Diskretne nejednakosti

Mandarić, Josipa

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Josipa Mandarić

Diskretne nejednakosti

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Josipa Mandarić

Diskretne nejednakosti

Završni rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2017.

Sadržaj

Sažetak: Cilj ovog završnog rada je dati pregled nekih diskretnih nejednakosti za realne i kompleksne brojeve. To uključuje nejednakosti između osnovnih sredina, Cauchyevu nejednakost i neka njezina poopćenja i profinjenja, Hölderovu nejednakost te nejednakost Minkowskog. Nadalje, rad obuhvaća Abelovu i Čebiševljevu nejednakost te Grüssovu i Biernacki nejednakost. Na kraju, donosi kratki pregled nejednakosti za konveksne funkcije kao što su Jensenova i Petrovićeva nejednakost.

Ključne riječi: Nejednakosti između osnovnih sredina, Cauchyeva nejednakost, Hölderova nejednakost, Čebiševljeva nejednakost, Abelova nejednakost, Güssova nejednakost, Jensenova nejednakost, Petrovićeva nejednakost.

Discrete Inequalities

Abstract: The main purpose of this paper is to provide an overview of some discrete inequalities for real and complex numbers. These include: inequalities between elementary means, the Cauchy inequality as well as some refinements and generalisations of Cauchy inequality. Furthermore, the paper encompasses the Abel inequality, Čebyšev's inequality,the Grüss inequality and the Biernacki inequality. Lastly, it brings brief survey of inequalities for convex functions such as Jensen's inequality and the Petrović inequality.

Key words: inequalities between elementary means, Cauchy inequality, Hölder's inequality, Čebyšev's inequality, the Abel inequality, the Grüss inequality, Jensen's inequality, the Petrović inequality.

Uvod

U ovom završnom radu bavimo se proučavanjem nekih diskretnih nejednakosti za realne i kompleksne brojeve. Tako ćemo u prvom poglavlju vidjeti što su osnovne sredine i proučit ćemo nejednakosti između osnovnih sredina.
Nadalje, u drugom poglavlju ćemo najprije proučiti Cauchyevu nejednakost, nju ćemo iskazati i dokazati. Nakon toga ćemo proučavati neka njezina poopćenja i profinjenja kao što su Wagnerova, de Bruijnova , Daykin-Eliezer-Carlitzova, Casselsova nejednakost i nejednakost Pólye i Szegöe. U zadnjem dijelu drugog poglavlja proučit ćemo Hölderovu nejednakost te nejednakost Minkowskog.
U trećem poglavlju bavit ćemo se s Abelovom nejednakosti, nakon nje s Čebiševljevom nejednakosti. Proučit ćemo i Grüssovu nejednakosti te Biernacki nejednakost.
U četvrtom poglavlju definirat ćemo konveksnu funkciju i izreći njezinu karakterizaciju te ćemo proučavati nejednakosti vezane uz konveksnu funkciju kao što su Jensenova i Petrovićeva nejednakost.

1. Nejednakosti između sredina

Tijekom svog svakodnevnog života često se susrećemo s prosjekom, računamo prosjek ocjena, potrošnje, plaća itd. Prosjek je samo drugi, odonosno popularniji naziv za aritmentičku sredinu. No, aritmetička sredina, iako možda najpoznatija, nije jedina sredina koju možemo računati.
Dakle, za početak definirajmo osnovne sredine.

Definicija 1.1. *Neka je $a = (a_1, ..., a_n)$ dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada je harmonijska sredina $H_n(a)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ definirana izrazom*

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}};$$

geometrijska sredina $G_n(a)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ definirana izrazom

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n};$$

aritmetička sredina $A_n(a)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ definirana izrazom

$$A_n(a) = \frac{a_1 + ... + a_n}{n};$$

kvadratna sredina $K_n(a)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ definirana izrazom

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$

Teorem 1.1. *Za bilo koja dva pozitivna broja a i b vrijedi*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \tag{1}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b$.

Dokaz. Za bilo koja dva pozitivna broja a i b očito vrijedi nejednakost

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \tag{$*$}$$

pri čemu jednakost vrijedi akko $a = b$. Kvadriranjem i daljnjim transformacijama $(*)$ dobivamo

$$\begin{aligned} a - 2\sqrt{ab} + b &\geq 0, \\ a + b &\geq 2\sqrt{ab}, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

□

Teorem 1.2. *Za bilo koja dva pozitivna broja a i b vrijedi*

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \tag{2}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b$.

Dokaz. Ako nejednakost (1) zapišemo za brojeve $\frac{1}{a}$ i $\frac{1}{b}$ dobivamo

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

što je ekvivalentno nejednakosti (2), jednakost vrijedi akko $a = b$. □

Teorem 1.3. *Za bilo koja dva pozitivna broja a i b vrijedi*

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \tag{3}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b$.

Dokaz. Kako za a i b očito vrijedi

$$(a-b)^2 \geq 0,$$
$$a^2+b^2 \geq 2ab.$$

Tada imamo

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \leq 2(a^2+b^2).$$

Kako su a i b pozitivni brojevi slijedi

$$a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Time smo pokazali (3). Budući da jednakost u $(a-b)^2 \geq 0$ vrijedi akko $a = b$ slijedi da jednakost u (3) vrijedi akko $a = b$. □

Napomena 1.1. *Gore navedene nejednakosti* (1), (2) *i* (3) *se u literaturi se nazivaju redom nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dva broja, nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine dva broja te nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine dva broja. Te nejednakosti ćemo skraćeno zvati AG nejednakost za* (1), *GH nejednakost za* (2) *te AK nejednakost za* (3).

Slijedeći teorem daje nam poopćenje prethodnih nejedakosti za n pozitivnih brojeva.

Teorem 1.4. *Neka je $a = (a_1, ..., a_n)$ proizvoljna pozitivna n-torka realnih brojeva. Tada vrijedi*

$$K_n(a) \geq A_n(a) \geq G_n(a) \geq H_n(a). \tag{4}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = ... = a_n$.

Dokaz. Dokažimo najprije drugi dio nejedankosti, tj. AG nejednakost. Za dokaz ćemo koristiti metodu matematičke indukcije.
Za $n = 2$ nejednakost $A_n(a) \geq G_n(a)$ postaje $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ što smo pokazali da vrijedi u Teoremu 1.1.
Pretpostavimo da AG nejednakost vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$A_k \geq G_k \tag{5}$$

Tada je na osnovu (1)

$$A \equiv \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \geq (a_{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{1/k} \equiv G. \tag{6}$$

Kako je

$$\begin{aligned} A_k + A &= \frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \\ &= \frac{(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} = 2A_{k+1}, \end{aligned}$$

vodeći računa o (5) i (6), imamo

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{2}(A_k + A) \geq (A_k A)^{1/2} \geq (G_k G)^{1/2} \\ &= (G_k^k G^k)^{\frac{1}{2k}} = (G_k^k a_{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}} \\ &= (G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$A_{k+1}^{2k} \geq G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1},$$

odnosno

$$A_{k+1} \geq G_{k+1}.$$

Time je induktivni dokaz završen.
Dokažimo da jednakost u $A_n(a) \geq G_n(a)$ nastupa akko je $a_1 = ... = a_n$.
Ako je $a_1 = ... = a_n$, tada imamo jednakost u AG nejednakosti. Pretpostavimo da su barem dva broja od $a_1, ..., a_n$ različiti, na primjer, neka je $a_1 \neq a_2$. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + ... + a_n}{n} \\ &\geq \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 a_3 \cdots a_n \right]^{\frac{1}{n}} \\ &> (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

jer je

$$\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}, \text{ za } a_1 \neq a_2.$$

