Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ena Pribisalić

Jednodimenzionalno provođenje topline

Završni rad

Osijek, 2017

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ena Pribisalić

Jednodimenzionalno provođenje topline

Završni rad

Mentorica: doc.dr.sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2017

The One-Dimensional Heat Conduction

Sažetak

U ovome radu upoznat ćemo se s jednadžbom jednodimenzionalnog provođenja topline, te predstaviti metode pronalaska rješenja u ovisnosti o različitim rubnim uvjetima koji su pritom zadani. Najprije ćemo se upoznati s parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, konkretno: linearnim jednadžbama drugog reda. Nakon njihove osnovne klasifikacije, izvest ćemo kanonski oblik paraboličkih jednadžbi kojima pripada upravo jednadžba provođenja topline. Zatim ćemo navesti i detaljno objasniti početne i rubne uvjete koji su sastavni dio problema provođenja topline. Precizno ćemo definirati pojam Fourierovog reda, navesti njegova svojstva, te iskazati osnovne tvrdnje o njegovoj konvergenciji. Taj dio matematičke teorije neophodan je za razumijevanje postupka rješavanja jednadžbe provođenja. U glavnom dijelu rada napravit ćemo izvod jednadžbe jednodimenzionalnog provođenja topline koji se bazira na nekoliko temeljnih fizikalnih zakona. Detaljno ćemo analizirati homogenu i nehomogenu jednadžbu provođenja, te pokazati kako se metodom kompleksifikacije mogu rješavati neki tipovi homogenih jednadžbi. Navest ćemo i nekoliko zanimljivih primjera te ih ilustrirati sličicama.

Ključne riječi Parcijalne diferencijalne jednadžbe, početni i rubni uvjeti, Fourierov red, jednadžba provođenja topline, separacija varijabli, kompleksifikacija

Abstract

In this paper we will introduce the one-dimensional heat conduction problem and present methods for searching a solution, based on different boundary conditions which are imposed on the corresponding eqaution. First, we will get acquainted with partial differential equations, specifically: second order linear equations. After we do the proper classification, the canonical form for parabolic type of equation will be derived, since this is the type of equation that a heat equation belongs to. In the following we will specify and explain in details the initial and boundary conditions which are unavoidable parts of the heat conduction problem. We will define the Fourier series, list their main properties and state several basic theorems regarding their convergence. This part of mathematical theory is essential for understanding the solving process for the heat conduction problem. In the main part of this paper we will derive the heat equation by using some basic physical laws. Then, we will thoroughly analyse the homogeneous and nonhomogeneous equation, show the way in which we can complexify some types of homogeneous problems and give some examples along with their illustrations.

Keywords Partial differential equations, initial and boundary conditions, Fourier series, heat equation, separation of variables, complexification

Sadržaj

1 Uvod

Toplina (toplinska energija ili količina topline) je fizikalna veličina kojom se opisuje energija koja zbog razlike temperature prelazi s toplijega tijela na hladnije, odnosno iz područja više u područje niže temperature. Oznaka za toplinu je Q, a mjerna jedinica je džul (J), dok je stara jedinica bila kalorija (1 cal $= 4,186$ J).
Postoje tri načina prijenosa topline: *vođenje* (kondukcija), *strujanje* (konvekcija) te *zračenje* (radijacija). Nas će najviše zanimati vođenje topline što je ujedno i glavna tema ovog rada.
Toplina koja se izmjenjuje pri dodiru dvaju tijela različitih temperatura ovisi o masi m tijela, specifičnom toplinskom kapacitetu c tvari od koje se tijelo sastoji, te o temperaturi tijela T, i pritom vrijedi

$$Q = c \cdot m \cdot T.$$

Subjektivni osjećaj topline dobiva se dodirom s tijelima kojima je temperatura viša (toplo) ili niža (hladno) od temperature ljudskoga tijela. Toplina se objektivno mjeri promatranjem djelovanja ugrijanih tijela na druga tijela (kalorimetrija).

Specifični toplinski kapacitet c ima značenje toplinske energije potrebne da se jedinica mase tijela ugrije za 1 kelvin (K) pa je mjerna jedinica specifičnog toplinskog kapaciteta džul po kilogramu i kelvinu ($J/(kgK)$).

TVAR	c ($J/(kgK)$)
voda	4816
ulje	3800
alkohol	2500
led	2100
aluminij	900
staklo	800
željezo	460
cink	390
bakar	380
živa	140

Tablica 1: Specifični toplinski kapaciteti nekih tvari.

Vođenje topline je proces kojim se toplina prenosi s čestice na česticu unutar tijela. Pri tome obično mislimo na krute tvari koje miruju. Kao što je spomenuto, uvjet za odvijanje tog procesa je postojanje temperaturnih razlika, dakle toplijih i hladnijih mjesta, unutar tijela (slično kao što je postojanje unutarnje razlike potencijala uvjet za strujanje elektrona unutar tijela, odnosno nastajanje električne struje).

Fourierov zakon vođenja topline
Već smo ranije spomenuli da je prijelaz topline uvjetovan postojanjem temperaturne razlike. Toplinska energija se spontano prenosi s mjesta više na mjesto niže temperature. **Toplinski tok** je energija koja prođe kroz materijal (plohu) po jediničnom vremenu, a ima smjer normale na promatranu plohu. Toplinski tok označavamo s $\vec{\Phi}$, a mjerimo ga u vatima (W). Vrijednost toplinskog toka računamo, po definiciji, kao $\Phi = Q/t$. **Gustoća toplinskog toka** je energija po jedinici vremena kroz jediničnu površinu okomitu na smjer toka. Označavamo

ju s $\vec{q}$, a njen iznos q računamo po formuli $q = \Phi/S$, gdje je S jedinična površina kroz koju protječe toplina. Mjerna jedinica za gustoću toplinskog toka je vat po metru kvadratnom (W/m^2).

Fourier je još početkom 19. stoljeća postavio zakon prema kojemu je brzina prenesene topline proporcionalna negativnom gradijentu temperature te površini pod pravim kutovima na taj gradijent, kroz koju toplina protječe, odnosno vrijedi

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -K_0 \oint_S \boldsymbol{\nabla} T \cdot dS, \tag{1.1}$$

gdje je Q količina prenesene topline, t je proteklo vrijeme, K_0 je koeficijent toplinske vodljivosti, S površina kroz koju toplina protječe, a T temperatura. Veličina K_0 ovisi o materijalu kroz koji se toplina provodi. Što je K_0 veći, to će se uz isti gradijent temperature prenijeti više topline. Fourierov zakon, poput većine temeljnih zakona fizike, nije moguće izvesti teorijski, ali ga je moguće potvrditi mjerenjima.

Vrlo često se problemi vođenja topline razmatraju u pravokutnom koordinatnom sustavu, a u nešto jednostavnijim slučajevima nas zanima vođenje topline u samo jednom smjeru (primjerice, u smjeru osi OX). Za taj se slučaj Fourierov zakon pojednostavljuje jer u jednodimenzionalnom slučaju imamo

$$\boldsymbol{\nabla}(T) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.$$

Integracijom Fourierovog zakona (1.1) za jednodimenzionalan slučaj vođenja topline dobivamo

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -K_0 S \frac{dT}{dx}, \tag{1.2}$$

gdje je lijeva strana jednakosti jednaka promjeni $\Delta\Phi$ toplinskog toka, a na desnoj strani imamo promjenu Δq gustoće toplinskog toka pomnoženu sa površinom S presječenog područja. Ovaj oblik Fourierovog zakona će nam biti potreban kasnije.

Koeficijent toplinske vodljivosti je pokazatelj stupnja propusnosti materijala za vođenje topline. Taj se koeficijent mijenja u širokom rasponu od materijala koji dobro vode toplinu do onih koji je vode veoma loše. Općenito vrijedi pravilo da su dobri vodiči električne struje ujedno i dobri vodiči topline.

TVAR	K_0 $(W/(mK))$
drveni ugljen	0.02
zrak	0.025
stiropor	$0.035 - 0.04$
drvo	$0.04 - 0.4$
alkoholi i ulja	$0.1 - 0.21$
guma	0.16
cement	0.29
voda tekuća	0.6
beton, kamen	1.7
živa	8.3
dijamant	$900 - 2320$
grafen	$(4840 \pm 440) - (5300 \pm 480)$

Tablica 2: Koeficijenti toplinske vodljivosti nekih tvari.

Prvi zakon termodinamike

Kada govorimo o vođenju topline, javlja se potreba da kvantitativno odredimo odvedenu, odnosno dovedenu toplinu tijelu te temperaturu tijela. Kako ćemo to postići? Zakon očuvanja energije kaže da energija u zatvorenom sustavu ne nastaje niti ne nestaje, jednostavno prelazi iz jednog oblika u drugi. Primjenom na termodinamičke sustave, dobivamo **prvi zakon termodinamike** koji glasi:

Količina topline dovedene zatvorenom sustavu jednaka je promjeni unutarnje energije sustava i radu koji sustav obavi.

Ako sustav ne vrši nikakav rad, tada se sva dovedena toplina utroši na promjenu unutarnje energije U. Stoga unutarnja energija tijela određuje sadržaj toplinske energije u tijelu, $\Delta U = Q$, koja je, kao što smo već spomenuli na samom početku uvoda, definirana s

$$Q = c \cdot T \cdot \rho \cdot V, \tag{1.3}$$

gdje je c specifični toplinski kapacitet materijala tijela, ρ je gustoća materijala tijela (kg/m^3), V je volumen tijela (m^3) i T je temperatura (K). Ovdje smo koristili: $m = \rho \cdot V$.

Glavna tema ovog rada je jednodimenzionalno provođenje topline. Bavit ćemo se izvodom jednadžbe provođenja, a onda i njenim rješavanjem. Problem se može generalizirati na višedimenzionalno provođenje, no, već je za slučaj jedne dimenzije potrebno koristiti jake rezultate matematičke analize koji daju komplicirane matematičke izraze, a za njih čitatelj, pored upućenosti, mora posjedovati i iznimnu koncentraciju.

2 Parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda

Prije nego definiramo parcijalne diferencijalne jednadžbe, potrebno je prisjetiti se pojma parcijalne derivacije funkcije više varijabli. Tome je upravo posvećen naredni odjeljak.

2.1 Parcijalne derivacije i geometrijska interpretacija

Definicija 2.1 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija. Za fiksan $k \in \{1, 2, ..., n\}$ kažemo da funkcija ima* ***k-tu parcijalnu derivaciju*** *(parcijalnu derivaciju po k-toj varijabli) u točki $P_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \Omega$ ukoliko postoji limes*

$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)}{x_k - x_k^0}.$$

Takav limes nazivamo ***parcijalna derivacija funkcije f po k-toj varijabli u točki $\mathbf{P_0}$*** *i označavamo ga s $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(P_0)$.*

Napomena 2.1 *Ako funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima derivaciju po k-toj varijabli u svakoj točki $P_0 \in \Omega$, onda kažemo da je f* ***derivabilna na $\mathbf{\Omega}$****.*

Definicija 2.2 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija i neka postoje parcijalne derivacije na Ω, odnosno postoje funkcije $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} : \Omega \to \mathbb{R}$. Parcijalnu derivaciju po j-toj varijabli funkcije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i, j = 1, ..., n$ u točki $P_0 \in \Omega$ nazivamo* ***parcijalna derivacija drugog reda funkcije f po i-toj i j-toj varijabli*** *i označavamo ju s $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_0)$.*

Definicija 2.3 *Funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je* ***klase $\mathbf{C^p}$****, $p \geq 1$ na Ω ukoliko funkcija f ima neprekidne parcijalne derivacije reda p na Ω.*

Teorem 2.1 [Schwarz] *Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2 na Ω. Tada je*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)$$

za sve $i, j = 1, \ldots, n$ i $P \in \Omega$.

Geometrijska interpretacija parcijalne derivacije za slučaj funkcije jedne varijable ista je kao geometrijska interpretacija derivacije funkcije, tj. vrijedi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$. Kada govorimo o funkciji dvije varijable, možemo interpretirati parcijalnu derivaciju na sličan način. Graf funkcije $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$ je krivulja koju dobijemo presijecanjem plohe $z = f(x, y)$ ravninom $y = y_0$, pa je stoga $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ koeficijent smjera tangente na tu krivulju u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Analogno se interpretira parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

2.2 Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Kao što smo spomenuli u uvodu, za razliku od obične diferencijalne jednadžbe, u kojoj je nepoznanica funkcija jedne varijable, u parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi nepoznanica je funkcija dviju ili više nezavisnih varijabli.

Definicija 2.4 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i povezan skup i $u : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija n nezavisnih varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Za $k \in \mathbb{N}$* ***parcijalna diferencijalna jednadžba reda*** *k je jednadžba koja ovisi o nepoznatoj funkciji u i njenim parcijalnim derivacijama tako da je najviši red parcijalne derivacije u jednadžbi jednak k.*

Opći oblik parcijalne diferencijalne jednadžbe je:

$$F(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1x_1}u_{x_1x_2}, ...) = 0, \tag{2.1}$$

pri čemu je

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \ldots$$

Definicija 2.5 ***Rješenje*** *parcijalne diferencijalne jednadžbe* (2.1) *na skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je funkcija $u \in C^k(\Omega)$ koja zadovoljava jednadžbu* (2.1) *u svakoj točki skupa Ω. Za ova rješenja kažemo da su* ***klasična*** *ili* ***jaka rješenja****.*

Parcijalne diferencijalne jednadžbe možemo klasificirati na više načina, od kojih su najčešći oni koji se odnose na red jednadžbe te na linearnost.

- *Red* parcijalne diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se u njoj pojavljuje.
- Za jednadžbu (2.1) kažemo da je *linearna* ako je funkcija F linearna u varijabli u i u svim njenim derivacijama. U takvoj jednadžbi koeficijenti koji množe u i njezine derivacije ovise samo o nezavisnim varijablama $x_1, \ldots, x_n$.

