Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Aleksandra Bijelić

B-spline

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Aleksandra Bijelić

B-spline

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Kristian Sabo

Osijek, 2017.

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s još jednim pojmom iz Numeričke analize, B-spline. Definirat ćemo B-spline i neka njegova osnovna svojstva, te pokazati kako se računa. Bavit ćemo se pronalaskom stabilnog i brzog algoritma za procjenu B-spline funkcije F. Za kraj sve što smo naučili u ovom radu pokazat ćemo kroz par osnovnih primjera.

Ključne riječi: Definicija B-spline, osnovna svojstva, računanje B-spline, B-spline aproksimacija, inverza formula, ocjena B-spline

Abstract

In this thesis we introduce B-spline which is one of the terms in numerical analysis. We will define B-spline and present how to calculate it. We will see what is B-spline approximation on given function and how to calculate approximation of the inverse function. We will deal with finding stable and fast algorithm for estimation of B-spline of function $\mathcal{F}$. In the end, we will provide several basic examples based on what we have learned in this thesis.

Key words: Definitions of B-spline, basic properties of B-spline, the computation of B-spline, B-spline Approximation, inversion formula, evaluation of B-spline

Sadržaj

1 Definicija B-spline

Spline funkcije su djelomični polinomi povezani razdiobom $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ na segmentu $[a, b]$ u čvorovima x_i. Općenito, realna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se zove djelomični polinom reda r i stupnja $r-1$, ako se za svaki $i = 0, \ldots, n-1$ restrikcija funkcije f na podintervale (x_i, x_{i+1}) podudara s polinomom $p_i(x)$ stupnja $\leq r-1$. Kako bi se postiglo injektivno preslikavanje između f i niza $(p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x))$ definiramo f u čvorovima x_i, $i = 0, \ldots, n-1$, tako da funkcija postaje neprekidna s desna. Neke derivacije spline funkcije također mogu biti neprekidne, ovisno o tome jesu li uzastopni čvorovi različiti ili ne.

B-spline je kombinacija krivulja koje prolaze kroz određen broj točaka koje nazivamo kontrolnim točkama i tvore glatke krivulje. Ove funkcije omogućuju stvaranje i upravljanje složenim oblicima i površinama pomoću brojnih točaka.

B-spline reda n su osnovne funkcije svake spline funkcija istog reda, definirane na istim čvorovima, što znači, sve moguće funkcije spline mogu se graditi iz linearne kombinacije B-spline i postoji samo jedna jedinstvena kombinacija za svaku funkciju spline.

B-spline su posebni djelomični polinomi. Oni su nenegativni i iščezavaju svugdje osim na nekoliko susjednih intervala $[x_i, x_{i+1}]$.

Neka je $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$f_x(t) = (t-x)_+ = max(t-x, 0) = \begin{cases} t-x, & \text{za} \quad t > x \\ 0, & \text{za} \quad t \leq x \end{cases}$$

i neka postoji $f_x^r, r \geq 0$, posebno za $r = 0$

$$f_x^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{za} \quad t > x \\ 0, & \text{za} \quad t \leq x \end{cases}$$

Funkcija $f_x^r(\cdot)$ se sastoji od dva polinoma stupnja $\leq r$: 0-polinom $P_0(t) = 0$ za $t \leq x$ i polinoma $P_1(t) = (t-x)^r$, za $t > x$.

Primijetimo da funkcija f_x^r ovisi o realnom parametru x i $f_x^r(t)$ je definirana kao funkcija od x koja je nepekidna s desna za svaki fiksni t. Za $r \geq 1$, $f_x^r(t)$ je $(r-1)$ puta neprekidno diferencijabilna, tj klase $C^{r-1}(\mathbb{R})$ u odnoru na t i x.

Podijeljena razlika $f[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}]$ realne runkcije $f(t)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dobro definirana za svaki segment $t_i \leq t_{i+1} \leq \cdots \leq t_{i+r}$ realnih brojeva, čak i ako t_j nisu međusobno različiti. Jedini uvjet je da f bude $(s_j - 1)$ puta diferencijabilna za $t = t_j$, $j = i, i+1, \ldots, i+r$, ukoliko se t_j pojavljuje s_j puta u podsegmentu $t_i \leq t_i + 1 \leq \cdots \leq t_j$ koji završava sa t_j. Prema tome,

$$f[t_i, \ldots, t_{i+r}] = \frac{f^{(r)}(t_i)}{r!}, \quad za \quad t_i = t_{i+r} \tag{1}$$

$$f[t_i, \ldots, t_{i+r}] = \frac{f[t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}] - f[t_i, \ldots, t_{i+r-1}]}{t_{i+r} - t_i}, \quad za \quad t_i \neq t_{i+r} \tag{2}$$

Induktivno po r slijedi, podjeljena razlika funkcije f je linearna kombinacija njegovih derivacija u točkama, tj:

$$f[t_i, \ldots, t_{i+r}] = \sum_{j=1}^{i+r} \alpha_j f^{(s_j-1)}(t_j), \quad \alpha_{i+r} \neq 0 \tag{3}$$

Neka je $r \geq 1$ cijeli broj i $t = \{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ bilo koji beskonačna neogranična razdioba realnih brojeva t_i, pri čemu

$$\inf t_i = -\infty, \quad \sup t_i = +\infty \quad i \quad t_i < t_{i+r}, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

i-ti B-spline reda r povezan s t je definiran kao funkcija od x:

$$\begin{aligned} B_{i,r,t}(x) &= (t_{i+r} - t_i) f_x^{r-1}[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}] \\ &= f_x^{r-1}[t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}] - f_x^{r-1}[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+r-1}] \end{aligned} \tag{4}$$

Pišemo kraće B_i ili $B_{i,r}$.

$B_{i,r,t}(x)$ je dobro definirana za svaki $x \neq t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}$ i prema (3) i (4) je linearna kombinacija funkcija

$$(t_j - x)_+^{r-s_j}|_{t=t_j}, \quad i \leq j \leq i+r \tag{5}$$

ako se vrijednost t_j pojavljuje s_j puta unutar podsegmenta $t_i \leq t_i + 1 \leq \cdots \leq t_j$. Posebno, ako se vrijednost t_j pojavljuje n_j puta unutar cjelog segmenta $t_i \leq t_i + 1 \leq \cdots \leq t_{i+r}$ tada za svaki indeks σ, $1 \leq \sigma \leq n_j$ postoji točno jedan cijeli broj $l = l(\sigma)$ koji zadovoljava

$$t_l = t_j, \quad s_l = \sigma, \quad i \leq l \leq i+r$$

$B_{i,r,t}$ je također linearna kombinacija od

$$(t_j - x)_+^s, \quad gdje \quad r - n_j \leq s \leq r-1, \quad i \leq j \leq i+r. \tag{6}$$