Ovime smo dokazali AG nejedankost.
Dokažimo sada GH nejednakost $G_n(a) \geq H_n(a)$. AG nejedankost za brojeve $\frac{1}{a_1}, ..., \frac{1}{a_n}$ daje

$$\left(\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}}{n}. \tag{7}$$

Ovdje znak jednakosti vrijedi akko $\frac{1}{a_1} = ... = \frac{1}{a_n}$, odnosno akko $a_1 = ... = a_n$. Iz (7) slijedi $G_n(a) \geq H_n(a)$. Preostalo nam je još da pokažemo AK nejednakost $A_n(a) \leq K_n(a)$.
Krenimo od identiteta

$$(a_1 + ... + a_n)^2 = a_1^2 + ... + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n).$$

Kako znamo da vrijedi $a^2 + b^2 \geq 2ab$ za svaka dva realna broja a i b (slijedi iz $(a-b)^2 \geq 0$), tada je $2a_ia_k \leq a_i^2 + a_k^2$ za $i, k = 1, ..., n,\ i \neq k$. Sada imamo nejednakost

$$(a_1 + ... + a_n)^2 = a_1^2 + ... + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n) \leq n(a_1^2 + ... + a_n^2) \tag{8}$$

koja vrijedi za sve realne brojeve $a_1, ..., a_n$. Kako su svi $a_1, ..., a_n$ pozitivni, iz (8) slijedi

$$a_1 + ... + a_n \leq \left(n(a_1^2 + ... + a_n^2)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

tj. AK nejednakost. $\square$

Na sličan način definiramo težinske sredine.

Definicija 1.2. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $w = (w_1, ..., w_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i neka je*

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Tada je
harmonijska sredina $H_n(a; w)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ s težinama $w_1, ..., w_n$ definirana izrazom

$$H_n(a; w) = \frac{W_n}{\frac{w_1}{a_1} + ... + \frac{w_n}{a_n}};$$

geometrijska sredina $G_n(a; w)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ s težinama $w_1, ..., w_n$ definirana izrazom

$$G_n(a; w) = \sqrt[W_n]{a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n}};$$

aritmetička sredina $A_n(a; w)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ s težinama $w_1, ..., w_n$ definirana izrazom

$$A_n(a; w) = \frac{w_1a_1 + ... + w_na_n}{W_n};$$

kvadratna sredina $K_n(a; w)$ brojeva $a_1, ..., a_n$ s težinama $w_1, ..., w_n$ definirana izrazom

$$K_n(a; w) = \sqrt{\frac{w_1a_1^2 + ... + w_na_n^2}{W_n}}.$$

Primjetimo da smo se s ovim definicijama susretali i u prethodnom tekstu samo što su težine bile cijeli brojevi. Kao što smo pokazali u Teoremu 1.4 isto se može pokazati i za osnovne težinske sredine tj.

$$H_n(a; w) \leq G_n(a; w) \leq A_n(a; w) \leq K_n(a; w), \tag{10}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = ... = a_n$ (dokaz ove nejednakosti možete pronaći u [4, str. 14.-15.]).
U sljedećem teoremu $G_n(a; w)$ i $A_n(a; w)$ su definirane kao u Definiciji 1.2 pri čemu su težine realni brojevi (dokaz nejednakosti možete pronaći u [4, str. 15.-16.]).

Teorem 1.5 (Suprotna AG nejednakost). *Neka je $a = (a_1, ..., a_n)$ pozitivna n-torka i neka je $w = (w_1, ..., w_n)$ n-torka realnih brojeva takva da vrijedi*

$$w_1 > 0,\ w_i < 0 \text{ za } i = 1, ..., n,\ W_n > 0.$$

Tada je

$$A_n(a; w) \leq G_n(a; w). \tag{11}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = ... = a_n$.

2. Cauchyeva nejednakost i nejednakosti povezane s njom

2.1. Cauchyeva nejednakost

Sljedeća nejednakost u literaturi poznata je kao *Cauchyeva*, *Cauchy-Schwarzova* ili *Cauchy-Bunyakovsky-Schwarzova* nejednakost. Skraćeno je označavamo sa CSB nejednakost.

Teorem 2.1. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke realnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{12}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su n-torke a i b proporcionalne.

Dokaz. Promotrimo polinom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiran s

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t - b_i)^2.$$

Očito da je za svaki $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Kako je $P(t) \geq 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, diskriminanta polinoma P ne može biti pozitivna, to jest

$$0 \geq \frac{1}{4}\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

odakle slijedi tražena nejednakost (12). □

Nejednakost (12) je prvi dokazao A.L. Cauchy[1] 1821. godine. Integralni oblik nejednakosti je dokazao V.Y. Bunyakovsky[2] 1859. godine, a odgovarajuću verziju ove nejednakosti za unitarne prostore dokazao je H.A. Schwarz[3] i uglavnom je poznata kao *Schwarzova* nejednakost.
U nastavku slijedi *CSB* nejednakost za kompleksne brojeve čiji dokaz možete pronaći u [2, str. 6].

Teorem 2.2. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke kompleksnih brojeva. Tada*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \tag{13}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su n-torke a i $\bar{b}$ proporcionalne.

[1] Augustin Louis Cauchy (1789.-1857.), francuski matematičar
[2] Viktor Bunyakovsky (1804.-1889.), ruski matematičar
[3] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843.-1921.), njemački matematičar

2.2. Wagnerova nejednakost

Sljedeće poopćenje *CSB* nejednakosti (12), koje se može (s dokazom) naći u [3, str. 85], u literaturi je poznato kao *Wagnerova* nejednakost.

Teorem 2.3. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke realnih brojeva. Ako je $0 \leq x \leq 1$, onda*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x \sum_{1\leq i\neq j\leq n} a_i b_j\right)^2 \leq \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j\right] \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{1\leq i<j\leq n} b_i b_j\right]. \tag{14}$$

Dokaz. Za svaki $x \in [0,1]$, promotrimo sljedeći polinom drugog stupnja u y:

$$\begin{aligned}
P(y) &:= (1-x)\sum_{k=1}^{n}(a_k y - b_k)^2 + x\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k y - b_k)\right]^2 \qquad (**)\\
&= (1-x)\left[y^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2y\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]\\
&\quad + x\left[y^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - 2y\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2\right]\\
&= \left[(1-x)\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + x\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2\right] y^2\\
&\quad - 2y\left[(1-x)\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k\right]\\
&\quad + (1-x)\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + x\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2\\
&= \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + x\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]\right\} y^2\\
&\quad - 2y\left[\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)\right]\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + x\left[\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right].
\end{aligned}$$

Budući da

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{1\leq i\neq j\leq n} a_i b_j,$$

i

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 2 \sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j,$$

imamo

$$\begin{aligned} P(y) = &\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j\right) y^2 \\ &- 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x \sum_{1\le i\neq j\le n} a_i b_j\right) y + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j. \end{aligned}$$

Iz $(**)$ slijedi da je $P(y) \ge 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$. Dakle, diskriminanta polinoma P ne može biti pozitivna, odnosno

$$\begin{aligned} 0 \ge \frac{1}{4}\Delta = &\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x \sum_{1\le i\neq j\le n} a_i b_j\right)^2 \\ &- \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j\right). \end{aligned}$$

Ovime je dokaz dovršen. □

Napomena 2.1. *Ako je $x = 0$, tada iz* (14) *dobivamo CSB nejednakost* (12).