Kažemo da je jednadžba (2.1) *kvazi-linearna* ako je linearna u parcijalnim derivacijama najvišeg reda funkcije u. Za jednadžbu koja nije linearna kažemo da je *nelinearna*.

Primjer 2.1 *Pogledajmo nekoliko tipova parcijalnih diferencijalnih jednadžbi obzirom na navedenu klasifikaciju. Uzimamo da je u funkcija dviju nezavisnih varijabli x i y:*

• $yu_x + u_y = u$	*linearna jednadžba prvog reda*
• $(u_{xx})^2 - uu_y = x \sin y$	*nelinearna jednadžba drugog reda*
• $u_y u_{xxx} + xu_{yyx} = yu - uu_{xx} + xu_{xy}$	*kvazi-linearna jednadžba trećeg reda*

2.3 Linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda

U prirodnim i tehničkim znanostima često se razni matematički problemi modeliraju sa linearnim parcijalnim diferencijalnim jednadžama drugog reda. Jednadžba provođenja topline, koja je ujedno i glavna tema ovog rada, jedna je od najpoznatijih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi tog tipa.

Opći oblik linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda je

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Cu = G, \tag{2.2}$$

gdje su A_{ij}, B_i, C i G funkcije varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u nekom području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Ako jednadžbi (2.2) pridružimo diferencijalni operator

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + C,$$

onda jednadžbu (2.2) možemo pisati u obliku

$$L[u] = G.$$

Klasifikacija linearnih jednadžbi obzirom na funkciju G:

- *homogena* ako je $G = 0$,
- *nehomogena* ako je $G \neq 0$.

U slučaju kada je u funkcija dviju nezavisnih varijabli x i y, opći oblik linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda je

$$L[u] = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \tag{2.3}$$

pri čemu su u, A, B, C, D, E, F, G funkcije varijabli x, y u nekom području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.
Operator

$$L_0 = A\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \tag{2.4}$$

naziva se *glavni dio* operatora L i njemu je pridružena diskriminanta

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \tag{2.5}$$

Pritom dio jednadžbe (2.3) u kojem se pojavljuju članovi A, B i C zovemo *glavnim dijelom* te jednadžbe. U nastavku ćemo pokazati da predznak diskriminante (2.5) ne ovisi o koordinatnom sustavu u kojem promatramo jednadžbu, pa ima smisla napraviti klasifikaciju jednadžbi upravo prema tom kriteriju. Pritom ćemo se baviti onim jednadžbama u kojima je nepoznanica funkcija dviju varijabli.

2.3.1 Klasifikacija linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda

Definicija 2.6 *Jednadžba* (2.3) *naziva se*

(a) ***hiperbolička*** *u točki* (x, y) *ako je* $\Delta(x, y) > 0$,

(b) ***parabolička*** *u točki* (x, y) *ako je* $\Delta(x, y) = 0$,

(c) ***eliptička*** *u točki* (x, y) *ako je* $\Delta(x, y) < 0$.

Primjer 2.2

(a) *Valna jednadžba*
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$
je hiperbolička u $\mathbb{R}^2$ *jer je* $\Delta(t, x) = c^2 > 0$.

(b) *Jednadžba provođenja topline*
$$u_t - k u_{xx} = 0$$
je parabolička u $\mathbb{R}^2$ *jer je* $\Delta(t, x) = 0$.

(c) *Laplaceova jednadžba*
$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
je eliptička u $\mathbb{R}^2$ *jer je* $\Delta(x, y) = -1 < 0$.

Dokažimo sada neovisnost predznaka (2.5) o koordinatnom sustavu u kojem promatramo jednadžbu.

Lema 2.1 *Neka su* $\alpha = \alpha(x, y)$ *i* $\beta = \beta(x, y)$ *nove varijable,* $\alpha, \beta \in C^2(\Omega)$ *te neka je* $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$ *regularna transformacija. Tada je predznak diskriminante jednadžbe* (2.3) *invarijantan obzirom na transformaciju* $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$.

Dokaz. Neka je $u(x, y) = w(\alpha(x, y), \beta(x, y))$. Iz pravila o deriviranju kompozicije slijedi:

$$\begin{aligned}
u_x &= w_\alpha \alpha_x + w_\beta \beta_x, \\
u_y &= w_\alpha \alpha_y + w_\beta \beta_y, \\
u_{xx} &= w_{\alpha\alpha}\alpha_x^2 + 2w_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_x + w_{\beta\beta}\beta_x^2 + w_\alpha\alpha_{xx} + w_\beta\beta_{xx}, \\
u_{xy} &= w_{\alpha\alpha}\alpha_x\alpha_y + w_{\alpha\beta}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + w_{\beta\beta}\beta_x\beta_y + w_\alpha\alpha_{xy} + w_\beta\beta_{xy}, \\
u_{yy} &= w_{\alpha\alpha}\alpha_y^2 + 2w_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_y + w_{\beta\beta}\beta_y^2 + w_\alpha\alpha_{yy} + w_\beta\beta_{yy}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovih izraza u (2.3) dobivamo

$$\tilde{L}[w] = \tilde{A}w_{\alpha\alpha} + 2\tilde{B}w_{\alpha\beta} + \tilde{C}w_{\beta\beta} + \tilde{D}w_\alpha + \tilde{E}w_\beta + \tilde{F}w = \tilde{G},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(\alpha, \beta) &= A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2, \\
\tilde{B}(\alpha, \beta) &= A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y, \\
\tilde{C}(\alpha, \beta) &= A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Kako tip jednadžbe ovisi samo o koeficijentima A, B i C, ostale koeficijente nema potrebe računati. Matrični zapis jednadžbi (2.6) je

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{B} & \tilde{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{bmatrix}$$

pa računanjem determinante i primjenom Binet-Cauchyjevog teorema (vidi [2, str. 98]) dobivamo

$$\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2 = (AC - B^2)(\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x)^2,$$

odnosno, $\tilde{\Delta} = \Delta J^2$.

Obzirom na pretpostavku o regularnosti transformacije, imamo da je pripadni Jacobijan J različit od nule:

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x \neq 0.$$

Štoviše, ova transformacija ima svoju inverznu transformaciju $x = x(\alpha, \beta),\ y = y(\alpha, \beta)$. Zaključujemo da diskriminante $\tilde{\Delta}$ i Δ imaju isti predznak pa stoga funkcije u i w zadovoljavaju isti tip jednadžbe. □

Lema 2.1 je od velike važnosti jer se uvođenjem novih varijabli jednadžba (2.3) može svesti na jednostavniji oblik: takozvani *kanonski oblik*. Specifičnost takvog oblika je u tome što omogućuje bolji uvid u svojstva jednadžbe (2.3), a njegov glavni dio upravo je jednak glavnom dijelu valne, toplinske ili Laplaceove jednadžbe. Poznavajući rješenje $w(\alpha, \beta)$ kanonskog oblika jednadžbe (2.3), poznajemo i rješenje početne jednadžbe jer je ono dano sa $u(x, y) = w(\alpha(x, y), \beta(x, y))$.

Definicija 2.7 ***Kanonski oblik***

(a) ***hiperboličke jednadžbe*** *je*

$$w_{\alpha\beta} + L_1[w] = \tilde{G}(\alpha, \beta),$$

gdje je L_1 diferencijalni operator prvog reda. Ovaj kanonski oblik ekvivalentan je sa

$$w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + L_1[w] = \tilde{G}(\xi, \eta)$$

gdje su varijable ξ i η dane transformacijom $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$,

(b) ***paraboličke jednadžbe*** *je*

$$w_{\alpha\alpha} + L_1[w] = \tilde{G}(\alpha, \beta),$$

(c) ***eliptičke jednadžbe*** *je*

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} + L_1[w] = \tilde{G}(\alpha, \beta).$$

Obzirom da nas najviše zanimaju paraboličke jednadžbe, slijedi detaljan izvod kanonskog oblika takvih jednadžbi.

2.3.2 Kanonski oblik paraboličkih jednadžbi

Teorem 2.2 *Neka je*

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{2.7}$$

parabolička jednadžba u području Ω. *Tada postoje varijable* $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ *u kojima jednadžba* (2.7) *ima kanonski oblik*

$$w_{\alpha\alpha} + L_1[w] = \tilde{G}, \tag{2.8}$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ *i* L_1 *je diferencijalni operator prvog reda.*

Dokaz. Prema pretpostavci je $\Delta = B^2 - AC = 0$, a kako A, B i C nisu svi jednaki nuli, to je $A \neq 0$ ili $C \neq 0$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $A \neq 0$ u Ω. Prema lemi 2.1, potrebno je naći transformaciju $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ takvu da koeficijenti

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\alpha, \beta) &= A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y, \\ \tilde{C}(\alpha, \beta) &= A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

iščezavaju. Uz uvjet $\Delta = B^2 - AC = 0$, jednadžba $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$ ima jedno dvostruko realno rješenje u Ω:

$$\lambda(x, y) = -\frac{B(x, y)}{A(x, y)}.$$

Pretpostavimo da varijabla β zadovoljava karakterističnu jednadžbu

$$\beta_x = \lambda(x, y)\beta_y \tag{2.10}$$

i da je $\beta_y \neq 0$. Uvrštavanjem jednadžbe (2.10) u jednadžbe (2.9) dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= (A\lambda + B)\alpha_x\beta_y + (B\lambda + C)\alpha_y\beta_y = \frac{1}{A}\big(AC - B^2\big)\alpha_y\beta_y = 0, \\ \tilde{C} &= (A\lambda^2 + 2B\lambda + C)\beta_y^2 = 0. \end{aligned}$$

Za funkciju $\alpha = \alpha(x, y)$ možemo odabrati bilo koju funkciju tako da je Jacobijan transformacije $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$ različit od nule. Ako odaberemo $\alpha = x$, tada vrijedi

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \beta_y \neq 0.$$

Sada za koeficijent $\tilde{A}$ imamo

$$\tilde{A} = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C^2\alpha_y^2 = A \neq 0$$

pa dijeljenjem jednadžbe u novim varijablama s $\tilde{A}$ i uzimajući u obzir $\tilde{B} = \tilde{C} = 0$ dobivamo kanonski oblik

$$w_{\alpha\alpha} + L_1[w] = \tilde{G}.$$

□

Primjer 2.3 *Odredimo kanonski oblik jednadžbe*

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = e^x. \tag{2.11}$$

Rješenje. Uvjerimo se najprije da je jednadžba parabolička. Koeficijenti potrebni za određivanje tipa parcijalne diferencijalne jednadžbe su sljedeći:

$$A = x^2 \quad B = -xy \quad C = y^2.$$

Dakle, diskriminanta pridružena glavnom dijelu operatora $L[u] = x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy}$ je

$$\Delta = B^2 - AC = (-xy)^2 - x^2 y^2 = 0,$$

čime smo potvrdili da je jednadžba parabolička.

Za pronalazak kanonskog oblika dane jednadžbe trebamo riješiti jednadžbu

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$$

koja je u našem slučaju ekvivalentna jednadžbi

$$x^2\lambda^2 - 2xy\lambda + y^2 = 0,$$

a njeno rješenje je $\lambda_{1,2}(x,y) = \dfrac{y}{x}$.
Prema (2.10) varijabla β zadovoljava jednadžbu

$$\beta_x = \frac{y}{x}\beta_y$$

čije je rješenje $\beta = \beta(x,y) = xy$.
Za $\alpha = \alpha(x,y)$ možemo uzeti bilo koju funkciju za koju je odgovarajući Jacobijan različit od nule. Uzmimo $\alpha = x$. Imamo

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = x.$$

Dakle, transformacija varijabli je definirana s $\alpha = x$ i $\beta = xy$ i $w(\alpha,\beta) = u(x,y)$.
Koristeći formule iz dokaza leme 2.1 dobivamo:

$$\begin{aligned}
u_x &= w_\alpha + yw_\beta, \\
u_y &= xw_\beta, \\
u_{xx} &= w_{\alpha\alpha} + 2yw_{\alpha\beta} + y^2 w_{\beta\beta} \\
u_{xy} &= xw_{\alpha\beta} + xyw_{\beta\beta} + w_\beta, \\
u_{yy} &= x^2 w_{\beta\beta}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (2.11) dobivamo

$$x^2 w_{\alpha\alpha} - 2xyw_\beta = e^x$$

pa je kanonski oblik dane jednadžbe u novim varijablama

$$w_{\alpha\alpha} - 2\frac{\beta}{\alpha^2}w_\beta = \frac{e^\alpha}{\alpha^2}.$$

■

2.4 Princip superpozicije

Linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe imaju važno svojstvo koje zovemo **princip superpozicije**. On glasi: Ako su $u_1, u_2, \ldots, u_k$ rješenja problema

$$L[u_i] = G_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

onda je linearna kombinacija

$$u = \sum_{i=1}^{k} C_i u_i, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

rješenje jednadžbe

$$L[u] = \sum_{i=1}^{k} C_i G_i.$$

Posebno, ako su u_i rješenja homogene jednadžbe

$$L[u] = 0$$

za svaki $i = 1, 2 \ldots, k$, tada je svaka linearna kombinacija

$$u = \sum_{i=1}^{k} C_i u_i$$

rješenje istog problema $L[u] = 0$.

3 Početni i rubni uvjeti

Parcijalne diferencijalne jednadžbe, baš kao i obične diferencijalne jednadžbe, općenito imaju beskonačno mnogo rješenja. Međutim, nas zanimaju samo one jednadžbe koje su modeli ponašanja nekog fizikalnog sustava. Stoga je nužno da svaka takva jednadžba ima jedinstveno rješenje, pa se u tu svrhu zadaju dodatni uvjeti: *početni* i *rubni*.

3.1 Početni uvjeti

Početni uvjeti, poznati još iz teorije običnih diferencijalnih jednadžbi, specificiraju stanje sustava u nekom određenom vremenskom trenutku t_0.