Stoga, funkcija $B_{i,r,t}$ podudara se s polinomom stupnja najviše $r-1$ na svakom od otvorenih intervala u sljedećem skupu

$$\langle -\infty, t_i\rangle \cup \{(t_j, t_{j+1}), \quad i \leq j < i+r \quad \& \quad t_j < t_{j+1}\} \cup \langle t_{i+r}, +\infty\rangle.$$

$B_{i,r,t}(x)$ je djelomični polinom od x reda r, s podjelom realne osi danu s t_k, $k \in T_{i,r}$ pri čemu je

$$T_{i,r} = \{j | i \leq j < i+r \quad \& \quad t_j < t_{j+1}\} \cup \{i+r\}.$$

Samo u čvorovima $x = t_k$, $k \in T_{i,r}$, funkcija $B_{i,r,t}(x)$ može skočiti nepovezano, ali je neprekidna s desna, jer se funkcije $(t_j - x)_+^s$ koje se pojavljuju u (5) i (6) su funkcije od x koje su neprekidne s desna svugdje, čak i u $s = 0$. Također prema (5) i (6) za svaki $t = (t_j)$, ako se t_j pojavljuje n_j puta unutar $t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}$ (ako je $n_j = r$ tada $B_{i,r,t}(x)$ ima nepovezan skok na $x = t_j$). Stoga je red diferencijabilnosti od $B_{i,r,t}$ na $x = t_j$ određen brojem ponavljanja vrijednosti od t_j.

Pogledajmo kako izgleda B-spline nekog reda i.
Neka je zadana neprekidna razdioba u čvorovima $t = (t_i)$. B-spline reda 1 u danim čvorovima je karakteristična funkcija ove razdiobe, tj. funkcija

$$B_{i,1}(t) = X_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{za} \quad t_i \leq t < t_{i+1}; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{7}$$

Primjetimo da su sve ove izabrane funkcije neprekidne s desna. B-spline reda 1 mora dati u sumi jedinicu, tj.

$$\sum_i B_{i,1}(t) = 1, \quad \text{za} \quad \text{svaki} \quad t. \tag{8}$$

Posebno,

$$t_i = t_{i+1} \Rightarrow B_{i,1} = X_i = 0. \tag{9}$$

Pomoću B-spline **prvog reda**, rekurzivno dobivamo B-spline **višeg reda**:

$$B_{i,r} = \lambda_{i,r} B_{i,r-1} + (1 - \lambda_{i+1,r}) B_{i+1,r-1} \tag{10}$$

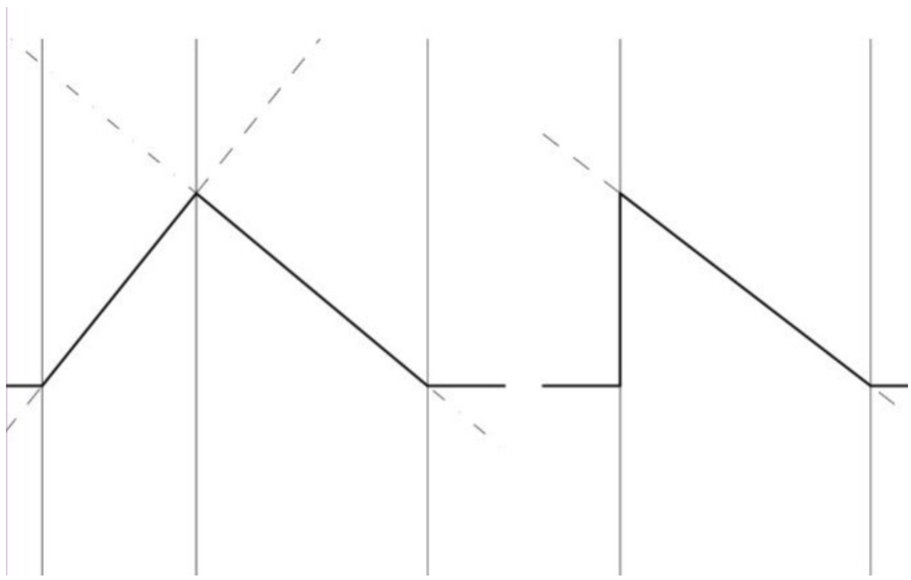
gdje je

$$\lambda_{i,r}(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+r-1}-t_i}, & za \quad t_i \neq t_{i+r-1}; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{11}$$

B-spline drugog reda dan je s:

$$B_{i,2} = \lambda_{i,2} X_i + (1 - \lambda_{i+1,2}) X_{i+1}, \tag{12}$$

i sastoji se, općenito, od dva netrivijalna linearna djela koji se neprekidno spajaju i tvore djelomične linearne funkcije koje isčezavaju izvan intervala $[t_i, t_{i+2})$. Zbog toga, $B_{i,2}$ zovemo linearni B-spline.



Slika 1: Linearni B-spline: (a) jednostruki čvorovi, (b) dvostruki čvorovi

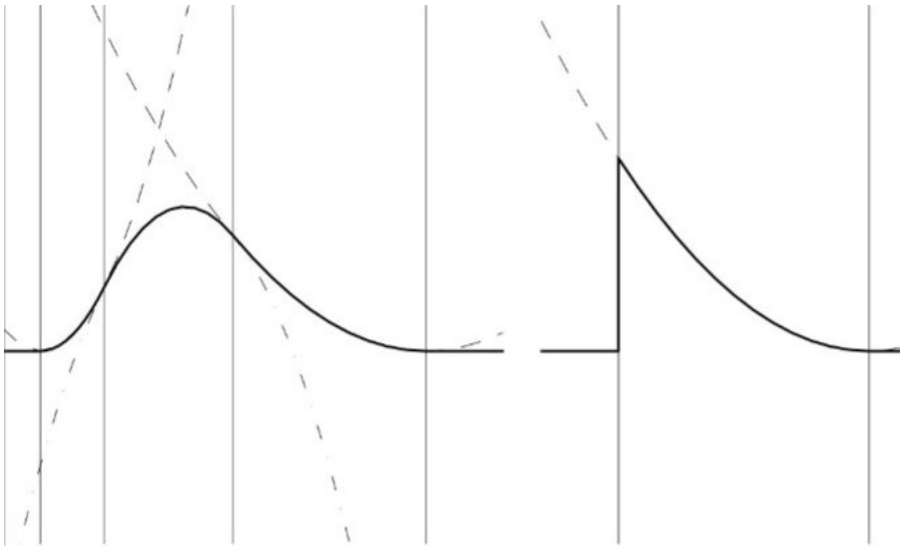
Ukoliko je npr. $t_i = t_{i+1}$ (u tome slučaju je $X_i = 0$), ali je $t_{i+1} < t_{i+2}$ tada se B-spline sastoji od samo jednog netrivijalnog djela koji je neprekidan u dvostrukom čvoru $t_i = t_{i+1}$, kao što nam je prikazano na Slici 1(b).

