Ravnoteža napete žice

Franjo, Martina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Martina Franjo

Ravnoteža napete žice

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Martina Franjo

Ravnoteža napete žice

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Krešimir Burazin

Osijek, 2017.

Sažetak

U ovom radu proučavat ćemo ravnotežu jednodimenzionalnih kontinuuma. Objasniti ćemo što je kontinuum, te na primjeru napete elastične žice prikazati izvod jednadžbe ravnoteže, koja je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda. Izvesti ćemo i jednadžbu stacionarnog provođenja topline kroz štap te pokazati da je ona identična jednadžbi ravnoteže napete žice. Također, razmatrati ćemo ponašanje žice uz različite rubne uvjete. Iskazati ćemo i dokazati princip superpozicije koji nam je bitan za postupak homogenizacije rubnog problema i općenito kod određivanja ravnotežnog položaja. Na kraju samog rada bavit ćemo se pitanjem jedinstvenosti rješenja te proći kroz slučajeve kad koeficijenti ne posjeduju dovoljnu glatkoću. Sve navedeno popraćeno je mnoštvom primjera i zadataka sa ilustracijama.

Ključne riječi

Ravnoteža žice, jednadžba ravnoteže, kontinuum, rubni uvjet, princip superpozicije, koncentrirana sila

Abstract

In this paper we will study equilibrium of one dimensional continuum. We will explain what continuum is and derive balance equation for elastic wire under tension, which is a second order linear differential equation. Additionally, we will derive equation of heat conduction through stick and show that this equation is identical to the balance equation of elastic wire. We will consider the behaviour of wire with respect to different boundary conditions. We will state and prove superposition principle which is very important for homogenzation of the boundary problem as well as for finding equilibrium position in general. At the end of this paper we will study uniqueness of the solution and go through cases when coefficients are not smooth enough. All mentioned results are complemented with a number of examples and illustrations.

Key words

Balance of wire, equilibrium equation, continuum, boundary condition, superposition principle, concentrated force

Sadržaj

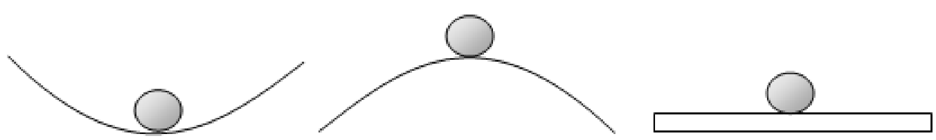
1 Ravnoteža kontinuuma

1.1 Općenito o ravnoteži

Pojam ravnoteža u općenitom smislu nas asocira na nešto stabilno ili statično. Ravnoteža je stanje mirovanja tijela. Kad pomislimo na pojam ravnoteža mogli bismo reći da većini prvo padne na pamet pojam prirodna ravnoteža. Prirodna ravnoteža je vrlo složen sustav, s tisućama varijabli i dijelova koji u cijelini savršeno funkcioniraju, nadopunjuju se, i u krajnjem slučaju preživljavaju. Prirodna ravnoteža je samo jedan pojam u beskonačnom nizu pojmova kojih se sjetimo kad netko spomene riječ ravnoteža.

Gledajući pojam ravnoteža s znanstvene strane, fizičari i matematičari su ustanovili i dokazali da se ravnoteža javlja u različitim sustavima zbog čega postoje različiti tipovi ravnoteže, a najpoznatiji su mehanička, termodinamička, toplinska i hidrostatička ravnoteža. U ovom radu bavit ćemo se mehaničkom ravnotežom. U mehanici je materijalna točka u ravnoteži ako je vektorski zbroj sila koje djeluju na tu točku jednak nuli. Kruto tijelo je u ravnoteži ako je vektorski zbroj sila koje djeluju jednak nuli i ako je algebarski zbroj svih momenata sila s obzirom na svaku od bilo koje međusobno okomite osi, jednak nuli.

Obično razlikujemo tri vrste ravnoteže, a to su stabilna, labilna i indiferenta. One ovise o tome je li potencijalna energija promatranog sustava maksimalna, minimalna ili konstantnog iznosa.



Slika 1: Stabilna, labilna, indiferentna ravnoteža

Grana mehanike koja proučava skupove sila i ravnotežu tijela na koje te sile djeluju naziva se statika ili znanost o ravnoteži. Sad kad smo pobliže objasnili što je zapravo ravnoteža, možemo se okrenuti temi ovog rada.

1.2 Ravnoteža elastične žice

Krenimo od pojma *kontinuuma*, odnosno materijalnog tijela. Stanje kontinuuma u danom trenutku opisujemo funkcijom koja svakoj točki tijela pridružuje broj ili vektor. Gledat ćemo ponašanje jednodimenzionalnih (1-D) kontinuuma, kod kojih se stanje opisuje funkcijom jedne prostorne varijable. Osnovno svojstvo materijalnog tijela ili kontinuuma leži u činjenici, da sila kojom dva njegova komada djeluju jedan na drugog ovisi samo o položaju njihovog kontakta, a ne o samim dijelovima i zato se ta sila naziva *kontaktnom.* Proučavat ćemo ravnotežna stanja, a kao osnovnu fizikalnu činjenicu koristit ćemo zakon ravnoteže sila, koji glasi: *ako je tijelo u ravnoteži, rezultanta svih sila koje na njega djeluju jednaka je nuli.*

Prvo ćemo proučavati jedan jednostavan primjer tanke napete žice kojim ćemo doći do jednadžbe ravnoteže.

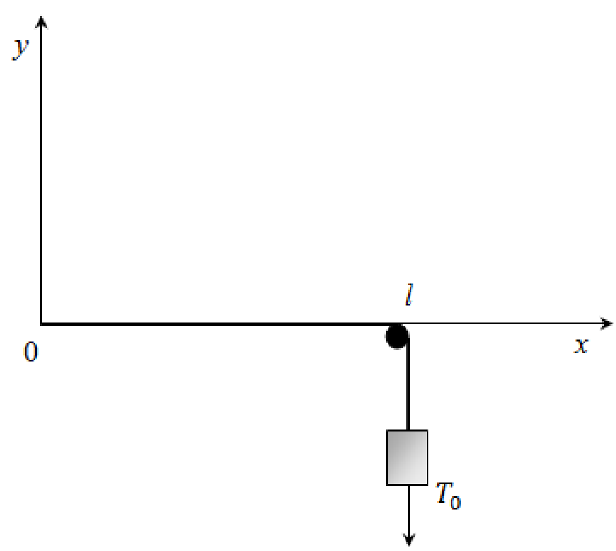
Neka je interval $(0, l)$ na x-osi predstavlja položaj tanke žice, napete čivijom, npr. kao na gitari. Kad navodimo da je žica tanka želimo reći da joj je masa minimalna, zbog toga ćemo ju zanemariti. Označimo s $a(x)$ kontaktnu silu u točki $x \in (0, l)$, tj. silu kojom dio (x, l) djeluje na dio $(0, x)$. Tada dio $(0, x)$ djeluje na dio (x, l) silom $-a(x)$. Ta sila je *uzdužna* ili *longitudinalna*, odnosno paralelna je x-osi i naziva se *napetost žice.* Neka je $x_1, x_2 \in (0, l)$, $x_1 < x_2$, tada je ukupna uzdužna sila na dio (x_1, x_2) jednaka $a(x_2) - a(x_1)$, pa prema zakonu ravnoteže vrijedi

$$a(x_2) - a(x_1) = 0,$$

tj.

$$a(x) = \text{const.}$$

Dakle u promatranom slučaju napetost je konstanta jednaka uzdužnoj kontaktnoj sili $a(l) > 0$ kojom čivija djeluje na žicu. Također možemo umjesto čivijom, žicu horizontalno napeti utegom. Ako je težina utega $T_0 > 0$, napetost je $a(x) = a(l) = T_0$, tj zadana je neposredno.



Slika 2: Žica napeta utegom

Promotrimo žicu koja slobodno visi, uz to da x-os ima smjer djelovanja sile teže. Ta žica je također napeta, ali ovaj put svojom težinom. Više ne promatramo tanku žicu, nego žicu koja ima neku težinu. Označimo s $T(x_1, x_2)$ težinu komada (x_1, x_2). Ukupna uzdužna sila na taj komad jednaka je $a(x_2) - a(x_1) + T(x_1, x_2)$, pa prema zakonu ravnoteže imamo

$$a(x_2) - a(x_1) + T(x_1, x_2) = 0.$$

Stavljajući npr. $x_1 = x$, $x_2 = l$ i uzimajući u obzir da je $a(l) = 0$ (kraj x=l je *slobodan*), dobivamo

$$a(x) = T(x, l). \tag{1}$$

Iz toga slijedi da je

$$a(x) > 0, \quad \text{za} \quad x \in [0, l). \tag{2}$$

Ako je dodatno o kraj $x = l$ obješen uteg težine $T_0 > 0$, onda umjesto (1) imamo

$$a(x) = T(x, l) + T_0,$$

pa je

$$a(x) > 0, \quad x \in [0, l]. \tag{3}$$

Ako je žica homogena (ima jednaku gustoću u svakoj točki) s linijskom gustoćom mase ρ (masa jedinice duljine žice), onda je $T(x, l) = \rho g \, (l - x) + T_0$, pa imamo

$$a(x) = \rho g \, (l - x) + T_0, \tag{4}$$

Težina obješene žice je specijalan slučaj uzdužne linijske sile, raspoređene po žici s gustoćom $\varphi(x) > 0$, $x \in (0, l)$; ukupna linijska sila na komad (x_1, x_2) je tada

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(\xi) d\xi,$$

pa iz zakona ravnoteže imamo

$$a(x_2) - a(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \varphi(\xi) d\xi = 0.$$

Ako stavimo da je $x_1 = x$, $x_2 = l$ i ako pored linijske sile na žicu djeluje i kontaktna sila $a(l) = T_0 > 0$, onda imamo