Primjerice, kod jednadžbe provođenja topline štapa potrebno je zadati neku **početnu temperaturu** koja će općenito biti različita u različitim točkama štapa:

$$u(x,0) = \phi(x).$$

Kod problema oscilacije žice opisanog valnom jednadžbom, osim **početnog položaja** (svake točke) žice $u(x,0) = \phi(x)$, potrebno je zadati i **početnu brzinu** žice $u_t(x,0)$ jer se u valnoj jednadžbi pojavljuje parcijalna derivacija drugog reda po varijabli (vremenu) t.

3.2 Vrste rubnih uvjeta

Osim ovisnosti funkcije-rješenja o varijabli vremena, jasno je da treba uzeti u obzir i njenu ovisnost o točkama jednodimenzionalnih, dvodimenzionalnih ili višedimenzionalnih područja.

Primjerice, kod problema oscilacije neke tanke žice duljine l, zanima nas amplituda $u(x,t)$ progiba žice za $0 \leq x \leq l$. Rubovi višedimenzionalnih područja su, pak, krivulje, plohe itd. Važnost rubnih dijelova tih područja leži u tome što je upravo na tim mjestima fizikalni sustav u interakciji sa raznim vanjskim čimbenicima, a tu je interakciju potrebno opisati pomoću rubnih uvjeta.

Navest ćemo četiri tipa rubnih uvjeta te ih ilustrirati primjerima.

Dirichletovi rubni uvjeti

Dirichletovi (geometrijski, prvi, kinematički) rubni uvjeti određuju vrijednost funkcije u na rubovima. Primjerice, za štap duljine l imamo Dirichletove uvjete

$$u(0,t) = a(t), \quad u(l,t) = b(t), \tag{3.1}$$

koji u slučaju kada su a i b konstante, govore da se rubovi štapa održavaju na stalnim temperaturama. Ako je $a = b = 0$, onda se rubovi štapa održavaju na stalnoj temperaturi od $0°$.

Ako imamo slučaj oscilacija ili ravnoteže žice, ili pak torzijskih oscilacija tankog štapa (što opisuje valna jednadžba), Dirichletovi rubni uvjeti nam govore da su rubovi žice, odnosno štapa učvršćeni.

Općenito, ako je $a = b = 0$, onda govorimo o homogenim Dirichletovim rubnim uvjetima.

Neumannovi rubni uvjeti

Neumannovi (prirodni, drugi, kinematički) rubni uvjeti su uvjeti koji određuju promjenu funkcije u na rubovima:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = a(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = b(t). \tag{3.2}$$

Kod problema provođenja topline štapa, ovi uvjeti nam govore da se preko njegova ruba prenosi određena količina topline u ovisnosti o vremenu. Ako je $a = b = 0$, tada je rub toplinski izoliran, tj. nema izmjene topline preko tog ruba.

Ako promatramo oscilacije ili ravnotežu žice, Neumannov rubni uvjet nam govori da je na rubu zadana neka kontaktna sila. U slučaju $a = b = 0$, kažemo da je rub slobodan.
Kao i u slučaju Dirichletovih rubnih uvjeta, ako je $a = b = 0$, onda kažemo da su Neumannovi rubni uvjeti homogeni.

Robinovi rubni uvjeti

Kombiniranjem Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta dobivamo *Robinove* rubne uvjete:

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + b(t)u(0,t) = c(t), \quad \alpha(t)\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + \beta(t)u(l,t) = \gamma, \tag{3.3}$$

za dane a, b, c, α, β i γ.

Primjerice, ako u slučaju provođenja topline dolazi do izmjene temperature štapa i temperature $g = g(t)$ okoline po Newtonovom zakonu hlađenja, onda imamo Robinov rubni uvjet $u_x(l,t) = -\beta(u(l,t) - g(t))$, gdje je $\beta = \beta(t)$ zadana funkcija.
Ako je npr. $a = \beta = 0$, onda kažemo da na lijevom rubu imamo Dirichletov rubni uvjet, a na desnom Neumannov.

Periodični rubni uvjeti

Pretpostavimo da imamo žicu duljine $2l$. Ako ju savijemo u oblik kružnice, tada vrijede *periodični* rubni uvjeti:

$$u(-l,t) = u(l,t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-l,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t). \tag{3.4}$$

Napomena 3.1 *Nužno je istaknuti da rubni uvjeti općenito nisu dovoljni da osiguraju jedinstvenost rješenja određene parcijalne diferencijalne jednadžbe. Tako je kod oscilacija žice potrebno dodatno zadati početni položaj i početnu brzinu žice, dok je kod provođenja topline dovoljno još zadati početnu raspodjelu temperature. Pritom treba paziti na kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta, tj. početni uvjeti moraju na rubovima zadovoljavati rubne uvjete za svaki t.*

4 Fourierov red

Fourierov red koristimo za aproksimaciju funkcija na konačnom intervalu pomoću trigonometrijskih polinoma. Na tu ideju došao je francuski matematičar Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768.-1830.) proučavajući jednadžbu provođenja topline.

Budući da je Fourierov red osnovni alat za rješavanje jednadžbe provođenja, ovaj odjeljak ćemo posvetiti definiciji i osnovnim svojstvima Fourierovih redova.

4.1 Definicija Fourierovog reda

Pogledajmo najprije prostor $C([-\pi,\pi])$ uz skalarni produkt definiran na sljedeći način:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Lema 4.1 *Sustav trigonometrijskih funkcija* $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, ..., \sin(nx), \cos(nx), ...$ *ortogonalan je na* $[-\pi,\pi]$*, tj. za* $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{\pi}{2},\\
\langle \sin(\alpha x), \sin(\beta x)\rangle &= \begin{cases} 0, \alpha\neq\beta\\ \pi, \alpha=\beta,\end{cases}\\
\langle \cos(\alpha x), \cos(\beta x)\rangle &= \begin{cases} 0, \alpha\neq\beta\\ \pi, \alpha=\beta,\end{cases}\\
\langle \sin(\alpha x), \cos(\beta x)\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Dokaz. Dokaz provodimo koristeći neke trigonometrijske identitete. Neka je $\alpha\neq\beta$. Imamo:

$$\begin{aligned}
\langle \sin(\alpha x), \sin(\beta x)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos((\alpha-\beta)x) - \cos((\alpha+\beta)x)\right)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((\alpha-\beta)x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}\cos((\alpha+\beta)x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}(\sin((\alpha-\beta)x) - \frac{1}{\alpha+\beta}\sin((\alpha+\beta)x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{1}{2}(0-0)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Slično dobivamo:

$$\langle \cos(\alpha x), \cos(\beta x)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos((\alpha-\beta)x) + \cos((\alpha+\beta)x)\right)\,dx = 0.$$

Za $\alpha = \beta$ imamo

$$\begin{aligned}
\langle \sin(\alpha x), \sin(\beta x)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\alpha x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \big(1-\cos^2(\alpha x)\big)\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2\alpha x)}{2}\, dx \\
&= x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\alpha x)\, dx \\
&= 2\pi - \pi - \frac{1}{4\alpha}\big(\sin(2\alpha x)\big)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi - 0 \\
&= \pi, \\
\langle \cos(\alpha x), \cos(\beta x)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\alpha x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2\alpha x)}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}(\pi - (-\pi)) - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\alpha x)\, dx \\
&= \pi - \frac{1}{4\alpha}\big(\sin(2\alpha x)\big)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi - 0 \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Dokažimo i zadnju jednakost:

$$\begin{aligned}
\langle \sin(\alpha x), \cos(\beta x)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\big(\sin((\alpha+\beta)x) + \sin((\alpha-\beta)x)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\beta}(-\cos((\alpha+\beta)x)) + \frac{1}{\alpha-\beta}(-\cos((\alpha-\beta)x))\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(-\frac{1}{\alpha+\beta}(\cos(\alpha x)\cos(\beta x) - \sin(\alpha x)\sin(\beta x)) \\
&\qquad - \frac{1}{\alpha-\beta}(\cos(\alpha x)\cos(\beta x) + \sin(\alpha x)\sin(\beta x))\Bigg)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \left(-\frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{1}{\alpha-\beta}\right)\cos(\alpha x)\cos(\beta x)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&\qquad + \left(\frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{1}{\alpha-\beta}\right)\sin(\alpha x)\sin(\beta x)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \left(-\frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{1}{\alpha-\beta}\right)\big(\cos(\alpha\pi)\cos(\beta\pi) - \cos(-\alpha\pi)\cos(-\beta\pi)\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Fourierov red je upravo beskonačna linearna kombinacija funkcija iz leme 4.1. Mi ćemo Fourierov red definirati na intervalu $[-L, L]$ te ćemo gledati linearnu kombinaciju funkcija

$$\frac{1}{2},\ \sin x,\ \cos x, \ldots, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ldots \tag{4.2}$$

čiji je temeljni period jednak $2L$ pa za $L = \pi$ te funkcije postaju $\cos(nx)$ i $\sin(nx)$, tj. funkcije iz leme 4.1. Lako se pokaže da funkcije (4.2) čine ortogonalan sustav na prostoru $C([-L, L])$. Dokaz prepuštamo čitatelju.

Definicija 4.1 *Trigonometrijski red*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right], \tag{4.3}$$

gdje

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.5}$$

naziva se ***Fourierov red*** *funkcije f na intervalu $[-L, L]$, a a_n i b_n zovemo* ***Fourierovim koeficijentima*** *funkcije f.*

Napomena 4.1 *Fourierov red funkcije f na intervalu $[-L, L]$ sadrži samo sinusne članove b_n ako je funkcija f neparna, a ako je funkcija f parna, tada Fourierov red sadrži samo kosinusne članove a_n.*

4.2 Konvergencija Fourierovog reda

Jedan od osnovnih problema u teoriji Fourierovih redova je određivanje uvjeta koje treba ispunjavati funkcija f tako da Fourierov red konvergira ka f. Fourierovi koeficijenti definirani su integralom funkcije f pa Fourierov red ne mora konvergirati ka f u svakoj točki jer se integral funkcije ne mijenja ako f promijenimo u konačno mnogo točaka. Razlikujemo tri načina konvergencije Fourierovog reda: konvergencija po točkama, uniformna konvergencija i konvergencija u smislu L^2-norme. Svaki od tih načina posljedica je različitih svojstava funkcije.

Što se tiče konvergencije po točkama, o tome će nam puno reći Dirichletov teorem. Prije nego ga iskažemo, potrebno nam je nekoliko definicija i teorema. Teoreme u ovom poglavlju nećemo dokazivati.

Definicija 4.2 *Za funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{C}$ kažemo da je* ***kvadratno integrabilna*** *ako je*

$$\int\limits_{-L}^{L} |f(x)|^2\, dx < \infty.$$

Kvadratno integrabilne funkcije tvore vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ koji označavamo s $L^2[-L, L]$.

Teorem 4.1 [Besselova nejednakost] *Neka je $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ kvadratno integrabilna funkcija. Ako Fourierovi koeficijenti a_n i b_n funkcije f postoje, tada vrijedi*

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x)\, dx.$$

Dokaz. Vidi [7, str. 25]. $\square$

Može se pokazati da za kvadratno integrabilne funkcije vrijedi i jače svojstvo poznato pod nazivom *Parsevalova jednakost*:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x)\, dx.$$

Teorem 4.2 [Riemann-Lebesgueova lema] *Neka je $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ kvadratno integrabilna funkcija. Ako Fourierovi koeficijenti funkcije f postoje, tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{L} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{L} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

Dokaz. Vidi [7, str. 27]. $\square$

Uvedimo oznake

$$f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0-} f(x), \quad f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Definicija 4.3 *Funkcija f je po dijelovima neprekidna na $[a,b]$ ako*

(i) $f(x)$ je definirana na $[a,b]$, te je neprekidna na $[a,b]$ osim eventualno u konačno mnogo točaka iz $[a,b]$,

(ii) $f(x_0^-)$ i $f(x_0^+)$ postoje u svim točkama $x_0 \in (a,b)$,

(iii) postoje $f(a^+)$ i $f(b^-)$.

Definicija 4.4 *Funkcija f je po dijelovima klase $C^1([a,b])$ ako su f i f' po dijelovima neprekidne na $[a,b]$.*

Teorem 4.3 [Dirichletov teorem] *Neka je f po dijelovima klase $C^1([-L,L])$ i neka je $\hat{f}$ Fourierov red funkcije f. Tada je*

(i) $\hat{f} = f(x)$ ako je f neprekidna u točki $x \in (-L,L)$,

(ii) $\hat{f} = \frac{1}{2}\big[f(x^+) + f(x^-)\big]$ ako f ima prekid u točki $x \in (-L,L)$,

(iii) $\hat{f}(\pm L) = \dfrac{1}{2}\big[f(-L^+) + f(L^-)\big]$.

Dokaz. Vidi [5]. □

U mnogim problemima primijenjene matematike poželjno je da Fourierov red uniformno konvergira. Upravo će uniformna konvergencija tog reda biti nužna za rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi metodom separacije varijabli.

Teorem 4.4 [Teorem o uniformnoj konvergenciji] *Neka je f neprekidna i po dijelovima klase $C^1([-L,L])$ tako da je $f(-L) = f(L)$. Tada Fourierov red $\hat{f}$ konvergira uniformno ka f na $[-L,L]$.*

Dokaz. Vidi [7, str. 34]. □

Sljedeća propozicija će reći nešto o gornjoj međi za $|a_n|$ i $|b_n|$, što omogućuje procjenu broja članova Fourierovog reda koji su potrebni za postizanje određene točnosti u aproksimaciji funkcije.