U nastavku slijedi Wagnerova nejednakost za kompleksne brojeve (dokaz možete pronaći u [2, str. 24.-26.]).

Teorem 2.4. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke kompleksnih brojeva. Za svaki $x \in [0, 1]$ imamo*

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(a_k \bar{b}_k) + x \sum_{1\le i\neq j\le n} \mathrm{Re}(a_i \bar{b}_j)\right)^2 \\ &\le \left[\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + 2x \sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{Re}(a_i \bar{a}_j)\right]\left[\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 + 2x \sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{Re}(b_i \bar{b}_j)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Napomena 2.2. *Ako je $x = 0$ dobivamo CSB nejednakost*

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(a_k \bar{b}_k)\right]^2 \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2.$$

2.3. De Bruijnova nejednakost

Sljedeće profinjenje *CSB* nejednakosti je dokazao N.G. de Bruijn[4] 1960. godine.

Teorem 2.5. *Ako je $a = (a_1, ..., a_n)$ n-torka realnih brojeva i $z = (z_1, ..., z_n)$ n-torka kompleksnih brojeva, tada je*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right|^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left[\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right|\right]. \tag{16}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako za $k = 1, ..., n$ je $a_k = \mathrm{Re}(tz_k)$, gdje je t kompleksan broj takav da je $t^2 \sum_{k=1}^{n} z_k^2$ realan i nenegativn broj.

Dokaz. Istovremenom rotacijom svih z_k oko ishodišta dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z_k \geq 0.$$

Ova rotacija ne utječe na module

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right|, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right| \quad \text{i} \quad |z_k| \quad \text{za} \quad k = 1, ..., n.$$

Dakle, dovoljno je dokazati nejednakost (16) za slučaj gdje je $\sum_{k=1}^{n} a_k z_k \geq 0$.
Ako stavimo $z_k := x_k + iy_k,\ k = 1, ..., n$, onda, koristeći *CSB* nejednakost (12) imamo

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2. \tag{17}$$

Kako je

$$2x_k^2 = |z_k|^2 + Re(z_k^2)$$

za svaki $k = 1, ..., n$ i iz (17) slijedi da je

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right|^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left[\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} Re(z_k^2)\right]. \tag{18}$$

Kako je

$$\sum_{k=1}^{n} Re(z_k^2) = Re\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right) \leq \left|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right|, \tag{19}$$

dobivamo nejednakost (16) iz (19). □

[4]Nicolaas Govert de Bruijn (1918.-2012.), nizozemski matematičar

2.4. Daykin-Eliezer-Carlitzova nejednakost

Sljedeća nejednakost je Daykin-Eliezer-Carlitzova varijanta CSB nejednakosti za funkcije.

Teorem 2.6. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ dvije n-torke pozitivnih brojeva i $f, g : [0, \infty) \times [0, \infty) \to (0, \infty)$. Nejednakost*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} f(a_i, b_i) \sum_{i=1}^{n} g(a_i, b_i) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tag{20}$$

vrijedi ako i samo ako

$$f(a, b)g(a, b) = a^2 b^2, \tag{21}$$

$$f(ka, kb) = k^2 f(a, b), \tag{22}$$

i

$$\frac{bf(a, 1)}{af(b, 1)} + \frac{af(b, 1)}{bf(a, 1)} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \tag{23}$$

za svaki $a, b, k > 0$.

Dokaz. Nužnost: Doista, za $n = 1$, nejednakost (20) postaje

$$(ab)^2 \leq f(a, b)g(a, b) \leq a^2 b^2, \quad a, b > 0$$

što daje (21).
Za $n = 2$ u (20) koristeći (21) imamo

$$\begin{aligned} 2a_1 b_1 a_2 b_2 &\leq f(a_1, b_1)g(a_2, b_2) + f(a_2, b_2)g(a_1, b_1) \\ &\leq a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2, \end{aligned} \tag{24}$$

za svaki $a_i, b_i > 0$, $i = 1, ..., n$.
Eliminiranjem g iz (24), imamo

$$2 \leq \frac{f(a_1, b_1)}{f(a_2, b_2)} \cdot \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} + \frac{f(a_2, b_2)}{f(a_1, b_1)} \cdot \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \leq \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} + \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} \tag{25}$$

za svaki $a_i, b_i > 0, i = 1, 2$.
Supstitucijom u (25) a za a_1, b za b_1, ka za a_2 i kb za b_2 za $k > 0$, imamo

$$2 \leq \frac{f(a, b)}{f(ka, kb)} k^2 + \frac{f(ka, kb)}{f(a, b)} k^{-2} \leq 2.$$

Ovo vrijedi ako $k^2 f(a, b)/f(ka, kb) = 1$, što je uvjet (22).
Koristeći (25) za $a_1 = a, b_1 = 1, a_2 = b$ i $b_2 = 1$ imamo

$$2 \leq \frac{\frac{f(a,1)}{a}}{\frac{f(b,1)}{b}} + \frac{\frac{f(b,1)}{b}}{\frac{f(a,1)}{a}} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \tag{26}$$

Prva nejednakost u (26) je uvijek zadovoljena dok je druga nejednakost ekvivalentna (23). *Dovoljnost*: Pretpostavimo da (21) vrijedi. Tada nejednakost (20) možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_i a_j b_j &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} [f(a_i, b_i) g(a_j, b_j) + f(a_j, b_j) g(a_i, b_i)] \\ &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2). \end{aligned}$$

Stoga je dovoljno pokazati

$$\begin{aligned} 2a_i b_i a_j b_j &\leq f(a_i, b_i) g(a_j, b_j) + f(a_j, b_j) g(a_i, b_i) \\ &\leq a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2. \end{aligned} \tag{27}$$

Pretpostavimo da je (23) istinita. Tada je (26) valjana i korištenjem (25) za $a = \frac{a_i}{b_i}, b = \frac{a_i}{b_i}$ te korištenjem (23) dobivamo

$$2 \leq \frac{f(a_i, b_i)}{f(a_j, b_j)} \cdot \frac{a_j b_j}{a_i b_i} + \frac{f(a_j, b_j)}{f(a_i, b_i)} \cdot \frac{a_i b_i}{a_j b_j} \leq \frac{a_i b_j}{a_j b_i} + \frac{a_j b_i}{a_i b_j}. \tag{28}$$

Množenjem prethodnih nejednakosti (28) s $a_i b_i a_j b_j > 0, \ i, j = 1, ..., n$ i korištenjem (21) dobivamo (27). □

2.5. Casselsova nejednakost

Teorem 2.7. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke pozitivnih realnih brojeva i $w = (w_1, ..., w_n)$ n-torka nenegativnih realnih brojeva. Pretpostavimo da je*

$$m = \min_i \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} \ i \ M = \max_i \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\}, \ i \in \{1, ..., n\}. \tag{29}$$

Tada imamo nejednakost

$$\frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i^2 \sum_{i=1}^n w_i b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n w_i a_i b_i\right)^2} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}. \tag{30}$$