B-spline trećeg reda dan je s

$$\begin{aligned} B_{i,3} &= \lambda_{i,3} B_{i,2} + (1 - \lambda_{i+1,3}) B_{i+1,2} \\ &= \lambda_{i,3}\lambda_{i,2} X_i + (\lambda_{i,3}(1 - \lambda_{i+1,2}) \\ &+ (1 - \lambda_{i+1,3})\lambda_{i+1,2}) X_{i+1} \\ &+ (1 - \lambda i + 1, 3)(1 - \lambda_{i+2,2}) X_{i+2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Općenito, B-spline trećeg reda se sastoji od 3 netrivijalna kvadratna djela, i, prema Slici 2 vidimo da se glatko spajaju u čvorovima i tvore po djelovima kvadratne funkcije klase C^1

koje iščezavaju izvan intervala $[t_i, t_{i+2})$. Ukoliko je npr.$t_i = t_{i+1} = t_{i+2}$ (tj.$X_i = X_{i+1} = 0$), tada se $B_{i,3}$ sastoji od samo jednog netrivijalnog djela, koji je neprekidan u trostrukom čvoru t_i, ali je i dalje klase C^1 u jednostrukom čvoru t_{i+3}, kako je i prikazano na Slici 2(b).

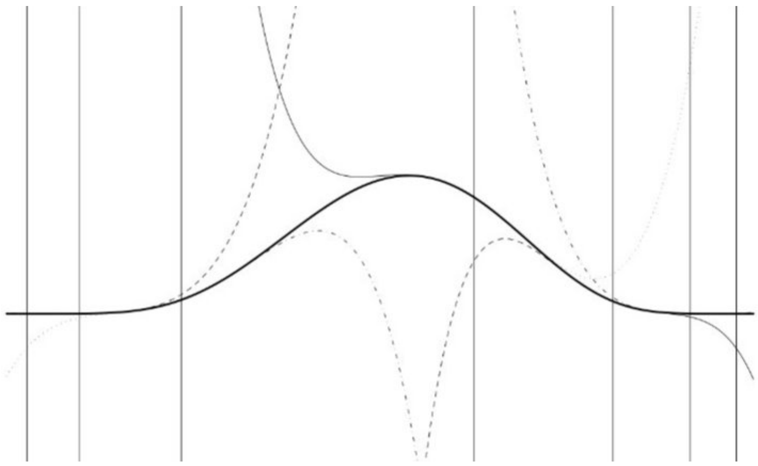


Slika 2: Kvadratni B-spline: (a) jednostruki čvorovi, (b) trostruki čvorovi

Nakon $r-1$ korak, $B_{i,r}$ je oblika

$$B_{i,r} = \sum_{j=i}^{i+r-1} b_{j,r} X_j, \tag{14}$$

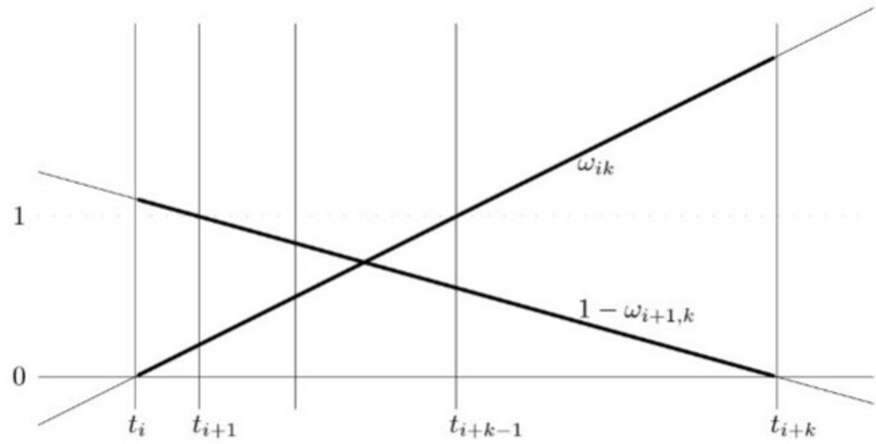
gdje je svaki $b_{j,r}$ polinom stupnja $< r$, jer je zbroj produkta $r-1$ linearnih polinoma. Prema tome, B-spline reda r se sastoji od djelomičnih polinoma reda $< r$. (U stvrani, svi $b_{j,r}$ su točno stupnja $r-1$.)



Slika 3: B-spline 6. reda i 6 polinoma 5. stupnja koji zajedno čine B-spline

Iz ovoga, možemo zaključiti, $B_{i,r}$ je djelomični polinom stupnja $< r$ koji isčezava izvan intervala $[t_i, t_{i+r})$ i sadrži moguće točke preloma t_i, t_{i+r} kao na Slici 3.

$B_{i,r}$ je nul-funkcija samo u slučaju $t_i = t_{i+1}$. Također prema indukciji, $B_{i,r}$ je pozitivna na otvorenom intervalu (t_i, t_{i+r}), jer su i $\lambda_{i,r}$ i $1 - \lambda_{i+1,r}$ positivne na intervalu, primjer vidimo na Slici 4.



Slika 4: Dvije λ funkcije koje su pozitivne na intervalu (t_i, t_{i+r})

Teorem 1 *[3]*

a) $B_{i,r,t}(x) = 0$, *za* $x \notin [t_i, t_{i+r}]$

b) $B_{i,r,t}(x) > 0$, *za* $t_i < x < t_{i+r}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_i B_{i,r,t}(x) = 1$$

i suma sadrži konačno mnogo uvjeta, različitih od nula

Dokaz

(a) Za dokaz ovog djela bit će nam potreban sljedeći Teorem:

Teorem 2 *Ako je $f(x)$ polinom stupnja r, tada je*

$$f[x_0, \dots, x_k] = 0, \quad za \quad k > r.$$

Za $x < t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $f_x^{r-1}(t) = (t-x)^{r-1}$ je polinom stupnja $(r-1)$ u t koji sadrže r iščezavajućih podjeljenih razlika

$$f_x^{r-1}[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{i,r}(x) = 0$$

po Teoremu 2.

S druge strane, ako je $t_i \leq t \leq t_{i+r} < x$, onda $f_x^{r-1}(t) = (t-x)_+^{r-1} = 0$, je trivijalno, pa je opet $B_{i,r}(x) = 0$

(b) Za $r = 1$ i $t_i < x < t_{i+1}$, tvrdnja sljedi iz definicije

$$B_{i,1}(x) = [(t_{i+1} - x)_+^0 - (t_i - x)_+^0] = 1 - 0 = 1,$$

i za $r > 1$,iz rekurzije (17) za funkciju $B_{i,r}(x)$.