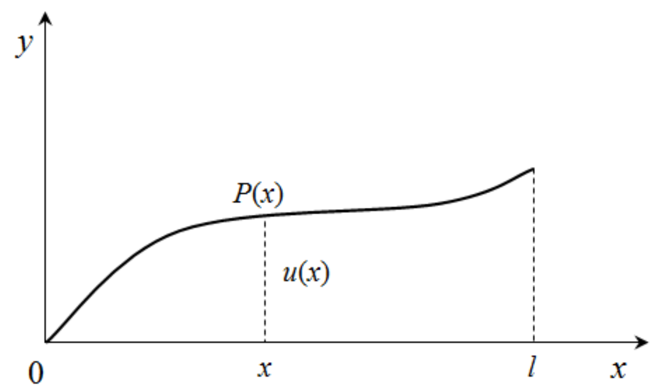
$$a(x) = T_0 + \int_x^l \varphi(\xi) d\xi$$

i tada vrijedi (3). U suprotnom, ako na žicu djeluje samo linijska sila, a kontaktna sila $a(l) = 0$, dobivamo

$$a(x) = \int_x^l \varphi(\xi) d\xi,$$

iz toga slijedi nejednakost (2). Promotrimo sada uzdužnu napetu žicu, podvrgnutu djelovanju vanjske *poprečne* ili *transverzalne* sile, tj. sile koja je okomita na žicu. Pod utjecajem vanjske sile žica se deformira, pa ćemo pretpostaviti da je vanjska sila slaba, tj. mnogo manja od napetosti tako da se žica što manje deformira, odnosno njezin deformirani položaj se malo razlikuje od segmenta $[0, l]$. Zbog jednostavnosti uzet ćemo još jednu pretpostavku, a to je da je vanjska sila paralelna ravnini xy. Tada i deformirana žica leži u ravnini xy.
Pri deformaciji točka $x \in (0, l)$ prijeđe u točku $P(x) = (x, u(x)) \in \mathbb{R}^2$, gdje je $u(x)$ *progib* točke x. Žica onda poprima oblik grafa funkcije u

$$y = u(x). \tag{5}$$



Slika 3: Deformirana žica

Derivacija $u'(x)$ je deformacija na mjestu x, tj. *mjera deformacije*. Pretpostavka da je deformacija mala izražava se uvjetom

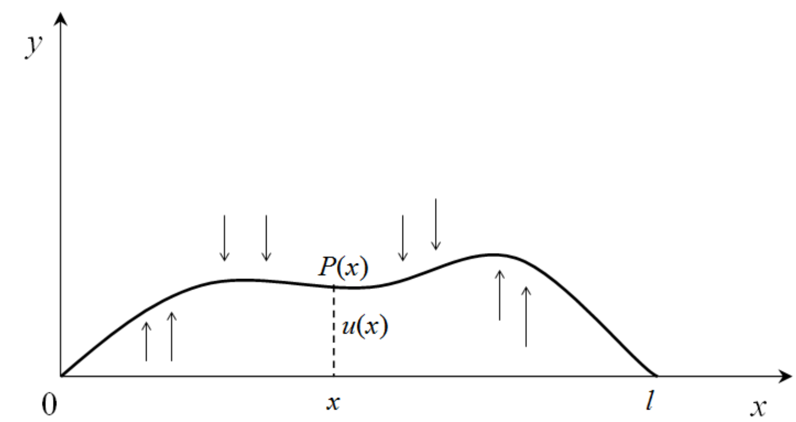
$$|u'(x)| \ll 1, \quad \forall x \in (0, l).$$

Iz toga zaključujemo da je progib $u(x) - u(0)$ mali u usporedbi s dužinom žice:

$$|u(x) - u(0)| = \left| \int_0^x u'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^x |u'(\xi)| d\xi \ll \int_0^x d\xi = x \leq l,$$

ili

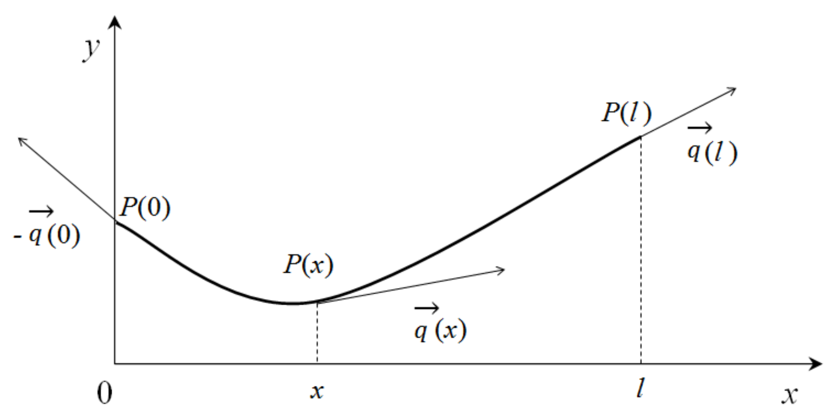
$$\frac{|u(x) - u(0)|}{l} \ll 1.$$



Slika 4: Poprečna sila

Prema tome, vidimo da pri maloj deformaciji relativni progib $u(x) - u(0)$ je (po apsolutnoj vrijednosti) malen u odnosu na duljinu žice. Primjetimo također sljedeće: ako je žica na kraju $x = l$ napeta utegom, progib na tom kraju jednak je nuli, tj. vrijedi $u(l) = 0$; to je direktna posljedica pretpostavke da je poprečna sila manja od težine utega.

Označit ćemo s $\vec{q}(x)$ kontaktnu silu u točki $P(x)$, tj. silu kojom dio $\overline{P(x)P(l)}$ deformirane žice djeluje na dio $\overline{P(0)P(x)}$. Dio $\overline{P(0)P(x)}$ djeluje na dio $\overline{P(x)P(l)}$ silom $-\vec{q}(x)$. Funkcija $\vec{q}(x)$ definirana je i na krajevima $x = 0$ i $x = l$, a $\vec{q}(l)$ i -$\vec{q}(0)$ su *vanjske* kontaktne sile.



Slika 5: Kontaktne sile

Ukupna kontaktna sila na dio $\overline{P(x_1)P(x_2)}$ deformirane žice jednaka je

$$\vec{q}(x_2) - \vec{q}(x_1).$$

Budući je deformacija mala, možemo pretpostaviti da je kontaktna sila tangencijalna na žicu:

$$\vec{q}(x) = a(x)\,\vec{t}(x), \tag{6}$$

gdje je $\vec{t}(x)$ jedinični tangencijalni vektor žice u točki $P(x)$:

$$\vec{t}(x) = \frac{\vec{i} + u'(x)\,\vec{j}}{\sqrt{1+u'(x)^2}}.$$

Zbog $|u'(x)| \ll 1$, za svaki x iz $(0,l)$ vrijedi

$$1 + (u'(x))^2 \approx 1, \tag{7}$$

pa možemo uzeti da je

$$\vec{t}(x) = \vec{i} + u'(x)\,\vec{j}. \tag{8}$$

Iz (6) i (8) slijedi

$$\vec{q}(x) = a(x)\vec{i} + a(x)\,u'(x)\vec{j}. \tag{9}$$

Kad stavimo da je $\vec{q} = q_x\,\vec{i} + q_y\,\vec{j}$ dobivamo

$$q_x(x) = a(x), \tag{10}$$

$$q_y(x) = a(x)\,u'(x). \tag{11}$$

Veza kontaktne sile $q(x)$ i progiba $u(x)$ s općenitijeg stajališta zove se *zakon ponašanja* u promatranom modelu. Zakon ponašanja glasi: *ako je deformacija mala, kontakta sila $q(x)$ je paralelna tangencijalnom vektoru deformirane žice u točki x, a po modulu je jednaka napetosti $a(x)$*,

$$q_y\,(x) = a(x)u'(x). \tag{12}$$

Prema (10) *uzdužna* kontaktna sila je napetost žice. Vanjska linijska sila raspoređena je po žici. Označimo s $\vec{f}$ gustoću *vanjske linijske sile*, odnosno silu po jedinici duljine žice. Neka je $\vec{f} = f_x\,\vec{i} + f_y\,\vec{j}$. Iz (7) slijedi da za element duljine luka deformirane žice imamo

$$ds = \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx \approx dx,$$

iz ove dobivene formule dolazimo do zaključka da mala deformacija ne uzrokuje istezanje žice. Ukupna linijska sila na dio $\overline{P(x_1)P(x_2)}$ gdje je $x_1 \le x_2$, jednaka je

$$\int_{x_1}^{x_2} \vec{f}(x)dx = \vec{i}\int_{x_1}^{x_2} f_x(x)dx + \vec{j}\int_{x_1}^{x_2} f_y(x)dx; \tag{13}$$

prvi član na desnoj strani je *uzdužna*, a drugi *poprečna* linijska sila.
Razmotrit ćemo dio $\overline{P(x)P(l)}$ za neki proizvoljan x i primijeniti princip ravnoteže sile. Na taj dio djeluje kontaktna sila $\vec{q}(x) - \vec{q}(0)$ i linijska sila $\int\limits_0^x \vec{f}(\xi)d\xi$. Ako je žica u ravnoteži, onda slijedi

$$\vec{q}(x) - \vec{q}(0) + \int_0^x \vec{f}(\xi)d\xi = 0,$$

ili ako zapišemo u komponentama

$$q_x(x) - q_x(0) + \int_0^x f_x(\xi) d\xi = 0, \tag{14}$$

$$q_y(x) - q_y(0) + \int_0^x f_y(\xi) d\xi = 0. \tag{15}$$

Jednadžba (15) opisuje poprečnu ravnotežu žice.

