SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Marta Ivanišić

# ZAKLJUČIVANJE U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Osijek, 2017.

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

SMJER: Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

**Marta Ivanišić**

Diplomski rad

# Zaključivanje u nastavi matematike

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2017.

# Sadržaj

# Uvod

Temeljna zadaća nastave matematike je da učenici usvoje matematička znanja potrebna za donošenje odluka u različitim situacijama u svakodnevnom životu. Nastava matematike učenicima treba omogućiti primjenu matematike i matematičkog sporazumijevanja u različitim situacijama u životu, gdje će svladati nove i različite matematičke koncepte te rješavati različite probleme. Matematika je temelj daljnjeg obrazovanja i cjeloživotnog učenja. Jedan od općih ciljeva matematičkog obrazovanja je i razvoj sposobnosti logičkog mišljenja, zaključivanja, razumijevanja i generaliziranja te matematičke argumentacije. U ovom diplomskom radu govorit ćemo o zaključivanju i razumijevanju koje se pojavljuje u srednjoj školi. U prvom poglavlju definiramo zaključivanje i razumijevanje i govorimo o njihovoj važnosti u nastavi matematike. Također, tu govorimo i o navikama zaključivanja te o njihovom daljnjem razvijanju. Na kraju prvog poglavlja, riječ je o tehnologiji koja može pomoći kod razvijanja navika zaključivanja i razumijevanja u nastavi matematike.

Drugo poglavlje govori o tome kako bi nastavnici trebali podučavati matematiku s razumijevanjem. U ovom poglavlju riječ je o nastavi matematike koja je bazirana na pismenosti. Vrlo je važno da učenici razumiju što čitaju i da prema tome donose zaključke. Proces višestrukog čitanja zadatka detaljno je opisan na primjeru.

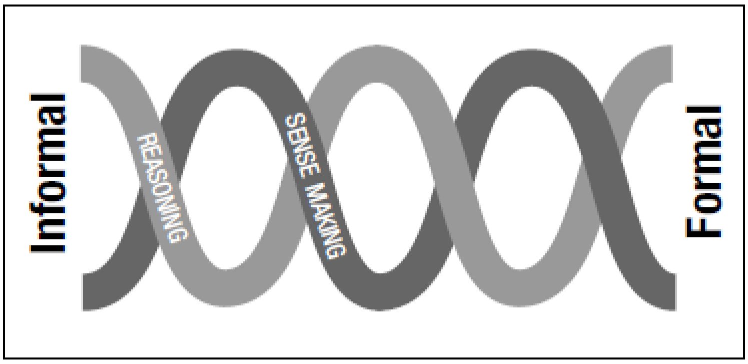
U sljedećem poglavlju riječ je o semantičkom i sintaktičkom zaključivanju i njihovoj vezi. Najveći problem kod učenika predstavlja uporaba sintaktičkog zaključivanja kada bi trebali koristiti semantičko zaključivanje. Upravo te greške kod zaključivanja govore puno o učeničkom razumijevanju danog problema.

U zadnjem poglavlju riječ je o kreativnom i imitativnom zaključivanju. Nastava matematike većinom je fokusirana na prezentiranju algoritama za rješavanje rutinskih zadataka, a uopće se ne bazira na rješavanju problemskih zadataka koji simuliraju kreativno zaključivanje. U radu je zato riječ o istraživanju koje je proučavalo simulaciju kreativnog zaključivanja i o rezultatima toga istraživanja.

# 1 Zaključivanje i razumijevanje

Generalno govoreći, zaključivanje se može smatrati procesom dolaženja do zaključaka na temelju dokaza ili navedenih pretpostavki. Iako je zaključivanje važan dio svake znanosti, ono ima temeljnu važnost u matematici. Često se shvaća da zaključivanje u matematici obuhvaća samo formalno zaključivanje i dokaze, u kojima su zaključci logički izvedeni iz pretpostavki i definicija. Međutim, matematičko zaključivanje može se pojaviti u različitim oblicima, od neformalnih objašnjenja i opravdanja do formalne dedukcije[1], ali isto tako i deduktivnih zapažanja. Zaključivanje često započinje s istraživanjem različitih pretpostavki i djelomičnim objašnjavanjem prije postizanja rezultata.

Razumijevanje definiramo kao razvijanje shvaćanja za stanje, kontekst ili koncept koje povezujemo s postojećim znanjem. U praksi su zaključivanje i razumijevanje isprepleteni duž kontinuuma od neformalnog zapažanja do formalne dedukcije kao što se može vidjeti na slici 1.



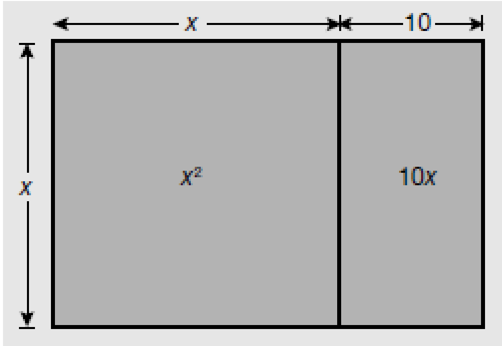

Slika 1. *Povezanost zaključivanja i razumijevanja*

Formalno zaključivanje može biti temeljeno na razumijevanju u kojem identificiramo zajedničke elemente kroz niz opažaja i shvaćanja i onda te zajedničke elemente povezujemo s prethodno doživljenim situacijama.

**Primjer 1.** *Pronađi način rješavanja kvadratne jednadžbe $x^2 + 10x = 144$ koristeći geometriju (površinu).*

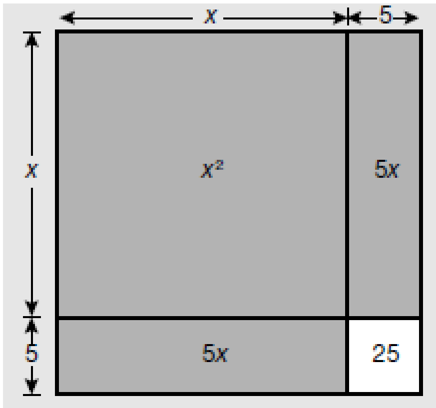
*U učionici (komunikacija na satu matematike):*
Nastavnik: *Može li netko odrediti koliku površinu zauzima ovaj izraz: $x^2 + 10x$?*
Učenik 1: *$x^2$ je površina kvadrata sa stranicom duljine $x$, a $10x$ je površina pravokutnika s stranicama duljine $x$ i $10$. Zato možemo staviti kvadrat i pravokutnik zajedno ovako (slika 2). Ali ne vidim kako to pomaže da odredimo površinu cijelog izraza.*
Učenik 2: *Kada bi znali kolika je površina kvadrata onda bi samo korjenovali i dobili koliki je $x$.*
Nastavnik: *Postoji li način preraspodjele lika tako da bude što sličniji kvadratu?*

[1]Dedukcija je oblik zaključivanja pri kojemu se od jednog općeg suda i jednog posebnog ili pojedinačnog suda dobiva novi, manje općenit, poseban ili pojedinačan sud.




Slika 2. *Prvi prikaz površine danog izraza*

Učenik 1: *Znam! Ako podijelimo postojeći pravokutnik na dva pravokutnika širine* 5*, onda možemo svaki pravokutnik staviti na jednu stranu kvadrata ovako (vidjeti sliku* 3*)!*




Slika 3. *Drugi prikaz površine danog izraza*

Učenik 2: *Ali to opet nije kvadrat, nedostaje mu dio.*
Nastavnik: *Kolika je površina dijela koji nedostaje?*
Učenik 2: *Mora biti* 25*, zato što je bijeli kvadrat poravnat s krajevima pravokutnika, pa mu je stranica duljine* 5*. A kako je površina sivog područja jednaka* 144*, cijelo područje velikog kvadrata je* $144 + 25 = 169$*.*
Učenik 1: *A to znači da je duljina stranice tog kvadrata* 13*, pa je* $x + 5 = 13$*, što znači da je* $x = 8$*.*
Učenik 2: *Zar ne bi trebalo biti i neko drugo rješenje budući da* $x + 5$ *duljina stranice tog kvadrata?*

Kako se razumijevanje razvija, ono uključuje sve više elemenata. U primjeru 1, učenike tražimo da riješe kvadratnu jednadžbu, oni koriste geometriju kako bi nadopunili kvadrat, ali onda, shvaćajući da mora postojati više od jednog rješenja, proširuju znanje, koje su razvili učeći algebru, kako bi pronašli oba rješenja kvadratne jednadžbe. Matematičko zaključivanje i razumijevanje su važni ishodi nastave matematike, kao i važna sredstva pomoću kojih učenici upoznaju i bolje shvaćaju matematiku.

## 1.1 Važnost zaključivanja i razumijevanja

Dijelovi matematike kao što su rješavanje problema[2], zaključivanje i dokazivanje, povezivanje, komunikacija i prezentacija jedino su mogući ako se matematika razumije i ako se zaključuje kao što je gore definirano. Rješavanje problema i dokazivanje je nemoguće bez obrazloženja, a upravo su rješavanje problema i dokazivanje načini na koje učenici razvijaju matematičko zaključivanje i razumijevanje matematičkih ideja. Upravo zato komunikacija, povezivanje i prezentacije učenika moraju uključivati zaključivanje i razumijevanje.

Dokaz je komunikacija formalnog zaključivanja izgrađenog na temeljima razumijevanja, što je važan ishod matematičkog zaključivanja. Dokaz može:

- objasniti zašto je određeni matematički rezultat istinit,
- razviti nezavisnost kod učenika pružajući potrebne vještine za procjenu valjanosti vlastitog i tuđeg zaključivanja, i
- otkriti veze i pružiti uvid u temeljnu strukturu matematike.

Bez obzira na specifični izgled koji svaki dokaz ima, učenici mogu koristiti formalno zaključivanje kako bi povezali prethodno naučeno znanje, proširili razmišljanje, razvili artikulaciju i potaknuli daljnje razmišljanje.

Na srednjoškolskoj razini zaključivanje i razumijevanje su od posebne važnosti, ali povijesno gledano, zaključivanje je u nastavnom planu i programu srednjih škola ograničeno na odabrana područja, a razumijevanje u mnogim slučajevima uopće nije prisutno. Međutim, uključivanje razumijevanja i zaključivanja u nastavni plan i program može pomoći učenicima u organiziranju svojega znanja na načine koji poboljšavaju razvoj numeričkog razumijevanja, algebarske tečnosti, funkcijskih odnosa, geometrijskog zaključivanja i statističkog razmišljanja. Kada učenici povezuju novo gradivo sa svojim već postojećim znanjem, vjerojatnije je da će razumjeti i upamtiti novu informaciju. Bez konceptualnog razumijevanja učenje novog gradiva postaje sve teže jer ne postoji mreža prethodno naučenih koncepata i vještina za koje novo gradivo možemo vezati. Upravo se zato postupci učenja mogu zaboraviti onoliko brzo koliko im je trebalo da se nauče. Preusmjeravanje na zaključivanje i razumijevanje u nastavnom planu i programu će povećati shvaćanje i poticati razmišljanje.

## 1.2 Zaključivanje kao osnova matematičke kompetencije

Zaključivanje i razumijevanje nužni su za razvoj matematičke kompetencije. Razumijevanje i konceptualno shvaćanje, tj. razumijevanje matematičkih pojmova, operacija i odnosa, su međusobno povezani. Proceduralna tečnost, tj. vještina izvršavanja postupaka na fleksibilan, precizan, učinkovit i odgovarajući način, uključuje učenje s razumijevanjem i prepoznavanje koji postupak treba odabrati, kada ga treba odabrati i u koju svrhu ga odabrati. Kada nema zaključivanja, učenici mogu ispravno provoditi postupke, ali mogu i hirovito izreći netočno ili neutemeljeno pravilo. Takvi učenici shvaćaju postupke kao korake koje im je rečeno da trebaju koristiti umjesto da ih shvate kao niz koraka izabranih iz određenog razloga koji su utemeljeni na nekom matematičkom načelu. Bez razvijanja shvaćanja postupaka koji su ukorijenjeni u zaključivanju i razumijevanju, učenici će biti u stanju ispravno izvršiti postupke, ali će ih

[2]Problem u nastavi matematike izvorno je grčkog podrijetla i znači: teorijsko ili praktično pitanje koje treba riješiti, sporno pitanje, teškoća, težak zadatak, zadaća uopće, zagonetka.

smatrati samo kao niz „trikova“ koji služe za rješavanje zadataka. Kao rezultat dobit ćemo učenike koji će imati poteškoća pri odabiru prikladnog postupka u određenom problemu ili bi njihova sposobnost rješavanja jednostavnijih zadataka isparila u složenijim situacijama. Prava proceduralna tečnost zahtijeva savladavanje tehnčkih vještina i razvijanje razumijevanja potrebnog za njihovu upotrebu na odgovarajući način. Strateške sposobnosti, tj. sposobnosti formuliranja, prikazivanja i rješavanja matematičkih problema, i prilagodljivo zaključivanje, tj. sposobnost logičkog razmišljanja, objašnjavanja i opravdavanja, su direktno vezane za navike zaključivanja.

Razvoj „produktivne naravi“, tj. vjerovanja da je matematika razumna, korisna i vrijedna učenja, zajedno s vjerovanjem u marljivost i vlastitu učinkovitost, kod učenika cilj je svake nastave matematike. Kada učenici postignu taj cilj, onda matematiku shvaćaju kao logično i razumljivo područje. Taj se cilj može postići samo ako se učenici osobno uključe u matematičko zaključivanje i razumijevanje kada uče neke matematičke sadržaje.

## 1.3 Uključivanje zaključivanja i razumijevanja u nastavu

Zaključivanje i razumijevanje trebaju biti sastavni dio svake nastave matematike. U takvom okruženju nastavnici i učenici pitaju i odgovaraju na pitanja kao što su: „Što se ovdje događa?“ i „Zašto to mislite?“. Uvođenje zaključivanja i razumijevanja u nastavu ne bi trebao biti dodatni teret nastavnicima koji u razredu imaju učenike kojima je problem savladati i sam postupak rješavanja zadataka. Naprotiv, zaključivanje predstavlja životno bitnu osnovu za shvaćanje i nastavak učenja. U današnje vrijeme mnogi učenici imaju poteškoća u učenju matematike jer smatraju da ona nema smisla. Bez povezanosti koje pružaju zaključivanje i razumijevanje, može doći do beskonačnog kruga u kojemu nastavnici ponovno uče učenike gradivo koje je već bilo naučeno. S posebnom pažnjom i planiranjem nastave nastavnici mogu zainteresirati učenike za nastavu matematike u bilo kojoj srednjoj školi. To mogu napraviti ako se osobno potrude da u nastavi primijene zaključivanje i razumijevanje i tako učenicima pokažu kako mogu sami naučiti zaključivati, a ne da samo promatraju zaključivanje koje provodi netko drugi. Štoviše, kako bi se postigao ovaj cilj nastavnici bi u nastavni plan i program srednjih škola trebali strateški uključiti i tehnologiju.

Što točno znači uključiti zaključivanje i razumijevanje u nastavu matematike? Primjer 2 pokazuje kako se zaključivanje i razumijevanje može primijeniti u podučavanju formula jer formule mnogi učenici smatraju besmislenim i teškim za upamtiti. Prvi slučaj prikazuje što se često događa kada tražimo učenike da se prisjete neke formule koju su učili bez razumijevanja.