(c) Prije nego dokažemo ovu tvrdnju, podsjetimo se Teorema o interpolacijskom polinomu i nekih karakteristika

Teorem 3 *Neka je $f \in C^{n+1}([a,b])$, te $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0,\ldots,n$, neka je P_n odgovarajući interpolacijski polinom onda za svaki $\bar{x} \in [a,b]$ postoji $\xi \in (a,b)$ takav da je*

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega(\bar{x}),$$

pri čemu je

$$\omega(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0)\cdots(\bar{x} - x_n).$$

Newton oblik interpolacisjkog polinom

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}). \quad (15)$$

Za (x_{n+1}, f_{n+1}), takav da je $x_{n+1} = \bar{x}$, $f_{n+1} = f(\bar{x})$ i $\bar{x} \neq x_i$, $\forall i = 0,\ldots,n$ iz Newton formula (15) slijedi

$$f(\bar{x}) = P_{n+1}(\bar{x}) = P_n(\bar{x}) + f[x_0,\ldots,x_n,\bar{x}]\omega(\bar{x})$$

ili

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = f[x_0,\ldots,x_n,\bar{x}]\omega(\bar{x}).$$

Prema Teoremu 3 mora vrijediti

$$f[x_0,\ldots,x_n,\bar{x}] = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \text{za} \quad \text{neki} \quad \xi \in [x_0,\ldots,x_n,\bar{x}]$$

iz čega slijedi

$$f[x_0,\ldots,x_n] = \frac{f^n(\xi)}{n!}, \quad \text{za} \quad \text{neki} \quad \xi \in [x_0,\ldots,x_n]. \quad (16)$$

Dokažimo sada našu tvrdnu (c) Teorem 1, pretpostvaimo prvo $t_j < x < t_{j+1}$.
Prema (a), $B_{i,r}(x) = 0$ za svaki i, r takav da $i + r \leq j$ i za svaki $i \geq j+1$, vrijedi

$$\sum_i B_{i,r}(x) = \sum_{i=j-r+1}^{j} B_{i,r}(x).$$

Jednadžba (4) implicira,

$$B_{i,r}(x) = f_x^{r-1}[t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{i+r}] - f_x^{r-1}[t_i, t_{i+r}, \ldots, t_{i+r-1}].$$

Slijedi,

$$\sum_i B_{i,r}(x) = f_x^{r-1}[t_{j+1}, \ldots, t_{j+r}] - f_x^{r-1}[t_{j-r+1}, \ldots, t_j] = 1 - 0.$$

Posljednja jednakost vrijedi jer je funkcija $f_x^{r-1}(t) = (t-x)^{r-1}$ polinom stupnja $(r-1)$ u t za $t_j < x < t_{j+1} \leq t \leq t_{j+r}$, za koje je $f_x^{r-1}[t_{j+1}, \ldots, t_{j+r}] = 1$ prema jednadžbi (16), i funkcija $f_x^{(r-1)}(t) = (t-x)^{r-1} = 0$ iščezava za $t_{j-r+1} \leq t \leq t_j < x < t_{j+1}$. Za $x = t_j$, tvrdnja sljedi zbog neprekidnosti funkcije $B_{i,r}$ s desna,

$$B_{i,r}(t_j) = \lim_{y \to t_j^+} B_{i,r}(y)$$

□

1.1 Računanje B-spline

B-spline možemo računati pomoću rekurzije. Rekurzija se temelji na generalizaciji Libnizove formule za derivaciju produkta dviju funkcija.

Teorem 4 ***(Pravilo produkta podjeljene razlike)***
Neka je $t_i \leq t_{i+1} \leq \cdots \leq t_{i+k}$. Pretpostavimo nadalje da je funkcija $f(t) = g(t)h(t)$ produkt dviju funkcija koje se razlikuju za neki $t = t_j$, $j = i, \ldots, i+k$, prema tome $g[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}]$ i $h[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}]$ su definirane kao (1). Pa slijedi

$$f[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}] = \sum_{r=i}^{i+k} g[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_r] h[t_r, t_{r+1}, \ldots, t_{i+k}]$$

Dokaz Prema (15) polinomi

$$\sum_{r=i}^{i+k} g[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_r](t - t_i) \cdots (t - t_{r-1})$$

i

$$\sum_{s=i}^{i+k} h[t_s, \ldots, t_{i+k}](t - t_{s+1}) \cdots (t - t_{i+k})$$

interpoliraju funckiju g i h u točkama $t = t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}$. Produkt polinoma

$$F(t) = \sum_{r=i}^{i+k} g[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_r](t - t_i) \cdots (t - t_{r-1}) \cdot \sum_{s=i}^{i+k} h[t_s, \ldots, t_{i+k}](t - t_{s+1}) \cdots (t - t_{i+k})$$

interpolira funkciju $f(t)$ za $t = t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}$. Ovaj produkt možemo zapisati kao sumu dva polinoma

$$F(t) = \sum_{r,s=i}^{i+k} \cdots = \sum_{r \leq s} \cdots + \sum_{r > s} \cdots = P_1(t) + P_2(t).$$

Budući da je svaka vrijednost sume $\sum_{r>s}$ višekratnik polinoma $\Pi_{j=i}^{i+k}(t - t_j)$, polinom $P_2(t)$ interpolira 0-funkciju u $t = t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}$. Prema tome, polinom $P_1(t)$, stupnja $\leq k$, interpolira $f(t)$ u $t = t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}$. Stoga, $P_1(t)$ je jedinstveni interpolacijski polinom od $f(t)$ stupnja $\leq k$. Prema Newton obliku interpolacijskog polinoma (15) najveći koeficijent od $P_1(t)$ je $f[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}]$. Poređenjem koeficijenata t^k s obe strane sume $P_1(t) = \sum_{r\leq s} \cdots$, P_1 daje željenu formulu

$$f[t_i, \ldots, t_{i+k}] = \sum_{r=i}^{i+k} g[t_i, \ldots, t_r] h[t_r, \ldots, t_{i+r}],$$

$\square$

Sada koristimo Teorem 4 kako bi izveli rekurziju za B-spline, $B_{i,r}(x) \equiv B_{i,r,t}(x)$ prema jednakosti (4). Neka je

$$N_{i,r}(x) = \frac{B_{i,r}(x)}{t_{i+r} - t_i} \equiv f_x^{r-1}[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}],$$

za koji sljedi jedinstvena rekurzija:
Za $r \geq 2$ i $t_i < t_{i+r}$:

$$N_{i,r}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_{i,r-1}(x) + \frac{t_{i+r} - x}{t_{i+r} - t_i} N_{i+1,r-1}(x). \tag{17}$$