Ako se žica nalazi u nekom elastičnom sredstvu, koje se opire njezinoj deformaciji, onda pored linijske sile $f(x)$, na nju djeluje i linijska (poprečna) sila s gustoćom $-b(x)\, u(x)$, gdje je $b(x) \geq 0$, *koeficijent elastičnosti* sredstva.
Tada umjesto (15) imamo

$$q_y(x) - q_y(0) + \int_0^x \left(f(\xi) - b(\xi)u(\xi)\right) d\xi = 0, \tag{16}$$

odnosno

$$q_y'(x) - b(x)\, u(x) + f(x) = 0,$$

Uvrštavajući (11) u (16) dobivamo

$$a(x)u'(x) - a(0)u'(0) + \int_0^x (f(\xi) - b(\xi)u(\xi)) d\xi = 0. \tag{17}$$

integralnu jednadžbu ravnoteže. Derivirajući tu jednadžbu dobivamo

$$(a(x)\, u'(x))' - b(x)\, u(x) + f(x) = 0. \tag{18}$$

Jednadžbu (18) nazivamo *jednadžbom ravnoteže.* To je *linearna* diferencijalna jednadžba drugog reda za funkciju $u(x)$; funkcije $a(x)$ i $b(x)$ su njezini koeficijenti, a $f(x)$ je slobodni član. Jednadžba je homogena ako je slobodni član jednak nuli, a ako je različit od nule onda je nehomogena.

Navest ćemo jedan važan fizikalni model koji se opisuje jednadžbom ravnoteže.

1.3 Stacionarno provođenje topline kroz štap

Princip stacionarnog provođenja topline glasi ovako: *ako je provođenje topline kroz tijelo ravnotežno, ukupni toplinski fluks koji se prenosi na bilo koji komad tijela jednak je nuli.*
Koristeći ovaj fizikalni primjer izvest ćemo jednadžbu stacionarnog provođenja topline kroz štap (vidi [3, Primjer 3.1]).

Neka je na intervalu $(0, l)$ osi x položen toplinski vodljivi homogeni štap. Pretpostavimo da je štap tanak u smislu da njegovu temperaturu možemo prikazati kao funkciju koordinate x. Označimo sa $u(x)$ temperaturu na poprečnom presjeku štapa na mjestu x. Neka je $q(x)$ kontaktni toplinski *fluks* na tom mjestu, tj. količina topline koja u jedinici vremana prijeđe iz dijela (x, l) u dio $(0, x)$. Označimo još s $f(x)$ gustoću vanjskog linijskog toplinskog fluksa, tj. toplinu koja se u jedinici vremena prenosi izvana na jedinicu duljine štapa u jedinici vremena. Provođenje topline kod kojeg temeperatura i toplinski fluks ne ovise o vremenu naziva se *stacionarno* ili *ravnotežno.*

Ako primjenimo princip stacionarnog provođenja topline na bilo koji dio štapa (x_1, x_2) iz jednadžbe (16) uz $b(x) = 0$
dobivamo

$$q(x_2) - q(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(\xi) d\xi = 0,$$

odnosno

$$q'(x) + f(x) = 0. \tag{19}$$

Ako je vanjski toplinski fluks slab, onda je proces provođenja slab, što izražavamo uvjetom

$$|u'(x)| \ll 1.$$

Zakon ponašanja (*Fourierov*[1] *zakon*) ima oblik (12), gdje je

$$a(x) = \kappa\, S(x),$$

$\kappa > 0$ je koeficijent provođenja, a $S(x)$ je površina poprečnog presjeka štapa. Kad uvrstimo (12) u (19) dobivamo diferencijalnu jednadžbu za temperaturu:

$$(a(x)u'(x))' + f(x) = 0.$$

Ako je štap u vezi s regulatorom koji na svakom presjeku odvodi iz štapa količinu topline proporcionalne temperaturi na tom mjestu, onda uz zadanu vanjsku toplinu $f(x)$ imamo i linijski fluks s gustoćom $-b(x)u(x)$, gdje je $b(x) \geq 0$. Tada umjesto prethodne jednadžbe dobivamo *jednadžbu stacionarnog provođenja* koja glasi ovako:

$$(a(x)\, u'(x))' - b(x)\, u(x) + f(x) = 0.$$

$\square$

Uočimo da je dobivena jednadžba jednaka kao (18). Dakle, vidimo da su jednadžbe ravnoteže dva različita matematička problema potpuno identične i to nije slučaj samo za ovaj primjer. Zbog toga je za određivanje ravnoteže različitih fizikalnih modela dovoljno promatrati jednadžbu (18).

[1] Joseph Fouier (1768.-1830.), francuski matematičar i fizičar

2 Rubni uvjeti

Diferencijalna jednadžba ravnoteže služi za određivanje ravnotežnog stanja $u(x)$. Uz zadane funkcije $a(x)$, $b(x)$ i $f(x)$, jednadžba ravnoteže (18) općenito ima beskonačno mnogo rješenja. Pretpostavljamo da je

$$a(x) > 0 \quad \text{za} \quad 0 \leq x \leq l,$$

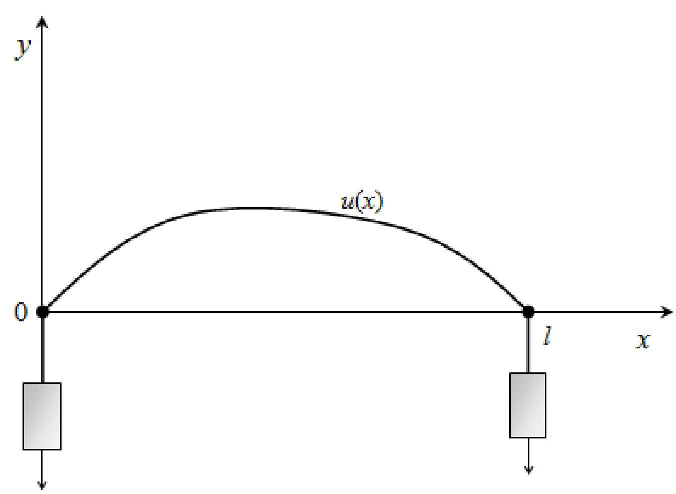
$$b(x) \geq 0 \quad \text{za} \quad 0 \leq x \leq l.$$

Da bismo izdvojili jedno rješenje, moramo postaviti tzv. *rubne uvjete*, koji opisuju ponašanje na krajevima $x = 0$ i $x = l$. Određivanje ravnotežnog stanja koje zadovoljava rubne uvjete zove se *rubna zadaća*.

2.1 Jednostavni rubni uvjeti

Imamo nekoliko jednostavnih rubnih uvjeta, a to su *Dirichletov*[2], *Neumannov*[3] i *Robinov*[4]. Prvo ćemo objasniti Dirichletov.
Ako su krajevi učvršćeni utegom ili čivijom kao na glazbenim instrumentima, što je ujedno najjednostavniji način da se učvrsti kraj, onda rubni uvjeti glase ovako:

$$u(0) = 0, \qquad u(l) = 0.$$

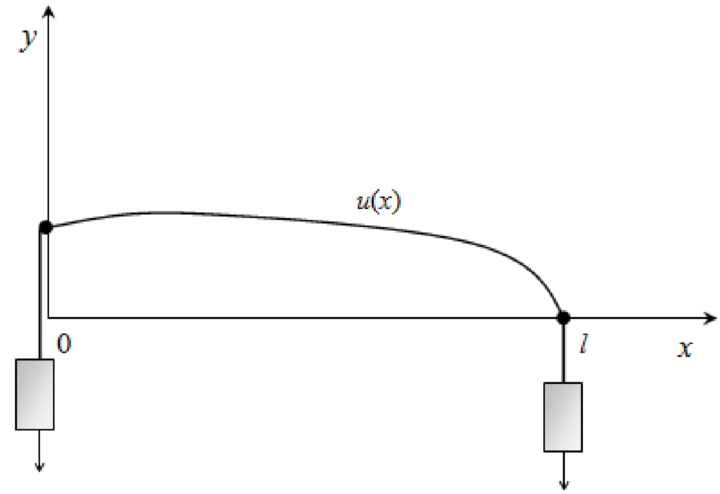


Slika 6: Homogeni Dirichletov rubni uvjet

Također se može progib na kraju (npr. $x = 0$) fiksirati na bilo koju vrijednost c i tada rubni uvjet glasi

$$u(0) = c. \tag{20}$$

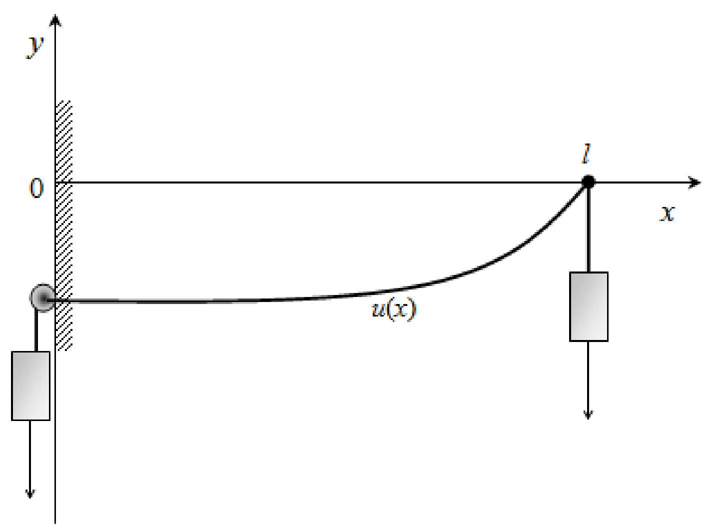
[2]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805.-1859.), njemački matematičar
[3]Carl Gottfried Neumann,(1832.-1925.), njemački matematičar
[4]Victor Gustave Robin(1855.-1897.), francuski matematičar i fizičar



Slika 7: Dirichletov rubni uvjet

Takav rubni uvjet naziva se *Dirichletov*, kinematički ili geometrijski. Umjesto zadavanja progiba $u(0)$, možemo zadati vrijednost vanjske kontakte sile $-q(0)$ koja realizira taj progib. Npr. ako je žica napeta horizontalno pomoću kotačića koji se bez trenja kotrlja po tračnici paralelnoj s y osi na kraju $x = 0$ i ako se na taj kraj objesi uteg težine c_1, onda imamo uvjet

$$-q(0) = c_1. \tag{21}$$



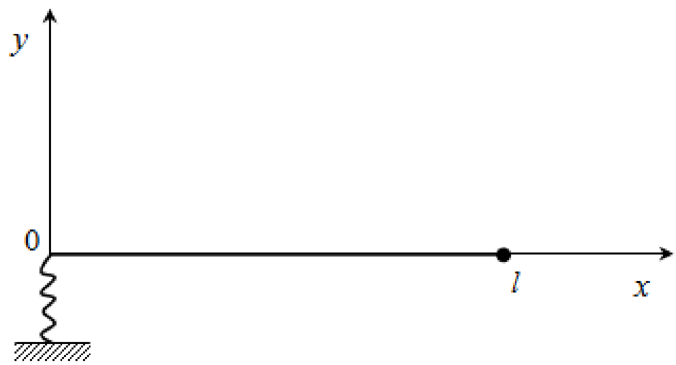
Slika 8: Neumannov uvjet

(Primjetimo da analogan uvjet na kraju $x = l$ glasi $q(l) = c_1$). U slučaju provođenja uvjet (21) znači da je reguliran toplinski fluks kroz presjek $x = 0$.
Kad uzmemo u obzir zakon ponašanja (11), dobivamo uvjet

$$u'(x) = c_2,$$

gdje smo stavili da je $c_2 = -\dfrac{c_1}{a(0)}$. Ovaj uvjet nazivamo *Neumannov*, prirodni ili dinamički. Ako je $c_2 = 0$, kažemo da je kraj slobodan (toplinski izoliran).