**Primjer 2.** *Formula za udaljenost dviju točaka*

<u>*Prvi slučaj:*</u>

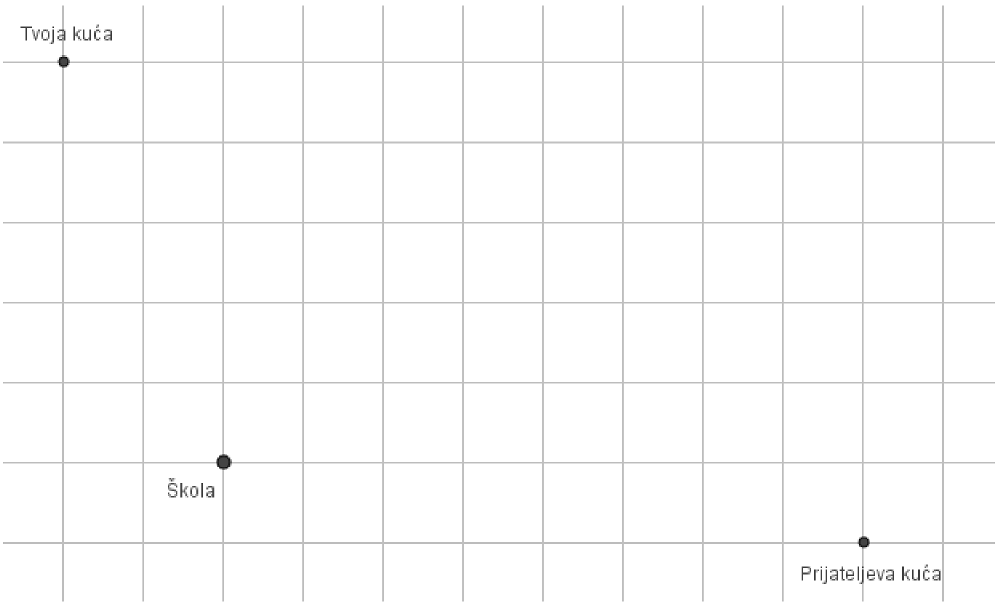
Nastavnik: *Današnja nastavna jedinica zahtijeva izračunavanje udaljenosti između središta kružnice i točke na kružnici kako bi odredili radijus te kružnice. Tko se sjeća kako smo računali udaljenost između dvije točke?*
Učenik 1: *Ne postoji li neka formula za to?*
Učenik 2: *Mislim da je $x_1$ plus $x_2$ na kvadrat, ili nešto slično tome.*
Učenik 1: *O da, sjećam se! Ima neki veliki drugi korijen, ali se ne sjećam što ide ispod njega.*
Učenik 3: *Znam ja! Ide $x_1$ plus $x_2$ pa sve kroz 2. Zar ne?*

Učenik 4: *Ne, to je formula za polovište dužine.*
*(Rasprava se nastavlja u istom smjeru sve dok nastavnik ne podsjeti razred koja je tražena formula.)*

*Sljedeće godine nastavnik koristi drugačiji pristup koji uključuje učenike u rješavanje ovog problema. U sljedećem slučaju vidimo učenike koji razmišljaju o matematici, povezuju ono što uče sa svojim postojećim znanjem i razumiju što formula za udaljenost znači.*

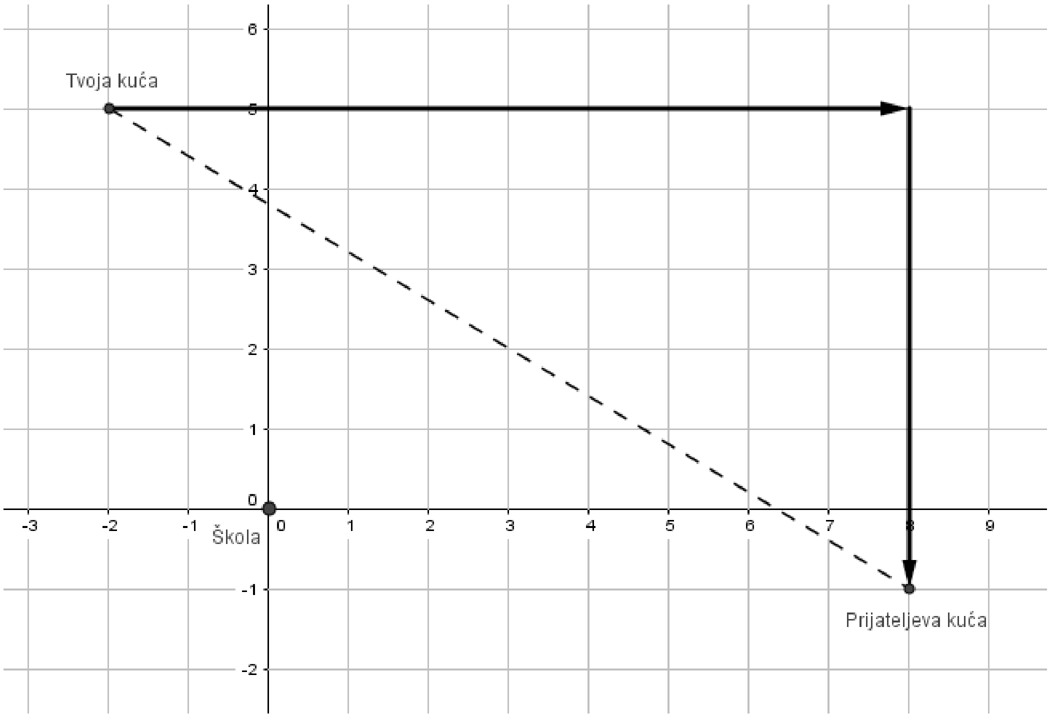
*Drugi slučaj:*

Nastavnik: *Pogledajmo ovaj primjer u kojem trebamo pronaći udaljenost između dva mjesta na karti (slika* 4*). Pretpostavimo da karta prikazuje našu školu; zatim vašu kuću, koja se nalazi dvije ulice zapadno i pet ulica sjeverno od škole; i kuću vašeg najboljeg prijatelja ili prijateljice, koja se nalazi osam ulica istočno i jednu ulicu južno od škole. Ako grad ima ovako ravnomjerno raspoređene okomite ulice, koliko ulica bismo morali voziti da bi došli od vaše kuće do kuće vašeg prijatelja/prijateljice?*
Učenik 1: *Morali bi voziti deset ulica istočno i šest ulica južno, pa pretpostavljam da bi to bilo šesnaest ulica. Zar ne?*
Nastavnik: *A što ako bismo mogli koristiti zrakoplov kako bi direktno došli do kuće vašeg prijatelja/prijateljice? Kako bi pronašli udaljenost koju bi ptica preletjela? Zamolite roditelje da vam pomognu odrediti stvarnu udaljenost vaše kuće i kuće vašeg prijatelja/prijateljice, smjestite kuće u koordinatni sustav i pokažite put kojim bi došli od jedne do druge kuće. Sada probajte pronaći udaljenost između kuća koju bi preletjeli zrakoplovom.*




Slika 4. *Ulice grada u kojem su smještene kuće i škola*

Učenik 1: *Smijemo li smjestiti školu u ishodište koordinatnog sustava? Onda bi moja kuća bila u točki* $(-2, 5)$*, a prijateljeva kuća u točki* $(8, -1)$.
Učenik 2: *Da, to zvuči dobro. Možemo povući put kroz ulice koje povezuju naše kuće i povući dužinu koja povezuje moju kuću i prijateljevu kuću (slika* 5*).*




Slika 5.

Učenik 1: *Možda bismo mogli izmjeriti udaljenost između kuća ravnalom i tako pronaći udaljenost.*
Učenik 3: *Samo malo. Upravo si skicirao pravokutni trokut, zato što su ulice okomite.*
Učenik 4: *Znači da možemo koristiti Pitagorin poučak:* $10^2 + 6^2 = c^2$*, pa je* $c = \sqrt{136}$.
Učenik 2: *Ali koliko bi to onda ulica bilo?*
Učenik 3: *Zar to nije između* 11 *i* 12 *ulica, budući da je* $121 < 136 < 144$*? Zapravo, vjerojatno je bliže* 12*, budući da je broj* 136 *bliže broju* 144.
*(Nastavnik nastavlja raspravu kako bi promotrio i druge primjere i na kraju kako bi došao do opće formule za udaljenost.)*

*Nakon što su učenici shvatili formulu za udaljenost iz perspektive zaključivanja i razumijevanja, sljedeće godine nastavnik povećava njihovo poimanje ove formule i zašto je ona točna. Na taj način nastavnik povećava vjerojatnost da će se učenici u budućnost sjetiti formule i iskoristiti ju kada im bude potrebna.*

## 1.4 Navike zaključivanja

Usredotočenje na zaključivanje i razumijevanje u nastavi matematike znači da matematičke teme koje se obrađuju nisu dovoljne. Učenici uz matematičke teme također moraju iskusiti i razvijati navike matematičkog zaključivanja. Navika zaključivanja je produktivan način razmišljanja koji postaje čest u procesima kao što su matematička istraživanja ili matematičko razumijevanje. Sljedeći popis navika zaključivanja predstavlja vrste razmišljanja koje bi trebale postati rutinske i potpuno očekivane na nastavi matematike u svim razredima srednje škole.

Prikazanu listu ne treba gledati kao novi skup tema koje treba podučavati u već ionako pretrpanom kurikulumu. Umjesto toga navike zaključivanja treba integrirati u kurikulum kako bi osigurali da učenici mogu razumjeti i koristiti ono čemu ih se podučava.

- *Analiziranje problema*, npr.
  - *identificiranje bitnih matematičkih pojmova, postupaka ili prikaza* koje otkrivaju važne informacije o problemu i pridonose njegovom rješenju (npr. odabir modela za simuliranje nekog eksperimenta);
  - pažljivo *definiranje bitnih varijabli i uvjeta*, uključujući mjerne jedinice ukoliko je potrebno;
  - *traženje uzoraka i odnosa* (npr. sustavno ispitivanje slučajeva ili stvaranje prikaza podataka);
  - *traženje skrivenih struktura* (npr. crtanje pomoćnih pravaca u geometrijskim tijelima ili nalaženje jednakih izraza koji otkrivaju različite poglede na problem);
  - *uzimanje u obzir specijalne slučajeve ili jednostavnije srodnosti*;
  - *primjenjivanje prethodno naučenih pojmova* na nove probleme, po potrebi prilagođavanjem ili proširivanjem tih pojmova;
  - *razvijanje početnih zaključaka i određivanje pretpostavki*, uključujući predviđanje što bi rješenje problema moglo uključivati ili stavljanje ograničenja na rješenje;
  - odlučivanje je li potreban statistički pristup.
- *Provedba strategije*, npr.
  - *provedba korisnih postupaka*;
  - *organiziranje rješenja*, uključujući izračune, algebarske "trikove" i prikaz podataka;
  - *razvijanje logičkih zaključaka* na temelju trenutnog napretka, provjera pretpostavki i proširivanje početnih zaključaka;
  - *praćenje napretka prema rješenju*, uključujući i razmatranje odabrane strategije i ostalih mogućih strategija.
- *Traženje i korištenje veza* između različitih matematičkih područja, različitih značenja i različitih prikaza.
- *Razmišljanje o rješenju problema*, npr.
  - *shvaćanje rješenja* na način koji odgovara problemu, uključujući donošenje odluka pod traženim uvjetima;
  - *razmatranje razumnosti rješenja*, uključujući provjeravanje odstupaju li neka rješenja iz intervala točnosti;
  - *ponovno provjeravanje početnih pretpostavki* o prirodi rješenja, pazeći na mogućnost specijalnog ili stranog slučaja;
  - *opravdati ili potvrditi rješenje*, kroz dokazivanje ili inferencijalno zaključivanje (dio je inferencijalne statistike koja je skup metoda kojima se donosi zaključak o značajkama osnovnoga skupa na temelju slučajnog uzorka kao njegova podskupa);
  - *dolaženje do zaključaka na temelju dokaza* za statističko rješenje;

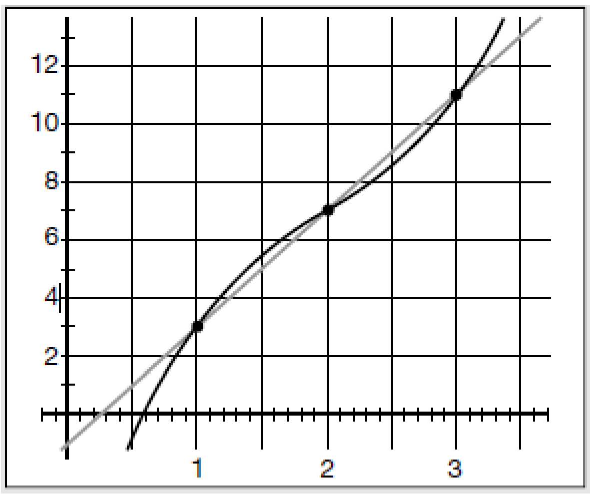
- *razmatranje različitih pristupa* rješavanju problema, uključujući i one koji su predloženi od drugih;
- *izbacivanje nepotrebnih podataka* kako bi se moglo učinkovito komunicirati;
- *generalizacija rješenja* na širu klasu problema i traženje povezanosti s ostalim problemima.

Mnoge od ovih navika zaključivanja mogu se uklopiti u različite kategorije koje su navedene, a od učenika se očekuje da po potrebi koriste navike zaključivanja kako bi ih koristili i u prirodnom okruženju. U nastavku se nalaze primjeri kako se navedene navike zaključivanja koriste u nastavi matematike u srednjim školama.

**Primjer 3.** *U prethodnim razredima mogli ste vidjeti zadatke u kojima vas traže da nađete sljedeći broj u nizu, kao što je npr.* $3, 7, 11$. *Jedan mogući odgovor je* $15$, *ako pretpostavimo da smo niz generirali računajući izraz* $f(x) = 4x - 1$ *kada je* $x = 1, 2, 3$. *Postoji li možda još koje rješenje?*

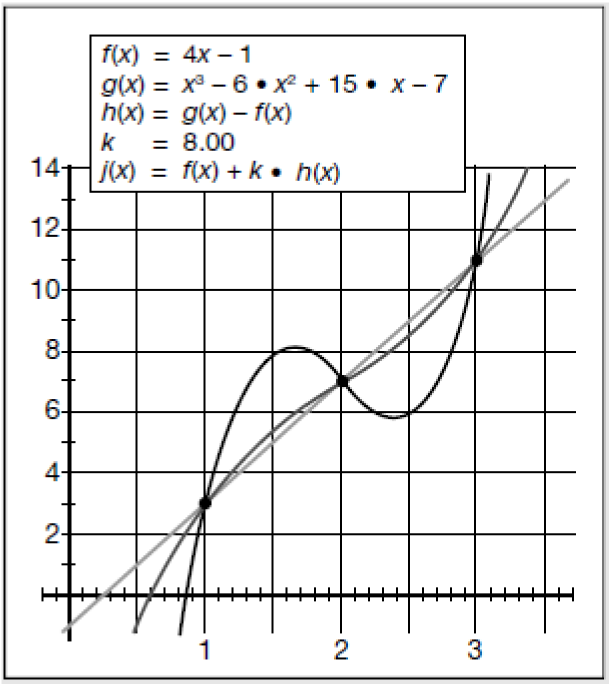
*Na nastavi (četverogodišnje srednje škole):*

Nastavnik: *Nađite niz koji je generiran funkcijom* $g(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 7$ *kada je* $x = 1, 2, 3$.
Učenik: *Ja dobivam* $g(1) = 3$, $g(2) = 7$, $g(3) = 11$. *To je niz koji ste spominjali.*
Nastavnik: *Koji bi bio sljedeći broj u nizu ako bi koristili* $g(x)$*?*
Učenik: *Dobili bi* $g(4) = 21$. *To je različito od onoga što bi dobili kada bi koristili* $f(x)$.
Nastavnik: *Možete li pronaći druge polinome koji generiraju niz* $3, 7, 11$*?*
Učenik: *Ne znam ni kako ste na početku došli do ovog polinoma* $g$.
Nastavnik: *Što znači kada kažemo da je* $g(1) = 3$*?*
Učenik: *To znači da je* $y$ *vrijednost jednaka* $3$ *kada je* $x$ *vrijednost jednaka* $1$.
Nastavnik: *Kako onda dvije različite funkcije,* $f$ *i* $g$, *imaju iste vrijednosti za* $x = 1, 2, 3$*?*
Učenik: *Pretpostavljam da bi grafovi obje te funkcije trebali imati iste vrijednosti... Ali onda to znači da se oni moraju sjeći u te tri točke! Čekajte da to provjerim (slika* 6*). Da, kada skiciramo grafove vidimo da graf funkcije* $f(x)$ *siječe graf funkcije* $g(x)$ *kada je* $x = 1, 2, 3$.