Dokaz Pretpostavimo, $x \neq t_j$ za svaki j. Primjenjujemo pravilo Teorema 4 na proizvod

$$f_x^{r-1}(t) = (t - x)_+^{r-1} = (t - x)(t - x)_+^{r-2} = g(t) f_x^{r-2}(t).$$

Znamo da je $g(t)$ linearan polinom od t, prema (16) vrijedi

$$g[t_i] = t_i - x, \quad g[t_i, t_{i+1}] = 1, \quad g[t_i, \ldots, t_j] = 0 \quad za \quad j > i + 1,$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned} f_x^{r-1}[t_i, \ldots, t_{i+r}] &= (t_i + x) f_x^{r-2}[t_i, \ldots, t_{i+r}] + 1 \cdot f_x^{r-2}[t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}] \\ &= \frac{t_i - x}{t_{i+r} - t_i} (f_x^{r-2}[t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}] - f_x^{r-2}[t_i, \ldots, t_{i+r-1}]) + 1 \cdot f_x^{r-2}[t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}] \\ &= \frac{x - t_i}{t_{i+r} - t_i} f_x^{r-2}[t_i, \ldots, t_{i+r-1}] + \frac{t_{i+r} - x}{t_{i+r} - t_i} f_x^{r-2}[t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}], \end{aligned} \tag{18}$$

što dokazuje tvrdnju (17) za $x \neq t_i, \ldots, t_{i+r}$.
Rezultat je istinit za sve x, budući da su svi $B_{i,r}(x)$ konstantni s desna i $t_i < t_{i+r}$.

$\square$

Dokaz Teorema 1,(b) sada možemo upotpuniti: Prema (17), vrijednost $N_{i,r}(x)$ je konveksna linearna kombinacija od $N_{i,r-1}(x)$ i $N_{i,r+1}(x)$ za $t_i < x < t_{i+r}$ sa pozitivnom vrijednošću $\lambda_i(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+r}-t_i} > 0$, $1 - \lambda_i(x) > 0$. Također $N_{i,r}(x)$ i $B_{i,r}(x)$ imaju isti predznak, a mi već znamo da je $B_{i,1}(x) = 0$ za $x \notin [t_i, t_{i+1}]$ i $B_{i,r}(x) > 0$ za $t_i < x < t_{i+1}$. Indukcijom po r, koristeći (17), dobivamo $B_{i,r} > 0$, za $t_i < x < t_{i+1}$. Jednadžba

$$B_{i,r}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+r-1} - t_i} B_{i,r-1}(x) + \frac{t_{i+r} - x}{t_{i+r} - t_{i+1}} B_{i+1,r-1}(x) \tag{19}$$

je jednaka (17), i predstavlja $B_{i,r}(x)$ kao pozitivnu linearsnu kombinaciju od $B_{i,r-1}(x)$ i $B_{i+1,r-1}(x)$. Ovo koristimo za računanje vrijednosti svih $B-spline$, $B_{i,r}(x) = B_{i,r,t}(x)$ za danu fiksnu vrijednost x.

Kako bi ovo pokazali, neka je zadana vrijednost x. Neka je $t_j \in t$ i $t_j \leq x < t_{j+1}$. Prema Teoremu 1(a) znamo $B_{i,r}(x) = 0$ za svaki i, r i $x \notin [t_i, t_{i+r}]$ tj. za $i \geq j+1$. Prikažimo to pomoću tablice 1, $B_{i,r}(x)$ nestaje na pozicijama gdje je 0:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & B_{j-3,4}(x) & \cdots \\
0 & 0 & B_{j-2,3}(x) & B_{j-2,4}(x) & \cdots \\
0 & B_{j-1,2}(x) & B_{j-1,3}(x) & B_{j-1,4}(x) & \cdots \\
B_{j,1}(x) & B_{j,2}(x) & B_{j,3}(x) & B_{j,4}(x) & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Tablica 1

Prema definiciji $B_{j,1} = B_{j,1}(x) = 1$, za $t_j \leq x < t_{j+1}$, određuje prvu kolonu tablice 1. Preostali stupci mogu se izračunati uzastopno pomoću rekurzije (19): Svaki element$B_{i,r}$ se može izvesti pomoću dva susjedna, $B_{i,r-1}$ i $B_{i+1,r-1}$.
Ova metoda je numerički vrlo stabilna, jer se samo nenegativni višekratnici nenegativnih brojeva dodaju zajedno.

Primjer 1 *Za $t_i = i$, $i = 0, 1, \ldots$ i $x = 3.5 \in [t_3, t_4]$ tablica vrijednosti $B_{i,r}$ je oblika:*

r=	1	2	3	4
i=0	0	0	0	$\frac{1}{48}$
i=1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{23}{48}$
i=2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{23}{48}$
i=3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$
i=4	0	0	0	0

Tablica 2

Na primjer, $B_{2,4}$ je dobiven iz

$$B_{2,4} = B_{2,4}(3.5) = \frac{3.5-2}{5-2} \cdot \frac{6}{8} + \frac{6-3.5}{6-3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{23}{48}.$$

2 B-spline Aproksimacija

Definicija 1 *[1] B-spline aproksimacija stupnja $r-1$ (reda r) na prizvoljnu funkciju $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ je*

$$S_r[f; x] = \sum_i f(\xi_i) B_{i,r}(x) \tag{20}$$

gdje je,

$$\xi_i = \frac{1}{r-1}(t_{i+1} + t_{i+2} + \cdots + t_{i+r-1}) \tag{21}$$

ξ_i nazivamo čvorovima. B-spline aproksimacija je lokalna aproksimacije. Aproksimacija (20) sadrži r nenul uvjeta. U svakom trenutku, aproksimacija uzima u obzir samo lokalno ponašanje primitivne funkcije.

2.1 Inverzna formula

Neka je zadan skup vrijednosti $\{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, a mi želimo pronaći jedinstveni skup funkcijskih vrijednosti $\{f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots, f(\xi_m)\}$ takav da B-spline aproksimacija na f interpolira zadane podatke,odnosno želimo pronaći $f(\xi_i)$ koji zadovoljava

$$S_r[f;\xi_i] = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m \tag{22}$$

ili u matričnom obliku, dobivamo sljedeći odnos

$$B \cdot F^T = Y^T \tag{23}$$

gdje je

$$B = \begin{pmatrix} B_{0,r}(\xi_0) & B_{1,r}(\xi_0) & \cdots & B_{m,r}(\xi_0) \\ B_{0,r}(\xi_1) & B_{1,r}(\xi_1) & \cdots & B_{m,r}(\xi_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{0,r}(\xi_m) & B_{1,r}(\xi_m) & \cdots & B_{m,r}(\xi_m) \end{pmatrix}$$

$$F = (f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots, f(\xi_m))$$
$$Y = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$$