Ako se na kraj $x = 0$ veže poprečno elastično pero s koeficijentom elastičnosti $\kappa > 0$,



Slika 9: Robinov uvjet

onda imamo uvjet

$$q(0) - \kappa u(0) = 0.$$

(Analogan uvjet na kraju $x = l$ glasi $q(l) = -\kappa u(l)$). Pomoću zakona ponašanja (12) dobivamo uvjet

$$u'(0) - \beta u(0) = 0,$$

gdje je $\beta = \dfrac{\kappa}{a(0)}$; taj uvjet zove se *Robinov*.
Svi navedeni uvjeti mogu se zapisati u obliku

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = c,$$

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = d,$$

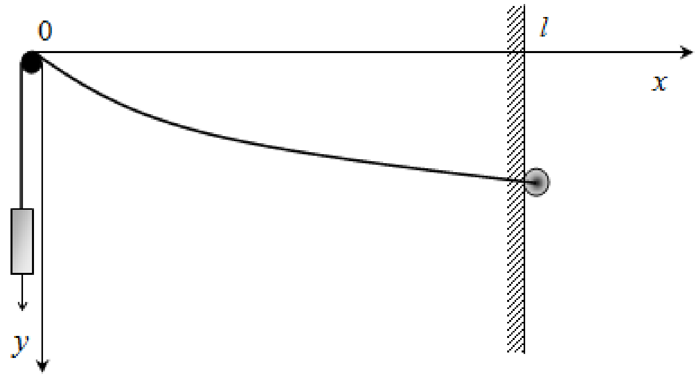
gdje su α, β, γ, δ, c i d zadani brojevi koji zadovoljavaju nejednakosti

$$\alpha, \beta \geq 0, \qquad \alpha + \beta > 0,$$

$$\gamma, \delta \geq 0, \qquad \gamma + \delta > 0.$$

Ovi rubni uvjeti su linearni, pa je i rubna zadaća linearna. Ako je $c, d = 0$, onda kažemo da su rubni uvjeti homogeni, a u suprotnom nehomogeni.

Zadatak 2.1 (vidi [3, Primjer 3.2.]). *Homogena teška žica učvršćena je na kraju $x = 0$ i napeta pomoću utega mase $M > 0$, dok je desni kraj, $x = l$ slobodan. Odredite ravnotežni položaj žice.*



Slika 10: Žica sa slobodnim krajem

Rješenje. Napetost je $a(x) = Mg$, a linijska sila je težina, pa je $f(x) = -\rho g$, gdje je g djelovanje sila teže, a ρ gustoća žice. Zbog homogenosti linijska gustoća je konstanta. Onda jednadžba ravnoteže (18) glasi:

$$Mgu''(x) - \rho g = 0, \quad \text{tj.} \quad u''(x) = \frac{\rho}{M},$$

dobivamo sljedeće kad ju integriramo po varijabli x

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\rho}{M} x + C_1, \\ u(x) &= \frac{\rho}{2M} x^2 + C_1 x + C_2, \end{aligned}$$

gdje su C_1, C_2 proizvoljne konstante. Iz rubnih uvjeta

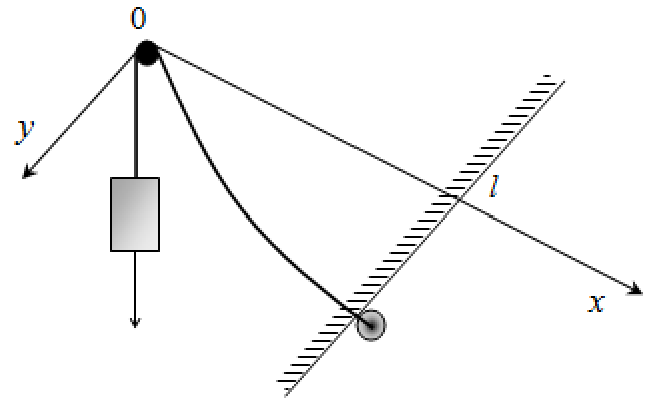
$$u(0) = u'(l) = 0,$$

nalazimo $C_1 = \dfrac{\rho l}{M}$ i $C_2 = 0$, pa dobivamo

$$u(x) = \frac{\rho}{2M} x(x - 2l).$$

$\square$

Zadatak 2.2 (vidi [1, Zadatak 2.1.3.]). *Teška homogena žica linijske gustoće ρ, napeta je koso utegom mase $M > 0$ na kraju $x = 0$. Odredite ravnotežni položaj žice ako je drugi kraj $(x = l)$ slobodan.*



Slika 11: Žica napeta koso

Rješenje. $\vec{f}(x) = f_x(x)\vec{i} + f_y(x)\vec{j}$, gledamo kut φ između osi x i žice napete utegom na kraju $x = 0$. odatle slijedi

$$f_x(x) = \rho\, g \cos\varphi,$$
$$f(x) = f_y(y) = \rho\, g \sin\varphi.$$

Prema

$$a(x) = a(0) - \int_0^x f_x(\xi) d\xi$$

napetost je

$$a(x) = Mg + (l - x)\rho\, g \cos\varphi.$$

Uvrštavajući dobiveni $a(x)$ u jednadžbu ravnoteže (18) dobivamo novu jednadžbu ravnoteže koja glasi

$$((Mg + (l - x)\,\rho\, g \cos\varphi)\, u'(x))' = -\rho\, g \sin\varphi.$$

Iz prethodne jednadžbe i rubnih uvjeta $u(0) = u'(l) = 0$ slijedi

$$u'(x) = \frac{\rho\, g \sin\varphi\,(l - x)}{Mg + (l - x)\,\rho\, g \cos\varphi},$$

odnosno

$$u(x) = \int_0^x \frac{\rho\, g \sin\varphi\,(l - x)}{Mg + (l - x)\,\rho\, g \cos\varphi} dx = x\, \tan\varphi + \frac{M \sin\varphi}{\rho \cos^2\varphi} \ln\left(1 - \frac{x\, \cos\varphi}{M + l\, g \cos\varphi}\right).$$

□

Ovakvi tipovi zadataka rješavaju se na jednostavan način, ali u praksi se gotovo uvijek susrećemo sa zahtjevnijim zadacima. Postupak rješavanja takvih zadataka pokazat ćemo sljedećim poglavljima.

3 Princip superpozicije

Kao što smo već naveli, jednadžba ravnoteže

$$(a(x)\ u'(x))' - b(x)u(x) + f(x) = 0,$$

je *linearna* diferencijalna jednadžba drugog reda koja može biti *homogena* ili *nehomogena*. Linearna je jer za nju vrijedi *princip superpozicije*, a leme koje ćemo sada iskazati i dokazati nazivaju se zajedničkim imenom baš tako, princip superpozicije.

Definirajmo prvo što je superpozicija i prisjetimo se definicije linearne nezavisnosti odnosno linearne zavisnosti funkcija.

Definicija 3.1 (vidi [5])**.** *Ako realne funkcije $u_1, u_2, ..., u_n$ imaju isto područje definicije i ako su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ realni brojevi, onda se funkcija*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n$$

zove linearna kombinacija ili superpozicija funkcija $u_1, u_2, ..., u_n$, a brojevi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ su koeficijenti te linearne kombinacije.

Definicija 3.2 (vidi [5])**.** *Kažemo da su realne funkcije $u_1, u_2, ..., u_n$ linearno zavisne na intervalu (a, b) ako postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ne svi jednaki 0, takvi da vrijedi*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Ako jednakost vrijedi samo za $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, kažemo da su funkcije $u_1, u_2, ..., u_n$ linearno nezavisne na intervalu (a, b).

Definicija 3.3. *Skup dvaju linearno nezavisnih rješenja linearne homogene diferencijalne jednadžbe zove se fundamentalan skup rješenja.*

Lema 3.4 (vidi [1, Lema 4.1.])**.** *Proizvoljna superpozicija rješenja homogene jednadžbe*

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) = 0.$$

također je rješenje te jednadžbe.

