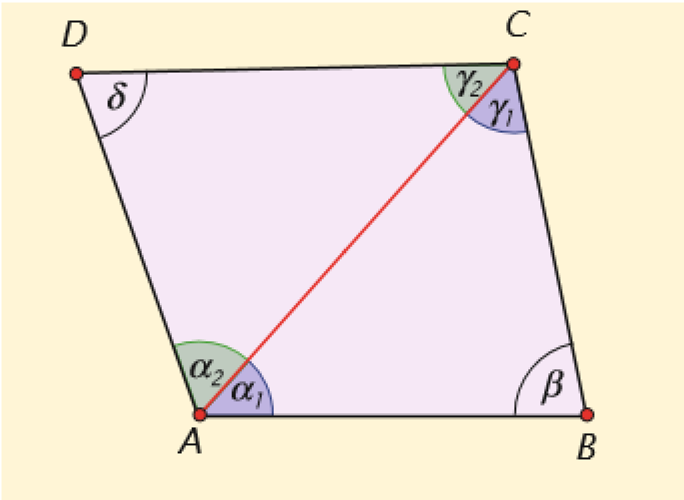


Slika 12: *Kvadrat površine* $(a+b)^2$

Uočimo da su pravokutni trokuti na obje slike sukladni (imaju katete jednakih duljina i pravi kut). Iz navedenog slijedi da su obojeni dijelovi velikih kvadrata jednaki, odnosno vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, što je i trebalo dokazati.

□

Primjer 13. Zbroj kutova u četverokutu je $360°$.



Slika 13: *Zbroj kutova u četverokutu*

Dokaz. U četverokutu $ABCD$ povučemo jednu dijagonalu, npr. $\overline{AC}$ kao na Slici 13. Nacrtavši dijagonalu, podijelili smo kut α na dva dijela, označimo ih s α_1 i α_2. Isto tako smo i kut γ podijelili na dva dijela, koje ćemo označiti s γ_1 i γ_2. Za te kutove vrijedi:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ i } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Za trokut $\triangle ABC$ vrijedi:

$$\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180°,$$

a za trokut $\triangle ACD$ vrijedi:

$$\alpha_2 + \delta + \gamma_2 = 180°.$$

Tada za četverokut $ABCD$ vrijedi:

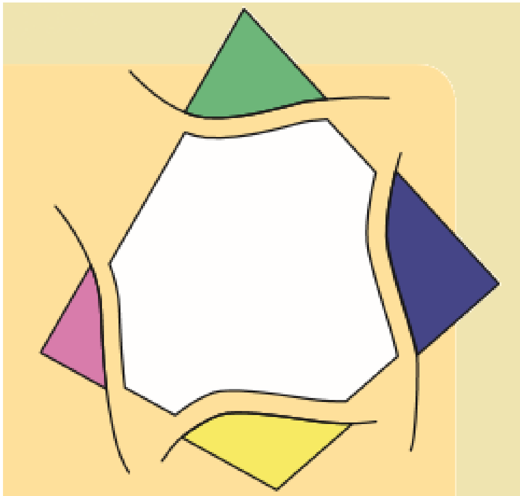
$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma + \delta &= \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta \\
&= (\alpha_1 + \beta + \gamma_1) + (\alpha_2 + \delta + \gamma_2) \\
&= 180° + 180° \\
&= 360°.
\end{aligned}$$

$\square$

U udžbeniku je navedena još jedna aktivnost za učenike:

Papirnati dokaz

1. Nacrtaj četverokut na papiru pa ga izreži.
2. Obojaj svaki kut drugom bojom.
3. Odreži sva četiri kuta četverokuta.
4. Spoji ih vrhovima i vidjet ćeš da čine puni kut.