Jednakost vrijedi u (30) *kada je $w_1 = \frac{1}{a_1 b_1}$, $w_n = \frac{1}{a_n b_n}$, $w_2 = ... = w_{n-1} = 0$, $m = \frac{a_n}{b_1}$ i $M = \frac{a_1}{b_n}$.*

Dokaz. Casselsov[5] dokaz možete pronaći u [1, str. 37.]. Mi ćemo ovu nejednakost dokazati koristeći *težišnu metodu.* Ako w_i supstituiramo sa $\frac{u_i}{b_i^2}$ tada lijeva strana nejednakosti (30) se može izraziti kao

$$\frac{N}{D^2}$$

[5] John William Scott Cassels (1922.-2015.), britanski matematičar

gdje je $N = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^2 u_i$ i $D = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i}\right) u_i$ pri čemu bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. No tada točka s koordinatama (D, N) mora ležati unutar konveksnog zatvarača[6] n točaka $\left(\frac{a_i}{b_i}, \frac{a_i^2}{b_i^2}\right)$. Stoga je vrijednost $\frac{N}{D^2}$ na točkama parabole jednaka jedan. Ako je $m = \min_i \left\{\frac{a_i}{b_i}\right\}$ i $M = \max_i \left\{\frac{a_i}{b_i}\right\}$ tada minimum mora ležati na spojnici točaka (m, m^2) i (M, M^2). Daljni račun nas dovodi do (30). □

2.6. Nejednakost Pólye i Szegöe

Prije same nejednakosti ćemo iskazati te dokazati neke nejednakosti potrebne za dokazivanje nejednakosti Pólye[7] i Szegöe[8] .

Teorem 2.8 (Rennieova nejednakost). *Neka je $w = (w_1, ..., w_n)$ pozitivna n-torka i neka je $a = (a_1, ..., a_n)$ takva n-torka da vrijedi*

$$0 < m \leq a_k \leq M \text{ za } k = 1, ..., n. \tag{31}$$

Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} w_k a_k + mM \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{a_k} \leq (m + M) W_n. \tag{32}$$

Jednakost u (32) vrijedi ako i samo ako postoji skup $I \subset \{1, ..., n\}$ takav da je $a_i = m$ za $i \in I$ i $a_i = M$ za $i \in \{1, ..., n\} \setminus I$.

Teorem 2.9 (Kantorovičeva[9] nejednakost). *Neka je $w = (w_1, ..., w_n)$ pozitivna n-torka i neka je $a = (a_1, ..., a_n)$ takva n-torka da vrijedi (31). Tada je*

$$A_n(a; w) \leq \frac{(M + m)^2}{4mM} H_n(a; w). \tag{33}$$

Jednakost u (33) vrijedi ako i samo ako postoji skup $I \subset \{1, ..., n\}$, takav da je $W_I = \sum_{i \in I} w_i = \frac{W_n}{2}$, $a_i = M$ za $i \in I$, $a_i = m$ za $i \notin I$.

Dokaz. Nejednakosti (32) dodajemo očitu nejednakost

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k \right)^{\frac{1}{2}} - \left(mM \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{a_k} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \geq 0. \tag{34}$$

Tako dobivamo

$$(M + m) W_n \geq 2(mM)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k \right)^{\frac{1}{2}} \left(mM \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{a_k} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

[6] najmanji konveksni skup koji sadrži te točke
[7] George Pólya (1887.-1985.), mađarski matematičar
[8] Gábor Szegő (1895.-1985.), mađarski matematičar
[9] Leonid Kantorovich (1912.-1986.), ruski matematičar i ekonomist

Ova nejednakost ekvivalentna je s (33).
Pretpostavimo da su ispunjeni uvjeti za jednakost u (32). Tada također mora vrijediti jednakost u (34). To daje

$$W_I M + (W_n - W_I)m = W_I m + (W_n - W_I)M$$

to jest

$$W_I = \frac{W_n}{2}.$$

□

Teorem 2.10 (nejednakost Pólye i Szegöe)**.** *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ dvije n-torke realnih brojeva takvih da vrijedi*

$$0 < m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M \ \text{za} \ k = 1, ..., n. \tag{35}$$

Tada imamo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2. \tag{36}$$

Dokaz. Nejednakost (36) slijedi iz Kantorovičeve nejednakosti (33), ako iskoristimo zamjene $a_k \to \frac{a_k}{b_k}$, $w_k \to a_k b_k$, za $k = 1, ..., n$. □

Napomena 2.3. *Pólya i Szegö su dobili analogan rezultat uz uvjet*

$$0 < m_1 \leq a_k \leq M_1, \ 0 < m_2 \leq b_k \leq M_2 \ \text{za} \ k = 1, ..., n.$$

Taj rezultat se lako dobiva iz gornjeg ako koristimo zamjene $m \to \frac{m_1}{M_2}$, $M \to \frac{M_1}{m_2}$.

Primjetimo da nejednakost Pólye i Szegë (36) možemo dobiti iz Casselsove nejednakosti (30) ako nam je $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ u (30).

2.7. Hölderova nejednakost

Teorem 2.11. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n)$ dvije pozitivne n-torke i p, q dva realna broja različita od nule takva da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $p > 1$. Tada imamo*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{37}$$

Za $p < 1$ vrijedi suprotna nejednakost u (37). Jednakost vrijedi ako i samo ako su $a^p = (a_1^p, ..., a_n^p)$ i $b^q = (b_1^q, ..., b_n^q)$ proporcionalne n-torke.

Dokaz. Za $x, y \geq 0$ te za $p > 0$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vrijedi težinska AG nejednakost dva broja

$$x^{\frac{q}{p+q}} y^{\frac{p}{p+q}} \leq \frac{qx + py}{p+q},$$

odnosno

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}, \tag{38}$$

pri čemu jednakost vrijedi akko $x = y$. Ako u (38) uvrstimo

$$x = \frac{a_i^p}{A},\ A = \sum_{i=1}^{n} a_i^p$$

i

$$y = \frac{b_i^q}{B},\ B = \sum_{i=1}^{n} b_i^q.$$

Slijedi

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{B} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Jednakost vrijedi akko $\frac{a_i^p}{A} = \frac{b_i^q}{B}$, odnosno akko su a^p i b^q proporcionalne n-torke. Za $p < 1$ dokaz suprotne nejednakosti u (37) je analogan samo se koristi suprotna AG nejednakost (11). □

U nastavku slijedi Hölderova[10] nejednakost za kompleksne brojeve (dokaz nejednakosti (39) možete pronaći u [4]).

Teorem 2.12. *Ako su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ kompleksne n-torke i $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada je*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{39}$$

2.8. Nejednakost Minkowskog

Teorem 2.13. *Ako su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ dvije pozitivne n-torke i $p > 1$, tada je*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{40}$$

a ako je $p < 1$ $(p \neq 0)$ vrijedi suprotna nejednakost. Jednakost vrijedi u (40) ako i samo ako su a i b proporcionalne n-torke.