Dokaz. Neka su u_1 i u_2 rješenja jednadžbe, odnosno vrijedi

$$(a(x)u_1'(x))' - b(x)u_1(x) = 0,$$
$$(a(x)u_2'(x))' - b(x)u_2(x) = 0.$$

Kad to raspišemo dobivamo da za rješenje u_1 vrijedi

$$a(x)'u_1'(x) + a(x)u_1''(x) - b(x)u_1(x) = 0, \tag{22}$$

a za u_2

$$a(x)'u_2'(x) + a(x)u_2''(x) - b(x)u_2(x) = 0. \tag{23}$$

Pokažimo da je i linerana kombinacija

$$u = C_1u_1 + C_2u_2$$

rješenje te jednadžbe, gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.
Kad u uvrstimo u homogenu jednadžbu i raspišemo kao prethodne dvije, dobivamo

$$\begin{aligned}
(a(x)(C_1u_1(x) + C_2u_2(x))')' - b(x)(C_1u_1(x) + C_2u_2(x)) &= \\
a(x)(C_1u_1'(x) + C_2u_2'(x))' - b(x)(C_1u_1(x) + C_2u_2(x)) &= \\
a'(x)(C_1u_1'(x) + C_2u_2'(x)) + a(x)(C_1u_1''(x) + C_2u_2''(x)) - b(x)(C_1u_1(x) + C_2u_2(x)) &= \\
C_1(a(x)'u_1'(x) + a(x)u_1''(x) - b(x)u_1(x)) + C_2(a(x)'u_2'(x) + a(x)u_2''(x) - b(x)u_2(x)) &= 0,
\end{aligned}$$

gdje smo zadnju jednakost dobili uvrštavanjem (22) i (23). Time je pokazano da je u rješenje jednadžbe.

□

Lema 3.5 (vidi [1, Lema 4.2.]). *Proizvoljna superpozicija funkcija koje zadovoljavaju homogeni rubni uvjet*

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = 0,$$

odnosno

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = 0$$

također zadovoljava taj uvjet.

Dokaz. Neka su u_1 i u_2 funkcije koje zadovoljavaju rubne uvjete, to jest za u_1 vrijedi

$$\alpha\, u_1'(0) - \beta\, u_1(0) = 0, \tag{24}$$
$$\gamma\, u_1'(l) + \delta\, u_1(l) = 0, \tag{25}$$

a za u_2

$$\alpha\, u_2'(0) - \beta\, u_2(0) = 0, \tag{26}$$
$$\gamma\, u_2'(l) + \delta\, u_2(l) = 0. \tag{27}$$

Pokažimo da i funkcija

$$u = C_1u_1 + C_2u_2$$

zadovoljava te uvjete, gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.
Uvrštavajući funkciju u u prvi rubni uvjet slijedi da je

$$\begin{aligned}
\alpha\,(C_1u_1(x) + C_2u_2(x))'(0) - \beta\,(C_1u_1(x) + C_2u_2(x))(0) &= \\
\alpha\,(C_1u_1'(x) + C_2u_2'(x))(0) - \beta\,(C_1u_1(x) + C_2u_2(x))(0) &= \\
C_1(\alpha\, u_1'(0) - \beta\, u_1(0)) + C_2(\alpha\, u_2'(0) - \beta\, u_2(0)) &= 0,
\end{aligned}$$

a zatim u drugi rubni uvjet, dobivamo

$$\gamma\,(C_1u_1(x)+C_2u_2(x))'(l)+\delta\,(C_1u_1(x)+C_2u_2(x))(l)=$$

$$\gamma\,(C_1u_1'(x)+C_2u_2'(x))(l)+\delta\,(C_1u_1(x)+C_2u_2(x))(l)=$$

$$C_1(\gamma\,u_1'(l)+\delta\,u_1(l))+C_2(\gamma\,u_2'(l)+\delta\,u_2(l))=0,$$

gdje je zadnja jednakost za prvi uvjet dobivena uvrštavanjem (24) i (26), a za drugi uvrštavanjem (25) i (27). Time je pokazano da je u rješenje jednadžbe.

□

Taj princip pokazuje da su rubni uvjeti iz leme (3.5) i jednadžba ravnoteže (18) linearni, odnosno rubni problem je linearan. Općenitiji oblik principa superpozicije daje sljedeća lema.

Lema 3.6 (vidi [1, Lema 4.3.]). *Ako su funkcije u_k, $k=1,2,...,n$ rješenje rubnog problema*

$$(a(x)u_k(x)')'-b(x)u_k(x)+f_k(x)=0,$$

$$\alpha\,u_k'(0)-\beta\,u_k(0)=c_k(x),$$

$$\gamma\,u_k'(l)+\delta\,u_k(l)=d_k(x),$$

onda je superpozicija

$$u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+...+\lambda_nu_n$$

s proizvoljnim koeficijentima $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ rješenje problema

$$-(a(x)u'(x))'+b(x)u(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kf_k(x)$$

$$\alpha\,u'(0)-\beta\,u(0)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kc_k(x),$$

$$\gamma\,u'(l)+\delta\,u(l)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kd_k(x).$$

Dokaz ove leme je analogan dokazima prethodne dvije leme.
Iskoristimo princip superpozicije za određivanje *općeg rješenja* jednadžbe

$$(a(x)\,u'(x))'-b(x)u(x)+f(x)=0.$$

Ako su u_1 i u_2 rješenja jednadžbi

$$(a(x)u_1'(x)))'-b(x)u_1(x)+f_1(x)=0,$$

$$(a(x)u_2'(x)))'-b(x)u_2(x)+f_2(x)=0,$$

onda je njihova linearna kombinacija

$$u=C_1u_1+C_2u_2,$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljni brojevi, rješenje jednadžbe

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) + C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = 0.$$

Ako su funkcije u_1 i u_2 rješenja homogene jednadžbe

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) = 0, \tag{28}$$

a u_p neko ("partikularno") rješenje nehomogene jednadžbe (18) i ako su C_1 i C_2 bilo koje konstante, onda je rješenje jednadžbe ravnoteže i funkcija

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + u_p.$$

Takvu funkciju nazivamo *općim rješenjem.*

U slučaju kad su rješenja u_1 i u_2 linearno nezavisna, onda se svako rješenje jednadžbe (18) može prikazati kao

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + u_p,$$

gdje su konstante C_1 i C_2 jednoznačno određene funkcijom u.

Wronskijan

Spomenut ćemo još jednu funkciju koju dobivamo ako su $u_1(x)$ i $u_2(x)$ rješenja homogene jednadžbe (28), a glasi ovako:

$$W(u_1(x), u_2(x), x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x).$$

Funkcija se zove Wronskijan tih dvaju rješenja. Wronskijan linearno zavisnih rješenja svuda iščezava i obratno, a ako je svuda jednak nuli, rješenja su linearno zavisna.

3.1 Rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda s konstantnim koeficijentima

Ovisno o konstantnim funkcijama $a, b \in \mathbb{R}$, te o slobodnom članu $f(x)$ odredit ćemo skup rješenja linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$(a\, u'(x))' - b\, u(x) + f(x) = 0.$$

Postupak rješavanja takve jednadžbe se sastoji od dva dijela. Najprije pronalazimo homogeno, zatim partikularno rješenje, a njihova suma daje opće rješenje, odnosno

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x).$$

1. *Homogeno rješenje*

   Promatramo jednadžbu
$$(a\,u'(x))' - b\,u(x) = 0, \tag{29}$$
   gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.
   Toj jednadžbi pridružujemo njenu karakterističnu jednadžbu s nepoznanicom λ,
$$\lambda^2 - b = 0.$$
   Fundamentalan skup rješenja jednadžbe (29) nalazimo u ovisnosti o korjenima λ_1, λ_2 karakteristične jednadžbe na sljedeći način:

   (a) Ako je $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, fundamentalan skup rješenja čine
$$u_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad u_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$
   [Vidi dokaz, [5] str.19]

   (b) Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, imamo
$$u_1(x) = e^{\lambda x}, \quad u_2(x) = xe^{\lambda x}.$$
   (c) Ako je $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, imamo
$$u_1(x) = e^{ax}\cos(bx), \quad u_2(x) = e^{ax}\sin(bx).$$
   Opće rješenje homogene jednadžbe je superpozicija svih baznih rješenja, odnosno
$$u_H(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

2. *Partikularno rješenje*

   Promatramo jednadžbu
$$-(a\,u'(x))' + b\,u(x) = f(x).$$
   Za pronalazak partikularnog rješenja koristimo dvije metode: metodu varijacije konstanti i metodu neodređenih koeficijenata.

   (a) *Metoda varijacije konstanti*
   Neka je dana jednadžba
$$-(a\,u'(x))' + b\,u(x) = f(x)$$
   i njena pripadna homogena jednadžba $(a\,u'(x))' - b\,u(x) = 0$, te neka je rješenje homogene jednadžbe dano sa
$$u_H(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x).$$
   Tada rješenje nehomogene linerne jednadžbe možemo tražiti u obliku
$$u(x) = C_1(x) u_1(x) + C_2(x) u_2(x).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu pokazuje se da konstante $C_1(x)$ i $C_2(x)$ zadovoljavaju sustav

$$\begin{aligned} C_1'(x)u_1(x) + C_2'(x)u_2(x) &= 0, \\ C_1'(x)u_1'(x) + C_2'(x)u_2'(x) &= f(x), \end{aligned}$$

iz kojeg odredimo te konstante.

(b) *Metoda neodređenih koeficijenata*
Ukoliko je $f(x)$ oblika

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)),$$

gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi m-tog, odnosno n-tog stupnja s realnim koeficijentima.
Tada partikularno rješenje tražimo u obliku

$$u_P(x) = x^r e^{\alpha x}(P_l(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)),$$

gdje je r kratnost nultočke $\lambda = \alpha + \beta i$, $l = \max\{m, n\}$, a $P_l(x)$ i $Q_l(x)$ nepoznati polinomi l-tog stupnja.

Sada znamo odrediti opće rješenje.