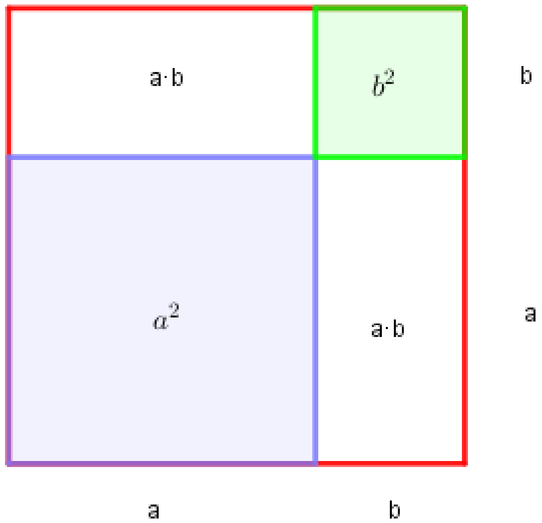
Slika 14: *Papirnati dokaz*

Primjer 14 (Kvadrat zbroja)**.**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Dokaz. Površina kvadrata na Slici 15 koji ima duljine stranica $a+b$ jednaka je $P = (a+b)^2$. Razdijelimo kvadrat na likove kao na slici. Tada je površina kvadrata jednaka zbroju površine kvadrata duljine stranice a, površine kvadrata duljine stranice b i površine dvaju sukladnih pravokutnika duljina stranica a i b.

$$P = a^2 + b^2 + 2 \cdot ab$$
$$P = a^2 + 2ab + b^2$$



Slika 15: *Kvadrat zbroja*

Na dva načina izračunali smo površinu istog kvadrata pa je

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

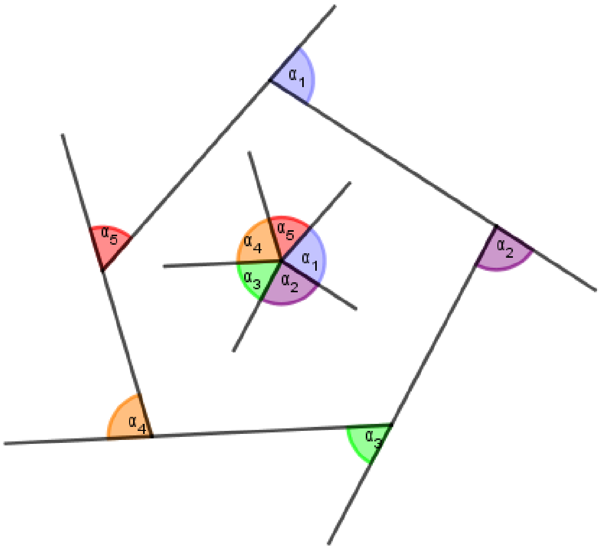
□

Primjer 15. Zbroj vanjskih kutova u svakom mnogokutu je 360°.

U udžbenicima nije dan pravi formalni dokaz ove tvrdnje, ali ponuđena je neka vrsta objašnjenja.

Dokaz. Nacrtajmo neki mnogkut i njegove vanjske kutove. Odaberimo jednu točku unutar mnogokuta i iz nje povucimo polupravce paralelne sa stranicama mnogokuta (kao na Slici 16). Kutovi s vrhom u odabranoj točki su zbog paralelnosti jednaki vanjskim kutovima mnogokuta. Kako oni zajedno čine puni kut, njihov zbroj je 360°. To znači da je i zbroj vanjskih kutova mnogokuta 360°.

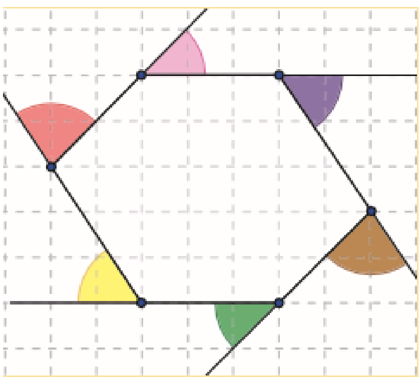
□



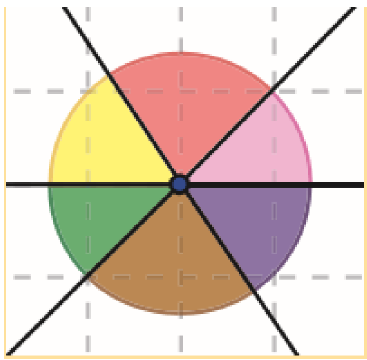
Slika 16: *Zbroj vanjskih kutova u mnogokutu*

Ovdje opet možemo naći *Papirnati dokaz*:

1. Nacrtaj neki mnogokut, koji god želiš.
2. Nacrtaj mu vanjske kutove i oboji svaki drugom bojom.
3. Izreži svaki vanjski kut.
4. Spoji ih vrhovima i vidjet ćeš da čine puni kut.