Slika 6. *Grafovi funkcija* $f(x)$ *i* $g(x)$

Nastavnik: *Vidite li sada kako bi mogli naći još jedan polinom koji zadovoljava početni niz?*
Učenik: *Možda da nađemo način da promijenimo oblik kubne funkcije, ali zadržimo iste točke presjeka.*
Nastavnik: *Kako bi to prikazao algebarski?*
Učenik: *Mogu, na primjer, pronaći razliku između* $f(x)$ *i* $g(x)$*, što je* $g(x) - f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$*. Utrostručiti ću rezultat i dodati ga na* $f(x)$ *i dobiti* $4x + 1 + 3(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 3x^3 - 18x^2 + 37x - 19$.
Nastavnik: *Odlično. Sada trebamo shvatiti što se ovdje stvarno događa. Ima li nešto posebno u polinomu* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ *što omogućava da ovo vrijedi?*
Učenik: *Mislim da nema.*
Nastavnik: *Probajte ga faktorizirati.*
Učenik: *Dobivam* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$*. Oh, pa vidim sada. Kada pogledamo faktorizirani oblik vidimo da je razlika između* $f(x)$ *i* $g(x)$ *jednaka* $0$ *u točkama* $x = 1, 2, 3$*. Na taj način možemo dobiti puno polinoma koji generiraju isti niz samo zbrajanjem višekratnika ovog polinoma na* $f(x)$.
Nastavnik: *Koji je opći oblik takvog polinoma?*
Učenik: *To je* $4x + 1 + k(x - 1)(x - 2)(x - 3)$*, gdje* $k$ *može biti bilo koji realni broj.*




Slika 7. *Opći oblik danog polinoma*

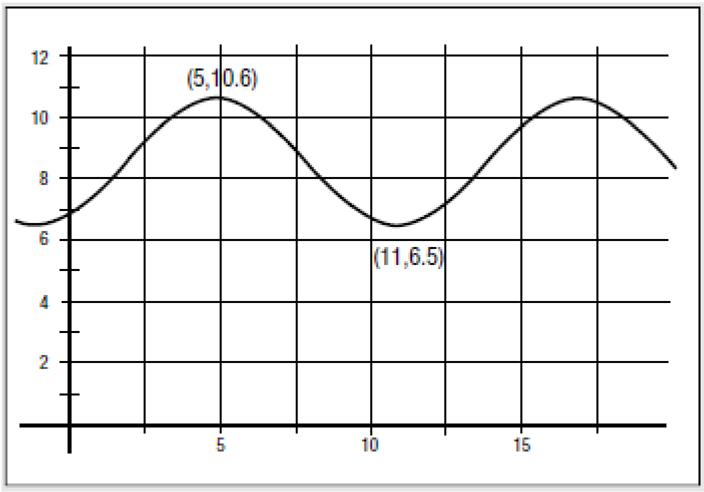
**Primjer 4.** *Kapetan brodice mora uzeti u obzir morske mijene prilikom ulaska u luku jer se dubina vode može znatno razlikovati ovisno o dobu dana. Pretpostavimo da se plima u nekoj luci pojavljuje u* $5:00$ *sati, kada je voda duboka* $10.6$ *m, a oseka u* $11:00$ *sati, kada je dubina vode* $6.5$ *m. Razvijte matematički model koji će predvidjeti dubinu vode kao funkciju ovisnu o vremenu koje je proteklo od ponoći.*

*Na nastavi (četverogodišnje srednje škole):*

*Učenici koji rade na ovome problemu trebali bi imati iskustva s transformacijama linearne i kvadratne funkcije te bi trebali biti upoznati s grafovima trigonometrijskih*

*funkcija.*
*Slijedi primjer učeničkog zaključivanja na primjeru ovog zadatka:*

Nastavnik: *Dana su nam samo dva uređena para, pa postoji puno grafova koji bi mogli zadovoljiti naše podatke. Koji bi algebarski model imao smisla u našem zadatku?*
Učenik 1: *Dvije točke određuju pravac, zar ne? Ne možemo li jednostavno povezati te dvije točke?*
Učenik 2: *Ne možemo jer se razina vode ne nastavlja smanjivati zauvijek, već se svaki dan povećava i ponovno smanjuje.*
Učenik 3: *To vjerojatno znači da će rezultat biti jedan od onih valovitih grafova.*
Učenik 1: *O da, kladim se da će to biti graf sinusa ili kosinusa. Ali kako da znamo koji je od ta dva?*
Učenik 3: *Probajmo nacrtati dio toga vala i vidjeti što iz toga možemo zaključiti.*
Učenik 2: *Ako se ova pojava ponavlja ovako svakih* 6 *sati, onda ćemo imati dva maksimuma i dva minimuma svaki dan. Pretpostavljam da onda period iznosi* 12 *sati.*
Učenik 3: *Da, a ako je maksimum i minimum grafa u* 10.6 *m i* 6.5 *m, onda bi amplituda trebala biti* 4.1 *metar, zar ne? Oh, samo malo – amplituda je samo polovica visine, pa to moramo promijeniti na* 2.05 *metara.*
Učenik 2: *Uredu, sada kada to znamo možemo vidjeti da je vertikalni pomak na pola puta između maksimuma i minimuma, što bi bilo na* 8.55 *metara (slika* 8*).*




Slika 8. *Grafički prikaz problema*

Nastavnik: *Odličan posao do sada. Sada trebate još malo poraditi na periodu i horizontalnom pomaku. Smatrate li da je lakše raditi sa sinusom ili kosinusom?*
Učenik 1: *Više mi se sviđa kosinus zato što se maksimum događa pet sati nakon ponoći, pa bi tako bilo lakše naći horizontalni pomak.*

*Ovaj razgovor bi se mogao voditi i u manjim grupa nakon čega bi slijedilo izlaganje svake grupe na koji su način promatrali problem i rasprava između tih grupa, što bi bilo najbolje napraviti. Učenici su mogli provjeriti točnost svojih rješenja pomoću dinamičkih matematičkih alata za prikaz grafova. Zanimljivo proširenje ovoga zadatka bilo bi da se model iskoristi za određivanje vremena tijekom kojega brodica sigurno ulazi i izlazi iz luke pri određenoj dubini mora.*

## 1.5 Razvijanje zaključivanja

Kada se zaključivanje ispreplića sa razumijevanjem i kada nastavnici pružaju potrebnu podršku, onda se može očekivati da učenici pokazuju napredak u svojem zaključivanju u razredu, u njihovim usmenom i pismenom radu, te u njihovom procjenjivanju kroz godine provedene u srednjoj školi. Zaključivanje i razumijevanje u srednjoj školi na nastavi matematike zahtijeva povećanje razine shvaćanja. Razine shvaćanja su:

1. *empirijsko* – uloga empirijskog shvaćanja je podržati, ali ne opravdati pretpostavku („Vrijedi u brojnim slučajevima.“);
2. *preformalno* – intuitivno objašnjavanje i djelomično argumentiranje koje pruža uvid u ono što se događa;
3. *formalno* – uloga formalne argumentacije (temelji se na logici) je u određivanju matematičkih sigurnosti (dokaza) ili određivanje statističkih zaključaka.

Dakle, ove razine prikazuju napredak od manje formalnog zaključivanja do više formalnog zaključivanja. Međutim, svaka razina ima svoju vrijednost. Učenici mogu kontinuirano mijenjati razine, čak i kada je riječ o istom matematičkom kontekstu. Mijenjanje između razina nije samo očekivano nego i poželjno kako bi učenici razumjeli kontekst i razlog odabranog puta do zaključka. Međutim, nastavnici imaju jako bitnu ulogu u poticanju učenika na istraživanje razina zaključivanja i razumijevanja.

### 1.5.1 Razvijanje navika zaključivanja u nastavi

Nastavnici mogu pomoći učenicima doseći višu razinu zaključivanja kroz dobar odabir zadataka i pitanja. Učenici tada mogu naučiti analizirati svoj pristup rješavanju problema, prepoznati prednosti i mane svojega pristupa i iskoristiti više formalno zaključivanje kako bi bolje formulirali i opravdali matematičke zaključke. Razvoj matematičkih navika zaključivanja trebao bi biti prioritet u nastavi matematike srednjih škola. Slijedi lista savjeta za razvoj ovih navika kod učenika:

- Pružiti zadatke u kojima učenici sami moraju nešto shvatiti.
- Zamoliti učenike da prepričaju problem svojim riječima, uključujući i sve pretpostavke koje su donijeli.
- Dati učenicima vremena da intuitivno analiziraju problem, dodatno ga istraže pomoću danog modela i onda nastavite s formalnijim pristupom tom problemu.
- Oduprijeti se potrebi reći učenicima kako riješiti problem kada postanu frustrirani; pronađite drugi način kako ih motivirati u njihovom razmišljanju i radu.
- Postavljajte učenicima pitanja koja će ih potaknuti na razmišljanje – npr. „Zašto to smijemo napraviti?“ ili „Kako to znate?“.
- Nakon što postavite pitanje, osigurajte dovoljno vremena za razmišljanje kako bi učenici mogli oblikovati vlastito zaključivanje.
- Potaknite učenike da postavljaju pitanja sebi, ali i drugima.
- Očekujte od učenika da usmeno i pismeno prenose svoje razmišljanje drugim učenicima, i da njihovo izražavanje bude matematički točno.

- Istaknite primjereno objašnjenje, primijetite što učenici shvaćaju te što ih čini učinkovitijima.
- Uspostavite razrednu klimu u kojoj učenici dijele svoje matematičke argumente i kritiziraju tuđe argumente na produktivan način.

Nastavnici bi trebali koristiti i druge izvore za određivanje zadataka osim udžbenika te prihvatiti različite tehnike ispitivanja kako bi kod učenika razvijali navike zaključivanja.

## 1.6 Tehnologija (koja pomaže kod zaključivanja i razumijevanja) u nastavi

Tehnologija je sastavni dio života ljudi, radnog mjesta, pa čak i mnogih suvremenih matematičkih istraživanja. Nastava matematike bi trebala odražavati stvarnost. Tehnologija može koristiti za unapređivanje zaključivanja i razumijevanja u nastavi matematike srednjih škola. Ona može biti osobito korisna u traženju uzoraka i odnosa te u stvaranju pretpostavki. Tehnologija može osloboditi učenike od konstantnog izračunavanja, dajući im slobodu i potrebu da razmišljaju strateški, kao što je navedeno u primjeru 3. Upotreba tehnologije za prikazivanje različitih načina rješavanja istog problema može pomoći pri povezivanju. Na taj način pružamo učenicima nove mogućnosti za poduzimanje matematički smislenih radnji te da jasno vide matematičke posljedice koje iz toga proizlaze. Tehnologija je plodno tlo za vježbanje razumijevanja i zaključivanja. Dinamika povezivanja sadržaja vidljiva je u primjeru 4. Tehnologija također može biti korisna u generalizaciji rješenja.

Korištenje tehnologije u nastavi ne bi trebalo zasjeniti razvoj proceduralnih vještina koje su potrebne učenicima za daljnji razvoj matematičkog znanja. Tehnologiju treba koristiti kao alat koji vodi do dubljeg razumijevanja matematičkih pojmova. Na nastavi u kojoj koristimo tehnologiju možemo dopustiti učenicima da sami odluče koji bi matematički alat mogli koristiti u određenoj situaciji. Učenici koji imaju mogućnost raspravljati koji matematički alat bi bio efikasniji češće će koristiti tehnologiju za pomoć pri rješavanju problema.

# 2 Podučavanje matematike s razumijevanjem

## 2.1 Zaključivanje, čitanje i procjena razvoja

Postoje tri glavna elementa podučavanja matematike: učenje s razumijevanjem (rješavanjem složenih zadataka riječima), čitanje matematičkih tekstova i procjena razumijevanja učenika. Pismenost pomaže svim učenicima u razumijevanju matematike. Svi učenici, čak i oni sa slabim matematičkim vještinama, mogu razviti vještine rješavanja problema i zaključivanja. Nastavnici mogu povezati proces matematičkog zaključivanja s procesom čitanja koji učenicima pomaže shvatiti koncept stvarnih i matematičkih problema. Problemski zadaci riječima pružaju nastavniku detaljnu procjenu učeničkih vještina, što zauzvrat pomaže nastavnicima u određivanju onoga što učenici ne shvaćaju te što bi trebali dodatno objasniti.

Vještina rješavanja problema, vještina zaključivanja i vještina razumijevanja najbolje se mogu naučiti ako je nastava matematike bazirana na pismenosti. Takav pristup se puno bolje pamti od vježbanja sličnih zadataka i pamćenja postupaka rješavanja zadataka. Ne samo da učenicima pomaže u vještinama dolaženja do matematičkih "trikova", nego učenici razumiju svaki korak toga "trika". Postoje tri glavne komponente ovoga pristupa. To su:

1. Korištenje složenih problemskih zadataka riječima za podučavanje matematičkih vještina tako da učenicima damo konkretan stvarni problem uz postupno primjenjivanje algebarskih operacija.