Propozicija 4.1 *Neka je $f \in C^2[-L,L]$ takva da je $f(-L) = f(L)$ i $f'(-L) = f'(L)$. Neka je $M = \max_{x\in[-L,L]} |f''(x)|$. Tada za Fourierove koeficijente vrijedi*

$$|a_n| = \left|\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right| \le \frac{2L^2M}{\pi^2 n^2},$$

$$|b_n| = \left|\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right| \le \frac{2L^2M}{\pi^2 n^2}, \quad n \ge 1.$$

Dokaz. Vidi [7, str. 37]. □

Ako Fourierovi koeficijenti nisu eksplicitno poznati, onda koristeći propoziciju 4.1 možemo dobiti grubu procjenu broja članova Fourierovog reda potrebnih za aproksimaciju funkcije unutar zadane točnosti. Ako sa $S_N(x)$ označimo N-tu parcijalnu sumu Fourierovog reda, onda imamo:

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &\leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \frac{4L^2M}{\pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Kako je suma reda $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ manja od površine ispod krivulje $y = \frac{1}{x^2}$, $N \leq x < \infty$, tj.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N}, \tag{4.7}$$

iz nejednakosti (4.6) slijedi

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{4L^2M}{\pi^2 N}, \qquad x \in [-L, L].$$

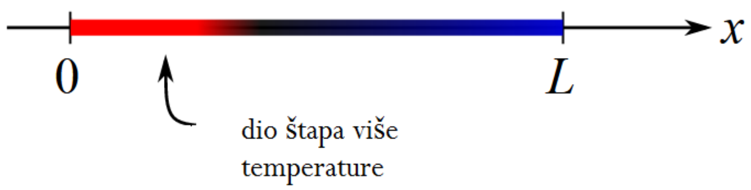
Ako želimo da pogreška aproksimacije bude manja od nekog $\varepsilon > 0$, tada treba odabrati N koji zadovoljava nejednakost

$$N > \frac{4L^2M}{\pi^2\varepsilon}.$$

5 Jednodimenzionalno provođenje topline

5.1 Izvod jednadžbe provođenja

Pretpostavimo da imamo tanki homogeni štap duljine L koji u koordinatnom sustavu u ravnini zauzima segment $[0, L]$ na x-osi. Pod pojmom homogenosti štapa podrazumijevamo da su gustoća ρ štapa, specifični toplinski kapacitet c, toplinska vodljivost K_0 te površina A poprečnog presjeka štapa konstantne veličine.
Nadalje, pretpostavimo da su strane štapa toplinski izolirane osim u rubovima $x = 0$ i $x = L$, te da nema izvora topline unutar štapa. Zamislimo npr. da smo jedan kraj metalnoga štapa stavili u peć. Toplina će se tada po štapu širiti vođenjem (vidi sliku 1).



Slika 1

Promotrimo proizvoljni tanki poprečni presjek štapa širine Δx između točaka x i $x+\Delta x$. Presjek je dovoljno tanak da je temperatura koja prolazi kroz njega dana s $u(x,t)$.
Prema (1.3) imamo da je toplinska energija segmenta štapa dana s

$$Q = c \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot u(x,t).$$

Prema prvom zakonu termodinamike, promjena unutarnje energije U u vremenu Δt jednaka je razlici između dovedene toplinske energije na lijevom rubu i odvedene toplinske energije na desnom rubu segmenta štapa. Formalno, vrijedi

$$\Delta U = \Delta Q.$$

Lijevu stranu jednakosti identificiramo sa toplinskom energijom segmenta štapa, tj. (1.3), tako što gledamo energiju u trenutku $t+\Delta t$ (na kraju promatranja) te energiju u trenutku t (na početku promatranja). Na desnu stranu primjenimo Fourierov zakon (1.2) iz kojeg smo prethodno izlučili ΔQ. Također, promatramo promjenu energije na desnom kraju $x+\Delta x$, te promjenu energije na lijevom kraju x. Slijedi

$$c\rho A\Delta x u(x,t+\Delta t) - c\rho A\Delta x u(x,t) = \Delta t A(-K_0 u_x(x,t)) - \Delta t A(-K_0 u_x(x+\Delta x,t)),$$

odnosno

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} = \frac{K_0}{c\rho}\left(\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}\right). \tag{5.1}$$

Računanjem limesa lijeve i desne strane jednakosti (5.1) kada $(\Delta t, \Delta x) \to (0,0)$, dobivamo najpoznatiju diferencijalnu jednadžbu paraboličkog tipa, **jednadžbu provođenja topline**:

$$u_t - k u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{5.2}$$

pri čemu je

$$k = \frac{K_0}{c\rho} > 0$$

toplinska difuzija. Jednadža (5.2) je homogena linearna parcijalna diferencijalna jednadžba, odnosno opisuje provođenje topline bez prisutnosti nekog vanjskog izvora koji grije ili hladi tijelo. Ako postoji neki vanjski izvor ili ponor topline modeliran funkcijom $F(x,t)$, onda je jednadžba provođenja topline nehomogena:

$$u_t - ku_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < L,\, t > 0. \tag{5.3}$$

Nakon što smo uveli opći oblik jednadžbe provođenja topline, potrebno je proučiti uvjete pod kojima ta jednadžba ima jedinstveno rješenje.
U poglavlju 3 smo objasnili važnost rubnih i početnih uvjeta za pronalazak jedinstvenog rješenja parcijalne diferencijalne jednadžbe. Pretpostavimo, stoga, da znamo početnu temperaturu štapa i temperature na krajevima štapa $u(0,t)$ i $u(L,t)$. Dobivamo tzv. *početno-rubni problem* s Dirichletovim uvjetima:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= F(x,t), & 0 < x < L,\, t > 0,\\ u(x,0) &= f(x), & 0 \le x \le L,\\ u(0,t) = a(t),\, u(L,t) &= b(t), & t \ge 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

pri čemu su f, a i b neprekidne funkcije.
Na sličan način možemo definirati početno-rubni problem s Neumannovim uvjetima

$$u_x(0,t) = a(t), \quad u_x(0,t) = b(t), \quad t \ge 0.$$

Naš osnovni cilj je pronaći funkciju $u = u(x,t)$ klase $C^2(\Omega)$, pri čemu

$$\Omega = \{(x,t) \,:\, 0 < L < x, 0 < t\},$$

koja zadovoljava početno-rubni problem (5.4).
Slijedi ključan teorem o jedinstvenosti rješenja jednadžbe provođenja topline.

Teorem 5.1 [Jedinstvenost rješenja] *Neka su $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, pri čemu $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, rješenja problema* (5.4)*. Tada vrijedi $u_1 \equiv u_2$.*

Dokaz. Neka su u_1 i u_2 dva različita rješenja problema (5.4). Definiramo funkciju $w := u_1 - u_2$. Funkcija w zadovoljava homogenu jednadžbu provođenja

$$\begin{aligned} w_t - kw_{xx} &= 0, & 0 < x < L,\, t > 0,\\ w(x,0) &= 0, & 0 \le x \le L,\\ w(0,t) = w(L,t) &= 0, & t \ge 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Definirat ćemo pomoćnu funkciju

$$H(t) := \frac{1}{2k}\int_0^L w^2\,dx, \tag{5.6}$$

za koju je odmah vidljivo da je nenegativna za sve $t \ge 0$.
Budući da je w klase C^2, jer je razlika dviju funkcija koje su također klase C^2, to znači da je $(w^2)_t = 2ww_t$ neprekidna funkcija. Stoga, prema Leibnizovom pravilu za deriviranje integrala (vidi [3]) dobivamo

$$H'(t) = \frac{1}{2k}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t} w^2\,dx = \frac{1}{k}\int_0^L ww_t\,dx = \int_0^L ww_{xx}\,dx.$$

Posljednja jednakost vrijedi zbog $w_t = kw_{xx}$.
Dobiveni integral ćemo riješiti metodom parcijalne integracije:

$$\int_0^L ww_{xx}\,dx = ww_x\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L w_x^2\,dx = -\int_0^L w_x^2\,dx, \tag{5.7}$$

jer je $w(0,t) = w(L,t) = 0$. Zaključujemo

$$H'(t) = -\int_0^L w_x^2\,dx \leq 0,$$

a to znači da funkcija $H'(t)$ nikako nije strogo rastuća. Kako je $w(x,0) = 0$, slijedi $H(0) = 0$. Stoga je $H(t) \leq 0$ za svaki $t \geq 0$ pa zbog (5.6) zaključujemo da mora vrijediti $H(t) = 0$ za sve $t \geq 0$.

No, podintegralna funkcija u $H(t)$ je nenegativna što implicira $w = 0$, tj. $u_1 = u_2$. Dakle, rješenje problema (5.4) je jedinstveno. □

Napomena 5.1 *Teorem* 5.1 *vrijedi i za početno-rubni problem s Neumannovim uvjetima. Dokaz se provodi analogno jer u* (5.7) *član koji nije pod znakom integrala jednak je nuli upravo zbog uvjeta* $w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0$.

U nastavku rada ćemo se posebno baviti analizom i rješavanjem homogene, a zatim i nehomogene jednadžbe provođenja topline.

5.2 Princip maksimuma i minimuma za homogenu jednadžbu provođenja

Prije nego objasnimo postupak rješavanja homogene jednadžbe provođenja topline (5.2), iskazat ćemo i dokazati tvrdnju prema kojoj u svakom konačnom vremenskom intervalu $[0,T]$ funkcija-rješenje jednadžbe (5.2) postiže maksimum na takozvanom *paraboličkom rubu* pravokutnika $D=[0,L]\times[0,T]$.

Fizikalna interpretacija ove tvrdnje je ta da je temperatura u unutrašnjosti štapa (u nekoj točki $0<x<L$) u svakom trenutku $0\le t\le T$ manja od maksimalne početne temperature ili maksimalne temperature na rubovima štapa.

Definicija 5.1 *Neka je D zatvoreni pravokutnik $[a,b]\times[c,d]$.* ***Parabolički rub*** *od D, u oznaci $\partial_p D$, je unija stranica $y=c$, $x=a$ i $x=b$:*

$$\partial_p D=\{(x,c)\,|\,a\le x\le b\}\cup\{(a,y)\,|\,c\le y\le d\}\cup\{(b,y)\,|\,c\le y\le d\}.$$

Teorem 5.2 [Princip maksimuma] *Neka je $T>0$, $L>0$ i D zatvoreni pravokutnik $[0,L]\times\ [0,T]$. Ako je $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ rješenje jednadžbe provođenja* (5.2)*, onda u ima maksimum po D na paraboličkom rubu $\partial_p D$, tj. vrijedi*

$$\max_{(x,t)\in D} u(x,t)=u(x_0,t_0)$$

za neku točku $(x_0,t_0)\in\partial_p D$.

Dokaz. Neka je $M=\max_{(x,t)\in D} u(x,t)$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka u nema maksimum na $\partial_p D$. Tada vrijedi

$$\max_{(x,t)\in\partial_p D} u(x,t)=M-\varepsilon \tag{5.8}$$

za neki $\varepsilon>0$. Kako je u neprekidna na D, postoji točka $(x_0,t_0)\in D$ takva da je $M=\ u(x_0,t_0)$. Prema pretpostavci je $(x_0,t_0)\in D\backslash\partial_p D$. Definirat ćemo pomoćnu funkciju

$$h(x,t):=u(x,t)+\frac{\varepsilon}{2L^2}(x-x_0)^2. \tag{5.9}$$

Iz (5.8) slijedi

$$h(x,t)\le M-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2L^2}L^2=M-\frac{\varepsilon}{2},\quad (x,t)\in\partial_p D,$$

dok iz (5.9) zaključujemo

$$h(x_0,t_0)=u(x_0,t_0)=M>M-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dakle, maksimum $\max_{(x,t)\in D} h(x,t)$ nije dosegnut na rubu $\partial_p D$, odnosno

$$\max_{(x,t)\in D} h(x,t)=h(x_1,t_1) \text{ za neku točku } (x_1,t_1)\in D\backslash\partial_p D.$$

U točki (x_1,t_1) funkcija h zadovoljava nužan uvjet postojanja maksimuma:

$$h_t(x_1,t_1)=0 \quad \text{i} \quad h_{xx}(x_1,t_1)\le 0 \quad \text{ako je} \quad 0<t_1<T$$

ili

$$h_t(x_1, t_1) \geq 0 \quad \text{i} \quad h_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \quad \text{ako je} \quad t_1 = T.$$

Oba slučaja vode do

$$h_t(x_1, t_1) - kh_{xx}(x_1, t_1) \geq 0. \tag{5.10}$$

Iz definicije funkcije h slijedi

$$h_t(x_1, t_1) - kh_{xx}(x_1, t_1) = u_t(x_1, t_1) - ku_{xx}(x_1, t_1) - \frac{k\varepsilon}{L^2} < 0 \tag{5.11}$$

jer je $u_t(x_1, t_1) - ku_{xx}(x_1, t_1) = 0$. Međutim, (5.11) je u kontradikciji s (5.10). Zaključujemo da funkcija u ima maksimum po D u nekoj točki paraboličkog ruba $\partial_p D$. □

Korolar 5.1 [Princip minimuma] *Neka vrijede pretpostavke iz teorema* 5.2. *Tada funkcija u ima minimum u nekoj točki paraboličkog ruba $\partial_p D$.*

Dokaz. Funkcija $w := -u$ zadovoljava pretpostavke iz teorema 5.2 pa w ima maksimum u nekoj točki $(x_0, t_0) \in \partial_p D$. Slijedi da funkcija $u = -w$ ima minimum u (x_0, t_0). □

Posljedica principa maksimuma i minimuma je ta da rješenje jednadžbe provođenja topline neprekidno ovisi o početnim i rubnim uvjetima. Stoga, mala promjena u početnim ili rubnim uvjetima rezultira malom promjenom u rješenju, što znači da je jednadžba provođenja topline *stabilna*. U primjenama se početni ili rubni uvjeti često ne mogu egzaktno odrediti, što ukazuje na važnost ovoga rezultata.

5.3 Separacija varijabli za homogenu jednadžbu

U ovom pododjeljku ćemo se baviti rješavanjem homogene jednadžbe provođenja topline (5.2) u ovisnosti o vrstama rubnih uvjeta.