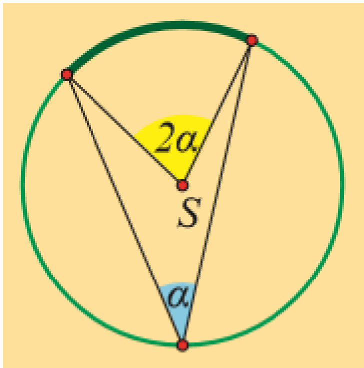


Slika 17: *Vanjski kutovi mnogokuta*



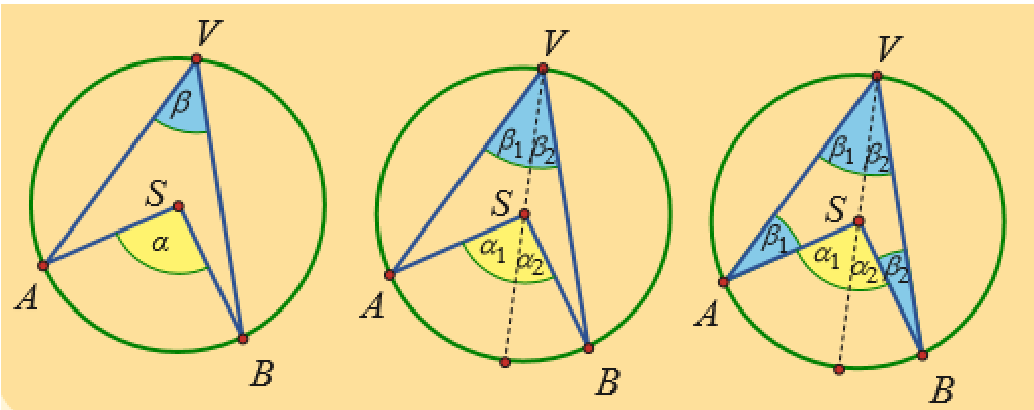
Slika 18: *Vanjski kutovi čine puni krug*

Primjer 16 (Poučak o središnjem i obodnom kutu)**.** Ako se središnji i obodni kut nalaze nad istim kružnim lukom, onda je središnji kut dvostruko veći od obodnog kuta.



Slika 19: *Poučak o središnjem i obodnom kutu*

Dokaz.



Slika 20: *Dokaz poučka o središnjem i obodnom kutu*

Zadan je središnji kut α i pripadni obodni kut β kao na Slici 20. Nacrtajmo promjer koji prolazi točkama V i S. Trokuti $\triangle ASV$ i $\triangle SBV$ su jednakokračni, pa su im i kutovi uz osnovicu jednakih veličina.

Kut α_1 je vanjski kut trokuta $\triangle ASV$, pa je $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_1 = 2\beta_1$. Isto tako je kut α_2 vanjski kut trokuta $\triangle SBV$, pa je $\alpha_2 = 2\beta_2$. Stoga je

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta.$$

Dokazali smo da je $\alpha = 2\beta$.

□

7.2 Dokazi u srednjoj školi

Primjer 17 (Djeljivost zbroja i razlike)**.**

1. Ako su cijeli brojevi a i b djeljivi cijelim brojem c, tada su s c djeljivi i njihov zbroj $a + b$ i njihova razlika $a - b$.

2. Ako je a djeljiv, a b nije djeljiv brojem c, onda niti zbroj $a + b$ niti razlika $a - b$ nisu djeljivi s c.

Dokaz.

1. Pretpostavimo da su a i b djeljivi s c. Onda postoje cijeli brojevi k i l takvi da je $a = kc$ i $b = lc$. Tada je $a + b = kc + lc = (k + l)c$, pa je $a + b$ djeljiv s c. Također je $a - b = (k - l)c$, pa je i $a - b$ djeljiv s c.