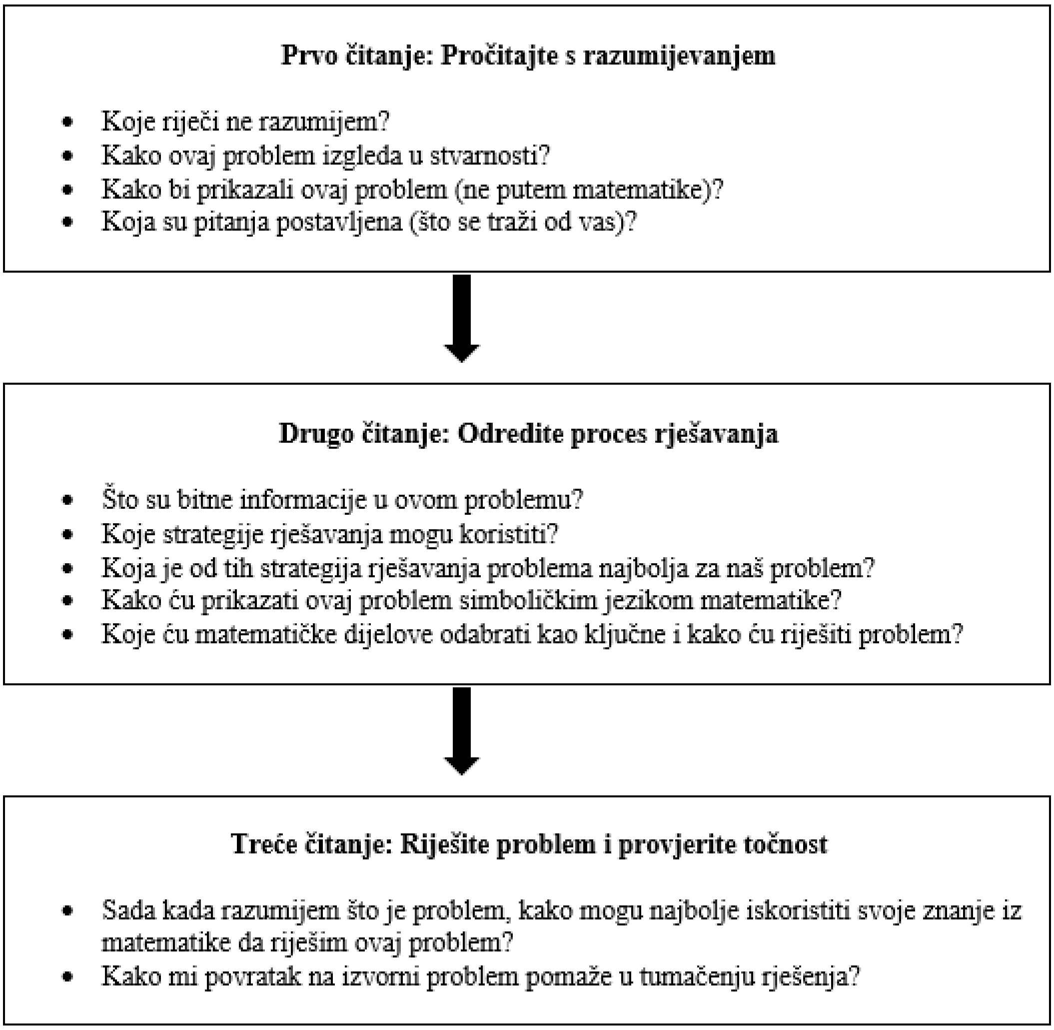
2. Obrada procesa čitanja i zaključivanja u matematičkom zadatku (podučavanje učenika kako da nauče teške pojmove).

3. Procjena i iznošenje učeničkog razmišljanja, te oblikovanje daljnjih koraka u skladu s procjenom.

Nastavnici matematike u svom formalnom obrazovanju nisu educirani za provođenje ovoga procesa, ali bi ga trebali primjenjivati. Kroz proces matematičkog čitanja učenici razvijaju algebarske vještine rješavajući problemske zadatke riječima (slika 9).

Učenici bi trebali barem dva puta pročitati problem prije nego ga pokušaju riješiti. Na taj način učenici razmišljaju o onome što čitaju. Postavljanjem otvorenih pitanja nastavnik povećava daljnje razumijevanje kod učenika i smanjuje moguće nejasnoće. Ne treba učenicima odmah reći koje je rješenje problema. Proces rješavanja problema treba podijeliti na manje dijelove kako bi svaki učenik mogao uspješno shvatiti problem.

Proces višestrukog čitanja problema može koristiti nastavniku za procjenu učeničkog konceptualnog razumijevanja. Primjer takvog čitanja opisan je u primjeru 5.




Slika 9. *Proces višestrukog čitanja problema*

**Primjer 5.**

***Prvo čitanje:***

*Nastavnik zamoli učenika da pročita problemski zadatak pred cijelim razredom.*

*Problemski zadatak:*
*Kemijska tvrtka potrošila je 2 milijuna kuna za kupnju strojeva prije nego što je počela s proizvodnjom kemikalija. Nakon što je kupila strojeve, tvrtka za proizvodnju milijun litara kemikalija potroši 0.5 milijuna kuna na potrebne sirovine.*

1. *Tvrtka na dan proizvede od 0 do 5 milijuna litara kemikalije. Napravite tablicu koja prikazuje odnos između broja proizvedenih litara kemikalija $L$, i ukupnog troška $C$ u milijunima kuna, potrebnih za proizvodnju tih kemikalija.*

2. *Nađite formulu koja prikazuje $C$ u ovisnosti o $L$.*

*Pojašnjavanje zadatka*

*Nastavnik učenicima treba pojasniti ključne riječi kao bi oni na kraju razumjeli cijeli problem. To možemo napraviti postavljanjem pitanja: „Što je litra?". Ako na pitanje* *ne dobivamo odgovor, onda imamo dva izbora: možemo učenicima odmah reći što je litra ili možemo učenicima vizualno pokazati koliko iznosi jedna litra. To možemo napraviti tako da priredimo plastičnu bocu od jedne litre i proslijedimo ju po razredu da ju učenici promotre. Na taj način pravimo kinestetičku vezu između plastične boce i izraza „jedna litra“.*

*Razumijevanje konteksta*

*Sljedeći korak je da učenici preoblikuju ovaj problem tako da ga oni sami razumiju.*
Nastavnik: *Tko mi može svojim riječima prepričati zadatak?*
Učenik 1: *Tvornica proizvodi kemikalije i to ima određenu cijenu.*
*Učenik* 1 *dao je dobar sažetak zadatka. Ostali učenici imaju koristi od toga da jedan učenik podijeli svoje kratko shvaćanje problema. Ponavljanjem jačaju razumijevanje problema, a ostali učenici imaju priliku shvatiti sve nejasnoće.*

*Oblikovanje pitanja ili zadataka*

*U prvom čitanju trebamo osigurati da učenici znaju što se od njih traži u zadatku. Ako učenici u tome nisu uspješni onda se trebamo vratiti na prethodni korak i učenicima detaljno objasniti sve nejasnoće.*
*Učenik* 1 *je shvatio širu sliku problema, ali nije shvatio da ga zadatak traži da napravi tablicu i postavi funkciju. Ovo nastavniku pokazuje da Učenik* 1 *treba još vježbe kako bi prepoznao pitanje ovog zadatka. Nastavnik daje upute razredu:*
Nastavnik: *Kada čitate esej imate rečenicu koja donosi tezu i rečenice koje podupiru tu tezu. Najvažniji dio cijelog teksta je uglavnom na početku. Ali u matematičkom zadatku prvo pročitate informacije koje su dane, a najvažniji dio zadatka, pitanje, nalazi se na samom kraju. Zato matematički problem morate pročitati nekoliko puta. Nije važno samo zapitati se „O čemu je riječ u problemu?“ nego i „Što trebam napraviti?“. Pogledajte zadatak još jednom i probajte ponovno. Pogledajte na sami kraj teksta zadatka i probajte naći pitanje (ili zadatak) koje je postavljeno.*

*Procjena prvog čitanja: učeničko razumijevanje stvarnog problema*

*Vrlo je važno procijeniti jesu li učenici uspjeli svladati ciljeve prvog čitanja. Ako učenici ne razumiju što je zadano, ne poznaju riječi ili ne razumiju značenje pitanja ili zadatka koji treba riješiti, neće moći nastaviti s rješavanjem problema. Kako bi to procijenio nastavnik može pitati učenike da zapišu nejasnoće u bilježnice ili da ih postave pred cijelim razredom. U ovome primjeru nastavnik ima staklenku u kojoj se na drvenim štapićima nalaze ispisana imena svih učenika iz razreda. Iz staklenke izvlači jedno ime i pita:*
Nastavnik: *Učeniče* 2*, sada kada si ponovno pročitao problem i fokusirao se na zadnji dio zadatka, što kemijska tvrtka želi znati?*
Učenik 2: *Kemijska tvrtka želi saznati stvarne troškove za proizvodnju kemikalija.*
Nastavnik: *Tako je! Što ti je pomoglo u određivanju da ovo pitanje treba odgovor?*
Učenik 3: *Ono što ste rekli o važnom dijelu na kraju matematičkog zadatka. To mi je puno pomoglo. Prije sam analizirao svaku rečenicu tražeći pitanje.*
*Učenici su uspješno napravili dva dijela procesa rješavanja problemskog zadataka: razumiju što je zadano u zadatku i znaju pronaći pitanje na koje treba naći odgovor. Na ovaj je način nastavnik učenicima dao dva dara pismenosti: postupak koji mogu pratiti*

*i priliku za razmišljanje kako im je taj postupak pomogao u rješavanju problema.*

***Drugo čitanje:***

*Bez ponovnog čitanja zadataka, matematički problem se ne bi mogao riješiti. Drugo čitanje je puno složenije od prvog čitanja i uključuje višestruko precizno ponovno čitanje. Iako bi dobar čitač mogao provesti ove korake odmah nakon drugo čitanja, nastavnik sve ove korake radi postepeno kako bi učenici stekli vještinu rješavanja problema.*

*Traženje važnih informacija*

Nastavnik: *Pitanje koje postavlja ovaj zadatak je stvarni trošak izrade kemikalije. Što bi onda trebali napraviti da riješimo ovaj problem? Ponovno pročitajte zadatak i podcrtajte izraze ili rečenice za koje smatrate da sadrže bitne informacije. Pronađite podatak koji će pomoći tvrtki odrediti koliki im je stvarni trošak izrade kemikalije. Možda još ne znamo kako koristiti te podatke, ali nešto nam govori da bi te informacije trebale biti korisne. Kada nešto nađete, popričajte o tome sa svojim susjedom u klupi.*
*Nastavnik učenicima daje vremena za još jedno čitanje i jednu minutu da porazgovaraju jedni s drugima. Nastavnik želi napraviti identifikaciju bitnih informacija koje će biti jasne svim učenicima. Promatrajući kako učenici rade, nastavnik je primijetio da je Učenik* 4 *podcrtao nekoliko informacija i traži od njega da svoje informacije podijeli s cijelim razredom.*
Nastavnik: *Koje si informacije pronašao koje bi nam pomogle da odredimo stvarni trošak izrade kemikalije?*
Učenik 4: *Ova tvrtka je potrošila* 2 *milijuna kuna prije nego što je išta zaradila.*
Nastavnik: *I koje si pitanje onda postavio?*
Učenik 4: *Kako su potrošili* 2 *milijuna kuna na opremu za proizvodnju prije nego što su išta proizveli, pitao sam se trebam li taj trošak dodati ostalim troškovima koje će tvrtka imati za proizvodnju kemikalija. Zar se ne bi trebala i ta* 2 *milijuna brojiti kao trošak?*

*Određivanje strategije rješavanja*

*Sljedeće što učenici trebaju napraviti je razmotriti moguće strategije rješavanja zadataka. Nastavnik pomaže učenicima tako da naglasi da je razmišljanje Učenika* 4 *ispravno.*
Nastavnik: *Učenik* 4 *je upravo uzeo dio informacije iz teksta, a to je da je tvrtka platila* 2 *milijuna kuna samo na opremu. Postavio si je pitanje: 'Zar to ne bi trebao uključiti u ukupni trošak na kraju?'. Ovo je pitanje vrijedno razmatranja jer nam pomaže u razmišljanju koju bi strategiju rješavanja trebali upotrijebiti. Učeniče* 4*, koju bi matematičku operaciju upotrijebio kako bi bio siguran da je tvrtka uključila* 2 *milijuna kuna u ukupni trošak?*
Učenik 4: *Trebamo zbrojiti sve troškove ove tvrtke. I trošak opreme također treba pribrojiti.*
Nastavnik: *Tako je! Pa što mislite da je sljedeća informacija koja je važna? Koji su to drugi troškovi koje trebamo uključiti u ukupni trošak?*
Učenik 5: *Tvrtka potroši* 0.5 *milijuna kuna za svaki milijun litara proizvedene kemikalije.*
*Razred je uspješno prepoznao sve bitne informacije u zadatku, a uspješno je prepoznao i jednu matematičku operaciju koja će im koristiti za rješavanje zadatka.*

*Zapis problema simboličkim jezikom*

*Ovaj korak drugog čitanja je najteži. Učenici problem iz stvarnog života moraju prezentirati apstraktnim jezikom matematike, simbolima. U ovom slučaju, učenici moraju napraviti tablicu u kojoj trebaju izračunati troškove za proizvodnju najviše* 5 *milijuna litara kemikalija. Nastavnik zna da nisu svi učenici sposobni odmah riješiti ovaj problem. Zato jasno ponovno čita zadatak i ponavlja zaključke koje su donijeli zajedno. Pita ih što u zadatku trebaju dalje napraviti. Primjećujući da samo nekoliko učenika ponovno čita tekst uputi i ostale učenike da ponovno pročitaju problem. Nastavnik zna da učenici većinom čitaju samo glavni dio teksta koji sadrži informacije, ali i da ne čitaju što se od njih traži.*
Nastavnik: *Kada ne pročitate pitanje na kraju zadatka, to je kao da ste ispričali šalu bez glavnog dijela.*
*Nakon toga svi učenici čitaju zadatak. Nekoliko učenika podiže ruku, ali nastavnik čeka dok svi ne podignu glavu prema njemu jer je to pokazatelj da su svi završili s čitanjem.*

*Procjena drugog čitanja*

*Kao i kod prvog čitanja, nastavnik počinje procjenjivati koliko su dobro učenici savladali ciljeve drugog čitanja. Izvlači štapić s imenom novog učenika iz staklenke.*
Nastavnik: *Što misliš da dalje trebamo napraviti?*
Učenik 6: *Trebamo napraviti tablicu.*
Nastavnik: *Tako je. Pitanje pod rednim brojem* 1 *daje nam strategiju rješavanja jer kaže da napravite tablicu. I čak nam daje i neke određene podatke o toj tablici. Koji su to podaci?*
*Učenici dalje trebaju zapisati problem pomoću matematičkih simbola. Trebaju stvarni problem zapisati u apstraktnom algebarskom zapisu zavisnih i nezavisnih veličina. Također trebaju ispravno prepoznati varijable $L$ i $C$ te koje je njihovo značenje u ovome problemu. Kako u zadatku nije skicirana tražena tablica, učenici se moraju osloniti na svoje algebarske vještine i ispravnu interpretaciju činjenica koje imaju kako bi ispravno zapisali i popunili tablicu. Dok učenici čitaju tekst zadatka trebaju se pitati ključno pitanje: Koja veličina ovisi o kojoj? Odrasli lako mogu zaključiti da trošak ovisi o količini proizvedenih kemikalija, ali učenici to teže shvaćaju.*

*Vizualna prezentacija: crtanje tablice*

*Kako bi učenicima pomogao u interpretaciji činjenica koje su upravo pročitali, nastavnik na ploču crta tablicu s praznim poljima. Putem otvorenih pitanja navodi učenike na ispravno popunjavanje tablice.*
Nastavnik: *Koje se varijable spominju u tekstu?*
Učenik 7: *$L$ i $C$.*
Nastavnik: *Što predstavlja $L$?*
Učenici: *Litre.*
Nastavnik: *Je li to sve što trebam zapisati u tablicu? Kako to možemo konkretnije zapisati?*
Učenik 8: *To je broj milijuna litara proizvedene kemikalije.*
Nastavnik: *A što predstavlja druga varijabla?*
Učenici: *Trošak u milijunima kuna.*
*Nastavnik je od učenika dobio informacije koje su oni pročitali u tekstu, te ih je zapisao*

*na ploču. Nastavnik dalje namjerno glasno razmišlja o zavisnosti varijabli:*
Nastavnik: *Dok sam crtao ovu tablicu, pitao sam se: "Koja varijabla ovisi o kojoj?". Zavisi li količina kemikalija o konačnim troškovima ili konačni troškovi ovise o količini proizvedenih kemikalija? Koju bi varijablu zapisali u lijevi stupac tablice, a koju u desni? Što vi mislite?*
Učenik 9: *$L$ ćemo staviti u lijevi, a $C$ u desni stupac.*
*Nastavnik zapiše razmišljanje učenika u tablicu na ploči.*