4 Jedinstvenost rješenja

Kod promatranja slučaja kad je koeficijent elastičnosti jednak $0, (b(x) = 0)$ te kad je različit od 0, $(b(x) \neq 0)$, ćemo za jednadžbu ravnoteže postavljati homogene rubne uvjete $(c = d = 0)$. Bitno je spomenuti da time ne smanjujemo općenitost razmatranja, jer se nehomogeni uvjeti mogu lako reducirati na homogene, pomoću principa superpozicije koji nam omogućuje taj jednostavan postupak; pokazat ćemo kako. Neka je $u(x)$ rješenje rubnog problema

$$(a(x)\, u'(x))' - b(x)\, u(x) + f(x) = 0, \tag{31}$$

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = c, \tag{32}$$

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = d. \tag{33}$$

Neka je $w(x)$ neka funkcija koja zadovoljava uvjete (32) i (33). Zbog linearnosti rubnog problema funkcija $u_1(x) = u(x) - w(x)$ zadovoljava jednadžbu

$$(a(x)\, u_1'(x))' - b(x)\, u_1(x) + f_1(x) = 0$$

i homogene rubne uvjete

$$\alpha\, u_1'(0) - \beta\, u_1(0) = c,$$
$$\gamma\, u_1'(l) + \delta\, u_1(l) = d,$$

gdje je $f_1(x) = f(x) + (a(x)\, w'(x))' - b(x)\, w(x)$. Ako odredimo $u_1(x)$, onda znamo da je $u(x) = u_1(x) + w(x)$. Funkciju $w(x)$ možemo izabrati na različite načine, ali najjednostavnije je uzeti linearnu funkciju

$$w(x) = \nu x + \xi. \tag{34}$$

Uvrštavanjem (34) u (32) i (33), za koeficijente ν i ξ dobivamo linearni sustav

$$\alpha\nu - \beta\xi = 0, \tag{35}$$

$$(\gamma + \delta l)\, \nu + \delta\xi = 0. \tag{36}$$

Zbog

$$\alpha, \beta \geq 0, \qquad \alpha + \beta > 0,$$
$$\gamma, \delta \geq 0, \qquad \gamma + \delta > 0.$$

determinanta tog sustava je pozitivna;

$$\Delta = \alpha\delta + \beta\gamma + l\beta\delta.$$

Dobivamo

$$\nu = \frac{c\delta + d\beta}{\Delta}, \quad \xi = \frac{d\alpha - c\,(\gamma + l\delta)}{\Delta}.$$

4.1 Slučaj $b = 0$

Ako je $b(x) = 0$, rubni problem

$$(a(x)\,u'(x))' + f(x) = 0, \tag{37}$$
$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = c, \tag{38}$$
$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = d, \tag{39}$$

rješava se formulom i u općem slučaju. Pretpostavimo da su rubni uvjeti homogeni ($c = d = 0$). Neka je $u(x)$ rješenje problema. Iz (37) slijedi

$$u'(x) = -\frac{1}{a(x)} \int_0^x f(\eta)\, d\eta + \frac{C_1}{a(x)}, \tag{40}$$

odnosno funkcija

$$u(x) = -\int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + C_1 \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)} + C_2, \tag{41}$$

je *opće rješenje* jednadžbe (37), gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.
Kad to uvrstimo u homogene rubne uvjete (38) i (39) dobivamo linearni sustav:

$$\frac{\alpha}{a(0)}\, C_1 - \beta\, C_2 = 0, \tag{42}$$

$$\left(\frac{\gamma}{a(l)} + \delta \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \right) C_1 + \delta\, C_2 = \frac{\gamma}{a(l)} \int_0^l f(\xi)\, d(\xi) + \delta \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^l a(\eta)\, d(\eta), \tag{43}$$

za nepoznanice C_1 i C_2. Determinanta sustava je

$$\Delta = \frac{1}{a(0)} \alpha\delta + \frac{1}{a(l)} \beta\gamma + \beta\delta \int_0^l \frac{d\xi}{a(\xi)}.$$

Razlikujemo dva slučaja:

(i) $\beta + \delta > 0$

Tada je $\Delta > 0$, pa sustav ima jedinstveno rješenje. Rubni problem ima jedinstveno rješenje dano formulom (41), a rješenje sustava je (C_1, C_2).

(ii) $\beta = \delta = 0$

Tada je $\Delta = 0$, pa sustav ili nema rješenje ili rješenje nije jedinstveno. Rubni uvjeti su $\alpha u'(0) = \gamma u'(l) = 0$, tj, radi se o slučaju kad su oba kraja slobodna.

Zbog $\alpha > 0$ iz (42) slijedi $\dfrac{\alpha}{a(0)} C_1 = 0$, tj. $C_1 = 0$, a dodatno još kad iskoristimo $\gamma > 0$ iz (43) dobivamo

$$\int_0^l f(x)\, dx = 0. \tag{44}$$

U suprotnom, ako je zadovoljen uvjet (44), onda je rješenje određeno do na aditivnu konstantu C_2,

$$u(x) = -\int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + C_2. \tag{45}$$

Imamo ovaj zaključak: u slučaju (ii) rubni problem (37)-(39) ima rješenje ako i samo ako je zadovoljen uvjet (44); u tom slučaju rješenja ima beskonačno mnogo i ona su dana formulom (45), odnosno rješenje je određeno do na aditivnu konstanu. Budući su u tom slučaju poprečne kontakte sile na krajevima jednake nuli ($\vec{q}(l) = \vec{q}(0) = 0$), uvjet (44) znači da je ukupna (poprečna) sila koja djeluje na žicu jednaka nuli ($\vec{q}(l) - \vec{q}(0) = 0$), bez tog uvjeta nema ravnoteže. Ako je taj uvjet ispunjen, ravnotežni položaj je određen do na *kruti pomak* cijele žice; zato proizvoljnost konstante C_2 nema fizikalno značenje.

Pri izvodu jednadžbe ravnoteže pretpostavili smo malu deformaciju. Pokazat ćemo da je dobiveno rješenje (41) u skladu s našom pretpostavkom. Zbog jednostavnosti ćemo se ograničiti na ovakve rubne uvjete:

$$u(0) \;=\; u'(l) \;=\; 0.$$

Tada dobivamo

$$u'(x) = \frac{1}{a(x)} \int_x^l f(\xi)\, d\xi.$$

Neka je $\;a_1 = \min\limits_{x\in[0,l]} a(x)$, pa imamo

$$|u'(x)| \;\le\; \frac{1}{a(x)} \int_x^l |f(\xi)|\, d\xi \;\le\; \frac{1}{a(x)} \int_0^l |f(\xi)|\, d\xi \;\le\; \frac{l}{a_1} \max_{x\in[0,l]} |f(x)|.$$

Prema tome, ako je vanjska sila dovoljno mala (preciznije: $l \cdot \max|f(x)| \ll a_1$), ravnotežni progib zadovoljava uvjet $|u'(x)| \ll 1$, $\forall x \in (0,l)$, tj. deformacija je mala. To svojstvo rubnog problema naziva se *korektnost*.

Zadatak 4.1 (vidi [1, Zadatak 5.1.1.]). *Napišite rješenje problema*

$$(a(x)\, u'(x))' + f(x) = 0$$

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = 0$$

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = 0$$

u slučaju $\alpha \;=\; \delta \;=\; 0$.

Rješenje. Iz linearnog sustava koji čine jednadžbe (42) i (43) dobivamo $C_1 = \int\limits_0^l f(\eta)\, d\eta$ i $C_2 = 0$, koje uvrštavamo u (41), slijedi

$$u(x) = -\int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + \int_0^l f(\eta)\, d\eta \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)}$$

□

4.2 Slučaj $b \neq 0$

Ako je $b(x) \neq 0$, rješenje rubnog problema

$$-(a(x)\, u'(x))' + b(x)\, u(x) = f(x), \tag{46}$$

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = 0, \tag{47}$$

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = 0, \tag{48}$$

općenito se ne može zapisati formulom (kao kod slučaja $b(x) = 0$), ali nam sljedeći teorem govori da ima jedinstveno rješenje.

Teorem 4.2 (vidi [2, Teorem 2.1.])**.** *Ako je* $b \neq 0$, *rubni problem* (46) - (48) *ima najviše jedno rješenje.*

Dokaz. Neka su $u_1(x)$ i $u_2(x)$ rješenja i $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$. Zbog linearnosti funkcija $u(x)$ zadovoljana uvjete

$$(a(x)\, u'(x))' - b(x)\, u(x) = 0, \tag{49}$$

$$\alpha\, u'(0) - \beta\, u(0) = 0, \tag{50}$$

$$\gamma\, u'(l) + \delta\, u(l) = 0. \tag{51}$$

Pomnožimo li jednadžbu (49) sa $u(x)$ i integriramo od 0 do l, dobivamo

$$-\int_0^l (a(x)u'(x))'u(x)\, dx + \int_0^l b(x)u^2(x)\, dx = 0$$

ili, nakon parcijalne integracije u prvom članu lijeve strane,

$$\int_0^l (a(x)u'(x)^{\,2} + b(x)u^2(x))\, dx + a(0)u'(0)u(0) - a(l)u'(l)u(l) = 0. \tag{52}$$

Razlikujemo četiri slučaja:

(i) $\beta, \gamma > 0$

Izračunamo li $u(0)$ iz (50) i $u'(l)$ iz (51), kad ih uvrstimo u (52), dobivamo

$$\int_0^l (a(x)u'(x)^2 + b(x)u^2(x))\,dx + \frac{\alpha}{\beta}\,a(0)u'^2(0) + \frac{\delta}{\gamma}\,a(l)u^2(l) = 0. \tag{53}$$

Svi sumandi u (53) su nenegativni, pa je svaki od njih jednak nuli:

$$\int_0^l a(x)u'(x)^2 dx = 0, \tag{54}$$

$$\int_0^l b(x)u^2(x)\,dx = 0, \tag{55}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\,a(0)u'^2(0) = 0, \tag{56}$$

$$\frac{\delta}{\gamma}\,a(l)u^2(l) = 0. \tag{57}$$

Iz (54) slijedi $u'(x) = 0$, tj. $u(x) = \text{const.}$ Iz (50) slijedi $u(0) = 0$, a iz $u(x) = \text{const.}$ slijedi da je $u(x) = 0$, tj. $u_1(x) = u_2(x)$.

(ii) $\beta, \delta > 0$

(iii) $\alpha, \delta > 0$

Ova dva slučaja analiziraju se na isti način kao prethodni.