5.3.1 Dirichletovi homogeni rubni uvjeti

Promatramo jednadžbu

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\, t > 0 \tag{5.12}$$

s početno-rubnim uvjetima

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x), &\quad 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, &\quad \qquad t \geq 0, \end{aligned} \tag{5.13}$$

pri čemu je f neprekidna funkcija.
Prema teoremu 5.1 znamo da će rješenje biti jedinstveno, a u pronalasku istog će nam pomoći metoda separacije varijabli te teorija Fourierovih redova.

Pretpostavimo da se u može zapisati u obliku

$$u(x,t) = P(x)Q(t), \tag{5.14}$$

gdje funkcije P i Q ovise samo o varijablama x i t, redom. Uvrštavanjem (5.14) u (5.12) dobivamo

$$P(x)\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}^2P(x)}{\mathrm{d}x^2}Q(t),$$

odnosno

$$\frac{Q'(t)}{kQ(t)} = \frac{P''(x)}{P(x)}.$$

Izraz na lijevoj strani ovisi samo o nezavisnoj varijabli t, a izraz na desnoj strani samo o nezavisnoj varijabli x. Slijedi da su oba izraza jednaka nekoj konstanti λ, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dobivamo sljedeći sustav običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$Q' = k\lambda Q, \quad t > 0 \tag{5.15}$$

$$P'' - \lambda P = 0, \quad 0 < x < L. \tag{5.16}$$

Pogledajmo prvu jednadžbu (5.15). Njeno rješenje se lako dobije metodom separacije varijabli:

$$Q(t) = Ce^{k\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{5.17}$$

Jednadžba (5.16) je obična homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Postupak rješavanja takvih jednadžbi moguće je pogledati u [1], a mi ćemo ovdje preskočiti detalje. Pripadni karakteristični polinom jednadžbe je $S(r) = r^2 - \lambda$, a rješenja r_1 i r_2 odgovarajuće karakteristične jednadžbe $r^2 = \lambda$ ovise o broju λ. Dobivamo:

$$P(x) = \begin{cases} A_1 x + B_1, & \lambda = 0 \ \text{(tj. } r_{1,2} = 0) \\ A_2 e^{\sqrt{\lambda}x} + B_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \lambda > 0 \ \text{(tj. } r_1 \neq r_2,\, r_{1,2} \in \mathbb{R}) \\ A_3 \cos\sqrt{|\lambda|}x + B_3 \sin\sqrt{|\lambda|}x, & \lambda < 0 \ \text{(tj. } r_{1,2} \in \mathbb{C}), \end{cases}$$

pri čemu su A_i i B_i, $i = 1, 2, 3$ proizvoljni realni brojevi.
Sada ćemo, rabeći rubne uvjete iz (5.13), pronaći netrivijalna rješenja P, tj. $P \neq 0$. Imamo

$$u(0,t) = P(0)Q(t) = 0 \implies P(0) = 0$$

te

$$u(L,t) = P(L)Q(t) \implies P(L) = 0.$$

Gornje implikacije slijede iz činjenice da $Q \equiv 0$ daje trivijano rješenje.

• Neka je $\lambda = 0$.
Slijedi $0 = P(0) = A_1 \cdot 0 + B_1$ i $0 = P(L) = A_1 \cdot L + B_1$ pa je $P \equiv 0$.

• Neka je $\lambda > 0$.
Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} A_2 + B_2 &= 0 \\ A_2 e^{\sqrt{\lambda}L} + B_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} &= 0 \end{aligned}$$

čije je rješenje trivijalno, tj. $A_2 = B_2 = 0$. Opet smo dobili $P \equiv 0$.

• Neka je $\lambda < 0$.
Imamo

$$\begin{aligned} A_3 &= 0, \\ A_3 \cos\Big(\sqrt{|\lambda|}L\Big) + B_3 \sin\Big(\sqrt{|\lambda|}L\Big) &= 0 \end{aligned}$$

pa $B_3 \sin\Big(\sqrt{|\lambda|}L\Big) = 0 \implies \sin\Big(\sqrt{|\lambda|}L\Big) = 0$, jer bismo za $B_3 = 0$ imali trivijalno rješenje.
Periodičnost funkcije sinus daje beskonačno mnogo rješenja jednadžbe $\sin\Big(\sqrt{|\lambda|}L\Big) = 0$:

$$\sqrt{|\lambda|}L = n\pi \implies \sqrt{|\lambda|} = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Obzirom da rješenje P ovisi o n, možemo pisati

$$P_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 1, \tag{5.18}$$

tj. dobili smo beskonačan niz rješenja. Uvrštavanjem svakog dobivenog $\lambda = \lambda(n)$ u (5.17), dobivamo niz

$$Q_n(t) = C_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \geq 1. \tag{5.19}$$

Slijedi

$$u_n(x,t) = P_n(x)Q_n(t) = \left(B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)\left(C_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\right), \quad n \geq 1. \tag{5.20}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo konstantu $b_n := B_n C_n$ pa možemo pisati

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \geq 1. \tag{5.21}$$

Dakle, dobili smo niz separiranih rješenja $u_n(x,t)$ zadanih s (5.21) koji zadovoljavaju rubne uvjete $u_n(0,t) = u_n(L,t) = 0$.

Prema principu superpozicije (poglavlje 2.4) slijedi da je svaka linearna kombinacija

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \tag{5.22}$$

također rješenje jednadžbe provođenja (5.12) s rubnim uvjetima kao u (5.13). Obzirom da postoji kompatibilnost između početnih i rubnih uvjeta u (5.13), mora vrijediti $f(0) = f(L) = 0$. Stoga, ako funkciju f na intervalu $[0, L]$ možemo napisati kao linearnu kombinaciju

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big), \tag{5.23}$$

onda iz (5.22) i (5.23) slijedi $u(x, 0) = f(x)$ pa je funkcija u iz (5.22) rješenje početno-rubnog problema (5.12)–(5.13).

Jasno je da se u općenitom slučaju početni uvjet ne može napisati kao linearna kombinacija konačno mnogo članova kao u (5.23). U tom slučaju se trebamo nekako drugačije snaći. Ako je funkciju f na intervalu $[0, L]$ moguće razviti u Fourierov red

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big), \tag{5.24}$$

onda bismo htjeli rješenje u obliku

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \tag{5.25}$$

pri čemu je

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\, dx, \quad n \geq 1. \tag{5.26}$$

Slijedi teorem koji će dati uvjete na funkciju f uz koje će (5.25) biti klasično rješenje početno-rubnog problema (5.12)–(5.13).

Teorem 5.3 [Egzistencija rješenja] *Pretpostavimo da funkcija f ima sljedeća svojstva:*

(i) f je neprekidna na $[0, L]$ i po dijelovima klase $C^1([0, L])$,

(ii) $f(0) = f(L) = 0$.

Tada je funkcija u definirana s (5.25) *i* (5.26) *klasično rješenje početno-rubnog problema* (5.12)–(5.13).

Dokaz. Neka je $\tilde{f}$ neparno proširenje funkcije f na $[-L, L]$, odnosno

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), & -L < x < 0. \end{cases}$$

Funkcija $\tilde{f}$ je neprekidna i po dijelovima klase $C^1([-L, L])$, a očigledno vrijedi $\tilde{f}(-L) = \tilde{f}(L) = 0$. Prema teoremu 4.4 o uniformnoj konvergenciji, Fourierov red

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) + b_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big],$$

gdje

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx = 0, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx, \quad n \geq 1,$$

konvergira uniformno ka $\tilde{f}$ na $[-L, L]$ i vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$.
Funkcije

$$u_n(x,t) = b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \geq 1$$

zadovoljavaju jednadžbu provođenja i rubne uvjete $u_n(0,t) = u_n(L,t) = 0$.
Obzirom da vrijedi $|u_n(x,t)| \leq |B_n|$ za sve $0 \leq x \leq L$ i $t \geq 0$, prema Weierstrassovom kriteriju (vidi [11, str. 124]) red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ konvergira uniformno na

$$\overline{\Omega} = \{(x,t) \,:\, 0 \leq x \leq L,\, t \geq 0\}.$$

Funkcije $u_n(x,t)$ su neprekidne na $\overline{\Omega}$ pa je njihova suma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}$$

također neprekidna funkcija.

Pokažimo da funkcija u zadovoljava jednadžbu provođenja. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $\Omega_\varepsilon = \{(x,t) \,:\, 0 < x < L, t > \varepsilon\}$. Zbog ograničenosti funkcije f na $[0, L]$, vrijedi sljedeće:

$$|b_n| = \frac{2}{L}\left|\int\limits_{0}^{L} f(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,dx\right| \leq \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} |f(x)|\,dx \leq 2M,$$

gdje je $M = \max_{x\in[0,L]} |f(x)|$. Deriviranjem funkcije u_n po varijabli t dobivamo

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -b_n k\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2 \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

pa je u svakoj točki $(x,t) \in \Omega_\varepsilon$ derivacija ograničena sa

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| \leq |b_n| k\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2 e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \leq 2Mk\Big(\frac{\pi}{L}\Big)^2 n^2 e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varepsilon}.$$

Koristeći D'Alembertov kriterij (vidi [6, str. 101]), možemo zaključiti kako red $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varepsilon}$ konvergira, pa prema Weierstrassovom kriteriju red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}$ konvergira uniformno na Ω_ε.
Stoga se red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ može derivirati po članovima pa imamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}, \quad (x,t) \in \Omega_\varepsilon. \tag{5.27}$$

Slično se pokaže da vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in \Omega_\varepsilon. \tag{5.28}$$

Sada iz (5.27) i (5.28) slijedi da u zadovoljava

$$u_t - k u_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right) = 0$$

na skupu Ω_ε. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, u je rješenje jednadžbe provođenja na

$$\Omega = \{(x,t) \,:\, 0 < x < L,\, t > 0\},$$

očigledno zadovoljava rubne uvjete, no, i početni uvjet jer Fourierov red

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

konvergira uniformno ka f na $[0, L]$. □

5.3.2 Homogenizacija Dirichletovih rubnih uvjeta

Vidjeli smo da metoda separacije varijabli jako dobro funkcionira za rješavanje homogene jednadžbe provođenja topline sa homogenim rubnim uvjetima. Ipak, prilično je nerealno da se kod promatranja provođenja topline nekog štapa temperature rubova postave na nulu. Realističnije je imati proizvoljne fiksne vrijednosti temperature na rubovima. Ustvari, kao što smo naveli u poglavlju 3, rubni uvjeti su općenito zadani pomoću nekih funkcija koje ovise o vremenu. Međutim, takvi rubni problemi su vrlo složeni pa ćemo se ovdje ograničiti na slučaj nehomogenih rubnih uvjeta sa funkcijama-konstantama.

Zanima nas početno-rubni problem

$$u_t - k u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < L,\, t > 0 \tag{5.29}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \tag{5.30}$$

$$u(0,t) = a,\, u(L,t) = b, \qquad t \ge 0, \tag{5.31}$$

gdje su a i b proizvoljne konstante.

Ovakav problem više ne možemo rješavati metodom separacije varijabli budući da je ona primjenjiva samo u slučaju homogenih rubnih uvjeta. Htjeli bismo pronaći način kako pretvoriti nehomogene rubne uvjete u homogene, a da na kraju ipak dođemo do rješenja originalnog problema (5.29)–(5.31).

Obzirom da nema dodatnog izvora koji grije i hladi tijelo, a rubni uvjeti ne ovise o vremenu, razumno je očekivati da će se s vremenom temperatura štapa uravnotežiti, tj. neće ovisiti o vremenu. Možemo pisati

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_R(x),$$

pri čemu je $u_R(x)$ ravnotežno stanje temperature. Funkcija u_R i dalje zadovoljava rubne uvjete (5.31), jer oni ionako ne ovise o vremenu, no, ne zadovoljava početni uvjet (5.30) obzirom da se on odnosi na $t = 0$, a mi se bavimo slučajem $t \to \infty$.

Ravnotežno stanje u_R temperature štapa zadovoljava rubni problem

$$\begin{aligned} (u_R)_{xx} &= 0, \ \ 0 < x < L, \\ u_R(0) &= a, \\ u_R(L) &= b \end{aligned} \tag{5.32}$$

u kome se pojavljuje obična diferencijalna jednadžba drugog reda, a nju je lako riješiti metodom uzastopne integracije pa preskačemo detalje. Dobivamo

$$u_R(x) = a + \frac{b-a}{L}x. \tag{5.33}$$

Ako sada definiramo funkciju

$$v(x,t) := u(x,t) - u_R(x), \tag{5.34}$$

gdje je u rješenje problema (5.29)–(5.31), a u_R rješenje problema (5.32), onda imamo

$$v_t(x,t) = u_t(x,t) - (u_R)_t(x) = u_t(x,t), \quad v_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t) - (u_R)_{xx}(x) = u_{xx}(x,t)$$

pa je jasno da obje funkcije u i v zadovoljavaju jednadžbu (5.29).
Nadalje, vrijedi

$$v(x,0) = u(x,0) - u_R(x) = f(x) - u_R(x), \ \ 0 < x < L, \tag{5.35}$$
$$v(0,t) = u(0,t) - u_R(0) = 0, \tag{5.36}$$
$$v(L,t) = u(L,t) - u_R(L) = 0. \tag{5.37}$$

Dakle, sada imamo homogene rubne uvjete, a početni uvjeti su se malo izmijenili. Kažemo da smo *homogenizirali* rubne uvjete.
Sada promatramo početno-rubni problem

$$\begin{aligned} v_t - kv_{xx} = 0, & \quad 0 < x < L, \, t > 0 \\ v(x,0) = f(x) - u_R(x), & \quad 0 \leq x \leq L \\ v(0,t) = 0, \, v(L,t) = 0, & \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

koji možemo riješiti metodom separacije varijabli jer su rubni uvjeti homogeni. Nakon što pronađemo funkciju-rješenje v, rješenje originalnog problema (5.29)–(5.31) je očito:

$$u(x,t) = v(x,t) + u_R(x).$$

Napomena 5.2 *Osim Dirichletovih rubnih uvjeta, moguće je homogenizirati i neke druge rubne uvjete, no, mi se u ovome radu time nećemo baviti.*

5.3.3 Neumannovi homogeni rubni uvjeti

Promatramo jednadžbu

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \, t > 0 \tag{5.38}$$

s početno-rubnim uvjetima

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x), & \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{5.39}$$

gdje je f neprekidna funkcija.
I u ovom slučaju teorem 5.1 osigurava jedinstvenost rješenja, a postupak njegova pronalaženja temelji se na metodi separacije varijabli i na teoriji Fourierovih redova.