*Provjera razumijevanja*

*Nastavnik pita tko se slaže mišljenjem Učenika 9 i na taj način procjenjuje koliko ih je shvatilo što je zavisna, a što nezavisna varijabla. U razredu većina učenika diže ruku, ali ne svi. Umjesto da se započne razgovor o zavisnim i nezavisnim varijablama i objasni učenicima koja je koja, nastavnik se odlučuje vratiti na tekst.*
Nastavnik: *Pogledajte pitanje još jednom. Gdje se nalaze brojevi koji su nam trenutno bitni?*

*Procjena razumijevanja tehničkih oznaka*

Nastavnik: *Imamo tablicu koju treba popuniti s brojevima. Kako zovemo ove brojeve? Oni imaju neko posebno ime.*
*Nastavnik ispituje učenike pokazujući na varijablu $x$ zapisanu u tablici na plakatu koji se nalazi na zidu učionice (Slika 10).*

| Nezavisna varijabla | Zavisna varijabla |
|---|---|
| x | y |
| Ulaz | Izlaz |
| Domena | Kodomena |
| Apscisa (horizontalna os) | Ordinata (vertikalna os) |
| Ulazna vrijednost | Izlazna vrijednost |

Slika 10. *Plakat na zidu učionice*

Učenik 10: *Znam, naziva se nezavisna varijabla.*
Nastavnik: *Tako je! A što ćemo zapisati u prazno polje ispod varijable $x$?*
Učenik 10: *Nula.*
Nastavnik: *Zašto misliš da tu ide nula?*
*Učenik 10 ponovno pogleda u tekst, a zatim odgovori:*
Učenik 10: *U lijevom stupcu se nalazi nezavisna varijabla $L$ zato što su to brojevi koje ćemo unositi. Što god se nalazilo u desnom stupcu ovisiti će o broju koji se nalazi u lijevom stupcu. To znači da je desni stupac zavisna varijabla. Sljedeće pitanje kaže da nađemo formulu koja prikazuje $C$ u ovisnosti o $L$. Mislim da to opet znači da je $C$ zavisna varijabla.*
Nastavnik: *Što onda pišem u lijevi stupac tablice?*
Učenik 10: *Nula, jedan, dva, tri, četiri i pet. To nam piše u prvoj rečenici prvog pitanja.*
*Učenik 10 je ostvario glavni cilj drugog čitanja: stvarni problem prezentirao je na matematički način.*

*Tijekom drugog čitanja nastavnik obično daje dodatnu pomoć učenicima koji su slabiji u matematici. Nastavnik zna da je Učenik* 11 *slabiji u matematici i da mu obično treba dodatno vrijeme kako bi riješio i razumio zadatke. Kako bi procijenio njegovo trenutno razumijevanje, nastavnik mu postavlja pitanje:*
Nastavnik: *Kada je* $L = 0$*, koliki je* $C$*?*
Učenik 11: $C$ *je* 0.5.
*To je netočno, ali ga nastavnik ne ispravlja nego mu daje šansu da razmisli o svojem odgovoru. Učenik* 11 *je mogao krivo izračunati jer nije do kraja shvatio zadatak. Njemu treba još malo vremena za razmišljanje.*
Nastavnik: *Pročitaj početak zadatka molim te. Što on kaže?*
*Učenik* 11 *dobiva mogućnost ponavljanja drugog čitanja. Učenik čita zadatak naglas. Nastavnik ga zaustavlja na dijelu gdje je informacija koja mu treba jer ne želi da ih pomiješa s informacijama koje mu trenutno ne trebaju. Nakon nekoliko sekundi po učenikovom držanju tijela, nastavnik zaključuje da je shvatio u čemu je pogriješio.*
Učenik 11: *O, pa rješenje je dva.*
Nastavnik: *To je točno. I što ti je pomoglo da zaključiš da je to točno?*
Učenik 11: *Zato što na početku zadatka piše da su prije nego što su išta proizveli potrošili* 2 *milijuna kuna.*
*Na ovaj je način nastavnik pomogao učeniku u razumijevanju i rješavanju dijela zadatka te ga je potaknuo u budećem radu.*
*Učenici su dva puta pročitali zadatak, odredili problem i pitanja na koje trebaju odgovoriti, prezentirali stvarni problem matematičkim simbolima i napravili tablicu. Sada su spremni postaviti funkciju koja opisuje ovaj problem.*

| L<br>litre proizvedene kemikalije<br>(u milijunima) | C<br>trošak<br>(u milijunima kuna) |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 2.5 |
| 2 | 3 |
| 3 | 3.5 |
| 4 | 4 |
| 5 | 4.5 |

Slika 11. *Rješenje prvog dijela zadataka*

***Treće čitanje:***

*Najapstraktniji dio rješavanja problemskih zadataka riječima je prevesti stvaran problem u algebarsku jednadžbu, ili funkciju, kao što je u ovome primjeru* $C(L) = 0.5L + 2$*. Dok su učenici popunjavali tablicu uočiti su uzorak kojim se povećavaju veličine i tako su lakše došli do jednadžbe (Slika* 11*).*
*Nakon rješavanja prvog dijela zadatka, većina učenika se ne sjeća što trebaju napraviti niti što to sve skupa znači. Zato je bitno da učenici verbalno izraze sve što su do sada napravili. Nastavnik zapisuje konačnu jednadžbu na ploču i pita učenike da mu objasne svaki dio te jednadžbe. Učenici ponovno gledaju tekst zadatka i ne mogu naći smisao toj jednadžbi. Odgovor je stizao jedan po jedan i svoje odgovore su označili na jednadžbi (Slika* 12*).*

$$C \quad (L) = 0.5 \quad L + 2$$

| C | L | 0.5 | L | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ukupni trošak (Zavisna varijabla) | Milijuni litara proizvedene kemikalije (Nezavisna varijabla) | Trošak od 0.5 milijuna kuna za proizvodnju milijun litara kemikalije (Promjenjiva varijabla) | Milijuni litara proizvedene kemikalije (Nezavisna varijabla) | 2 milijuna kuna za kupnju strojeva (Fiksni ili početni trošak) |

Slika 12. *Označavanje svakog dijela jednadžbe*

*Nastavnik želi da učenici znaju interpretirati jednadžbu i na matematički način i na stvarni način. Na taj način nastavnik je siguran da su učenici svladali sve razine ovoga problema: test, tablicu, jednadžbu i razumijevanje. Ova tri čitanja razvijaju matematičko zaključivanje kod učenika koje im pomaže u rješavanju bilo kojih problema i zadataka.*

# 3 Semantičko i sintaktičko zaključivanje

Učenici koji vole matematiku često kažu kako uživaju u dokazima i više vole vidjeti zašto je nešto istinito, nego se osloniti na izgovorenu ili napisanu tvrdnju. Međutim, puno je više učenika koji su prestali voljeti matematiku zbog dokaza i matematičke strogosti, pogotovo kada razina apstrakcije ili detalja postane monotona, kada glavnu ideju čini nerazumljivom kao i primjenu toga dokaza. U srži ove podjele prema privlačnosti i odbojnosti dokaza je aktivnost zaključivanja. Neki autori tvrde da je umjetnost dokazivanja najvažniji koncept poučavanja i učenja matematike, te da je važno pokušati analizirati i razumjeti dinamiku matematičkog zaključivanja.

Kod zadataka uobičajeno je slijediti dokaz ili metodu rada. Jedan način je provjeravanje malih koraka koje smo napravili, ali na taj način učenici ostaju i dalje predaleko od pravog razumijevanja. Učenik koji je svjestan da ne zna smisao cijelog dokaza osjeća se nezadovoljno ili frustrirano, te ne zna što napraviti kako bi to popravio.

Greške prilikom zaključivanja su jako zanimljive i puno otkrivaju, ne samo o tome koliko je znanje i razumijevanje kod učenika, nego i sami način razmišljanja i strategija za rješavanje matematičkih problema. Postoje najmanje dvije vrste matematičkog zaključivanja, koje leže na suprotnim krajevima spektra. Na jednoj strani imamo sintaktičko zaključivanje, koje se oslanja na jednostavna, naivna ili površna pravila, te na pretraživanje ili traženje istih uzoraka. Ono može uključivati doslovna tumačenja i površne veze između pojmova koje slaže poput kolaža. Uobičajeno je da učenici koriste ovo zaključivanje kada su pod pritiskom ispita ili se približavaju ispitni rokovi, pa ga koriste kako bi bez previše pažljivog razmišljanja odgovorili na svoja pitanja. Semantičko zaključivanje je, s druge strane, puno prirodnije povezano s učenjem i oslanja se na intuiciju, uočavanje ili iskustvo. Ono se može povezati s kinestetičkim, vizualnim i drugim vrstama učenja pomoću kojih pamtimo, a može biti rezultat višegodišnje prakse u učenju.

Podjela između sintakse (oblika) i semantike (značenja) je drevna i seže sve do Euklidovih Elemenata. Elementi su prvi objavljeni pokušaj stvaranja aksiomatskog deduktivnog sustava u matematici i pružili su osnovu za razvoj matematike, ali i bilo kojeg drugog područja matematike. Podjela je dovela do pitanja može li se matematika u nekom preciznom smislu raščlaniti na sintaksu kroz manipulaciju aksiomima. Kasnija istraživanja pokazuju da je svaki aksiomatski sustav, uključujući i teoriju brojeva, nepotpun, u smislu da će u sustavu postojati istinite izjave koje se neće moći 'sintaktički' dokazati koristeći te sustave aksioma. Zato je normalno očekivati "napetost" između sintakse i semantike. Umjesto napetosti na nastavi matematike mogu se iskoristiti razlike između sintaktičkog i semantičkog zaključivanja kako bi se stvorile mogućnosti za poboljšavanje učenja i kako bi se otkrile slabosti ili propusti u razumijevanju. Pogreške u zaključivanju govore puno više nego što mislimo, a rješavanje tih pogrešaka čini nas odlučnijima i kreativnijima.

## 3.1 Primjeri semantičkog i sintaktičkog zaključivanja

**Primjer 6.**

***Pitanje:*** *Putujete od točke A do točke B brzinom od* 20 *km/h, i iz točke B se odmah vratite u točku A brzinom od* 30 *km/h. Koja je prosječna brzina putovanja?*

***Odgovor:*** *Prosječna brzina je* $\frac{20+30}{2} = 25$ *km/h.*

*Ovaj površan odgovor povlači problem umiješanosti sintakse u stvaranje smislenog odgovora. Problem ne traži aritmetičku sredinu dva broja. On traži da odredimo prosječnu brzinu putovanja. Kako bi mogli uspješno odgovoriti na ovo pitanje moramo misliti o semantici. Zadatak zahtijeva razlomak čiji brojnik je zbroj ukupne udaljenosti, a nazivnik ukupno vrijeme koje je potrošeno na putovanje. Točan odgovor je* $24\ km/h$.

$v_1 = 20\ km/h$
$v_2 = 30\ km/h$
$s_1 = s = s_2$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s+s}{t_1+t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{s\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)} = 24$$

**Primjer 7.**

***Pitanje:*** *Izgradili ste ravnu željezničku prugu dugačku* $20\ km$ *na horizontalnoj ravnini koja je učvršćena na jednom kraju. Kada ste došli do drugog kraja shvatili ste da je pruga* $1\ m$ *duža nego što treba biti. Pogurate prugu tako da je sada dugačka* $20\ km$ *na način da napravite blagi luk iznad ravnine. Koliko je luk, na sredini pruge, udaljen od ravnine?*

***Odgovor:*** *Ako* $1\ m$ *apsorbiramo u* $20\ km$*, onda je visina iznad ravnine na sredini pruge zanemarivo mala.*

*Ovo je tipičan primjer gdje male greške imaju velike posljedice. Ovo je primjer u kojem se koristi sintaktični odgovor umjesto semantičkog. Zapravo* $20\ km$ *ima uvećavajući učinak zato što je smetnja (*$1\ m$ *duža pruga duž vodoravne željezničke pruge) ortogonalna na konačni efekt (luk iznad ravnine). Ako pola luka aproksimiramo hipotenuzom pravokutnog trokuta, onda pomoću Pitagorinog poučka brzo otkrivamo da je visina iznad ravnine približno* $100$ *metara. Da je visina velika, a ne mala intuitivno je jasna za svakoga tko je ikada lagano stisnuo krajeve ravnala.*

# 4 Kreativno i imitativno zaključivanje

Već je nekoliko godina zajednica obrazovanja za matematiku svjesna poteškoća u pomaganju učenicima u razvijanju temeljnih matematičkih sposobnosti poput konceptualnog razumijevanja, sposobnosti rješavanja problema i kreativnog zaključivanja. Matematika je obično prikazana kao veliki skup izoliranih nerazumljivih činjenica i postupaka koje treba zapamtiti i prisjetiti ih se na pismenim testovima.

Istraživanja o matematičkom zaključivanju pokazala su da se učenici kada se sretnu s problemskim zadacima često oslanjaju na nekreativne i matematički površne strategije. Zaključivanje im se oslanja na ono što im je poznato i ono što su upamtili umjesto fokusiranja na intrinzična svojstva matematičkih objekata. U tom istraživanju učenici nisu vjerovali da problemski zadaci mogu biti riješeni kreativnim zaključivanjem.

Mnogi čimbenici utječu na načine na koje učenici uče matematički zaključivati. Tu su uključeni utjecaji iz škole, iz individualnog obiteljskog doma te iz kulturne zajednice iz koje pojedini učenik dolazi. Istraživanja su pokazala kako učenici mogu naučiti ono što imaju priliku naučiti. Zato se postavlja ključno pitanje: koje mogućnosti trebaju učenicima kako bi razvili različite oblike matematičkog zaključivanja? U raznim istraživanjima, pokazano je da je većinu problema u matematičkim udžbenicima moguće riješiti površnim zaključivanjem i da učenici upravo takvo zaključivanje i koriste.

Ako želimo odgojiti refleksivne i kreativne učenike, s kojim bi zaključivanjem oni trebali biti upoznati? Na koji način nastavnici mogu to predočiti učenicima? Jedna mogućnost bi bila da nastavnik prezentira stvarno rješenje problema na školsku ploču. Glavna primjedba ovom načinu je da je taj stvarni problem pretežak za većinu učenika u razredu. Druga mogućnost bi bila pokazati učenicima simulaciju rješenja nerutinskog problema pomoću zaključivanja. Glavno istraživačko pitanje ovoga rada je: Na koji način korištenje kreativnog zaključivanja od strane učitelja pomaže učenicima u savladavanju problemskih zadataka?

## 4.1 Kreativno zaključivanje

„Zaključivanje“ je tok misli, način razmišljanja, koji je prihvaćen za stvaranje tvrdnji i dohvaćanje zaključaka. Nije nužno utemeljen na formalnoj deduktivnoj logici i može biti netočno sve dok postoje razboriti (onome koji zaključuje) razlozi koji vode to razmišljanje. Obrazloženje je potvrđivanje dijela zaključivanja kojim uvjeravamo sebe ili druge da je to zaključivanje prikladno. Konkretno, u situaciji rješavanja zadataka, koje se naziva problemski zadatak, ukoliko nije jasno kako nastaviti s rješavanjem, postoje dva centralna tipa obrazloženja:

1. Izbor strategije, gdje se pod „izbor“ gleda u širem smislu (izabrati, podsjetiti, konstruirati, otkriti, pogoditi, itd.). Ovaj izbor podržan je pitanjem: Hoće li strategija riješiti problem?

2. Implementacija strategije, koja je podržana pitanjem: Je li strategija riješila problem?

U ovom radu kreativno zaključivanje je ono zaključivanje koje koristimo kod rješavanja nerutinskih problema. Postoje dva načina na koje se ovaj pojam koristi:

i. Razmišljanje koje je divergentno i koje prevladava ustaljeno.

ii. Razmišljanje koje stvara djelo kojeg velika većina ljudi smatra kreativnim (npr. umjetnička djela).