B je Gram matica za koju znamo da je invertibilna za različite skupove čvorova $\{\xi_i\}$, što je u većini slučajeva. Inverzna formula je tada

$$F^T = B^{-1} \cdot Y^T \tag{24}$$

3 Ocjena B-spline

Sljedeći je algoritam stabilna i brza metoda za procjenu B-spline funkcije F definirane na skupu od $[0, n]$, bez izračunavanja osnovnih funkcija $B_{i,r}(x)$.

$$F(x) = \sum_i A_i B_{i,r}(x) \tag{25}$$

Kako bi ocjenili funkciju (25) u točki $x \in [t_j, t_{j+1})$, potrebno je izračunati r brojeva

$$B_{i,r}(x), \quad i = j - r + 1, \ldots, j;$$

$F(x)$ možemo zapisati kao

$$F(x) = \sum_{i=j-r+1}^{j} A_i B_{i,r}(x).$$

Diferencijal funkcije $F(x)$ je:

$$\begin{aligned} B_{i,r}^{(1)}(x) &= \frac{d}{dt}[f_x^{r-1}[t_{i+1},\ldots,t_{i+r}] - f_x^{r-1}[t_i,\ldots,t_{i+r-1}]] \\ &= -(r-1)[N_{i+1,r-1}(x) - N_{i,r-1}(x)]. \end{aligned} \tag{26}$$

Slijedi,

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x) &= (r-1)\sum_i A_i[N_{i,r-1}(x) - N_{i+1,r-1}(x)] \\ &= (r-1)\sum_i A_i^{(1)} B_{i,r-1}(x), \end{aligned} \tag{27}$$

gdje je

$$A_i^{(1)} = \frac{A_i - A_{i-1}}{t_{i+r-j} - t_i}. \tag{28}$$

Općenitije,

$$\begin{aligned} A_i^{(0)} &= A_i, \\ A_i^{(j)} &= \frac{A_i^{(j-1)} - A_{i-1}^{(j-1)}}{t_{i+r-j} - t_i}, \quad j > 0, \end{aligned} \tag{29}$$

te vrijedi

$$F^{(j)}(x) = (r-1)\cdots(r-j)\sum_i A_i^{(j)} B_{i,r-j}(x). \tag{30}$$

Ukoliko je

$$t_i = t_0 + ih, \quad \text{za} \quad \text{svaki} \quad i,$$

tada je (30) jednako

$$F^{(j)}(x) = h^{-j}\sum_i (\nabla^j A_i) B_{i,r-j}(x)$$

Funkciju $F(x)$ možemo zapisati i pomoću B-spline nižeg reda, sa određenim koeficijentima polinoma.

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_i A_i B_{i,r}(x) \\ &= \sum_i A_i(x - t_i)N_{i,r-1}(x) + (t_{i+r} - x)N_{i+1,r-1}(x) \\ &= \sum_i A_i(x - t_i) + A_{i-1}(t_{i+r-1} - x)N_{i,r-1}(x) \\ &= \sum_i A_i^{[1]}(x) B_{i,r-1}(x), \end{aligned}$$

gdje je,

$$A_i^{[1]}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+r-1} - t_i}A_i + \frac{t_{i+r-1} - x}{t_{i+r-1} - t_i}A_{i-1}.$$

Općenitije,

$$A_i^{[j]}(x) = \begin{cases} A_i, & j = 0 \\ \frac{x-t_i}{t_{i+r-j}-t_i} A_i^{[j-1]}(x) + \frac{t_{i+r-j}-x}{t_{i+r-j}-t_i} A_{i-1}^{[j-1]}(x), & j > 0, \end{cases} \tag{31}$$

dobivamo

$$F(x) = \sum_i A_i^{[j]}(x) B_{i,r-j}(x). \tag{32}$$

Kako je $B_{i,1}(x) = 1$ za $t_i \leq x < t_{i+1}$ i nula inače, sljedi da je

$$F(x) = \sum_i A_i^{[r-1]}(x), \quad t_i \leq x < t_{i+1}. \tag{33}$$

Stoga, ukoliko je $x \in [t_i, t_{i+1})$, tada $F(x)$ možemo naći pomoću $A_{i-r+1} \ldots, A_i$, stvaranjem konveksnih kombinacija pomoću 31. Neka je

$$(t-x)^{r-1} = \sum_i \varphi_{i,r}(x) B_{i,r}(x), \quad \varphi_{i,r}(t) = \Pi_{k=1}^{r-1}(t - t_{i+k}), \quad \text{za} \quad \text{svaki} \quad i, \tag{34}$$

to dobivamo iz

$$A_i^{[0]}(x) = A_i = \varphi_{i,r}(t), \quad \text{za} \quad \text{svaki} \quad i,$$

a prema (31) slijedi

$$\begin{aligned} A_i^{[1]}(x) &= \{(x-t_i)\varphi_{i,r}(t) + (t_{i+r-1} - x)\varphi_{i-1,r}(t)\}/(t_{i+r-1} - t_i) \\ &= \varphi_{i,r-1}(t)\{(x-t_i)(t-t_{i+r-1}) + (t_{i+r-1} - x)(t - t_i)\}/(t_{i+r-1} - t_i) \\ &= \varphi_{i,r-1}(t)(t-x) \end{aligned} \tag{35}$$

stoga

$$\sum_i \varphi_{i,r}(t) B_{i,r}(x) = (t-x) \sum_i \varphi_{i,r-1}(t) B_{i,r-1}(x).$$

Kako je

$$\sum_i \varphi_{i,1}(t) B_{i,1}(x) \equiv \sum_i B_{i,1}(x) \equiv 1,$$

indukcija po r sada dokazuje (34). Potencirajmo obje strane jednadžbe (34) s t i usporedimo koeficijente, slijedi

$$\sum_i B_{i,r}(x) \equiv 1, \tag{36}$$

potvrđujući zaljučak prema (31) i (32) da, za $x \in [t_i, t_{i+1})$, broj $F(x)$ je konveksna kombinacija brojeva $A_{i-r+1}, \ldots, A_i$.

Također iz (34) slijedi

$$(x-t)^{r-1} = \sum_i \psi_{i,r}(x) B_{i,r}(t), \quad \psi_{i,r}(x) = (t_{i+1} - x) \cdot (t_{i+r-1} - x); \tag{37}$$

Kako bi izračunali ocjenu B-spline koristit ćemo dva algoritma.