2. Pretpostavimo obrnuto, tj. pretpostavimo da je $a + b$ djeljivo s c. Zapišimo $b = (a + b) - a$. Prema prethodno dokazanoj tvrdnji, slijedilo bi da je broj b djeljiv s c, što nije istina. Zato $a + b$ nije djeljiv s c. Na sličan način se dokazuje da ni $a - b$ nije djeljivo s c.

□

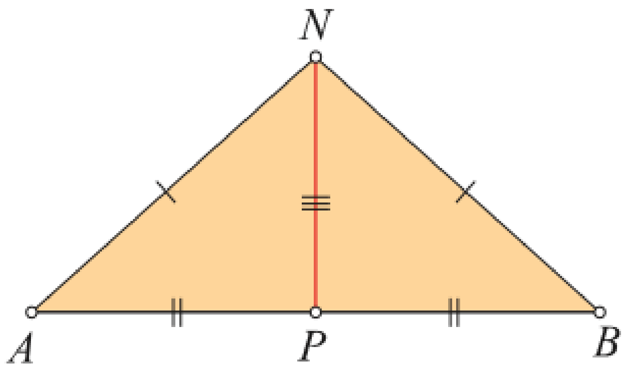
Primjer 18. Broj $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Dokaz. Kad bi $\sqrt{2}$ bio racionalan broj, mogli bismo ga zapisati o obliku količnika dva prirodna broja. Pa pretpostavimo da on to jest i zapišimo ga u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje su m i n prirodni brojevi (jer je $\sqrt{2}$ pozitivan broj). Također možemo pretpostaviti da m i n nisu oba parna, jer kada bi bili parni kratili bi ih sve dok možemo, dok barem jedan od njih ne bude neparan. Kvadriramo jednakost $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ i dobijemo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $m^2 = 2n^2$. Zaključujemo da je m^2 paran broj, ali onda je i m paran. Dakle, n je neparan. Zapišimo $m = 2k$ pa je $4k^2 = 2n^2$, odnosno $n^2 = 2k^2$. Slijedi da je n^2 paran broj, pa je time i n paran. No prirodan broj ne može biti i paran i neparan. Do ovog proturječnog zaključka dovela nas je pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Stoga je pretpostavka kriva, tj. $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

□

Napomena 1. Primjer 18 se u udžbeniku nalazi u *Kutku plus.*

Primjer 19 (Poučak o simetrali dužine)**.** Svaka točka simetrale dužine jednako je udaljena od krajnjih točaka dužine.



Slika 21: *Poučak o simetrali dužine*

Dokaz. Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i neka je P njezino polovište. Simetrala dužine prolazi točkom P okomito na $\overline{AB}$. Neka je N točka na toj simetrali. Uočavamo da je $\triangle APN \cong \triangle BPN$, jer su oba trokuta pravokutna, imaju jednu stranicu zajedničku i vrijedi $|AP| = |BP|$. Tada je i $|AN| = |BN|$, a to je i trebalo dokazati. $\square$

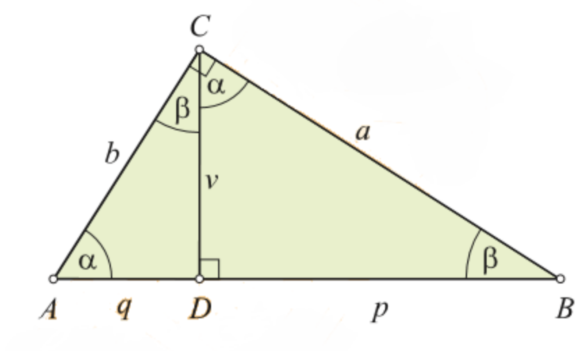
Primjer 20 (Euklidov poučak)**.** Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut, D nožište visine položene iz vrha C na hipotenuzu. Označimo $p = |BD|$, $q = |AD|$. Onda vrijedi:

$$a = \sqrt{cp}, \quad b = \sqrt{cq}, \quad v = \sqrt{pq}.$$

Duljina katete pravokutnog trokuta geometrijska je sredina duljina hipotenuze i odgovarajućeg odsječka.
Duljina visine pravokutnog trokuta geometrijska je sredina duljina odsječaka na hipotenuzi.