Nakon što pretpostavimo $u(x,t) = P(x)Q(t)$ te dobijemo opći oblik funkcija P i Q kao kod Dirichletovih rubnih uvjeta:

$$Q(t) = Ce^{k\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

i

$$P(x) = \begin{cases} A_1x + B_1, & \lambda = 0 \ \text{(tj. } r_{1,2} = 0) \\ A_2e^{\sqrt{\lambda}x} + B_2e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \lambda > 0 \ \text{(tj. } r_1 \neq r_2,\, r_{1,2} \in \mathbb{R}) \\ A_3 \cos\sqrt{|\lambda|}x + B_3 \sin\sqrt{|\lambda|}x, & \lambda < 0 \ \text{(tj. } r_{1,2} \in \mathbb{C}), \end{cases}$$

$A_i, B_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, tražimo netrivijalna rješenja P koristeći rubne uvjete iz (5.39).
Imamo:

$$\begin{aligned} u_x(0,t) = P'(0)Q(t) = 0 &\implies P'(0) = 0, \\ u_x(L,t) = P'(L)Q(t) = 0 &\implies P'(L) = 0. \end{aligned}$$

• Ako je $\lambda = 0$, onda je $P(x) = A_1x + B_1$ pa je $P'(0) = A_1 = 0$ i $P'(L) = A_1 = 0$, iz čega zaključujemo da je $P(x) = B_1$ konstantna funkcija.

• Za $\lambda > 0$ imamo $P'(x) = A_2\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - B_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Dobivamo

$$P'(0) = 0 \implies A_2\sqrt{\lambda} - B_2\sqrt{\lambda} = 0 \implies A_2 = B_2 \tag{5.40}$$

$$P'(L) = 0 \implies A_2\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}L} - B_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \tag{5.41}$$

$$\implies A_2\sqrt{\lambda}\left(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \implies A_2 = 0, \tag{5.42}$$

pa ovaj slučaj daje trivijalno rješenje $P \equiv 0$.

• Za $\lambda < 0$ dobivamo $P'(x) = -A_3\sqrt{|\lambda|}\sin\left(\sqrt{|\lambda|}x\right) + B_3\sqrt{|\lambda|}\cos\left(\sqrt{|\lambda|}x\right)$. Rubni uvjeti daju

$$\begin{aligned} P'(0) = 0 &\implies B_3\sqrt{|\lambda|} = 0 \implies B_3 = 0, \\ P'(L) = 0 &\implies -A_3\sqrt{|\lambda|}\sin\left(\sqrt{|\lambda|}L\right) = 0 \implies \sin\left(\sqrt{|\lambda|}L\right) = 0. \end{aligned}$$

Analogno kao kod Dirichletovih uvjeta, vrijedi $\sqrt{|\lambda|} = \dfrac{n\pi}{L}$, $n \geq 1$. Dobivamo nizove

$$\begin{aligned} P_n(x) &= A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ Q_n(t) &= C_ne^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

pa je konačno rješenje problema (5.38)–(5.39) dano s

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_ne^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{5.43}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad n \geq 0, \tag{5.44}$$

uz petpostavku da se f može razviti u Fourierov red na $[0, L]$.

5.3.4 Robinovi homogeni rubni uvjeti

Metodom separacije varijabli možemo konstruirati rješenja za različite kombinacije Neumannovih i Dirichletovih rubnih uvjeta, tj. za Robinove uvjete. Uzmimo, primjerice, da je na lijevom rubu štapa zadan Dirichletov, a na desnom rubu Neumannov rubni uvjet. Tada imamo jednadžbu:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\, t > 0 \tag{5.45}$$

s početno-rubnim uvjetima

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x), &\quad 0 \le x \le L, \\ u(0,t) = 0,\, u_x(L,t) = 0, &\quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{5.46}$$

gdje je f neprekidna funkcija.

Nakon što odredimo opći oblik funkcija P i Q kao što smo to učinili kod Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta, potrebno je analizirati rubne uvjete i tražiti netrivijalna rješenja. Imamo

$$u(0,t) = P(0)Q(t) = 0 \implies P(0) = 0, \tag{5.47}$$

$$u_x(L,t) = P'(L)Q(t) = 0 \implies P'(L) = 0. \tag{5.48}$$

Slučajevi $\lambda = 0$ i $\lambda > 0$ daju trivijalna rješenja pa nam ostaje slučaj $\lambda < 0$. Dobivamo

$$\begin{aligned} P(0) = 0 &\implies A_3 = 0, \\ P'(L) = 0 &\implies B_3\sqrt{|\lambda|}\cos\left(\sqrt{|\lambda|}L\right) = 0 \implies \cos\left(\sqrt{|\lambda|}L\right) = 0. \end{aligned}$$

Nultočke funkcije kosinus su oblika $\frac{2n-1}{2}\pi$, pa je

$$\sqrt{|\lambda|} = \frac{(2n-1)\pi}{2L}.$$

Kao i u slučajevima Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta, dobivamo rješenje problema (5.45)–(5.46):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right), \tag{5.49}$$

gdje su b_n Fourierovi koeficijenti dani s

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)dx, \quad n \ge 1. \tag{5.50}$$

Primjer 5.1 *Pronađimo rješenje početno-rubnog problema*

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - 5u_{xx}(x,t) = 0, \qquad & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(x,0) = x^3 + x + 2, \quad & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 2,\, u_x(1,t) = 4, \qquad & t \ge 0. \end{aligned}$$

Rješenje. U ovom primjeru zadani su nehomogeni Robinovi uvjeti, i to tako da je na lijevom rubu zadan Dirichletov rubni uvjet, a na desnom Neumannov. Kao što je spomenuto u poglavlju 5.3.2, potrebno je homogenizirati rubne uvjete. Dakle, tražimo funkciju u_R tako da funkcija $v(x,t) := u(x,t) - u_R(x)$ zadovoljava homogene rubne uvjete. Zbog oblika u kojem su zadani rubni uvjeti, prirodno je funkciju u_R tražiti u obliku

$$u_R(x) = Ax + B.$$

Ona mora zadovoljavati rubne uvjete, dakle

$$u_R(0) = B = 2, \quad u_R'(1) = A = 4 \implies u_R(x) = 4x + 2.$$

Dobivamo

$$v_t(x,t) = u_t(x,t) - (u_R)_t(x) = u_t(x,t), \quad v_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t) - (u_R)_{xx}(x) = u_{xx}(x,t),$$

pa je funkcija $v(x,t) = u(x,t) - u_R(x)$ također rješenje jednadžbe $u_t(x,t) - 5u_{xx}(x,t) = 0$. Obzirom da vrijedi

$$v(0,t) = u(0,t) - u_R(0) = 2 - 2 = 0, \quad v_x(1,t) = u_x(1,t) - (u_R)_x(1,t) = 4 - 4 = 0$$

uspjeli smo funkcijom u_R homogenizirati rubne uvjete. Što je s početnim uvjetom? Imamo

$$v(x,0) = u(x,0) - u_R(x) = x^3 + x + 2 - 4x - 2 = x^3 - 3x.$$

Dakle, funkcija v je rješenje početno-rubnog problema

$$\begin{aligned} v_t(x,t) - 5v_{xx}(x,t) = 0, \qquad & 0 < x < 1,\, t > 0 \\ v(x,0) = x^3 - 3x, \quad & 0 \le x \le 1 \\ v(0,t) = 0,\, v_x(1,t) = 0, \qquad & t \ge 0 \end{aligned}$$

u kojem su rubni uvjeti homogeni, a početni uvjet je promijenjen u odnosu na prvobitni oblik. Kao što smo ranije naveli, rješenje problema će postojati ako funkciju iz početnog uvjeta možemo razviti u Fourierov red na $[0,1]$. Primijetimo da je to moguće jer je riječ o polinomu trećeg stupnja, a kako je zadani polinom neparna funkcija, prema napomeni 4.1 slijedi da će njegov Fourierov red sadržavati samo sinusne članove. Stoga je

$$v(x,0) = x^3 - 3x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right)$$

zbog (5.49). Pronađimo koeficijente b_n prema formuli (5.50):

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 (x^3-3x)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)dx \\ &= 2\left(\int_0^1 x^3\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)dx - 3\int_0^1 x\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)dx\right). \end{aligned}$$

Riješimo svaki integral posebno. Označimo $m := \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int x\sin(mx)\,dx &= \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin(mx)dx & v = -\frac{1}{m}\cos(mx) \end{matrix}\right| \\ &= -\frac{1}{m}x\cos(mx) + \frac{1}{m}\int\cos(mx)\,dx \\ &= -\frac{1}{m}x\cos(mx) + \frac{1}{m^2}\sin(mx). \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sin(mx)\,dx &= \left(-\frac{1}{m}x\cos(mx) + \frac{1}{m^2}\sin(mx)\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{m^2}. \end{aligned}$$

Rješenje drugog integrala dobivamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \int x^3\sin(mx)\,dx &= \left|\begin{matrix} u = x^3 & du = 3x^2dx \\ dv = \sin(mx)dx & v = -\frac{1}{m}\cos(mx) \end{matrix}\right| \\ &= -\frac{1}{m}x^3\cos(mx) + \frac{3}{m}\int x^2\cos(mx)\,dx \\ &= -\frac{1}{m}x^3\cos(mx) + \frac{3}{m}\left|\begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos(mx)dx & v = \frac{1}{m}\sin(mx) \end{matrix}\right| \\ &= -\frac{1}{m}x^3\cos(mx) + \frac{3}{m}\left(\frac{1}{m}x^2\sin(mx) - \frac{2}{m}\int x\sin(mx)\,dx\right). \end{aligned}$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3\sin(mx)\,dx &= \left(-\frac{1}{m}x^3\cos(mx) + \frac{3}{m^2}x^2\sin(mx)\right)\Bigg|_0^1 - \frac{6}{m^4}(-1)^{n-1} \\ &= \left(\frac{3}{m^2} - \frac{6}{m^4}\right)(-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Sada kada smo izračunali oba integrala, vratimo ih natrag u formulu za b_n i dobivamo

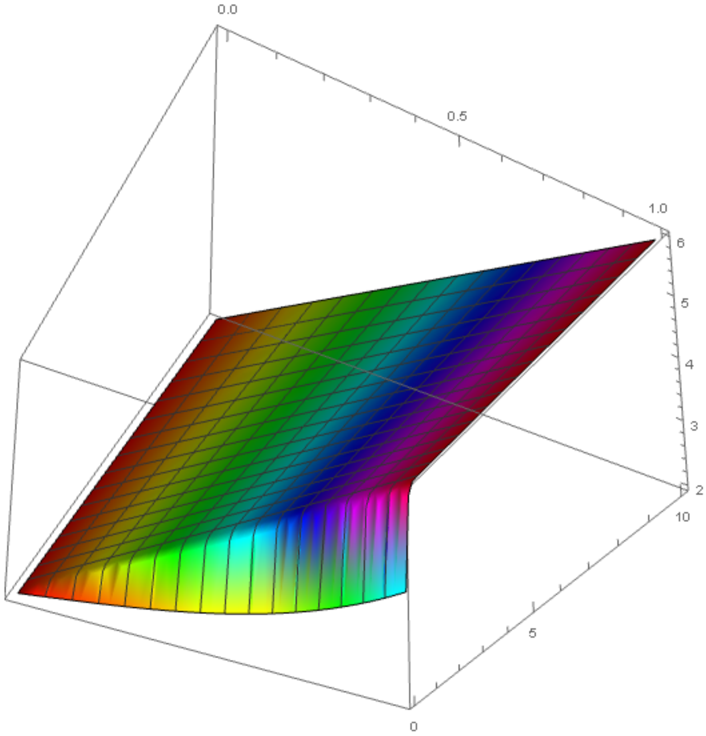
$$b_n = (-1)^n\frac{12}{m^4} = (-1)^n\frac{192}{(2n-1)^4\pi^4}.$$

Sada prema formuli (5.49) dobivamo izraz za funkciju v:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-5\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{192}{(2n-1)^4\pi^4} e^{-5\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right). \end{aligned}$$

Slijedi da je rješenje u zadanog početno-rubnog problema oblika

$$u(x,t) = u_R(x) + v(x,t) = 4x + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{192}{(2n-1)^4\pi^4} e^{-5\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right).$$



Slika 2: Graf funkcije–rješenja u.

■

5.3.5 Periodični rubni uvjeti

Promotrimo jednadžbu

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad -L < x < L,\ t > 0 \tag{5.51}$$

s početno-rubnim uvjetima

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), & -L \leq x \leq L, \\ u(-L,t) &= u(L,t), & t \geq 0, \\ u_x(-L,t) &= u_x(L,t), & t \geq 0, \end{aligned} \tag{5.52}$$

gdje je f neprekidna funkcija.

Postupak separacije varijabli je isti kao i ranije, kao i oblik rješenja P i Q. Slučaj $\lambda = 0$ daje konstantno, a $\lambda > 0$ trivijano rješenje.