Dokaz. Pođimo od identiteta

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1}. \tag{41}$$

[10] Otto Ludwig Hölder (1859.-1937.), njemački matematičar

Neka je q definirano sa $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tj. $q=\frac{p}{p-1}$. Za $p>1$, tada Hölderova nejednakost implicira

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

odakle dobivamo (40). Ako je $p<1$, vrijedi suprotna Hölderova nejednakost, pa time i u (40). Koristeći uvjete za jednakost u Hölderovoj nejednakosti, neposredno dobivamo da jednakost (40) nastupa ako i samo ako su n-torke a i b proporcionalne. $\square$

Sljedeći teorem nam govori o nejednakosti Minkowskog[11] za kompleksne brojeve (dokaz nejednakosti (42) možete pronaći u [4]).

Teorem 2.14. *Ako su $a=(a_1,...,a_n)$ i $b=(b_1,...,b_n)$ kompleksne n-torke i $p>1$, tada je*

$$\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{42}$$

[11]Hermann Minkowski (1864.-1909.), njemački matematičar

3. Čebiševljeva nejednakost i s njom povezane nejednakosti

3.1. Abelova nejednakost

Teorem 3.1. *Neka je $a = (a_1, ..., a_n)$ n-torka realnih brojeva i $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ $k = 1, ..., n$ i neka je $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torka realnih brojeva takva da je $b_1 \geq ... \geq b_n$.*
Ako označimo $m = \min_{1 \leq k \leq n} s_k$ i $M = \max_{1 \leq k \leq n} s_k$, onda je

$$mb_1 \leq a_1 b_1 + ... + a_n b_n \leq M b_1. \tag{43}$$

Dokaz. Koristit ćemo poznati *Abelov*[12] identitet:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + ... + (s_n - s_{n-1}) b_n \\ &= s_1(b_1 - b_2) + ... + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n.\end{aligned}$$

Kako je

$$m(b_1 - b_2) \leq s_1(b_1 - b_2) \leq M(b_1 - b_2)$$

$$....................$$

$$\begin{gathered} m(b_{n-1} - b_n) \leq s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) \leq M(b_{n-1} - b_n) \\ mb_n \leq s_n b_n \leq M b_n \end{gathered}$$

nejednakost (43) dobijemo tako da zbrojimo ove nejednakosti. □

3.2. Čebiševljeva nejednakost

Teorem 3.2. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ dvije n-torke realnih brojeva te $p = (p_1, ..., p_n)$ pozitivna n-torka realnih brojeva.*
i) Ako su n-torke a i b slično uređene, pod čime se misli $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ za $i, j = 1, ..., n$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i. \tag{44}$$

ii) Ako su n-torke a i b takve da je $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0$ za sve $i, j = 1, ..., n$, onda vrijedi obrnuta nejednakost.
Jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = ... = a_n$ ili $b_1 = b_2 = ... = b_n$.

Dokaz. Prvo, pokažimo da vrijedi identitet:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j). \tag{45}$$

Zbog simetrije i i j imamo

[12] Niels Henrik Abel (1802.-1829.), norveški matematičar

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) = 2 \sum_{1 \le i < j \le n} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j (a_i b_i + a_j b_j - a_i b_j - a_j b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} p_j a_j b_j \\
&- \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{j=1}^{n} p_j b_j - \sum_{i=1}^{n} p_i b_i \sum_{j=1}^{n} p_j a_j \\
&= 2 \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i \right]
\end{aligned}$$

što dokazuje jednakost (45). Sada je nejednakost (44) očita preko (45) koristeći $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq (\leq) 0$ *za sve* $i, j = 1, ..., n$. Slučaj jednakosti je očit. Ovime je dokaz završen. □

Nakon što smo dokazali Čebiševljevu[13] nejednakost promotrimo sljedeće. Neka n-torke realnih brojeva $p = (p_1, ..., p_n), a = (a_1, ..., a_n)$ *i* $b = (b_1, ..., b_n)$, promotrimo Čebiševljev funkcional

$$C_n(p; a, b) := P_n \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i b_i \tag{46}$$

gdje je $P_n := \sum_{i=1}^{n} p_i$. Čebišev je dokazao da ako su a i b monotone u istom smislu i ako je je p nenegativan, onda

$$C_n(p; a, b) \geq 0. \tag{47}$$

Za n-torke koje su monotone u suprotnom smislu vrijedi suprotna nejednakost u (47). Nadalje, Hardy[14], Littlewood[15] i Pólya su pokazali ako su a i b slično uređene, tj.

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \text{ za sve } i, j = 1, ..., n, \tag{48}$$

tada nejednakost (47) vrijedi. Ako su a i b suprotno uređene vrijedi suprotna nejednakost u (47). Relaksaciju uvjeta uređenosti je omogućio Biernacki[16], on je pokazao da za nenegativan p, ako su a i b n-torke takve da je

$$\frac{1}{P_k} \sum_{i=1}^{k} p_i a_i \leq \frac{1}{P_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} p_i a_i, \ k = 1, ..., n-1 \tag{49}$$

[13]Pafnuty Chebyshev (1821.-1894.), ruski matematičar
[14]Godfrey Harold Hardy (1877.-1947.), engleski matematičar
[15]John Edensor Littlewood (1885.-1977.), engleski matematičar
[16]Edmund Faustyn Biernacki (1866.-1911.), poljski matematičar

i

$$\frac{1}{P_k}\sum_{i=1}^{k} p_i b_i \leq \frac{1}{P_{k+1}}\sum_{i=1}^{k+1} p_i b_i,\ \ k=1,...,n-1,$$

pri čemu je $P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$,onda je nejednakost (47) za " $\geq$ " istinita. Ako su a i b takve da (49) istinita za " $\geq$ ", onda je (47) istinita za " $\leq$ ". Za realne težine, Mitrinović[17] i Pečarić[18] su pokazali da nejednakost (47) vrijedi ako

$$0 \leq P_k \leq P_n \text{ za } k=1,...,n-1 \tag{50}$$

i a, b su monotone u istom smislu. Sljedeća jednakost je poznata u literaturi kao *Soninov identitet*:

$$C_n(p;a,b) := \sum_{i=1}^{n} p_i \left(P_n a_i - \sum_{j=1}^{n} p_j a_j\right)(b_i-\beta), \tag{51}$$

za svaki realni broj β. Druga poznata jednakost u terminima dvostrukih suma u literaturi je poznata kao *Korkineov identitet*:

$$C_n(p;a,b) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i p_j (a_i-a_j)(b_i-b_j). \tag{52}$$

Tvrdnja 1. *Neka su $p=(p_1,...,p_n), a=(a_1,...,a_n)$ i $b=(b_1,...,b_n)$ n-torke realnih brojeva. Ako definiramo*

$$P_i := \sum_{k=1}^{i} p_k,\ \ \bar{P}_i := P_n - P_i,\quad i=1,...,n-1,$$
$$A_i(p) := \sum_{k=1}^{i} p_k a_k,\ \ \bar{A}_i(p) := A_n(p) - A_i(p),\quad i=1,...,n-1,$$

tada imamo identitet

$$\begin{aligned} C_n(p;a,b) &= \sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} P_i & P_n \\ A_i(p) & A_n(p) \end{vmatrix} \cdot \Delta b_i \qquad (53)\\ &= P_n \sum_{i=1}^{n-1} P_i \left(\frac{A_n(p)}{P_n} - \frac{A_i(p)}{P_i}\right)\cdot \Delta b_i \quad (\textit{ako su } P_n,\ P_i \neq 0,\ i=1,...,n-1)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} P_i \bar{P}_i \left(\frac{\bar{A}_i(p)}{\bar{P}_i} - \frac{A_i(p)}{P_i}\right)\cdot \Delta b_i \quad (\textit{ako su } P_i, \bar{P}_i \neq 0,\ i=1,...,n-1) \end{aligned}$$

gdje je $\Delta b_i := b_{i+1} - b_i$ $(i=1,...,n-1)$.