(iv) $\beta = \delta = 0$

Tada je $u'(0) = u'(l) = 0$. Iz (52) slijedi (54) i (55), iz (50) slijedi $u = \text{const.}$, a iz (55) dobivamo

$$u^2(x)\int_0^l b\,dx = 0. \tag{58}$$

Kako je po pretpostavci $b(x) \geq 0$ i $b(x) \not\equiv 0$, $b(x)$ je pozitivno barem na nekom intervalu, pa je

$$\int_0^l b(x)\,dx > 0. \tag{59}$$

Iz (58) i (59) dobivamo $u(x) = 0$, tj. $u_1(x) = u_2(x)$.

□

Zadatak 4.3. *Homogena teška žica mase $m = 4$ i duljine $l = 2$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 12$ na lijevom kraju. Žica se nalazi u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti $b(x) = 4$. Odredite ravnotežni položaj žice ako je njezin drugi kraj pričvršćen. (g djelovanje sila teže, zbog jednostavnosti uzimamo $g = 10m/s^2$)*

Rješenje.

$$a(x) = M \cdot g = 12 \cdot 10 = 120,$$

$$f(x) = -\rho \cdot g = -\frac{m}{l} \cdot g = -\frac{4}{2} \cdot 10 = -20,$$

$$b(x) = 4,$$

kada dobivene vrijednosti uvrstimo u jednadžbu ravnoteže

$$(a(x)u'(x))' - b(x)\, u(x) + f(x) = 0,$$

dobijemo sljedeće

$$120u''(x) - 4u(x) = 20$$

odnosno

$$u''(x) - \frac{1}{30}u(x) = 6.$$

Označimo homogeno rješenje s $u_H(x)$ i izračunamo

$$\lambda^2 - \frac{1}{30} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Dobili smo dva jednostruka realna rješenja, pa rješenje homogene jednadžbe izgleda ovako:

$$u_H(x) = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{30}}x} + C_2 \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{30}}x},$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.
Za partikularno rješenje uzmemo $u_P(x) = A$ (gdje je A neka konstanta) i deriviramo ga dva puta,

$$u_P'(x) \;=\; u_P''(x) \;=\; 0.$$

Uvrštavajući ga u početnu jednadžbu ravnoteže, dobijemo da je $A = -5$. Sada dolazimo do jednadžbe

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x) = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{30}}x} + C_2 \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{30}}x} - 5.$$

Da bi došli do konačnog rješenja moramo još iskoristiti rubne uvjete:

$$u(0) \;=\; u(2) \;=\; 0,$$

slijedi da je

$$C_1 = 5 - C_2, \qquad C_2 = \frac{5 \cdot (1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{30}}})}{e^{\frac{2}{\sqrt{30}}} - e^{-\frac{2}{\sqrt{30}}}}.$$

Sada samo C_1 i C_2 uvrstimo u $u(x)$ i dobili smo ravnotežni položaj žice.

□

5 Slučaj kad koeficijenti nisu glatki

5.1 Uvjeti transmisije

U našim razmatranjima upotrebljavali smo postupke diferencijalnog i integralnog računa, pa smo morali pretpostaviti da funkcije $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ i $u(x)$ posjeduju "dovoljnu glatkoću", tj da su u jednadžbi ravnoteže (18) neprekidne. U tom pogledu diferencijalni i integralni oblik ravnoteže nisu potpuno jednaki. Promotrimo prvo integralni oblik

$$a(x_2)\,u'(x_2) - a(x_1)\,u'(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (f(\xi) - b(\xi)u(\xi))\,d\xi = 0,$$

jer on stavlja slabije zahtjeve na navedene funkcije. Za funkcije $a(x)$ i $u(x)$ smo pretpostavili da imaju neprekidnu prvu derivaciju, a za funkcije $b(x)$ i $f(x)$ da su neprekidne; najjednostavnije je uzeti takve pretpostavke. Iz integralnog oblika ravnoteže slijedi da funkcija $a(x)\,u'(x)$ ima neprekidnu prvu derivaciju, odnosno funkcija $u(x)$ ima neprekidnu drugu derivaciju ($u''(x)$), te zadovoljava diferencijalni oblik

$$(a(x)\,u'(x))' - b(x)u(x) + f(x) = 0.$$

Međutim, u praksi se susrećemo sa slučajevima koji nisu obuhvaćeni ovim pretpostavkama.

Sada ćemo promotriti jedan bitan slučaj kod kojeg neka od funkcija $a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$ i $f(x)$ u točki $x_0 \in (0, l)$ ima konačan skok (prekid 1.vrste). Iz integralnog oblika zakona ravnoteže za $x_1 = 0$, $x_2 = x$ slijedi

$$a(x)\,u'(x) = a(0)\,u'(0) - \int_{x_1}^{x_2} (f(\xi) - b(\xi)u(\xi))\,d\xi.$$

Funkcija $a(x)\,u'(x)$ je neprekidna svugdje, odnosno neprekidna je na intervalu $(0, x_0)$ (lijevo od točke x_0) i na intervalu (x_0, l) (desno od točke x_0), te i u točki x_0 (iako funkcije $f(x)$ i $b(x)$ u njoj možda imaju skokove). Iz prethodno navedenog dolazimo do zaključka da je funkcija $u'(x)$ nužno neprekidna u točki x_0. Međutim, kako promatramo slučaj u kojem neka od funkcija $a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$ i $f(x)$ ima skok u točki x_0, slijedi da funkcija $u(x)$ nema drugu derivaciju ($u''(x)$); ima skok. Dakle u točki x_0 nije zadovoljena jednadžba ravnoteže, ali su zadovoljeni uvjeti neprekidnosti progiba i njegove derivacije.

Uvjeti izgledaju ovako:

$$u(x_0 + 0) - u(x_0 - 0) = 0, \tag{60}$$

$$u'(x)\,(x_0 + 0) - u'(x)\,(x_0 - 0) = 0, \tag{61}$$

a zovu se *uvjeti transmisije*. Problem transmisije uključuje i rubne uvjete na krajevima $x = 0$ i $x = l$.

Zadatak 5.1 (vidi [3, Primjer 3.5.]). *Teška žica sastavljena je od dvaju homogenih komada* $(0, x_0)$ *i* (x_0, l) *(s linijskim gustoćama mase* ρ_1 *i* ρ_2*,* $\rho_1 \neq \rho_2$*) i napeta horizontalno utegom mase* $M > 0$ *na kraju* $x = 0$ *(učvršćena), te je na kraju* $x = l$ *također učvršćena. Treba odrediti ravnotežni položaj žice.*

Rješenje. Gustoća vanjske linijske sile ima u točki x_0 skok i dana je formulom

$$f(x) = \begin{cases} -\rho_1 g, & x \in (0, x_0) \\ -\rho_2 g, & x \in (x_0, l). \end{cases}$$

Iz svega zadanog, nakon uvrštavanja jednadžba ravnoteže (18) glasi:

$$\begin{aligned} gMu''(x) &= \rho_1 g \quad \text{za} \quad x \in (0, x_0), \\ gMu''(x) &= \rho_2 g \quad \text{za} \quad x \in (x_0, l). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir rubne uvjete $u(0) = u(l) = 0$, dobivamo za $x \in (0, x_0)$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\rho_1}{M} x + C, \\ u(x) &= \frac{\rho_1}{2M} x^2 + Cx, \end{aligned}$$

a za $x \in (x_0, l)$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\rho_2}{M} x + D, \\ u(x) &= \frac{\rho_2}{2M} (x^2 - l^2) + D\,(x - l). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir uvjete transmisije dobivamo za konstante C i D sustav

$$\begin{aligned} C - D &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{M} x_0, \\ x_0\, C + (l - x_0)\, D &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{2M} x_0^2 - \frac{\rho_2}{2M} l^2. \end{aligned}$$

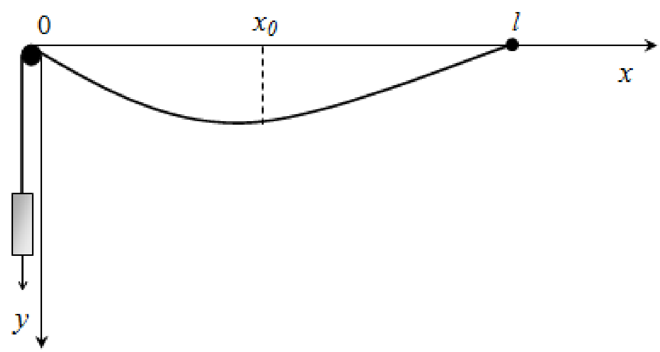
Iz toga nalazimo

$$\begin{aligned} C &= -\frac{\rho_2 l}{2M} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2M\, l} x_0^2 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{M} x_0, \\ D &= -\frac{\rho_2 l}{2M} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2M\, l} x_0^2, \end{aligned}$$

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho_1}{2M} x^2 - (\dfrac{\rho_2 l}{2M} - \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{2M\, l} x_0^2 + \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{M} x_0), & x \in (0, x_0), \\ \dfrac{\rho_2}{2M} (x^2 - l^2) - (\dfrac{\rho_2 l}{2M} - \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{2M\, l} x_0^2)(x - l), & x \in (x_0, l). \end{cases}$$

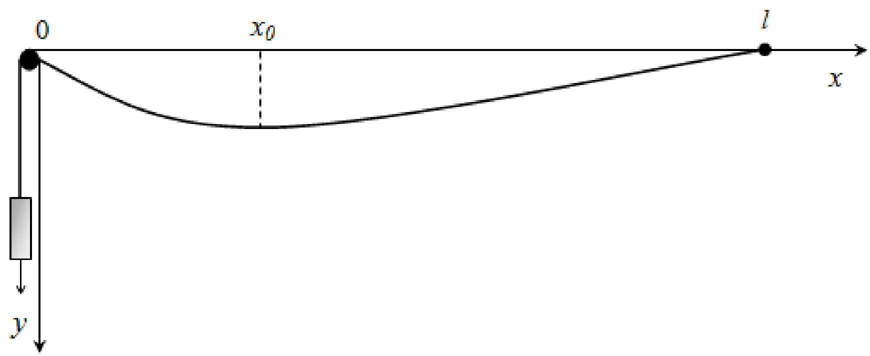
Uzmemo li od prethodno navedenog limes za $\rho_2 = 0$,a zatim za $l \to \infty$, dobivamo

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho_1 x}{2M}(x - 2x_0), & x \in [0, x_0], \\ -\dfrac{\rho_1 x_0^2}{2M}, & x > x_0, \end{cases}.$$



Slika 12: Žica napeta s utegom na jednom kraju te učvršćena i na drugom kraju

Kad usporedimo dobiveni rezultat s rješenjem iz zadatka (2.1). Zaključujemo da se Neumannov uvjet (npr. $u'(l) = 0$) može realizirati i tako da se zadana žica veže za dodatnu dugačku žicu zanemarive mase.