Neka je $\lambda < 0$. Iz (5.52) dobivamo $P(-L) = P(L)$ i $P'(-L) = P'(L)$. Koristeći svojstva parnosti funkcija sinus i kosinus dobivamo:

$$\begin{aligned} P(-L) = P(L) &\implies A_3 \cos(\sqrt{|\lambda|}L) - B_3 \sin(\sqrt{|\lambda|}L) = A_3 \cos(\sqrt{|\lambda|}L) + B_3 \sin(\sqrt{|\lambda|}L) \\ &\implies 2B_3 \sin(\sqrt{|\lambda|}L) = 0, \\ P'(-L) = P'(L) &\implies A_3\sqrt{|\lambda|} \sin(\sqrt{|\lambda|}L) + B_3\sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{|\lambda|}L) \\ &\qquad = -A_3\sqrt{|\lambda|} \sin\left(\sqrt{|\lambda|}L\right) + B_3\sqrt{|\lambda|} \cos\left(\sqrt{|\lambda|}L\right) \\ &\implies 2A_3 \sin\left(\sqrt{|\lambda|}L\right) = 0. \end{aligned}$$

Netrivijalna rješenja dobivamo za $A_3, B_3 \neq 0$ pa je $\sqrt{|\lambda|} = \dfrac{n\pi}{L}$ kao ranije. Slijedi da je rješenje problema (5.51)–(5.52) kombinacija rješenja Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta, tj.

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right], \tag{5.53}$$

gdje su a_n i b_n dani s

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{5.54}$$

5.4 Kompleksifikacija problema

Do sada smo proučavali jednadžbe provođenja topline kod kojih su rubni uvjeti bili konstantne funkcije. Sada ćemo promotriti početno-rubni problem sa Dirichletovim rubnim uvjetima, pri čemu uvjet na jednom od krajeva ima oblik oscilacijske (periodičke) funkcije koja ovisi o vremenu t:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, && 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le L, \\ u(0,t) = A\cos(\omega t),\ u(L,t) &= 0, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Dakle, u ovom početno-rubnom problemu se temperatura na lijevom kraju štapa periodički mijenja pa ne možemo očekivati da će rješenje prestati ovisiti o vremenu kada $t \to \infty$. Međutim, očekujemo da će nakon nekog određenog vremena rješenje postati periodično s kutnom frekvencijom ω, tj.

$$u(x,t) = v(x,t) + A(x)\cos(\omega t + \phi(x)), \tag{5.56}$$

gdje v označava *nestalno, prijelazno stanje* i vrijedi $v(x,t) \to 0$ kad $t \to \infty$. Rješenje $u(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \phi(x))$ je ono što nazivamo *kvazi-ravnotežno stanje*, $A(x)$ je *amplituda*, a $\phi(x)$ *faza* (fazni pomak) kvazi-ravnotežnog stanja. Kako bi riješili problem, cilj nam je pronaći $A(x)$ i $\phi(x)$, te $v(x,t)$ ako bude potrebno. Često nas ne zanima nestalno stanje ako smo više zainteresirani za rješenje nakon "dugo vremena".

Pozabavimo se kompleksifikacijom. Koristimo notaciju $\mathrm{Re}\{z\}$ i $\mathrm{Im}\{z\}$ za realni i imaginarni dio kompleksnog broja z, redom. Primijetimo

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\{z\} = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad \mathrm{Im}\{z\} = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \\ &\cos\theta = \mathrm{Re}\{e^{i\theta}\}, \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}\{e^{i\theta}\} \end{aligned} \tag{5.57}$$

gdje je $\overline{(x+iy)} = x - iy$ kompleksni konjugat. Kvazi-ravnotežno stanje u terminima kompleksnih eksponencijalnih funkcija možemo zapisati ovako:

$$A(x)\cos(\omega t + \phi(x)) = \mathrm{Re}\{A(x)e^{i\phi(x)}e^{i\omega t}\} = \mathrm{Re}\{U(x)e^{i\omega t}\}, \tag{5.58}$$

pri čemu stavljamo $U(x) := A(x)e^{i\phi(x)}$. Ovaj postupak radimo zato što je jednostavnije raditi sa eksponencijalnim funkcijama nego sa $\cos(\omega t)$ i $\sin(\omega t)$. Primijetimo da je $A(x) = |U(x)|$ te $\phi(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\{U(x)\}}{\mathrm{Re}\{U(x)\}}\right)$. Fazni pomak $\phi(x)$ odgađa efekt onoga što se događa na kraju štapa. Sada ćemo iskazati i dokazati jedan koristan rezultat.

Lema 5.1 *Ako za dvije kompleksne konstante a i b imamo*

$$ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} = 0 \tag{5.59}$$

za svaki t u nekom otvorenom intervalu, tada je $a = b = 0$.

Dokaz. Deriviranjem (5.59) po vremenu t dobivamo

$$i\omega\left(ae^{i\omega t} - be^{-i\omega t}\right) = 0. \tag{5.60}$$

Pomnožimo (5.60) sa $\dfrac{1}{i\omega}$ te rezultat zbrojimo sa (5.59), te dobijemo

$$2ae^{i\omega t} = 0$$

Kako je $e^{i\omega t}$ uvijek različito od nule ($|e^{i\omega t}| = 1$), tada je $a = 0$. Iz (5.59) je $be^{-i\omega t} = 0$ te je stoga $b = 0$. $\square$

Pronađimo sada rješenje kvazi-ravnotežnog stanja za problem (5.55) u obliku

$$u_{KR}(x,t) = \mathrm{Re}\big\{U(x)e^{i\omega t}\big\} = \frac{1}{2}\left(U(x)e^{i\omega t} + \overline{U}(x)e^{-i\omega t}\right) = A(x)\cos\left(\omega t + \phi(x)\right) \tag{5.61}$$

gdje je U kompleksna funkcija realne varijable. Uvrštavanjem (5.61) u jednadžbu (5.55), dobivamo

$$\frac{1}{2}\left(i\omega U(x)e^{i\omega t} - i\omega\overline{U}(x)e^{-i\omega t}\right) = \frac{1}{2}\left(U''(x)e^{i\omega t} + \overline{U}''(x)e^{-i\omega t}\right),$$

odnosno

$$\left(i\omega U(x) - U''(x)\right)e^{i\omega t} + \left(-i\omega\overline{U}(x) - \overline{U}''(x)\right)e^{-i\omega t} = 0,$$

za svaki $0 < x < L$ i $t > 0$. Primjenom leme 5.1 dobivamo

$$i\omega U(x) - U''(x) = 0 = -i\omega\overline{U}(x) - \overline{U}''(x). \tag{5.62}$$

Primijetimo da su lijeva i desna strana jedna drugoj kompleksni konjugati, pa ćemo od sada koristiti samo jednu od njih. Uvrštavanjem (5.61) u rubne uvjete (5.55) te primjenom (5.57), dobivamo

$$\frac{1}{2}\left(U(0)e^{i\omega t} + \overline{U}(0)e^{-i\omega t}\right) = \frac{A}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right), \quad \frac{1}{2}\left(U(L)e^{i\omega t} + \overline{U}(L)e^{-i\omega t}\right) = 0,$$

gdje $t > 0$. Grupiranjem i primjenom leme 5.1 dobivamo

$$U(0) = A, \quad U(L) = 0. \tag{5.63}$$

Konačno, problem za kompleksnu amplitudu U kvazi-ravnotežnog stanja u_{KR} je prema (5.62) i (5.63)

$$U''(x) - i\omega U(x) = 0; \quad U(0) = A, \quad U(L) = 0. \tag{5.64}$$

Obzirom da vrijedi $(1+i)^2 = 2i$, imamo

$$i\omega = \frac{1}{2}(1+i)^2\omega = \left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+i)\right)^2.$$

Sada (5.64) postaje

$$U''(x) - \left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+i)\right)^2 U(x) = 0; \quad U(0) = A, \quad U(L) = 0. \tag{5.65}$$

Radi jednostavnosti, označimo $\sigma := \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+i)$.

Opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe (5.65) dano je s

$$U(x) = C_1e^{-\sigma x} + C_2e^{\sigma x}, \tag{5.66}$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Rubni uvjeti (5.65) daju

$$A = U(0) = C_1 + C_2, \quad 0 = U(L) = C_1 e^{-\sigma L} + C_2 e^{\sigma L}.$$

Ovo je sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice čije je rješenje (C_1, C_2) dano s

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{Ae^{\sigma L}}{e^{\sigma L} - e^{-\sigma L}} \\ C_2 &= A - C_1 = -\frac{Ae^{-\sigma L}}{e^{\sigma L} - e^{-\sigma L}}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem C_1 i C_2 u (5.66) slijedi

$$U(x) = A\frac{e^{\sigma(L-x)} - e^{-\sigma(L-x)}}{e^{\sigma L} - e^{-\sigma L}}.$$

Stoga je rješenje kvazi-ravnotežnog stanja u_{KR} dano s

$$u_{KR} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{\sigma(L-x)} - e^{-\sigma(L-x)}}{e^{\sigma L} - e^{-\sigma L}} Ae^{i\omega t} \right\}.$$

Pronađimo sada nestalno, odnosno prijelazno stanje

$$v(x,t) = u(x,t) - u_{KR}(x,t). \tag{5.67}$$

Uvrštavanjem (5.67) u problem (5.55), uzimajući u obzir da u_{KR} zadovoljava jednadžbu i rubne uvjete (5.55), dobivamo sljedeći problem za v:

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) &= \tilde{f}(x), & 0 \le x \le L, \\ v(0,t) = 0,\ v(L,t) &= 0, & t \ge 0, \end{aligned} \tag{5.68}$$

gdje je $\tilde{f}$ dana s

$$\tilde{f} = u(x,0) - u_{KR}(x,0) = f(x) - \mathrm{Re}\left\{ A\frac{e^{\sigma(L-x)} - e^{-\sigma(L-x)}}{e^{\sigma L} - e^{-\sigma L}} \right\}.$$

Problem za funkciju v sličan je problemu (5.12)-(5.13), gdje uzimamo $k = 1$ i $f(x) = \tilde{f}(x)$. Stoga je rješenje za v dano s

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \ge 1.$$

Konačno rješenje problema je

$$u(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{\sigma(L-x)} - e^{-\sigma(L-x)}}{e^{\sigma L} - e^{-\sigma L}} Ae^{i\omega t} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

gdje je $\sigma = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+i)$.

5.4.1 Zagrijavanje/hlađenje Zemljine površine

Zamislimo vertikalni stupac u Zemljinoj kori koji se zimi hladi, a ljeti grije na površini. Neka je os OX usmjerena vertikalno prema dolje tako da točka $x = 0$ na osi odgovara Zemljinoj površini. Radi jednostavnosti, modeliramo stupac sa polupravcem $0 \leq x < \infty$. Grubo modeliramo zagrijavanje i hlađenje na površini kao $u(0,t) = A\cos(\omega t)$ gdje je $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ te period τ odgovara jednoj godini. U našim mjerama, $\tau = \kappa \cdot (1\,godina)/l^2$, gdje je κ toplinska difuzija. Rubni uvjet za $x \to \infty$ jest takav da je temperatura u ograničena (∞ je na dnu Zemljine kore, još uvijek daleko od jezgre, čiji utjecaj zanemarujemo). Što je kvazi-ravnotežno stanje?

Kvazi-ravnotežno stanje zadovoljava jednadžbu topline i rubne uvjete

$$\begin{aligned} (u_{KR})_t &= (u_{KR})_{xx}, & & 0 < x < \infty \\ u_{KR}(0,t) &= T_0 + T_1\cos(\omega t), & & u_{KR} \text{ ograničen kako } x \to \infty, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Koristimo princip superpozicije, $u = u_0 + u_1$, gdje

$$\begin{aligned} (u_0)_t &= (u_0)_{xx}, \quad & (u_1)_t &= (u_1)_{xx}, & & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u_0(0,t) &= T_0, & u_1(0,t) &= T_1\cos(\omega t), & & u_0, u_1 \text{ ograničeni kako } x \to \infty. \end{aligned}$$

Očito je $u_0(x,t) = T_0$ jedino rješenje za $u_0(x,t)$ (prema teoremu 5.1 o jedinstvenosti rješenja). Kako bismo pronašli u_1, ponovimo postupak od ranije: označimo $u_1(x,t) = \text{Re}\{U(x)e^{i\omega t}\}$ i dobivamo

$$U''(x) - i\omega U(x) = 0, \quad 0 < x < \infty \tag{5.70}$$

$$U(0) = T_1, \quad U \text{ ograničen kako } x \to \infty, \quad t > 0. \tag{5.71}$$

Opće rješenje za (5.70)-(5.71) je

$$U(x) = C_1 e^{-\sigma x} + C_2 e^{\sigma x},$$

gdje je $\sigma = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+i)$, a C_1 i C_2 su konstante. Zbog (5.71) je $C_2 = 0$ (funkcija uz C_2 "eksplodira" kako $x \to \infty$), a $C_1 = T_1$. Stoga je

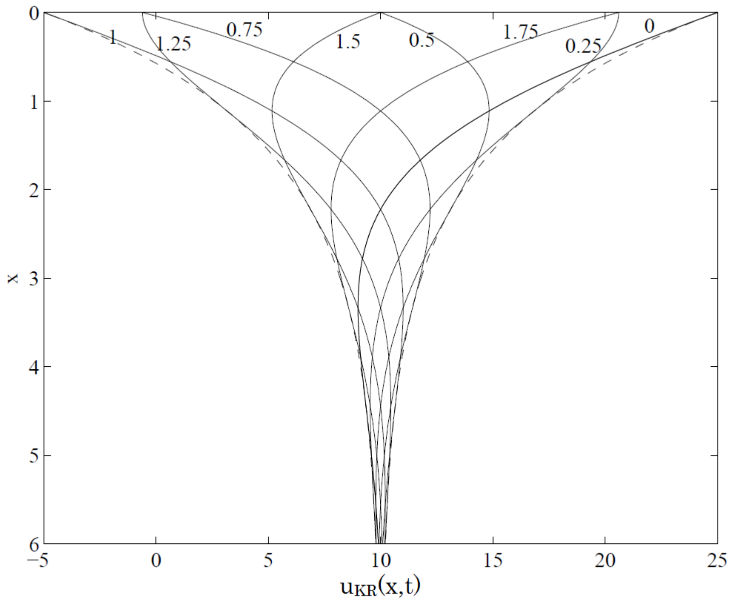
$$U(x) = T_1 e^{-\sigma x}.$$

Zaključujemo

$$\begin{aligned} u_{KR}(x,t) &= T_0 + \text{Re}\big\{T_1 e^{-\sigma x} e^{i\omega t}\big\} \\ &= T_0 + T_1 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\,\text{Re}\Big\{e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2}}x + i\omega t}\Big\} \\ &= T_0 + T_1 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x + \omega t\right). \end{aligned} \tag{5.72}$$

Na slici 3 (iz [4, str. 34]) prikazana je funkcija $u_{KR}(x,t)$ u različitim bezdimenzionalnim vremenima $\frac{\omega t}{\pi} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Iscrtkane linije daju amplitudu $T_0 \pm T_1 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}$ kvazi-ravnotežnog stanja $u_{KR}(x,t)$.