[17]Dragoslav S. Mitrinović (1908.-1995.), srpski matematičar
[18]Josip Pečarić (1948.-), hrvatski matematičar

Dokaz. Koristimo sljedeću sumaciju:

$$\sum_{l=p}^{q-1} d_l \Delta v_l = d_l v_l|_p^q - \sum_{l=p}^{q-1} v_{l+1} \Delta d_l, \tag{54}$$

gdje su d_l, v_l realni brojevi, a $l = p, ..., q-1 (q > p;\ p,\ q$ su prirodni brojevi) . Ako u (54) odaberemo da je $p = 1,\ q = n,\ d_i = P_i A_n(p) - P_n A_i(p)$ i $v_i = b_i$ za $i = 1, ..., n-1$, onda imamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} (P_i A_n(p) - P_n A_i(p)) \cdot \Delta b_i \\
&= [P_i A_n(p) - P_n A_i(p)] \cdot b_i|_1^n - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta(P_i A_n(p) - P_n A_i(p)) \cdot b_{i+1} \\
&= [P_n A_n(p) - P_n A_n(p)] \cdot b_n - [P_1 A_n(p) - P_n A_1(p)] \cdot b_1 \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} [P_{i+1} A_n(p) - P_n A_{i+1}(p) - P_i A_n(p) + P_n A_i(p)] \cdot b_{i+1} \\
&= P_n p_1 a_1 b_1 - p_1 b_1 A_n(p) - \sum_{i=1}^{n-1} (p_{i+1} A_n(p) - P_n p_{i+1} a_{i+1}) \cdot b_{i+1} \\
&= P_n p_1 a_1 b_1 - p_1 b_1 A_n(p) - A_n(p) \sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1} b_{i+1} + P_n \sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1} a_{i+1} b_{i+1} \\
&= P_n \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i b_i \\
&= C_n(p; a, b),
\end{aligned}$$

što nam daje prvu jednakost u (53). Druga i treća jednakost su očite. □

Prije dokazivanja drugog rezultata, trebamo sljedeću jednakost:

Tvrdnja 2. *Neka su $p = (p_1, ..., p_n)$ i $a = (a_1, ..., a_n)$ n-torke realnih brojeva. Tada imamo sljedeće*

$$\begin{vmatrix} P_i & P_n \\ A_i(p) & A_n(p) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n-1} P_{min\{i,j\}} \bar{P}_{max\{i,j\}} \cdot \Delta a_j, \tag{55}$$

za svaki $i = 1, ..., n-1$.

Dokaz. Za $i = 1, ..., n-1$ definiramo,

$$K(i) := \sum_{j=1}^{n-1} P_{min\{i,j\}} \bar{P}_{max\{i,j\}} \cdot \Delta a_j.$$

Imamo

$$
\begin{aligned}
K(i) &= \sum_{j=1}^{i} P_{min\{i,j\}} \bar{P}_{max\{i,j\}} \cdot \Delta a_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} P_{min\{i,j\}} \bar{P}_{max\{i,j\}} \cdot \Delta a_j \\
&= \sum_{j=1}^{i} P_j \bar{P}_i \Delta a_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} P_i \bar{P}_j \Delta a_j \qquad (56)\\
&= \bar{P}_i \sum_{j=1}^{i} P_j \cdot \Delta a_j + P_i \sum_{j=i+1}^{n-1} \bar{P}_j \cdot \Delta a_j .
\end{aligned}
$$

Koristeći parcijalnu sumaciju imamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i} P_j \cdot \Delta a_j &= P_j \cdot a_j |_1^{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (P_{j+1} - P_j) \cdot a_{j+1} \\
&= P_{i+1} a_{i+1} - p_1 a_1 - \sum_{j=1}^{i} p_{j+1} \cdot a_{j+1} \qquad (57)\\
&= P_{i+1} a_{i+1} - \sum_{j=1}^{i+1} p_j \cdot a_j
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=i+1}^{n-1} \bar{P}_j \cdot \Delta a_j &= \bar{P}_j \cdot a_j |_{i+1}^{n} - \sum_{j=i+1}^{n-1} (\bar{P}_{j+1} - \bar{P}_j) \cdot a_{j+1} \\
&= \bar{P}_n a_n - \bar{P}_{i+1} a_{i+1} - \sum_{j=i+1}^{n-1} (P_n - P_{j+1} - P_n + P_j) \cdot a_{j+1} \qquad (58)\\
&= -\bar{P}_{i+1} a_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{n-1} p_{j+1} \cdot a_{j+1} .
\end{aligned}
$$

Koristeći (57) i (58) iz (56) slijedi

$$
\begin{aligned}
K(i) &= \bar{P}_i\left(P_{i+1}a_{i+1} - \sum_{j=1}^{i+1} p_j \cdot a_j\right) + P_i\left(\sum_{j=i+1}^{n-1} p_{j+1} \cdot a_{j+1} - \bar{P}_{i+1}a_{i+1}\right) \\
&= \bar{P}_i P_{i+1}a_{i+1} - P_i\bar{P}_{i+1}a_{i+1} - \bar{P}_i\sum_{j=1}^{i+1} p_j \cdot a_j + P_i\sum_{j=i+1}^{n-1} p_{j+1} \cdot a_{j+1} \\
&= a_{i+1}((P_n - P_i)P_{i+1} - P_i(P_n - P_{i+1})) + P_i\sum_{j=i+1}^{n-1} p_{j+1} \cdot a_{j+1} - \bar{P}_i\sum_{j=1}^{i+1} p_j \cdot a_j \\
&= P_n p_{i+1}a_{i+1} + P_i\sum_{j=i+1}^{n-1} p_{j+1} \cdot a_{j+1} - \bar{P}_i\sum_{j=1}^{i+1} p_j \cdot a_j \\
&= (P_i + \bar{P}_i)p_{i+1}a_{i+1} + P_i\sum_{j=i+1}^{n-1} p_{j+1} \cdot a_{j+1} - \bar{P}_i\sum_{j=1}^{i+1} p_j \cdot a_j \\
&= P_i\sum_{j=i+1}^{n} p_j \cdot a_j - \bar{P}_i\sum_{j=1}^{i} p_j \cdot a_j \\
&= P_i\bar{A}_i(p) - \bar{P}_i A_i(p) \\
&= \begin{vmatrix} P_i & P_n \\ A_i(p) & A_n(p) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

što dokazuje jednakost. □

Sada smo u stanju iskazati i dokazati sljedeću jednakost za Čebišev funkcional u terminima Δb_i:

Tvrdnja 3. *Uz gore navedene pretpostavke, imamo sljedeću jednakost*

$$C_n(p; a, b) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} P_{min\{i,j\}}\bar{P}_{max\{i,j\}} \cdot \Delta a_j \cdot \Delta b_j. \tag{59}$$

Dokaz je očit i slijedi iz (53) i (55).

3.3. Grüssova nejednakost

Neka je

$$D(a, b; p) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \frac{1}{P_n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i b_i\right),$$

gdje su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke realnih brojeva i $p = (p_1, ..., p_n)$ pozitivna n-torka brojeva. Ako je $p_i = 1$ za $i = 1, ..., n$ pišemo $D(a, b)$.