Dokaz. Trokut $\triangle ADC$ je pravokutan i jedan mu je kut α, isto kao i kod trokuta $\triangle ABC$, pa su oni slični. Isto tako, i trokut $\triangle BDC$ je sličan trokutu $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$



Slika 22: *Euklidov poučak*

Iz $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ slijedi $b : q = c : b \Rightarrow b^2 = cq \Rightarrow b = \sqrt{cq}$.
Iz $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ slijedi $a : p = c : a \Rightarrow a^2 = cp \Rightarrow a = \sqrt{cp}$.
Iz $\triangle CBD \sim \triangle ACD$ slijedi $v : p = q : v \Rightarrow v^2 = pq \Rightarrow v = \sqrt{pq}$. $\square$

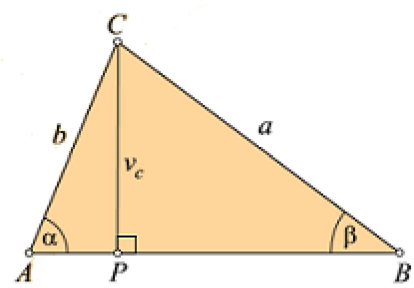
Primjer 21 (Poučak o sinusima)**.** U svakom su trokutu omjeri duljina stranica i sinusa tim stranicama suprotnih kutova jednaki:

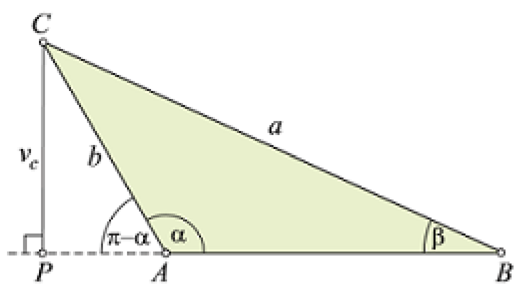
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Te jednakosti možemo zapisati u obliku produženog razmjera

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Dokaz. Nacrtajmo bilo koji trokut $\triangle ABC$.





Slika 23: *Poučak o sinusima*

U pravokutnom trokutu $\triangle APC$ vrijedi $v_c = b\sin\alpha$. Ako je kut α tup, onda je $v_c = b\sin(180^\circ - \alpha) = b\sin\alpha$.

Slično, iz trokuta $\triangle BPC$ je $v_c = a \sin\beta$. Slijedi

$$a \sin\beta = b \sin\alpha \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

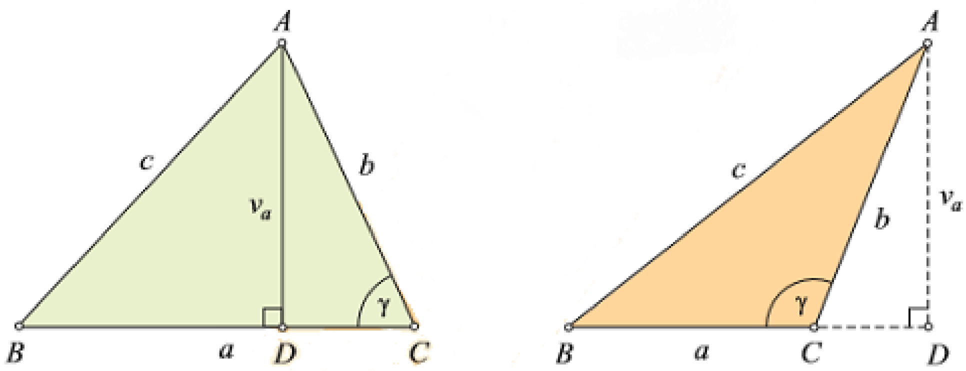
Na isti način dobije se i ovaj omjer:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

□

Primjer 22 (Poučak o kosinusu)**.** Kvadrat stranice u trokutu jednak je zbroju kvadrata drugih dviju stranica, umanjenom za dvostruki umnožak tih stranica i kosinusa kuta između njih:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$



Slika 24: *Poučak o kosinusu*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ bilo koji trokut. Na lijevoj slici kut γ je šiljast.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} c^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 \\ &= (a - |CD|)^2 + b^2 - |CD|^2 \\ &= a^2 - 2a \cdot |CD| + \cancel{|CD|^2} + b^2 - \cancel{|CD|^2} \\ &= a^2 + b^2 - 2a \cdot |CD| \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Na slici desno kut γ je tup. Vrijedi:

$$\begin{aligned} c^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 \\ &= (a + |CD|)^2 + b^2 - |CD|^2 \\ &= a^2 + 2a \cdot |CD| + \cancel{|CD|^2} + b^2 - \cancel{|CD|^2} \\ &= a^2 + b^2 + 2a \cdot |CD| \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \gamma) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Dakle, u oba slučaja vrijedi ista formula.
Analogno se pokaže da vrijede i ostale dvije jednakosti.