Postavljamo pitanje: Koja je idealna dubina za vinski podrum? Želimo da vino ostaje relativno hladno tijekom ljeta te relativno toplo tijekom zime (u odnosu na temperature tijekom tih razdoblja). Također želimo da podrum bude blizu površine kako bismo izbjegli dugotrajno penjanje po stubama. Dakle, cilj nam je pronaći najmanju dubinu x takvu da temperatura $u_{KR}(x,t)$ bude suprotne faze u odnosu na površinsku temperaturu



Slika 3: Graf funkcije u u različitim vremenima. Brojevi označavaju $\omega t/\pi$.

$u_{KR}(0,t)$. Uzimamo $\kappa = 2 \cdot 10^{-3}\text{cm}^2/\text{s}$ i $l = 1$ m. Sjetimo se da je period jedna godina, $\tau = (\kappa/l^2)(1 \text{ godina})$, a jedna godina je $3.15 \cdot 10^7$ sekundi. Iz rješenja (5.72), faza od $u_{KR}(x,t)$ je obrnuta kada je

$$\sqrt{\frac{\omega}{2}}x = \pi \implies x = \pi\sqrt{\frac{2}{\omega}}.$$

Vraćanjem na naše koordinate, imamo (jer je $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$)

$$x' = lx = l\pi\sqrt{\frac{2}{2\pi}\tau} = \sqrt{\pi\kappa(1 \text{ godina})} = \sqrt{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-3}\text{cm}^2) \cdot 3.15 \cdot 10^7} = 4.45\text{m}.$$

Na ovoj je dubini amplituda varijacija temperature

$$T_1 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x} = T_1 e^{-\pi} \approx 0.04 T_1.$$

Stoga su temperaturne varijacije samo 4% u odnosu na površinu, te je zbog suprotne faze temperatura na $x = 4.45$m hladna ljeti, a topla zimi pa je to idealna dubina vinskog podruma.

5.5 Nehomogena jednadžba provođenja topline

U prethodnim smo odjeljcima proučavali homogenu jednadžbu provođenja topline te razradili metodu kojom se takva jednadžba može s lakoćom riješiti. Sada ćemo proučavati nehomogeni problem provođenja, tj. onaj u kome se pojavljuje vanjski izvor topline koji grije ili hladi štap.

5.5.1 Separacija varijabli za nehomogenu jednadžbu

Iako smo metodu separacije varijabli koristili za rješavanje homogene jednadžbe provođenja, postoji način na koji se takva metoda može modificirati, a zatim i upotrijebiti za rješavanje nehomogene jednadžbe provođenja. Radi jednostavnosti, promatrat ćemo početno-rubni problem sa Dirichletovim homogenim rubnim uvjetima:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= F(x,t), \quad && 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le L, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, && t \ge 0, \end{aligned} \tag{5.73}$$

pri čemu je f neprekidna funkcija.

Ako je $F \equiv 0$, tada znamo da je rješenje dano s

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \tag{5.74}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \ge 1. \tag{5.75}$$

Ako funkciju u interpretiramo kao funkciju varijable x koja ovisi o parametru t, tada (5.74) možemo napisati kao Fourierov red

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad \text{gdje je} \qquad b_n(t) = b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Stoga, ima smisla rješenje nehomogene jednadžbe tražiti u obliku

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{5.76}$$

gdje su T_n nepoznate funkcije. Za pronalazak funkcija T_n potrebno je funkciju F razviti u isti oblik Fourierovog reda kao što ga ima funkcija u. U tu svrhu ćemo pretpostaviti da je za svaki $t \ge 0$ funkcija F neprekidna i po dijelovima klase $C^1([0,L])$, te da vrijedi $F(0,t) = F(L,t) = 0$.

Fourierov red

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{5.77}$$

uniformno konvergira ka F na $[0,L]$, $\forall t \ge 0$. Uvrštavanjem (5.76) i (5.77) u jednadžbu problema (5.73), dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija T_n zadovoljava običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$T_n'(t) + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t) = F_n(t),$$

čije je opće rješenje dano s

$$T_n(t) = b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} + T_n^p(t), \tag{5.78}$$

gdje je b_n konstanta integracije, a T_n^p je partikularno rješenje koje ovisi o funkciji F_n. Uvrštavanjem (5.78) u (5.76), dobivamo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^p(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{5.79}$$

Prvi član u (5.79) je rješenje homogenog problema, dok je drugi član partikularno rješenje koje ovisi o funkciji F, tj.

$$\begin{aligned} u_h(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ u_p(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n^p(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \end{aligned}$$

Koeficijente b_n određujemo iz početnog uvjeta $u(x,0) = f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + T_n^p(0)) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Prepoznavanjem razvoja funkcije f u Fourierov red na $[0,L]$, dobivamo

$$b_n + T_n^p(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Time smo potpuno odredili rješenje problema (5.73).

Primjer 5.2 *Nađimo rješenje početno-rubnog problema*

$$\begin{aligned} u_t - 4u_{xx} &= \sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x). \tag{5.80}$$

Funkcija koja se pojavljuje u početnom uvjetu je $F(x,t) = \sin(\pi x)$ i ona je već razvijena u Fourierov red. Prema definiciji 4.1 i lemi 4.1 imamo da je $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$, $b_3 = 1$ i $b_n = 0$ za $n \neq 3$. Uvrštavanjem u jednadžbu početno-rubnog problema, dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + 4n^2\pi^2 T_n(t)\right) \sin(n\pi x) = \sin(3\pi x).$$

Sada, ovisno o vrijednosti prirodnog broja n, dobivamo niz običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{array}{r|lll} n=3 & T_3'(t) = -36\pi^2 T_3(t) + 1 & \Longrightarrow & T_3(t) = Ce^{-36\pi^2 t} + \frac{1}{36\pi^2}, \ \ C \in \mathbb{R} \\ n \neq 3 & T_n'(t) = -4n^2\pi^2 T_n(t) & \Longrightarrow & T_n(t) = T_n(0)e^{-4n^2\pi^2 t}. \end{array}$$

Vrijednosti za $T_n(0)$ dobivamo iz početnog uvjeta $u(x,0) = \sin(\pi x)$ i raspisivanjem (5.80):

$$T_1(0)\sin(\pi x) + T_2(0)\sin(2\pi x) + T_3(0)\sin(3\pi x) + T_4(0)\sin(4\pi x) + \cdots = \sin(\pi x).$$

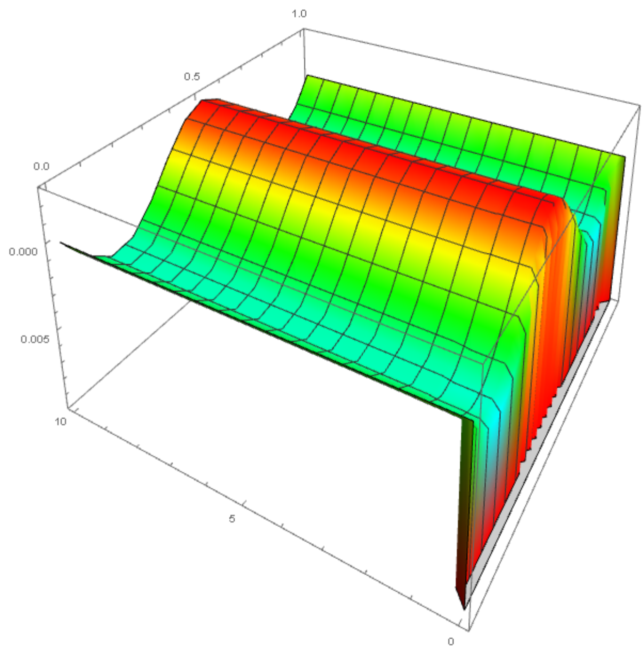
Zaključujemo da vrijedi $T_1(0) = 1$, a svi ostali koeficijenti su jednaki nuli. Slijedi

$$\begin{array}{r|lll} n=1 & T_1(t) = T_1(0)e^{-4\pi^2 t} & \Longrightarrow & T_1(t) = e^{-4\pi^2 t} \\ n=3 & T_3(t) = Ce^{-36\pi^2 t} + \frac{1}{36\pi^2} & \Longrightarrow & T_3(t) = \frac{1}{36\pi^2}\left(1 - e^{-36\pi^2 t}\right) \\ n \neq 1,3 & T_n(t) = T_n(0)e^{-4n^2\pi^2 t} & \Longrightarrow & T_n(t) = 0. \end{array}$$

Konačno, uvrštavanjem dobivenih koeficijenata, dobivamo rješenje problema

$$u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\sin(\pi x) + \frac{1}{36\pi^2}\left(1 - e^{-36\pi^2 t}\right)\sin(3\pi x).$$

Zaista, $u(x,t)$ zadovoljava početni uvjet $u(x,0) = \sin(\pi x)$. Rješenje je prikazano na sljedećoj slici:



Slika 4: Graf funkcije–rješenja u.

■

6 Zaključak

Prijenos topline je dinamičan proces pri kojem toplina spontano prelazi s tijela više temperature na tijelo niže temperature. Prijenos topline vrši se sve dok se ne uspostavi toplinska ravnoteža. Toplina se može prenositi na 3 načina: kondukcijom, konvekcijom i zračenjem. Prilikom kondukcije, odnosno vođenja, toplinska se energija prenosi s mjesta više temperature titranjem i sudarima susjednih atoma na mjesta niže temperature. Kondukcija je karakteristična za krutine i za fluide u stanju mirovanja.

Problem vođenja topline općenito se može proučavati u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$, no, kako taj problem ima veliki značaj u primjenama, dovoljno je ograničiti se na 1-, 2- ili 3-dimenzionalni slučaj provođenja. Jednadžba provođenja topline je linearna parabolička parcijalna diferencijalna jednadžba koja opisuje prijenos topline u određenom području tijekom vremena.

Jednodimenzionalna jednadžba provođenja izvedena je iz Fourierovog zakona i zakona o očuvanju energije, a u njoj se kao nepoznata funkcija pojavljuje upravo toplina koja ovisi o točkama jednodimenzionalnog područja i vremena.
Uz jednadžbu provođenja stoje početni i rubni uvjeti koji, uz neke dodatne pretpostavke, osiguravaju postojanje i jedinstvenost rješenja. Primjerice, početni se uvjet mora moći razviti u Fourierov red koji konvergira uniformno prema tom početnom uvjetu. Dva važna rezultata su također i princip maksimuma i minimuma čiji se iskazi i dokazi nalaze u ovome radu.

Ukoliko ne postoji vanjski izvor topline koji grije ili hladi tijelo, jednadžba provođenja je homogena. U suprotnom je jednadžba nehomogena. Homogene i nehomogene jednadžbe provođenja topline rješavaju se metodom separacije varijabli uz primjenu teorije Fourierovih redova. Pritom je pogodno imati takozvane homogene rubne uvjete. U slučaju nehomogenih konstantnih rubnih uvjeta, potrebno je napraviti homogenizaciju kao dodatak postupku rješavanja.

Jednadžba provođenja topline od ogromne je važnosti u raznim znanstvenim područjima. Osim u matematici, fizici, kemiji i biologiji, pojavljuje se i u teoriji vjerojatnosti pa čak i u financijskoj matematici.

Literatura

[1] M. Alić. *Obične diferencijalne jednadžbe*. Matematički odjel PMF, Zagreb, 2001.

[2] D. Bakić. *Linearna algebra*. Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] H. Flanders. "Differentiation Under the Integral Sign". *The American Mathematical Monthly* 80.6 (1973), str. 615–627.

[4] M.J. Hancock. *Nastavni materijali za kolegij Linear partial differential equations*. MIT, Fall, 2006.

[5] I. Ivanšić. *Fourierovi redovi. Diferencijalne jednadžbe*. Odjel za matematiku, Osijek, 2000.

[6] D. Jukić, R. Scitovski. *Matematika I*. Odjel za matematiku, Osijek, 2000. URL: `https://www.mathos.unios.hr/integralni/Jukic_Scitovski.pdf`.

[7] S. Krešić-Jurić. *Nastavni materijali za kolegij Parcijalne diferencijalne jednadžbe*. Matematički odjel PMF, Split, 2017.

[8] V. Labinac. *Vježbe iz Osnova fizike IV (Pregled formula)*. Odsjek za fiziku, Filozofski fakultet, Rijeka, 2006. URL: `http://www.phy.uniri.hr/~vlabinac/files/index/skripte/top_pregled.pdf`.

[9] D. Paar. *Nastavni materijali za kolegij Fizika za geologe - Prijenos topline i zakoni zračenja*. Fizički odsjek PMF, Zagreb, 2010. URL: `http://www.phy.pmf.unizg.hr/fizgeo/tonejc/prijenos_topline_i_zakoni_zracenja.pdf`.

[10] B. Rabar. *Nastavni materijali za kolegij Parcijalne diferencijalne jednadžbe*. Matematički odjel PMF, Zagreb, 2008.

[11] Š. Ungar. *Matematička analiza IV, (skripta)*. Matematički odjel PMF, Zagreb, 2001. URL: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/MA/Analiza4.pdf`.