Teorem 3.3. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke realnih brojeva takve da $m \leq a_i \leq M$ i $k \leq b_i \leq K$ za $i = 1, ..., n$, a $p = (p_1, ..., p_n)$ je pozitina n-torka. Tada je*

$$|D(a, b; p)| \leq \frac{1}{4}(M - m)(K - k). \tag{60}$$

Dokaz. Neka je $F = A_n(a;p)$ i $G = A_n(b;p)$. Primjetimo da je

$$D(a,a;p) = K_n(a;p)^2 - A_n(a;p)^2 \geq 0. \tag{61}$$

S druge strane je

$$D(a,a;p) = (M-F)(F-m) - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}(M-a_i)(a_i-m)p_i,$$

pa vrijedi

$$D(a,a;p) \leq (M-F)(F-m). \tag{62}$$

Lako se može provjeriti da je

$$D(a,b;p) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i-F)(b_i-G), \tag{63}$$

pa koristeći *CSB* nejednakost (12) dobivamo

$$D(a,b;p)^2 \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i-F)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i(b_i-G)^2 = D(a,a;p)D(b,b;p).$$

Na osnovu (61) i (62) vidimo da je

$$D(a,b;p)^2 \leq (M-F)(F-m)(K-G)(G-k). \tag{64}$$

Kako je $4(M-F)(F-m) \leq (M-m)^2$ i $(K-G)(G-k) \leq (K-k)^2$, zaključujemo da (64) implicira (60). $\square$

3.4. Biernacki nejednakost

Teorem 3.4. *Neka su $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ n-torke takve da $m \leq a_i \leq M$ i $k \leq b_i \leq K$ za $i = 1, 2, ..., n$. Tada,*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} bi\right| \leq (M-m)(K-k)C(n), \tag{65}$$

gdje je

$$C(n) = \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]\left(1 - \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\right]\right) \leq \frac{1}{4}, \tag{66}$$

pri čemu je $[\cdot]$ funkcija najveće cijelo. Jednakost se javlja kada je n paran broj.

Dokaz. Započinjemo s jednakošću

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j). \tag{67}$$

Koristeći *CSB* nejednakost za dvostruke sume (12) imamo

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\right| \leq \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_i-b_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{68}$$

Promotrimo da iz (67) slijedi

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i - a_j)^2 := D_n(a) \tag{69}$$

slično se pokaže i za b.
Zapamtimo da je $D_n(\cdot)$ konveksna funkcija varijable $a = (a_1, ..., a_n) \in [m, M]^n$. Doista, ako je $\alpha \in [0, 1]$ i $x, y \in \mathbb{R}^n$, tada

$$\begin{aligned}
D_n(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha x_i + (1-\alpha)y_i - \alpha x_j - (1-\alpha)y_j)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha(x_i - x_j) + (1-\alpha)(y_i - y_j))^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\alpha(x_i - x_j)^2 + (1-\alpha)(y_i - y_j)^2\right] \\
&= \alpha D_n(x) + (1-\alpha)D_n(y).
\end{aligned}$$

Funkcija $D_n(\cdot)$ je neprekidna funkcija koja je definirana na segmentu $[m, M]^n$. Segment je kompaktan skup pa znamo da ona postiže svoj maksimum na rubu. Neka a_i-ova ima β koji su jednaki m i neka $n - \beta$ ima a_i-ova koji su jednaki M. Tada iz (69) slijedi

$$0 \leq D_n^*(\beta) = n[\beta m^2 + (n-\beta)M^2] - (\beta m + (n-\beta)M)^2.$$

Napomenimo da je $D_n^*(\beta)$ kvadratna funkcija od β takva da je $D_n^*(n) = D_n^*(0) = 0$. Stoga je maksimum postignut u $\beta = [\frac{n}{2}]$ i tako je

$$D_n^*\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) = \left[\frac{n}{2}\right]\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)(M-m)^2. \tag{70}$$

Slične korake primjenjujemo i za b. Koristeći (67) i (68) dobivamo željene nejednakosti (65) i (66). Jednakost u (66) se lako pokaže. Ostaje nam još pokazati da nejednakost vrijedi za n neparan. Neka je $n = 2N - 1$, tada

$$\begin{aligned}
C(2N-1) &= \frac{1}{2N-1}\left[N - \frac{1}{2}\right]\left(1 - \frac{\left[N - \frac{1}{2}\right]}{2N-1}\right) \\
&= \frac{N}{2N-1}\left(1 - \frac{N}{2N-1}\right) \\
&= \frac{1}{2-\frac{1}{N}}\left(1 - \frac{1}{2-\frac{1}{N}}\right) < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ovime je dokaz završen. □

4. Nejednakosti vezane uz konveksne funkcije

Prije svega definirajmo što je to konveksna funkcija:

Definicija 4.1. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za sve $x_1, x_2 \in I$ i za svaki $\alpha \in [0,1]$ vrijedi*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Ako za sve $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ i $\alpha \in (0,1)$ vrijedi $<$ kažemo da je funkcija f strogo konveksna na I.

Definicija 4.2. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konkavna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za sve $x_1, x_2 \in I$ i za svaki $\alpha \in [0,1]$ vrijedi*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Ako za sve $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ i $\alpha \in (0,1)$ vrijedi $>$ kažemo da je funkcija f strogo konkavna na I.

Slično možemo definirati i konveksnu funkciju na $\mathbb{R}^n$, tj. na bilo kojem konveksnom skupu[19] koji se nalazi u domeni dane funkcije.

Teorem 4.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno derivabilna na I. Funkcija f je konveksna na I ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$. Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in I$, onda je f stogo konveksna na I.*

4.1. Jensenova nejednakost

Teorem 4.2. *Neka je $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, konveksna na intervalu I. Ako je $x_i \in I$, $p_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$ i $P_n := \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$, tada*

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i). \tag{71}$$

Dokaz. Za dokaz ove nejednakosti ćemo koristiti metodu matematičke indukcije. Za $n = 2$ trebamo dokazati da je

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right) \leq \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)}{p_1 + p_2}, \tag{72}$$

gdje je $x_1, x_2 \in I$, $p_1, p_2 \geq 0$ pri čemu je $p_1 + p_2 > 0$.
Primjetimo da je (72) prema Definiciji 4.1 konveksna za $\alpha = \frac{p_1}{p_1+p_2}$, $x = x_1$ i $y = x_2$.
Pretpostavimo da (71) vrijedi za n i dokažimo da vrijedi za $n+1$, tj. želimo dokazati da je

$$f\left(\frac{1}{P_{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i) \tag{73}$$

[19]Skup $I \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan ako vrijedi $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in I$, za sve $x_1, x_2 \in I$, i $\alpha \in [0,1]$.

za $x_i \in I$, $p_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n+1)$ gdje je $P_{n+1} > 0$. Ako je $p_1 = ... = p_n = 0$, onda je (73) očito. Pretpostavimo da je $P_n > 0$, onda,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{P_{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) &= f\left(\frac{P_n}{P_{n+1}} \cdot \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} x_{n+1}\right) \\ &\leq \frac{P_n}{P_{n+1}} f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} f(x_{n+1}) \end{aligned} \tag{74}$$