Ovdje nas zanimaju kreativni pogledi na uobičajeno razmišljanje prilikom rješavanja matematičkih zadataka, pa notacija ii. nije korisna u ovom slučaju. Haylock vidi dva tipa ustaljenosti. Sadržajna ustaljenost, u smislu raspona elemenata, smatra se prikladnom za primjenu na određeni problem: korisno znanje ne smatra se korisnim. Algoritamska ustaljenost predstavljena je konstantnom upotrebom algoritma koji se na početku pokazao uspješnim, a u trenutnom slučaju pokazao se neprikladnim. Silver smatra da iako se kreativnost povezuje s pojmom „genije“ ili izuzetnom sposobnosti, može pomoći nastavnicima matematike da ne gledaju kreativnost kao sposobnost matematički nadarenih već nešto što se može poticati i kod svih ostalih učenika. On dodaje da učenici matematiku ne doživljavaju kao visoko kreativno intelektualno područje kakvo jest. Silver smatra da su tečnost, prilagodljivost i novina temeljne komponente kreativnosti.

U školskim zadacima, jedan od ciljeva je postići visoki stupanj sigurnosti, ali ključna razlika od stvarnih problema je u didaktičkom pristupu jer je u školskim zadacima dopušteno pogoditi, riskirati te koristiti ideje i zaključivanje koje nisu čvrsto utemeljene. Čak je i na ispitima dozvoljeno imati 50% točnih odgovora na pitanje, dok je apsurdno da su matematičar, inženjer ili ekonomist točni u samo 50% svojih zaključaka. To podrazumijeva da je u školskim zadacima dopušteno, a možda čak i potaknuto, korištenje matematičkog zaključivanja sa znatno smanjenim zahtjevima na logičkoj strogosti. Pólya naglašava važnu ulogu zaključivanja koje je manje određeno nego dokaz: „U točno određenom zaključivanju glavna stvar je razlikovati dokaz od nagađanja, odnosno točan dokaz od netočnog. A u vjerojatnom zaključivanju glavna stvar je razlikovati pretpostavku od pretpostavke, tj. više logičnu pretpostavku od manje logične.“

U ovome okviru, osnovni argumenti su usidreni u unutarnjim svojstvima komponenti koje su uključene u zaključivanje. Prva komponenta je zaključivanje o svojstvima objekta, transformacije i pojma. Objekt je osnovna jedinica, to je 'stvar' s kojom nešto radimo ili rezultat nečega što smo radili. Na primjer, brojevi, varijable, funkcije, grafovi, dijagrami, matrice itd. Transformacija je ono što mijenja objekt i ishod je neki drugi objekt. Npr. brojanje jabuka je transformacija primijenjena na objekt u stvarnom svijetu, a ishod je broj. Izračunavanje determinante, transformacija je matrice. Pojam je središnja matematička ideja izgrađena na srodnom skupu objekata, transformacija i njihovih svojstava. Na primjer, pojam funkcije ili pojam beskonačnosti. Budući da svojstva komponenti mogu biti više ili manje bitna u određenom kontekstu i problemskoj situaciji[3], nužno je razlikovati intrinzična svojstva koja su ključna i površna svojstva koja nisu važna. Na primjer, u određivanju koji je od razlomaka $\frac{99}{120}$ i $\frac{3}{2}$ veći, veličina brojeva $(99, 12, 3$ i $2)$ je površno svojstvo koje nije dovoljno kako bi se zadatak riješio, dok je količnik tih brojeva intrinzično svojstvo.

Kreativno zaključivanje ispunjava sljedeće uvjete:

1. **Novost:** Stvaranje novog niza zaključaka za rješenje, ili je zaboravljeni niz zaključaka ponovno stvoren. Oponašanje prijašnjih odgovora ili rješenja nije dio kreativnog zaključivanja.

[3]Problemska situacija je ona koju u nastavnom procesu stvara sam nastavnik matematike s određenim ciljem. Taj cilj je povišenje efikasnosti nastave matematike i podizanje razine matematičkog obrazovanja učenika.

2. **Fleksibilnost:** Prihvaća različite pristupe i prilagodbe rješenja. Ne trpi fiksaciju koja sprječava napredak (npr. fiksiranost za sadržaj ili traženje zapamćenih rješenja).

3. **Vjerodostojnost:** Postoje razlozi koji podržavaju izbor strategije i/ili provedbu strategije pokazujući zašto su zaključci točni ili vjerodostojni. To znači da nagađanja i nejasne intuicije nisu dio kreativnog zaključivanja.

4. **Matematičke osnove:** Rasprava je temeljena na intrinzičnim matematičkim svojstvima komponenti uključenih u zaključivanje.

## 4.2 Imitativno zaključivanje

Češće od kreativnog zaključivanja javljaju se razne vrste imitativnog zaključivanja. Imitativno zaključivanje je kopiranje ili praćenje primjera bez ijednog pokušaja rješavanja problema na originalan način. Istraživanja pokazuju da učenici poznaju osnovne elementarne vještine iz matematike, ali tu nema puno razumijevanja. Učenici su puno sigurniji u procesima kao što su izračunavanje, označavanje i definiranje nego što su u zaključivanju, komuniciranju, pretpostavljanju i obrazloženju. Teškoće u učenju jednim su dijelom vezane za smanjenje složenosti, koje se pojavljuje u postupcima koji su fokusirani samo na činjenice i algoritme, i u nedostatku racionalnog razumijevanja. Ovo zaključivanje uključuje zaključke koji nisu opravdani na matematički način, nego imaju druge izvore. Definicije koje su u nastavku navedene nastoje okarakterizirati imitativno zaključivanje.

*Memorirano zaključivanje* ako je:

a. izbor strategije utemeljen na prisjećanju;

b. provedba strategije sastoji se samo od zapisivanja. Osoba koja koristi ovo zaključivanje može opisati bilo koji dio odgovora bez razmatranja njegovih prethodnih dijelova.

Primjer je prisjećanje svih koraka nekog dokaza.

*Algoritam* je skup pravila pomoću kojih se rješavaju određeni tipovi zadatka. Najčešći algoritmi sastoje se od postupaka (niz transformacija nekog matematičkog objekta).

*Algoritamsko zaključivanje* ako:

a. izbor strategije sastoji se u prisjećanju, ne cijelog odgovora kao u memoriranom zaključivanju, skupa pravila koja će zasigurno dovesti do točnog rješenja;

b. nakon što smo dali skup pravila ili smo se prisjetili ključnih dijelova, provedba strategije je trivijalna i samo neoprezne greške mogu ometati dolazak do rješenja.

Temeljni dio algoritamskog zaključivanja je kako odabrati odgovarajući algoritam. Ako možemo odabrati odgovarajući algoritam, ostatak zaključivanja je jednostavan. Algoritamsko zaključivanje temeljeno na površnim svojstvima smatra se uobičajenim i dominantnim, a istraživanja su pokazala kako postoje tri različite grupe uobičajenih zaključivanja:

*Poznato algoritamsko zaključivanje*
Ovo zaključivanje sastoji se od odabira strategije na način da zadatak smjestimo u poznati tip zadataka s odgovarajućim algoritmom rješavanja. Primjer ovog zaključivanja je kada učenici površno interpretiraju tekst zadatka i dođu do jasne, ali neispravne slike da je zadatak poznatog tipa.

*Razgraničavajuće algoritamsko zaključivanje*
Algoritam je izabran iz skupa algoritama koji su dostupni toj osobi i taj je skup razgraničila ta osoba kroz površinska svojstva algoritama i povezanosti sa zadatkom. Na primjer, ako zadatak sadrži polinom drugog stupnja, osoba može odabrati riješiti odgovarajuću jednadžbu ($p(x) = 0$) iako zadatak od njega traži maksimum tog polinoma. U ovom slučaju, osoba koja zaključuje ne mora zadatak shvatiti kao poznati.

*Vođeno algoritamsko zaključivanje*
Pronađena su dva glavna tipa ovog zaključivanja:

a. Pilotirano zaključivanje, kada netko (npr. nastavnik) vodi učenike prema rješenju.

b. Utvrđivanje sličnosti, gdje je izbor strategije temeljen na utvrđivanju sličnih površnih svojstava u primjeru, definiciji, teoremu ili nekom drugom dijelu teksta koji je povezan sa zadatkom.

## 4.3 Simulacija kreativnog zaključivanja

Kako bi shvatili razliku između simulirane i stvarne situacije, koristiti ćemo pojam reprezentativnosti koji se odnosi na kombinaciju sveobuhvatnosti i točnosti. Sveobuhvatnost se odnosi na „raspon različitih stajališta prema situaciji koja je simulirana“, a točnost na „stupanj u kojem svako stajalište aproksimira stvarno predstavljanje tog stajališta u kriterijskoj situaciji“. Da bi se analiziralo je li rješenje problematičnog stanja visoko reprezentativno ili nije, testira se prema sljedećim kriterijima kreativnog zaključivanja:

1. **Matematičke osnove:** Zaključivanje je utemeljeno na intrinzičnim matematičkim svojstvima komponenti uključenih u zaključivanje, na isti način kao i kreativno zaključivanje. Ovaj kriterij smatra se ispunjenim ako su zaključci utemeljeni na eksplicitnom razumijevanju bitnih svojstava. O svojstvima se treba raspravljati, a to se obično napravi na ovaj način: „izjava je točna budući da komponente imaju ova matematička svojstva, što ima ove posljedice“. Ako ovaj kriterij nije prisutan, npr. u opisu algoritma, tada se kriterij smatra neispunjenim.

2. **Kreativnost:** Zaključivanje je slično kreativnom zaključivanju u smislu da je (učenicima) kreiran novi niz zaključaka, koji kreće od (simulirane) problemske situacije i kroz eksplicitne unaprijed poznate argumente, koji podržavaju izbor strategije, završavaju u zaključku. Ovaj kriterij je skoro uvijek zadovoljen jer nastavnik kontrolira zaključivanje i jamči da je zaključak postignut. Kriterij nije postignut ako zaključivanje počinje zaključkom koje je kasnije objašnjeno.

3. **Refleksija:** Refleksija (odraz onoga što su shvatili učenici iz objašnjavanja i zaključivanja) i/ili simulirane nesigurnosti su uvijek prisutne. U rutinskom rješavanju zadataka ne postoje nesigurnosti budući da učenik od početka zna što

treba učiniti. U stvarnim problemskim situacijama, izbor strategije nije vidljiv i nekada je potrebna metakognitivna kontrola za provedbu strategije. Može se pojaviti kao refleksija, oklijevanje ili kao otvorenost prema alternativnom rješenju. Može se pojaviti zbog prisutnosti (simuliranih) pogrešaka. Nije ispunjena putem pitanja ili pogreški koje se tiču lokalnih ili elementarnih dijelova algoritamske procedure.

4. **Fokus:** Glavni cilj simuliranja problematične situacije i rješenja kod nastavnika sličan je cilju učenika. U nekim situacijama jasno je da se (simulirana) problemska situacija nastavnika razlikuje od učeničke, i u tom slučaju ovaj kriterij nije zadovoljen. Još jedan primjer različitog fokusa je kada je zaključivanje nastavnika nerealistično u smislu da je preteško ili temeljeno na činjenicama i znanju koje učenicima još nije jasno. Ako nema dokaza da nastavnik i učenici imaju različit fokus, onda je ovaj kriterij zadovoljen.

### 4.3.1 Istraživanje i primjeri

Glavna komunikacija između nastavnika i učenika u srednjim školama na nastavi matematike je da nastavnik vodi prezentacije i dijaloge. U osnovi, niti jedan nastavnik ne predstavlja stvarne problemske situacije učenicima, nego one zadatke za koje je pripremio odgovore. Kako to nisu stvarni problemi, namjera nastavnika da simulira kreativno zaključivanje vjerojatno se neće ostvariti.

Budući da se nastava može odvijati na brojne načine (zbog ogromne raznolikosti sadržaja, zadataka, ciljeva, učenika, stilova učenja itd.), nemoguće je odrediti najčešće situacije koje se događaju u nastavi i nemoguće je na jedinstveni način odrediti što bi bilo „uobičajeno“ poučavanje koje se spominje u istraživanju. Iz podataka prikupljenih u istraživanju bilo je nemoguće odrediti reprezentativan uzorak nastavnika koji podučavaju na „uobičajen“ način. Umjesto toga su istraživači posjetili nekoliko različitih nastavnika koje su oni okarakterizirali kao „obične“ ili barem ne kao neuobičajene tipove nastavnika.

Sljedeći podaci sakupljeni su u istraživanju na tri obrazovne razine u Švedskoj: niža srednja škola, viša srednja škola i na preddiplomskom matematičkom studiju.[4] Promatrač je na nastavi vodio zabilješke o tome kako nastavnik održava sat, fokusirajući se na predavanje i interakciju nastavnika i učenika. Nakon svakog odslušanog sata provela se analiza toga sata u tri koraka: interpretacija (opis na koji je način nastavnik objasnio svoje zaključivanje na nastavi i u kojoj su mjeri učenici shvatili to objašnjenje), određivanje (simulirane) problemske situacije (opisivanje stvarne simulirane problemske situacije i argumentacija tog problema; razmatraju se samo zaključci koje je nastavnik donosio na satu) i karakterizacija (karakterizacija prethodno korištenog zaključivanja). Analizirana su 23 različita nastavnika na tri obrazovne razine, a predstavit ćemo četiri situacije različitog zaključivanja.

**Primjer 8.** *U devetom razredu niže srednje škole nastavnik sat započinje kratkim ponavljanjem ranije naučenih pojmova poput „Što je $3^4$?“ i „Kako još zapisujemo*

[4]Švedski obrazovni sustav sastoji se od predškole (do 6 godina), obaveznog programa koji sadrži osnovnu školu (od 7 do 12 godina), nižu srednju školu (od 13 do 16 godina) - ukupno 9 razreda, te od izbornog programa koji sadrži višu srednju školu (od 17 do 19 godina) - 3 razreda više srednje škole i fakultete koji su podijeljeni na tri stupnja: osnovni stupanj (u trajanju od 2 ili 3 godine kojim se stječe akademski naziv prvostupnika), napredni stupanj (u trajanju od 1 ili 2 godine kojim se stječe akademski naziv magistra) i doktorski stupanj (u trajanju od 2 do 4 godine kojim se stječe akademski naziv doktora znanosti).