□

Primjer 23 (Poučak o simetrali kuta)**.** Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli suprotnu stranicu u omjeru jednakom omjeru duljina stranica što zatvaraju taj kut:

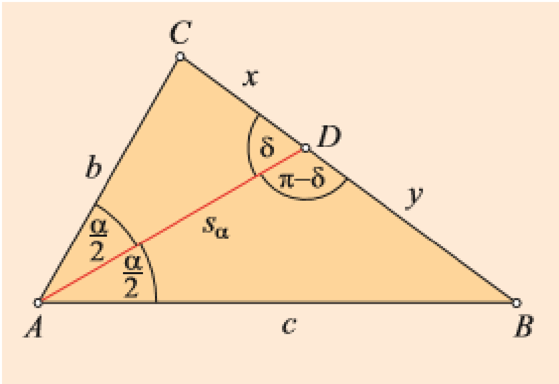
$$x : y = b : c.$$

Dokaz. Prema poučku o sinusima za trokute $\triangle ABD$ i $\triangle ADC$ je

$$\frac{x}{b} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\delta}, \quad \frac{y}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\pi - \delta)} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\delta}.$$

Zato je $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$, a odavde je $\frac{x}{y} = \frac{b}{c}$.

□

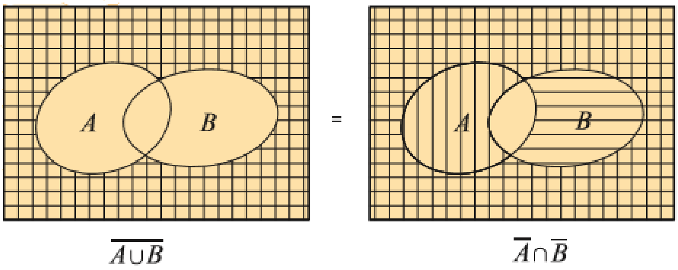


Slika 25: *Poučak o simetrali kuta*

Primjer 24 (De Morganovi zakoni)**.** Za skupove A i B vrijedi:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{2}$$



Slika 26: *De Morganovi zakoni (1)*

Dokaz.

(1)

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \;\; i \;\; x \notin B$$
$$\iff x \in \overline{A} \;\; i \;\; x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

(2) Drugu jednakost možemo dokazati na sličan način. Ali možemo vidjeti da ona slijedi iz prve jednakosti. Vrijedi $\overline{\overline{A}} = A$, pa možemo računati

$$A \cup B = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = (1) = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$$

te je
$$\overline{A \cup B} = \overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

□

Literatura

[1] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika* 1*, udžbenik i zbirka zadataka za* 1*. razred prirodoslovno - matematičke gimnazije,* 1*. dio*, Element, Zagreb, 2013.

[2] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika* 1*, udžbenik i zbirka zadataka za* 1*. razred prirodoslovno - matematičke gimnazije,* 2*. dio*, Element, Zagreb, 2013.

[3] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika* 3*, udžbenik i zbirka zadataka za* 3*. razred prirodoslovno - matematičke gimnazije,* 1*. dio*, Element, Zagreb, 2013.

[4] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika* 4*, udžbenik i zbirka zadataka za* 4*. razred prirodoslovno - matematičke gimnazije,* 1*. dio*, Element, Zagreb, 2013.

[5] N. HADAS, R. HERSHKOWITZ, B. B. SCHWARZ, *The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in Dynamic Geometry environments*, Educational studies in mathematics, 44 (2000.), 127-150.