Prvi algoritam se temelji na (31) i (32). Cilj nam je pronaći i takav da $t_i \leq x < t_{i+1}$, koji generira sve unose u pripadnu tablicu, koristeći (31):

$$\begin{array}{ccccc}
A_{i-r+1}^{[0]}(x) & & & & \\
A_{i-r+2}^{[0]}(x) & A_{i-r+2}^{[1]}(x) & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \\
A_{i-1}^{[0]}(x) & A_{i-1}^{[1]}(x) & \cdots & A_{i-1}^{[r-2]}(x) & \\
A_{i}^{[0]}(x) & A_{i}^{[1]}(x) & \cdots & A_{i}^{[r-2]}(x) & A_{i}^{[r-1]}(x)
\end{array}$$

Desni najniži unos je traženi broj $F(x)$.
Označimo

$$\begin{aligned}
A(k,t) &= A_{i-r+k}^{[t-1]}(x), \quad k=t,\ldots,r, \quad t=1,\ldots,r, \\
a_1(k) &= t_{i+r}-x, \quad k=1,\ldots,r, \\
a_2(k) &= x-t_{i-r+k}, \quad k=1,\ldots,r,
\end{aligned} \tag{38}$$

radi jednostavnosti. Tada

$$\begin{aligned}
A(k,1) &= A_{i-r+k}, \quad k=1,\ldots,r, \\
A(k,t+1) &= \frac{a_2(k)\cdot A(k,t)+a_1(k-t)\cdot A(k-1,t)}{a_2(k)+a_1(k-t)}, \quad k=t+1,\ldots,r; \quad t=1,\ldots,r-1.
\end{aligned} \tag{39}$$

Primjetimo kako je

$$\begin{aligned}
a_2(k)+a_1(k-t) &= x-t_{i-r+k}+t_{i+k-t}-x \\
&= t_{i+k-t}-t_{i+k-r} \geq t_{i+1}-t_i > 0,
\end{aligned} \tag{40}$$

pa proizvoljne točke iz razdiobe ne uzrokuju dodatne poteškoće ukoliko je, kako smo i pretpostavili, i izabran tako da $t_i \leq x < t_{i+1}$. $A(k,t)$ možemo računati stupac po stupac, npr.

$$k=t,\ldots,r; \quad t=2,\ldots,r$$

ili red po red, npr.

$$t=2,\ldots,k; \quad k=2,\ldots,r$$

ili dijagonalno prema dolje,npr.

$$t=2,\ldots,j; \quad k=t+r-j; \quad j=2,\ldots,r.$$

Svaki način zahtjeva samo jednan jednodimenzionalan niz sa r unosa za spremanje uspješno izračunatih vrijednost $A(k,t)$. U prvom slučaju bi računali unos a_1, u zadnjem, računavali bi a_2, dok bi drugi trebao računati vrijednosti i a_1 i a_2.

Ukoliko su nam potrebne u isto vrijeme vrijednosti funkcije $F(x)$ i neke njegove derivacije, tada je vjerojatno bolje koristiti algoritam koji stvara u isto vrijeme sve brojeve $B_{i,j}(x)$ koji nisu nula za dani x. Pretpostavimo stoga,

$$t_i \leq x < t_{i+1},$$

to nam omogućava stvaranje svih vrijednosti sljedeće trokutaste matrice:

$$\begin{array}{ccccc}
B_{i,1}(x) & B_{i-1,2}(x) & \cdots & B_{i-r+2,r-1}(x) & B_{i-r+1,r}(x) \\
 & B_{i,2}(x) & \cdots & B_{i-r+3,r-1}(x) & B_{i-r+2,r}(x) \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & B_{i,r-1}(x) & B_{i-1,r}(x) \\
 & & & & B_{i,r}(x)
\end{array}$$

$(r-j)$ stupac ove tablice sadrži brojeve potrebne za procjenu $F^{(j)}(x)$ pomoću (30), $j = 0, \ldots, r-1$. Iz tog razloga, pokazat ćemo samo kako generirati tablicu stupac po stupac. Radi pojednostavljenja, neka je

$$\begin{aligned}
B(k,t) &= B_{i+k-t,t}(x), \\
a_1(k) &= t_{i+k} - x, \quad k = 1\ldots, r \\
a_2(k) &= x - t_{i+1-k}, \quad k = 1\ldots, r
\end{aligned} \tag{41}$$

Vrijednosti tablice su tada

$$B(k,t), \quad k = 1, \ldots, t; \quad t = 1, \ldots, r,$$

pri čemu je

$$B(k,t) = 0, \quad \text{za} \quad k > t \quad \text{ili} \quad k < 1. \tag{42}$$

Uz oznake (41), i pomoću (19) slijedi

$$\begin{aligned}
B(k,t+1) &= a_2(t+1-k+1)\frac{B(k-1,t)}{a_1(k-1) + a_2(t+1-k+1)} \\
&+ a_1(k)\frac{B(k,t)}{a_1(k) + a_2(t+1-k)}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Ova formula ne utječe na moguću pristunost koeficijenata t_j, budući da

$$a_1(k) + a_2(t+1-k) = t_{i+k} - t_{i+k-t} \geq t_{i+1} - t_i > 0$$

za sve vrijednosti k i t. Jednadžbe (41) i (43) dovode nas do algoritma za računanje $B(k,t)$:

$B(1,1) = 1$
for $t = 1, \ldots, r-1$ **do**
    $a_1(t) = t_{i+t} - x$, $a_2(t) = x - t_{i+1-t}$,
    $B(1, t+1) = 0$;
    for $k = 1, \ldots, t$, **do**
        $N = B(k,t)/(a_1(k) + a_2(t+1-k))$
        $B(k,t+1) = B(k,t+1) + a_1(k)N$
        $B(k+1,t+1) = a_2(t+1-k)N$
    end for
end for

Ovaj algoritam se može prilagoditi kako bi koristio samo jednodimenzijonalne nizove od r unora za pohranu $B(k,t)$, prepisivanjem uzastupnih stupaca.

4 Primjena B-spline

Prije nego što krenemo s primjerima i geometrijskom interpretacijom, definirajmo još neke potrebne pojmove.