*$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$?“. Pitanja u nastavku su još teža, ali iako odgovaraju nastavnom planu i programu devetog razreda, učenici imaju velikih poteškoća prilikom odgovaranja na njih.*

*Nastavnik na ploču zapisuje izraz $x\,(x+5) =$ i pita učenike što je to. Niti jedan učenik ne odgovara na pitanje.*

Nastavnik: *Započnimo množenjem prvog člana u zaradi. Koji bi onda bio rezultat Marko?*
Marko: $2x$.
Nastavnik: *Ne, to nije točno. Koliko je bilo $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$?*
Marko: *Možda je $5x^2$?*
Nastavnik: *Nije. To je $x^2 + 5x$. Koliko je $-4x(2x + y)$?*
Jan: $-8x$.
*Nastavnik ga prekida i bez objašnjenja zapiše da je rješenje $-(8x^2 + 4xy)$.*
Nastavnik: *Koje je rješenje ako maknemo zagrade?*
Eva: $-8x^2 - 4xy$.
Nastavnik: *Koliko je $3x(2x + y) - (3x + 2y)(x - 2y)$?*
*Ana se čini sposobna riješiti zadatak i počne odgovarati na pitanje, ali nastavnik joj ne dopušta da sama odgovori na pitanje. Umjesto toga, nastavnik vodi Anu kroz rješavanje zadataka konstantnim ispitivanjem dodatnih potpitanja, kao npr. „Koliko je $2 \cdot 3$?“, „Koliko je $x \cdot x$?“, i slično, bez objašnjavanja zašto su ti koraci potrebni. Nastavnik zapisuje na ploču: $= 6x^2 + 3xy - 3x^2 + 6xy - 2xy + 4y^2 = 3x^2$*
Beata: *(Beata prekida nastavnikovo pisanje) Je li to $3x^2$?*
Nastavnik: *Ako imaš 6 jabuka i pojedeš 3 jabuke, koliko ti ostaje jabuka?*
Beata: *Tri jabuke.*
Nastavnik: *Tako je, zato je $3x^2$.*
*Nastavnik završava prekinuto pisanje: $3x^2 + 7xy + 4y^2$.*
Nastavnik: *Je li to točno Josipe?*
Josip: *Ne znam.*
*Nakon ovog razgovora učenici otvaraju svoje udžbenike. Promatrač je individualno ispitivao učenike što sada rade. Većina ih je dala odgovore poput „Ne znam.“ ili „Nemam pojma.“.*

*Interpretacija i određivanje problemske situacije*

*Identificirane su četiri problemske situacije (tri zadatka i Beatino pitanje).*

***PS1:*** *Kako proširujemo $x(x+5)$? Marko vjeruje da množenjem prva dva člana dobiva $2x$. Nastavnikov izbor strategije sadrži dva dijela: (a) Algoritam je pomnožiti lijevi faktor sa zagradom tako da množimo svaki član jedan po jedan, (b) Prvi umnožak je uvijek množenje potencija iste baze ($x \cdot x = x^2$), kao što je nastavnik pokazao u ranijem primjeru ($x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$). Marko možda razumije ovaj raniji jednostavni primjer, kao što i mnogi drugi učenici to razumiju, ali ne razumije da je algoritam koji mora primijeniti $a(b + c) = ab + ac$. Marko ne može shvatiti nastavnikovo navođenje i primjenjuje svoj krivi algoritam te dobiva $5x^2$. Nastavnik nakon toga daje točan odgovor bez objašnjenja i nastavlja dalje zadatak.*

***PS2***: *Kako proširujemo $-4x(2x + y)$? Jan ne zna pravi algoritam ili pravi slučajnu grešku. Nastavnik samo daje točan odgovor.*

***PS3***: *Kako proširujemo i pojednostavljujemo $3x(2x+y)-(3x+2y)(x-2y)$? Umjesto da Ani dopusti da sama zaključi kako bi riješila zadatak, nastavnik bira sve strategije rješavanja i Ani ostavlja da napravi elementarne transformacije.*

***PS4***: *Kako ostaje $3x^2$ (kao jedan od izraza) prilikom pojednostavljivanja $6x^2+3xy-3x^2+6xy-2xy+4y^2$? Nastavnikova strategija je koristiti analogiju s jabukama. Namjera je vjerojatno bila pokazati kako trebaju zbrojiti ili oduzeti izraze istog tipa ($x^2$), ali nastavnik nije dao nikakvu poveznicu između analogije s jabukama i Beatine problemske situacije. Beata sigurna zna da ako od šest jabuka oduzme tri jabuke, ostaju joj tri jabuke, ali to joj nije objasnilo povezanost sa zadatkom.*

*Karakterizacija*

*Svaki kriterij označen je slovima N ili D. Slovo N znači da kriterij nije ispunjen, a slovo D da je kriterij ispunjen.*

1) *Matematičke osnove: (N) Nekoliko učenika poznaje svojstvo množenja koje je $a^m = a\cdot a\cdots a$ (m faktora), ali ne i pravilo za množenje dvije zagrade $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$, što predstavlja intrinzično svojstvo u njihovoj problemskoj situaciji. Ovo ključno pravilo nastavnik nije objasnio.*

2) *Kreativnost: (N) Većina zaključivanja koje je nastavnik predstavio temelji se na kratkim algebarskim transformacijama koje su dane učenicima bez prethodnog opravdavanja, objašnjavanja ili davanja upute za traženo intrinzično svojstvo. Postoji jedna iznimka, a odnosi se na pravilo $a^m = a\cdot a\cdots a$.*

3) *Refleksija: (N) Nema znakova nesigurnosti te nema vremena za refleksiju. Nastavnik objašnjava korake algoritama i brzo odgovara na svoja postavljena pitanja ukoliko učenik ne zna točan odgovor. Jedna manja iznimka je kada je nastavnik pokušao Marku objasniti da je rješenje povezano s prijašnjim primjerom koji je dao.*

4) *Fokus: (N) Nastavnik se usredotočio na svojstvo $a^m = a\cdot a\cdots a$, ali glavne poteškoće učenika vezane su za množenje izraza unutar zagrada, te kombinacija ta dva pravila. Nastavnik ne pokušava utvrditi koje su problemske situacije nastale kod učenika ili vjeruje da je problem vezan samo za svojstvo $a^m = a\cdot a\cdots a$.*

*Niti jedan od kriterija kreativnog zaključivanja nije ispunjen. Prikazano je algoritamsko zaključivanje bazirano na algoritamskim transformacijama koje nisu objašnjene kroz intrinzična matematička svojstva, čak ni kroz opise korištenih pravila.*

**Primjer 9.** *Ovaj nastavni sat održao se na drugoj godini više srednje škole (ugostiteljski program). Nastavna jedinica je bila o pravilima rješavanja linearnih jednadžbi. „Dobro znamo kako pronaći nepoznanicu x u nekoj jednadžbi, ali ova nastavna jedinica je više o pravilima“, rekao je nastavnik i počeo pokazivati rješenja tri različite jednadžbe. Prve dvije jednadžbe su: $x-11=32$ i $2x+12=28$. U ovom primjeru prikazat ćemo postupak rješavanja treće jednadžbe, $3x-14=2-x$.*

*Nastavnik zapisuje treći primjer na ploču i govori: „Sada ćemo zakomplicirati ono što smo naučili u prva dva primjera.“ Nakon toga im govori kako želi sve nepoznanice (x) na lijevoj strani jednadžbe, a sve poznanice (brojeve) na desnoj strani. Objašnjava im da to radi zato što želi imati sve nepoznanice s jedne strane i stavlja ih lijevo jer ih* *tamo ima više, pa će $x$ biti pozitivan. „U našem primjeru trebamo pomaknuti $x$ na lijevu stranu, a 14 na desnu.“ Nastavnik na ploču zapisuje $+14$ na obje strane jednadžbe, a nakon toga i $+x$ na obje strane jednadžbe. Jedan učenik se javlja i pita odakle dolazi taj $x$. Učenik ne dobiva odgovor od nastavnika. Pokušavaju mu odgovoriti drugi učenici, ali bezuspješno. Drugi učenik pita: „Je li to uvijek tako, da oni mijenjaju predznak?“. Nastavnik odgovara: „Da.“. Nastavnik nastavlja s pojednostavljivanjem izraza kojeg je dobio i zapisuje:*

$$\begin{aligned} 4x &= 16 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{16}{4} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

*i nakon toga pokazivanje primjera završava.*

*Interpretacija i određivanje problemske situacije*

*Treći primjer koji je nastavnik pokazao čini se nepoznat učenicima. Zaključivanje koje je ovdje korišteno jako je vezano za korištenje pravila, npr. kada učenicima objašnjava razlog stavljanja nepoznanica na jednu stranu, a poznanica na drugu stranu jednadžbe. Problemska situacija je kako riješiti jednadžbu korištenjem pravila. Pojavila su se dva glavna pravila. Prvo je da nepoznanice treba premjestiti na onu stranu gdje ih ima više, a drugo je da dodamo isti broj, ali sa suprotnim predznakom na obje strane jednadžbe.*

*Karakterizacija*

1) *Matematičke osnove: (N) Prikazano zaključivanje temeljeno je na korištenju dva pravila. Prvo pravilo, da trebamo staviti sve nepoznanice na onu stranu jednadžbe gdje ih imamo više, nije temeljeno na intrinzičnim svojstvima jednadžbi nego na praktičnosti. Drugo pravilo, da isti broj trebamo dodati s obje strane jednadžbe, temeljeno je na intrinzičnim svojstvima jednadžbi. Kriterij nije ispunjen zato što niti jedno od ovih svojstava nije izrečeno. Budući da su ova dva pravila prikazana na isti način, učenicima će biti teško shvatiti razliku između njih.*

2) *Kreativnost: (N) Nema objašnjavanja, nastavnik samo opisuje rješavanje jednadžbe. Gledano iz algoritamske perspektive, učenicima je predstavljeno novo gradivo, tj. način rješavanja nove vrste jednadžbi.*

3) *Refleksija: (N) Nema nesigurnosti ili refleksije u nastavnoj metodi koju nastavnik koristi. Malo nesigurnosti se pojavilo kada učenik upita o dodavanju nepoznanica na obje strane jednadžbe, ali kako nastavnik nije odgovorio na pitanje, nema ni refleksije.*

4) *Fokus: (D) Problemska situacija je korištenje pravila za rješavanje jednadžbi.*

*U ovom primjeru nije korišteno simulirano kreativno zaključivanje, korišteno je zaključivanje koje prikazuje metodu praćenja pravila, bez kreativnih objašnjenja zašto ili kako primjenjujemo ta pravila. Učenici mogu naučiti ovu metodu rješavanja, ali samo za iste tipove jednadžbi ($ax + b = cx + d$ te možda i za $ax + b = d - x$). Poučavanje u ovom primjeru ne pomaže učenicima u stvaranju vlastitih strategija rješavanja ukoliko bi se susreli s nekim novim tipom jednadžbi.*

**Primjer 10.** *Zadatak je dokazati nejednakost* $\ln(1+x^2) < x^2, x \neq 0$. *Primjer sadržava ono što nastavnik govori i zapisuje na ploču (P) prilikom predstavljanja rješenja razredu u kojem se nalaze maturanti.*

Nastavnik: *Prilikom pokazivanja ove nejednakosti, lakše je ako sve premjestimo na jednu stranu znaka nejednakosti. Ako premjestimo* $\ln(1+x^2)$ *dobivamo:*
P: $x^2 - \ln(1+x^2) > 0, x \neq 0$
Nastavnik: *Prednost ovog premještanja je ta što sada lijevu stranu nejednakosti možemo predočiti kao funkciju, skicirati graf te funkcije i vidjeti nalazi li se ta funkcija iznad osi* $x$. *Zato definiramo:*
P: $f(x) = x^2 - \ln(1+x^2)$
Nastavnik: *Što se dogodi kada je* $x = 0$*?*
P:

$$f(0) = 0^2 - \ln(1+0^2) = 0 - \ln 1 = 0 \tag{4.1}$$

Nastavnik: $f(0)$ *nam govori da nejednakost nije istinita kada je* $x = 0$. *Sada to trebamo pokazati i za sve druge* $x$*-vrijednosti. Derivacija je:*
P:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{1+x^2}2x = \frac{2x(1+x^2) - 2x}{1+x^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x}{1+x^2} = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

Nastavnik: *što je manje od nule ako je* $x < 0$ *i veće od nule ako je* $x > 0$. *Ranije smo pokazali da predznak derivacije određuje rast ili pad funkcije. Ako je* $x < 0$ *onda je brojnik negativan, a nazivnik je pozitivan, pa je cijeli razlomak negativan. Ako je* $x$ *pozitivan, pozitivni su i brojnik i nazivnik, pa i razlomak ostaje pozitivan.*
P:

$$\begin{aligned} &f(x) \textit{ strogo pada na } \langle -\infty, 0\rangle \\ &f(x) \textit{ strogo raste na } \langle 0, +\infty\rangle \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nastavnik: *Zaključak se može izvesti proučavajući predznak prve derivacije [skicira krivulju koja liči na* $y = x^2$*]. Vidimo da je* $f'(0) = 0$ *i ako je* $x < 0$ *onda* $f(x)$ *pada i ako je* $x > 0$ *onda* $f(x)$ *raste. Ne treba nam točan izgled funkcije. Ako ovo skiciramo u koordinatnom sustavu, vidimo da graf ove funkcije leži iznad osi* $x$.
P:

$$(4.1) \textit{ i } (4.2) \Longrightarrow f(x) > 0, \forall x \neq 0, \textit{ a to znači } x^2 > \ln(1+x^2), x \neq 0$$

Nastavnik: *U ovom zadatku primjenjujemo derivacije, proučavamo rast i pad funkcije i skiciramo zaključke koje imamo.*

*Interpretacija i određivanje problemske situacije*

*Identificiran je jedan glavni i tri manje problemske situacije.*

***PS1:*** *Glavni izbor strategije, koji nije objašnjen sve do kraja nastavnog sata, je, prvo, zapisati nejednakost kao funkciju. Drugo, umjesto proučavanja funkcijskih vrijednosti, pronađite lokalni minimum funkcije i koristite derivaciju za pokazivanje rasta i pada funkcije, te tako pokazati leži li funkcija iznad minimuma.*

***PS2:*** *Kako definirati funkciju? Transformirajte nejednakost prebacivanjem svega na lijevu stranu, tako da desna strana bude jednaka nuli. I zapišite da je* $f(x) = x^2 - \ln(1+x^2)$.

***PS3:*** *Kako pronaći minimum? Nastavnik to ne spominje, kao ni zašto tražimo minimum, niti zašto je točku $x = 0$ izabrao kao točku u kojoj gleda vrijednost funkcije $f$.*

***PS4:*** *Pokazuje da je $f$ pozitivna ako je $x \neq 0$ tako da koristeći derivacije pokaže da $f$ pada lijevo, a raste desno od minimuma.*

*Karakterizacija*

1) *Matematičke osnove: (D) Nejednakost je istinita jer je $f(x) > 0, x \neq 0$. Kasnije je istinita jer je $f(0) = 0$ i deriviranjem pokazujemo da je to funkcijski minimum.*

2) *Kreativnost: (N) Izbor strategije nije objašnjen prije njegova korištenja, nego je (djelomično) objašnjen prilikom provedbe.*

3) *Refleksija: (N) Nema nesigurnosti niti učeničke refleksije na izbor strategije i pitanja.*

4) *Fokus: (D) Učenici su, kao i nastavnik, usredotočeni na rješavanje zadatka, i većina učenika vjerojatno može pratiti dobro strukturirano zaključivanje. Budući da su objašnjenja dana poslije zaključaka, postoji nekoliko situacija gdje učenici možda nisu shvatili zašto su neki postupci napravljeni na način na koji jesu. Na primjer, zašto treba provjeriti kolika je vrijednost funkcije kada je $x = 0$ (to učenici shvate tek na kraju zadatka). Kriterij je u suštini ispunjen, iako postoje trenutne situacije u kojima su nastavnik i učenici usredotočeni na različite stvari.*

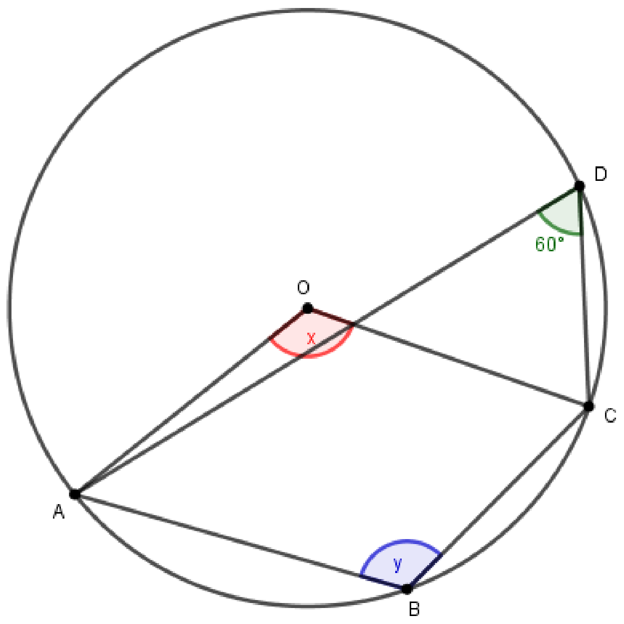
*Dobro strukturiran opis ove metode gdje je izbor strategije objašnjen tek kada je proveden, ne smatra se simulacijom kreativnog zaključivanja.*

**Primjer 11.** *Primjer ovog nastavnog sata održan je u drugom razredu više srednje škole prirodoslovnog programa.*
*Zadana je kružnica sa središtem u točki $O$, i dane su tri točke $A$, $B$ i $C$ koje se nalaze na toj kružnici. Teorem koji ovaj nastavni sat proučava navodi da je kut $\angle AOB$ dvostruko veći od kuta $\angle ACB$ (kasnije je teorem označen kao T1[5]). Nastavnik je započeo nastavni sat tako da je podsjetio učenike na ovaj teorem, a zatim je svima podijelio nastavni listić s četiri zadatka. Kako se bližio kraj sata, učenici su pozvani pred ploču da predstave rješenja zadataka. Kako nitko nije htio predstaviti rješenje drugog zadatka, nastavnik je dopustio učenicima da ga vode kroz rješavanje zadatka. Zadatak je bio pronaći veličine kutova $x$ i $y$ koje su prikazane na slici* 13.