[6] L. KRALJ, Z. ĆURKOVIĆ, D. GLASNOVIĆ GRACIN, S. BANIĆ, M. STEPIĆ, *Petica+* 6*, udžbenik i zbirka zadataka za* 6*. razred osnovne škole, prvi svezak*, SysPrint, Zagreb, 2010.

[7] L. KRALJ, Z. ĆURKOVIĆ, D. GLASNOVIĆ GRACIN, S. BANIĆ, M. STEPIĆ, *Petica+* 6*, udžbenik i zbirka zadataka za* 6*. razred osnovne škole, drugi svezak*, SysPrint, Zagreb, 2010.

[8] L. KRALJ, Z. ĆURKOVIĆ, D. GLASNOVIĆ GRACIN, S. BANIĆ, M. STEPIĆ, *Petica+* 7*, udžbenik i zbirka zadataka za* 7*. razred osnovne škole, drugi svezak*, SysPrint, Zagreb, 2010.

[9] T. NEMETH, G. STAJČIĆ, *Matematika* 8*, udžbenik za osmi razred osnovne škole,* 1*. polugodište*, Profil, Zagreb, 2005.

[10] T. H. MACDONALD, *The Role of Heuristic Proof in Mathematics Teaching*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 4 (1973), 103-107.

[11] D. A. REID, C. KNIPPING, *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*, Sense Publishers, Rotterdam, 2010.

[12] K. REISS, A. RENKL, *Learning to prove: The idea of heuristic examples*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 34 (2002), 29-35.

[13] O. ZASLAVSKY, S. D. NICKERSON, A. J. STYLIANIDES, I. KIDRON, G. WINICKI - LANDMAN, *The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives*, Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study (G. Hanna, M. de Villiers), New ICMI Study Series, Springer, New York, 2012., 215-229.

Sažetak

Dokazi u matematici imaju vrlo važnu ulogu i trebali bi imati svoje mjesto u nastavi matematike. Osim što utvrđuju istinitost matematičkih tvrdnji, oni ih objašnjavaju te potiču učenike na logičko zaključivanje i deduktivno razmišljanje. Učenici iz njih mogu naučiti neke metode rješavanja problema i matematičke koncepte. Često ne shvaćaju zašto je dokazivanje tvrdnji potrebno i većina njih smatra da je za dokazivanje tvrdnje dovoljno naći odgovarajući primjer. Oni zapravo nemaju intelektualnu potrebu za dokazima. Stoga, učitelj treba potaknuti učenike na dokazivanje pomoću dobro smišljenih aktivnosti kako bi se kod njih pojavila potreba za dokazivanjem. Primjeri takvih aktivnosti predstavljeni su u ovom radu kao istraživanje u kojem su učenici koristili program dinamičke geometrije. Korištenje programa dinamičke geometrije može biti vro korisno učenicima jer pomoću njega mogu vrlo brzo i jednostavno utvrditi valjanost tvrdnji. U zadnjem dijelu rada nalaze se primjeri dokaza iz udžbenika za osnovnu i srednju školu.

Ključne riječi: dokaz, dokazivanje, matematika, obrazovanje, škola

Summary

Mathematical proofs play a very important role and should have their place in math classes. Besides determining the truth of mathematical statements, they also explain them and reinforce logical conclusions and deductive thinking. Students can learn some methods of solving the problems and mathematical concepts using them. It is common that students do not understand why it is necessary to substantiate their claims, and most of them think it is enough to find a suitable example to prove them. They do not actually have the intellectual need for proofs. Therefore, the teacher is supposed to encourage students to prove statements by means of well-designed activities in order to create their need for proofs. Examples of such activities are presented in this paper as a study in which students used a dynamic geometry program. The use of dynamic geometry can be very helpful to students, because they can quickly and easily determine the validity of a claim by using it. In the last part of the paper, there are examples of proofs from elementary and high school textbooks.

Key words: proof, proving, mathematics, education, school

Životopis

Rođena sam 18.1.1992. godine u Zagrebu. Ubrzo nakon rođenja, vraćam se s roditeljima u Osijek, gdje živim sve do danas. Pohađala sam Osnovnu školu Vladimira Becića u Osijeku. Nakon toga 2006. godine upisala sam I. gimnaziju Osijek. 2010. godine upisala sam Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.