Definicija 2 *B-spline krivulja stupnja $r-1$ (reda r) povezana poligonom $\mathcal{P}$ je*

$$S_n[\mathcal{P}] = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,r}(x), \quad 0 \leq x_n \tag{44}$$

zadana radiobom $t_0, t_1 \ldots, t_n$ tako da je $t_i < t_{i+1}$.
Periodična ili zatvorena B-spline krivulja nastaje ukoliko je funkcija B-spline definirana raz-diobom $t_0, t_1, \ldots, t_n$, $\quad t_i < t_{i+1}$ gdje je

$$x_i = x_{(i-r/2)modx_n} \tag{45}$$

Tumačenje predhodnog algoritma geometrijski dovodi do konstruktivne metode za određivanje točke B-spline krivulje. Formula (31) u uvjetima vrhova poligona P_i je oblika

$$P_i^{[j]}(x) = \begin{cases} P_i, & j = 0 \\ \lambda P_i^{[j-1]}(x) + (1-\lambda)P_{i-1}^{[j-1]}(x), & j > 0, \end{cases} \tag{46}$$

gdje je

$$\lambda = \frac{x - t_i}{t_{i+r-j} - t_i}$$

Primjer 2 *Neka je zadan zatvoren poligon $P_0 P_1 \cdots P_{12}$ želimo pronaći točke B-spline krivulje reda $r = 4$ koji odgovara $x = 7.6$, $t_i = i$, za $i = 0, \ldots, 13$ prema (45) vrijedi*

$$t_i = t_{(i-2)mod13} = (i-2)mod13$$

Prema algoritamu $t_i \leq x < t_{i+1}$ pa $t_i = 7$ zadovoljava uvjet, tj. $i = 9$. Prema (46) za $j = r-1$ vrijedi $P_i^{[r-1]}(x) = P_9^{[3]}(7.6)$
Primjenom rekurzivnog algoritma vrijedi:

$$\begin{aligned} P_9^{[3]}(7.6) &= \lambda P_9^{[2]}(7.6) + (1-\lambda)P_8^{[2]}(7.6) \\ &\quad \textit{gdje} \ \ \lambda = \frac{x - t_9}{t_{10} - t_9} = \frac{7.6 - 7.0}{8 - 7} = \frac{0.6}{1} = 0.6 \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} P_9^{[2]}(7.6) &= \lambda P_9^{[1]}(7.6) + (1-\lambda)P_8^{[1]}(7.6) \\ &\quad \textit{gdje} \ \ \lambda = \frac{x - t_9}{t_{11} - t_9} = \frac{7.6 - 7.0}{9 - 7} = \frac{0.6}{2} = 0.3 \end{aligned} \tag{48}$$

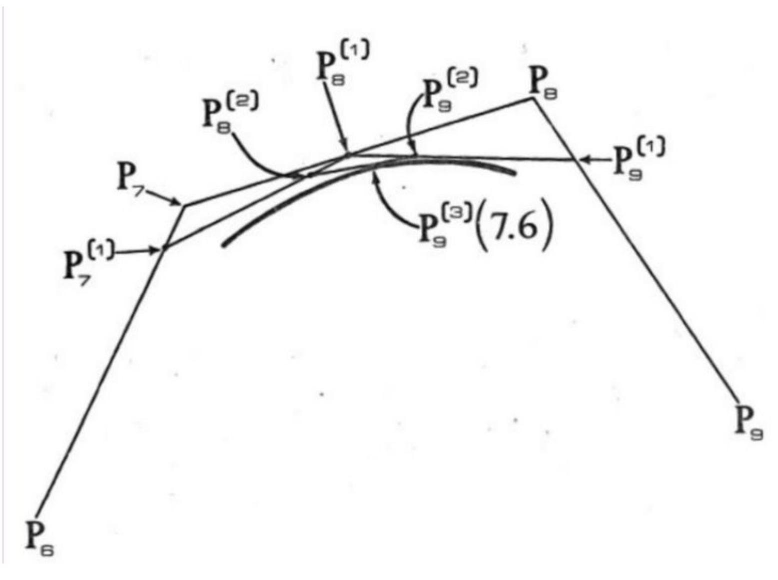
$$\begin{aligned} P_8^{[2]}(7.6) &= \lambda P_8^{[1]}(7.6) + (1-\lambda)P_7^{[1]}(7.6) \\ &\quad \textit{gdje} \ \ \lambda = \frac{x - t_8}{t_{10} - t_8} = \frac{7.6 - 6}{8 - 6} = \frac{1.6}{2} = 0.8 \end{aligned} \tag{49}$$

$$
\begin{aligned}
P_9^{[1]}(7.6) &= \lambda P_9 + (1-\lambda)P_8 \\
&\qquad gdje \quad \lambda = \frac{x - t_9}{t_{12} - t_9} = \frac{7.6 - 7.0}{10 - 7} = \frac{0.6}{3} = 0.2
\end{aligned} \tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
P_8^{[1]}(7.6) &= \lambda P_8 + (1-\lambda)P_7 \\
&\qquad gdje \quad \lambda = \frac{x - t_8}{t_{11} - t_8} = \frac{7.6 - 6.0}{9 - 6} = \frac{1.6}{3} = 0.53
\end{aligned} \tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
P_7^{[1]}(7.6) &= \lambda P_7 + (1-\lambda)P_6 \\
&\qquad gdje \quad \lambda = \frac{x - t_7}{t_{10} - t_7} = \frac{7.6 - 5.0}{8 - 5} = \frac{2.6}{3} = 0.87
\end{aligned} \tag{52}
$$

Na Slici 5 vidimo dane vrhove i pripadnu interpolaciju našeg primjera.



Slika 5: Geometrijska konstrukcija B-spline

Ako uzmemo da je polinom $\mathcal{P}$ po djelovima linearna funkcija $\mathcal{F}$, pri čemu je $\mathcal{F}$ definirana tako da B-spline krivulja je parametarska aproksimacija B-spline na $\mathcal{F}$, pa prema (20) i (21) $\mathcal{F}$ zapisati kao

$$\mathcal{F}(\xi_i) = \mathcal{P}_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

gdje je

$$\xi_i = \frac{1}{r-1}(t_{i+1} + t_{i+2} + \cdots + t_{i+r-1}) \tag{53}$$

Primjer 3 *Neka je zadan otvoren B-spline reda* $r = 4$ *određen poligonom* $P_0 P_1 \cdots P_5$ *i* $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0 < t_4 = 1 < t_5 = 2 < t_6 = t_7 = t_8 = t_9 = 3$
Prvo ćemo pomoću 53 izračunati vrijednosti ξ_i*:*

$$\xi_0 = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$
$$\xi_1 = \frac{1}{3}(t_2 + t_3 + t_4) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$
$$\xi_2 = \frac{1}{3}(t_3 + t_4 + t_5) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$
$$\xi_3 = \frac{1}{3}(t_4 + t_5 + t_6) = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$
$$\xi_4 = \frac{1}{3}(t_5 + t_6 + t_7) = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3}$$
$$\xi_5 = \frac{1}{3}(t_6 + t_7 + t_8) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

Funkcija $\mathcal{F}$ *tada ima vrijednost:*

$$\mathcal{F}(0) = P_0 \quad \mathcal{F}(1/3) = P_1 \quad \mathcal{F}(1) = P_2$$
$$\mathcal{F}(2) = P_3 \quad \mathcal{F}(8/3) = P_4 \quad \mathcal{F}(3) = P_6$$

Literatura

[1] Richard Riesenfeld, Applications of B-spline approximation to geometric problems of computer-aided design 1973.

[2] deBoor, C. On Calculating with B-splines. Journal of Approximation Theory, vol. 6 1972.

[3] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Springer Verlag, New York, 1993.