što je konveksno za $\alpha = \frac{P_n}{P_{n+1}}$, $x = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ i $y = x_{n+1}$. Koristeći se induktivnom hipotezom imamo,

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{P_{n+1}} f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} f(x_{n+1}) &\leq \frac{P_n}{P_{n+1}} \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} f(x_{n+1}) \\ &= \frac{1}{P_{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i). \end{aligned} \tag{75}$$

sada iz (74) i (75) slijedi (73). □

Ako primjenimo Jensenovu nejednakost (71) na konveksno preslikavanje $f(x) = -\ln(x)$ na $(0, \infty)$ imamo:

$$-\ln\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq -\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i$$

što je ekvivalentno

$$\ln[A_n(x;p)] \geq \ln[G_n(x;p)]. \tag{76}$$

Ako primjenomo (76) za $\frac{1}{x_i}$ umjesto x_i $i = 1, ..., n$ imamo

$$\frac{1}{H_n(x;p)} \geq \frac{1}{G_n(x;p)}. \tag{77}$$

sada iz (76) i (77) dobivamo

$$A_n(x;p) \geq G_n(x;p) \geq H_n(x;p).$$

Napomena 4.1. *Može se pokazati da iz nje slijede nejednakosti kao što su Hölderova nejednakost* (37)*, nejednakost Minkowskog* (40) *te Cauchyeva nejednakost* (12)*. Više o toj temi možete pronaći u [5].*

Sljedeći teorem govori nam o obratu Jensenove nejednakosti.

Teorem 4.3. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, konveksna i derivabilna funkcija na (a, b). Ako je $x_i \in (a, b)$, $p_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$ sa $P_n > 0$, tada imamo nejednakost:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \\ &\leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i f'(x_i) - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \cdot \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i). \end{aligned} \tag{78}$$

Dokaz. Kako je f derivabilna konveksna na (a,b), za svaki $x, y \in (a,b)$ imamo

$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y). \tag{79}$$

Ako u (79) x zamjenimo sa $\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, a y sa x_j $(j = 1, ..., n)$ dobivamo

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - f(x_j) \geq f'(x_j)\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - x_j\right) \tag{80}$$

za svaki $j = 1, ..., n$. Množenjem (80) sa $p_j \geq 0$ i sumiranjem po j od 1 do n, dobivamo

$$P_n f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j) \geq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \sum_{j=1}^{n} p_j f'(x_j) - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j f'(x_j)$$

što je očito ekvivalentno (78). □

4.2. Petrovićeva nejednakost

Teorem 4.4. *Neka je f konveksna funkcija na segmentu $I = [0, a]$. Ako $x_i \in I$ $(i = 1, ..., n)$ i $x_1 + ... + x_n \in I$, onda*

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \leq f(x_1 + \cdots + x_n) + (n-1)f(0). \tag{81}$$

Dokaz. Kako je f konveksna na I, onda za svaki $x, y \in I$ i $p, q > 0$, $p + q > 0$, imamo

$$f\left(\frac{px + qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p+q}. \tag{82}$$

Ako u (82) zamjenimo $p \to x_1, q \to x_2, x \to x_1 + x_2$ i $y \to 0$ $(x_1 + x_2 > 0)$ dobivamo

$$f(x_1) \leq \frac{x_1 f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} f(0). \tag{83}$$

Zamjenom x_1 s x_2 dobivamo

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{x_1}{x_1 + x_2} f(0). \tag{84}$$

Ako zbrojimo (83) i (84) dobivamo

$$f(x_1) + f(x_2) \leq f(x_1 + x_2) + f(0), \tag{85}$$

dakle, (81) je točna za n=2.
Pretpostavimo da vrijedi za još neke n. Tada u (85), imamo

$$\begin{aligned} f(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}) &= f((x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1}) \\ &\geq f(x_1 + \cdots + x_n) + f(x_{n+1}) - f(0) \end{aligned}$$

i indukcijom dobivamo,

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1}) \leq f(x_1 + \cdots + x_n) + 1 + nf(0).$$

Čime je dokaz završen. □

4.3. Jensenova nejednakost za dvostruke sume

Teorem 4.5. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna (konkavna) funkcija i $x = (x_1, ..., x_n), p = (p_1, ..., p_n)$ n-torke realnih brojeva sa svojstvom da je $p_i \geq 0$ za $i = 1, ..., n$ i $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Tada imamo nejednakost:*

$$f\left[\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n i p_i\right)^2}\right] \leq (\geq) \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j [\sum_{k,l=i}^{j-1} f(\Delta x_k \cdot \Delta x_l)]}{\sum_{i=1}^n i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n i p_i\right)^2} \tag{86}$$

gdje je $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$ $(k = 1, ..., n-1)$.

Dokaz. Koristeći Jensenovu nejednakost za višestruke sume imamo

$$\begin{aligned} f\left[\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n i p_i\right)^2}\right] &= f\left[\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j (x_i - x_j)^2}{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j (j-i)^2}\right] \\ &= f\left[\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j (j-i)^2 \frac{(x_j - x_i)^2}{(j-i)^2}}{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j (j-i)^2}\right] \\ &\leq \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j (j-i)^2 f(\frac{(x_j-x_i)^2}{(j-i)^2})}{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j (j-i)^2} \\ &=: I. \end{aligned} \tag{87}$$

S druge strane za $j > i$ imamo

$$x_j - x_i = \sum_{k=i}^{j-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta x_k \tag{88}$$

i stoga je

$$(x_j - x_i)^2 = \left(\sum_{k=i}^{j-1} \Delta x_k\right)^2 = \sum_{k,l=i}^{j-1} \Delta x_k \cdot \Delta x_l.$$

Primjenjujući još jednom Jensenovu nejednakost za višestruke sume dobivamo

$$
\begin{aligned}
f\left[\frac{(x_j - x_i)^2}{(j-i)^2}\right] &= f\left[\frac{\sum_{k,l=i}^{j-1} \Delta x_k \cdot \Delta x_l}{(j-i)^2}\right] \\
&\leq (\geq) \frac{\sum_{k,l=i}^{j-1} f(\Delta x_k \cdot \Delta x_l)}{(j-i)^2}.
\end{aligned} \tag{89}
$$

Dakle iz (89) dobivamo

$$
\begin{aligned}
I &\leq (\geq) \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j (j-i)^2 \frac{\sum_{k,l=i}^{j-1} f(\Delta x_k \cdot \Delta x_l)}{(j-i)^2}}{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j (j-i)^2} \\
&= \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j [\sum_{k,l=i}^{j-1} f(\Delta x_k \cdot \Delta x_l)]}{\sum_{i=1}^{n} i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} i p_i\right)^2}.
\end{aligned} \tag{90}
$$

Konačno, iz (87) i (90) dobivamo početnu nejednakost. □

Literatura

[1] P. Cerone, S. S. Dragomir, *Mathematical Inequalities*, Taylor and Francis Group /CRC, Boca Raton-London-New York, 2011.

[2] S. S. Dragomir, *A Survey On Cauchy-Bunyakowski-Schwarz Type Discrete Inequalities*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics 4 (2003), članak 63.

[3] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis* , Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1993.

[4] J. E. Pečarić, *Nejednakosti* , Hrvatsko matematičko društvo,Zagreb, 1996.

[5] M. Ribičić Penava, K. Bošnjak, *Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje,* Osječki matematički list 16 (2016), 15-25.