Slika 13: Žica na koju je vezana dodatna žica

$\square$

5.2 Koncentrirano djelovanje

Do sada smo vanjsku silu na žicu opisivali gustoćom $f(x)$ tako da je ukupna vanjska sila na interval (x_1, x_2) bila jednaka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx. \tag{62}$$

Stavimo li

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi,$$

odnosno

$$f(x) = F'(x),$$

onda ukupnu vanjsku silu na (x_1, x_2) možemo izraziti kao razliku

$$F(x_2) - F(x_1). \tag{63}$$

Na važnom primjeru *koncentrirane* sile, koja nema gustoću, pokazat ćemo da je formula (63) općenitija nego (62).

Kažemo da funkcija $F(x)$ opisuje silu (djelovanje) intenziteta $F_0 \neq 0$, koncentriranu u točki $x_0 \in (0, l)$, ako je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ F_0, & x \geq x_0. \end{cases} \tag{64}$$

Prema (63), ukupna sila na žicu jednaka je

$$F(l) - F(0) = F_0.$$

S druge strane, uzmemo li bilo koji interval (x_1, x_2), takav da je udaljenost točke x_0 od (x_1, x_2) veća od nule, dobivamo

$$F(x_2) - F(x_1) = 0.$$

Time se opravdava naziv *koncentrirana* sila. Pokazat ćemo da ta sila nema gustoću. Zaista, $f(x)$ postoji svuda osim za $x = x_0$, te vrijedi

$$f(x) = 0, \quad x \neq x_0.$$

Pretpostavimo li sad da je $f(x) = F'(x)$, moralo bi vrijediti

$$\int_0^l f(x)\,dx = F_0 \neq 0,$$

a to je kontradikcija, jer je integral funkcije koja iščezava svuda osim u jednoj točki jednak 0. Iz toga slijedi da pretpostavljena funkcija $f(x)$ (gustoća), ne postoji.

Primjenimo princip ravnoteže sile na komad (x_1, x_2), uzimajući u obzir da na taj komad, osim kontakte i vanjske elastične sile, djeluje i linijska sila (63).
Dobivamo

$$q(x_2) - q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} b(x)u(x)\, d(x) + F(x_2) - F(x_1) = 0.$$

Zbog (64) iz toga slijedi

$$q(x_2) - q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} b(x)u(x)\, d(x) = 0, \quad x_0 \notin (x_1, x_2), \tag{65}$$

$$q(x_2) - q(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} b(x)u(x)\, d(x) + F_0 = 0, \quad x_0 \in (x_1, x_2), \tag{66}$$

Derivirajući (65) po x_2 i stavljajući $x_2 = x$, dobivamo

$$q'(x) - b(x)u(x) = 0, \quad x \neq x_0.$$

Iz toga i iz zakona ponašanja $q'(x) = a(x)u'(x)$ slijedi

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) = 0, \quad x \neq x_0. \tag{67}$$

U točki x_0 progib je neprekidan:

$$u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0). \tag{68}$$

Uzmemo li u u (66) limes kad $x_1, x_2 \to x_0$, dobivamo

$$q(x_0 - 0) - q(x_0 + 0) = F_0,$$

ili

$$u'(x_0 - 0) - u'(x_0 + 0) = \frac{F_0}{a(x_0)}. \tag{69}$$

Vidimo da u točki koncentracije vanjskoga linearnog djelovanja derivacija ravnotežnog stanja (progiba) ima konačan skok (prekid 1.vrste). Prema tome, u slučaju *koncentriranog djelovanja* za ravnotežno stanje vrijede jednadžbe (67),(68) i (69). Odgovarajući rubni problem uključuje i rubne uvjete

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = c, \quad \gamma u'(l) + \delta u(l) = d.$$

Primjer 5.2 (vidi [1, Primjer 8.1.]). *Neka je $a(x) = 1$, $b(x) = 0$. Odredimo ravnotežno stanje ako je vanjska sila $F_0 = 1$ koncentrirana u točki $x_0 \in (0, l)$ i ako je lijevi kraj žice učvršćen, a desni slobodan.*

Imamo uvjete:

$$u''(x) = 0, \quad x < x_0, \tag{70}$$

$$u(0) = 0, \tag{71}$$

$$u''(x) = 0, \quad x > x_0, \tag{72}$$

$$u'(l) = 0, \tag{73}$$

$$u(x_0 - 0) - u(x_0 + 0) = 0, \tag{74}$$

$$u'(x_0 - 0) - u'(x_0 + 0) = 1. \tag{75}$$

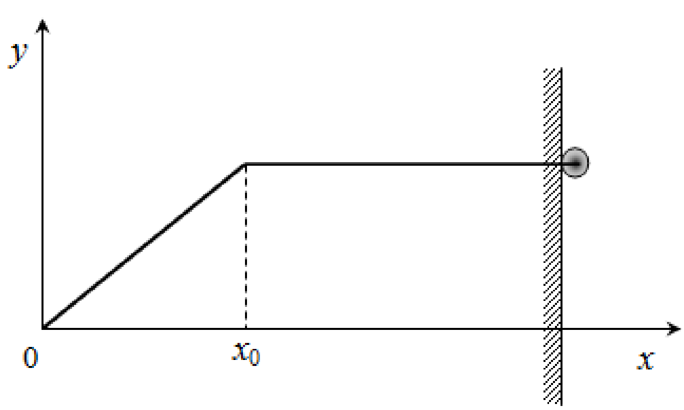
Iz (70) i (73) dobivamo

$$u(x) = Ax, \quad x < x_0, \tag{76}$$

$$u(x) = Bx, \quad x > x_0, \tag{77}$$

gdje su A, B konstante. Sada iz (73) i (74) dobivamo $A = 1$, $B = x_0$, pa imamo

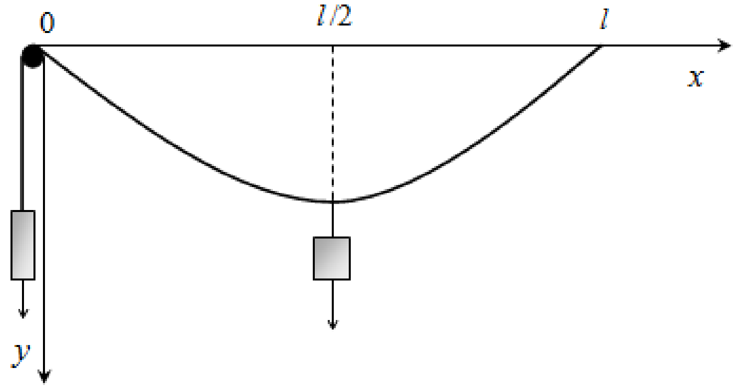
$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq x_0 \\ x_0, & x_0 \leq x < l. \end{cases}$$



Slika 14: Vanjska sila koncentrirana u točki x_0

□

Zadatak 5.3 (vidi [2, Zadatak 3.3.]). *Teška žica sastavljena je od dvaju homogenih komada jednake duljine s linijskim gustoćama mase ρ_1 i ρ_2, $\rho_1 \neq \rho_2$ i napeta horizontalno utegom mase $M > 0$ na kraju $x = 0$. Odredite ravnotežni položaj žice ako je na sredini opterećena utegom mase $M_1 > 0$ i oba kraja su učvršćena.*



Slika 15: Žica dodatno opterećena utegom mase M_1 u sredini

Rješenje. Jednadžba ravnoteže glasi ovako:

$$u''(x) = -\frac{\rho_1}{M}, \quad x < \frac{l}{2},$$

$$u''(x) = -\frac{\rho_2}{M}, \quad x > \frac{l}{2}.$$

Iz ovoga i rubnih uvjeta $u(0) = u(l) = 0$ dobivamo

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{\rho_1}{2M}x^2 + Cx, & x < \frac{l}{2}, \\ -\frac{\rho_2}{2M}(x^2 - l^2) + D(x - l), & x > \frac{l}{2}, \end{cases}$$

gdje su C, D proizvoljne konstante. Iz (68) i (69) za C i D dobivamo sustav

$$C + D = \frac{l}{4M}(\rho_1 + 3\rho_2),$$

$$C - D = \frac{M_1}{M} + \frac{l}{2M}(\rho_1 - \rho_2),$$

odakle nalazimo konstante C i D,

$$C = \frac{M_1}{M} + \frac{l}{8M}(3\rho_1 + \rho_2),$$

$$D = \frac{M_1}{M} + \frac{l}{8M}(-\rho_1 + 5\rho_2).$$

□

Literatura

[1] I.Aganović, K.Veselić, Jednadžbe matematičke fizike, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[2] I.Aganović, K.Veselić, Linearne diferencijalne jednadžbe, Uvod u rubne uvjete, Element, Zagreb, 1997.

[3] I.Aganović, K.Veselić, Matematičke metode i modeli, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[4] S. Suljagić, Matematika 3, Građevinski fakultet u Zagrebu, Zagreb, 2000. http://master.grad.hr/nastava/matematika/mat3/index.html

[5] https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/MAT2[1].pdf

[6] http://www.grad.hr/vera/htmlnotebooksnastava3/zica/zicavalnajed.html

[7] http://www.enciklopedija.hr