*Jedan učenik rekao je da je veličina kuta $y$ jednaka* $120°$ *zato što četiri točke $A$, $B$, $C$ i $D$ na kružnici tvore tetivni četverokut, a zbroj nasuprotnih kutova u tetivnom četverokutu iznosi* $180°$ *(u ovom primjeru ovaj će se teorem označavati s T2[6]). Nastavnik se složio da je to točno i rekao da mogu raditi na ovaj način ako su razumjeli taj teorem (T2). Drugi učenik je zaključio da je kut koji je označen s $x$ dvostruko veći od kuta koji iznosi* $60°$ *[učenik koristi T1].*

[5]Teorem o obodnom i središnjem kutu - Središnji kut nad nekim lukom jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.

[6]Teorem o tetivnom četverokutu - Četverokut je tetivni ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih (unutarnjih) kutova jednak $180°$.




Slika 13. *Drugi zadatak s nastavnog listića*

*Nakon toga nastavnik upita je li itko na neki drugi način pronašao veličinu kuta $y$. Nastavnik nije dobio odgovor na svoje pitanje, pa je nastavio: „Što ako papir okrenemo naopako? Ako je $y$ obodni kut, koji je središnji kut?“ Označio je izbočeni kut u sredini (kut $360° - x$). Nakon toga je jedan učenik prokomentirao da taj kut iznosi $240°$ jer je $360° - 120° = 240°$ [koristio je da je $x = 120°$]. Jedan učenik je pitao možemo li pomoću $y$ dobiti $x$ ovom metodom. Nastavnik je odgovorio „Možemo.“.*

*Interpretacija i određivanje problemske situacije*

*Veličina kuta $x$ pronađena je direktnom primjenom teorema T1, jer je središnji kut ($x$) dvostruko veći od obodnog kuta ($\angle ADC$).*
*U primjeru su predstavljena dva načina pronalaženja veličine kuta $y$, jedan od strane učenika, a jedan od strane nastavnika. Prvi način, predstavljen od strane učenika, temeljen je na teoremu koji nije spomenut na nastavnom satu, a to je da zbroj unutarnjih kutova u tetivnom četverokutu iznosi $180°$ (T2). Učeniku koji nije upoznat s teoremom T2 bi rješenje na ovaj način bilo jako teško za razumjeti. Drugi način rješavanja temeljen je na, glavnom teoremu tog nastavnog sata, teoremu T1. Teorem nije korišten na očigledan način, budući da je središnji kut izbočeni kut (kut između $180°$ i $360°$). Objašnjenje drugog načina je da trebamo okrenuti kružnicu, pa ćemo na taj način dobiti da je $y$ obodni kut, a središnji kut je $360° - x$.*

*Karakterizacija*

1) *Matematičke osnove: (D) Zaključivanje u sve tri problemske situacije temelji se na svojstvima teorema T1 i T2.*

2) *Kreativnost: (D) Učenici su stekli nova znanja primjenom teorema T1 na novi način (sa središnjim kutom većim od $180°$). Kreativna objašnjenja bila su ograničena s određivanjem kutova koji su povezani s teoremom T1. Objašnjenja su potaknuta pitanjima nastavnika.*

*3) Refleksija: (D) Budući da je zadatak pronalaženja veličine kuta y riješen na dva načina, a drugi način rješavanja nije bio očit, kriterij je ispunjen.*

*4) Fokus: (D) Podudaranje općih problemskih situacija kod učenika je dobro jer su svi učenici radili na istim zadacima. Na početku sata nije očito da će svi učenici imati istu problemsku situaciju, npr. kako primijeniti teorem za određivanje veličine kuta y.*

*Iako je kriterij kreativnosti zadovoljen na relativno jednostavan i ograničen način, ovo je primjer simuliranog kreativnog zaključivanja. Rasprava o kutovima i pitanja nastavnika vodila su do rješenja problemske situacije. Učenici su imali priliku razumjeti i naučiti novo gradivo, ali i naučiti više o primjeni teorema budući da je i izravna primjena teorema bila dio ovog nastavnog sata.*

## 4.4 Analiza istraživanja i rezultati

U ovom poglavlju sažeti su rezultati 23 nastavna sata koja su analizirana po kriterijima kreativnosti.

### 4.4.1 Matematičke osnove

Ovaj kriterij kreativnosti ispunjen je u 13 slučajeva u kojima su intrinzična matematička svojstva eksplicitno objašnjena učenicima na neki način.

Dodatne rasprave nisu bile potrebne za ispunjenje ovog kriterija. U primjeru 11 je ovaj kriterij zadovoljen jer nastavnik koristi teorem kao osnovu za obrazloženje zadatka. U drugoj situaciji drugi nastavnik raspravlja o značenju konstante u funkciji $y = x^2 + 2$ i kaže da „daje presjek s $y$-osi jer kada je $x = 0$ onda je $y = 2$“. U ovom slučaju nastavnik koristi intrinzično svojstvo povezanosti funkcije i njenog grafa prilikom davanja odgovora učenicima. Ukoliko bi nastavnik samo rekao „konstanta daje $y$-koordinatu u presjeku s $x$-osi“, tada bi zaključak bio samo naveden i neopravdan nekim intrinzičnim svojstvom. U oba ova slučaja nastavnik je mogao nastaviti raspravu provjeravajući koliko učenici razumiju temeljne pojmove matematike, npr. mogli su raspravljati o tome kako se ova funkcija ponaša u drugim vrijednostima.

U situacijama kada kriterij nije bio ispunjen, najčešći razlog je bio taj što je nastavnik predstavljao rješenje zadatka ili algoritam za rješavanje zadatka bez rasprave o matematičkim svojstvima koje koristi. U jednom primjeru provedeno zaključivanje se temeljilo na nematematičkom svojstvu. Nastavnik je graf kvadratne jednadžbe s pozitivnim koeficijentom uz član $x^2$ usporedio s nasmijanim usnama. Poveznica pozitivan – sretan nema matematičku podlogu, a nije postojalo niti jedno drugo objašnjenje u ovom primjeru.

### 4.4.2 Kreativnost

U tri primjera je zaključivanje određeno kao kreativno. Zahtjevi na kreativnost nisu bili visoki. U jednom primjeru (Primjer 11.) nastavnik koristi pitanja kako bi usmjerio učenike na nov način primjene teorema.

Situacije u kojima ovaj kriterij nije ispunjen većinom su se sastojale od toga da je nastavnik opisivao algoritam rješavanja zadataka (u primjerima 8, 9 i 10). Rješenje zadatka je nakon toga opisano bez objašnjenja koje podupiru odabranu strategiju rješavanja.

Jedno od glavnih otkrića ovog istraživanja odnosi se na nedostatak uobičajenih objašnjenja u suprotnosti s prisutnosti (povremenih) provjerenih objašnjenja. Ukoliko nastavnik daje samo provjerena objašnjenja, on uvijek mora znati što treba raditi kojim redom, i jedino što treba znati je objasniti ono što on već sam zna.

### 4.4.3 Refleksija

U većini slučajeva u ovom istraživanju (u 18 situacija od 23) nije bilo refleksije ili nesigurnosti.

U jednom od četiri primjera gdje je ispunjen ovaj kriterij, nastavnik pita učenike kako nastaviti dalje sa zadatkom. To znači da u 18 situacija bez nesigurnosti ili refleksije, nastavnik nije postavljao pitanja učenicima i nije dobio nikakve izjave o zadacima koje su radili. U situacijama kada je ovaj kriterij bio ispunjen, zadaci su riješeni na više od jednog načina.

### 4.4.4 Fokus

U ovom istraživanju pojavilo se jedanaest situacija u kojima ovaj kriterij nije bio ispunjen. U pet od tih jedanaest situacija postojale su jasne razlike u problemskim situacijama. U ostalih šest situacija nastavnik je predstavio jako teško kreativno zaključivanje, ili je predstavio zaključivanje koje je sadržavalo znanje s kojima se učenici još nisu susreli. To su razlozi zbog kojega može doći do različitog fokusa.

Ovaj kriterij je bio često ispunjen zato što su nastavnici i učenici zajedno rješavali isti zadatak. U nekim situacijama su učenici radili na zadatku zajedno i to je očigledno odmah ispunilo ovaj kriterij. U drugim situacijama, aktivnost učenika je pokazala razlike u fokusu, većinom na način da učenici postavljaju dodatna pitanja.

Problemske situacije su se razlikovale. U nekim situacijama nastavnik je objašnjavao svaki korak algoritma, a problemska situacija za učenike je bila izbor strategije za rješavanje tog problema. U primjeru 8 nastavnik je usredotočen na jedno matematičko svojstvo, dok su učenici imali problema s drugim svojstvom. U drugom primjeru, nastavnik je postavio pitanje koliko će rješenja dobiti ako riješe jednadžbu tipa $y = ax + b$. Nastavnik je objašnjavao da jednadžba $x + 5 = 11$ ima jedno rješenje, a jednadžba $x^2 = 25$ ima dva rješenja. Nakon toga učenici su pogađali koliko bi neka jednadžba imala rješenja (npr. neki od odgovora su bili: „rješenje je matrica“, „jedno rješenje“, „rješenje je nova jednadžba“). U ovom primjeru nastavnik je usredotočen na generaliziranje svojih primjera, a učenici su fokusirani na pogađanje točnih odgovora. Nekoliko učeničkih odgovora nije imalo nikakve veze s postavljenim primjerima. Problem nije što su ti odgovori netočni, nego što se zaključivanje učenika jako razlikuje od zaključivanja nastavnika.

U svakom poučavanju bitno je da nastavnik i učenici budu usredotočeni na istu stvar. Ukoliko u nastavi učenici imaju jednu, a nastavnik objašnjava neku drugu problemsku situaciju, postoji opasnost da učenici neće ništa naučiti, ili barem ne ono što je nastavnik namjeravao da nauče.

## 4.5 Rasprava

Postoje dva značajna načina na koje su nastavnici uspjeli zadovoljiti kriterije simuliranog kreativnog zaključivanja. Prvi način je raspravljanje o matematičkim svojstvima s učenicima, dopuštajući im da sami smisle način rješavanja i pomažući im postavljajući pitanja ili izjava koje se tiču određenog matematičkog svojstva. Drugi način je korištenje motivacijskih objašnjenja prilikom pokazivanja novih načina za korištenje teorema. U svim slučajevima gdje je zaključivanje označeno kao kreativno, postojao je neki način objašnjavanja.

Istraživanje je pronašlo nekoliko razloga zašto nastavnici nisu uspjeli koristiti simulirano kreativno zaključivanje. Nedostatak motivacije kao i nedostatak objašnjavanja su dva najvažnija razloga. Sljedeći razlog je što u zaključivanja nisu bile uključene refleksije i nesigurnosti, pa je to zaključivanje vodilo prezentiranju algoritama. Također, postojale su situacije u kojima su nastavnik i učenici imali različite problemske situacije, ali i situacije u kojima učenici očito nisu mogli shvatiti dano zaključivanje.

U slučajevima kada analizirano zaključivanje nije bilo kreativno, pojavljivalo se ili prezentiranje metoda ili algoritma, ili je nastavnik vodio proces zaključivanja tako da je učenicima postavljao bitna pitanja (uglavnom na osnovnoj razini) na koja su učenici pokušavali dati odgovor, nekada i pogađanjem. U ovim slučajevima moguće prednosti učenja za učenike su kako riješiti slične zadatke onima koje je riješio nastavnik. Prezentiranje algoritama odvijalo se na tri načina:

1. iznošenje algoritma bez komentara;
2. iznošenje algoritma s komentarima što je točno učinjeno;
3. iznošenje algoritama s objašnjenjima pravila ili metoda koje su korištene.

Ukoliko slučaj 3. sadrži objašnjenja koja se odnose na korištenje pravila, onda je zaključivanje označeno kao kreativno.

Glavni dio ovog istraživanja nije bio na nastavi koja je specifično napravljena kako bi poboljšala kreativno zaključivanje. Nastavni sati koji su proučeni možda imaju neke druge kvalitetne osobine koje se ne pojavljuju u gore navedenoj analizi.

Neki primjeri u ovom istraživanju ispunjavaju nekoliko kriterija za simulaciju kreativnog zaključivanja. Međutim, u tim primjerima neki su kriteriji ispunjeni na prilično skroman način. Rezultati istraživanja pokazuju da su algebarske metode za rješavanje specifičnih zadataka ono što učenici nauče iz predavanja. U većini primjera u ovom istraživanju nije bilo kreativnih objašnjenja. Teško je pronaći primjer gdje su nastavnici objasnili što rade tijekom predavanja. Ako se učenici nikada ne sretnu s kreativnim zaključivanjem, simuliranim kreativnim zaključivanjem ili bilo kojim drugim tipom kreativnog matematičkog zaključivanja koje je temeljeno na intrinzičnim matematičkim svojstvima, kako od njih možemo očekivati da nauče matematički zaključivati i rješavati probleme čak i na elementaran način? Ako nastavnici rijetko koriste objašnjavanja prilikom predavanja, kako možemo od učenika očekivati da će naučiti kreativno zaključivanje?

# 5 Zaključak

Zaključivanje i razumijevanje temelj je matematike. Uvođenjem zaključivanja i razumijevanja u nastavni plan i program matematike u srednjim školama povećao bi se napredak učenika u shvaćanju sadržaja i postupaka koje uče, te bi bili uspješniji u daljnjem učenju matematike.

Zaključivanje i razumijevanje mora postati dio nastave matematike srednjih škola. Ne samo zato što je općenito važno, nego zato što je temelj za matematičku kompetenciju. Nije dovoljno da učenici ponekad iskuse zaključivanje i razumijevanje. Nastavnici moraju stalno podržavati i poticati učenike na razumijevanje i zaključivanje.

Učenici se u svojem obrazovanju moraju susresti s kreativnim zaključivanjem kako bi nastavnici od njih mogli očekivati da nauče i razvijaju matematičko zaključivanje i razumijevanje. U tome glavnu ulogu imaju upravo nastavnici. Oni moraju osmisliti kreativne nastavne sate i zainteresirati učenike za određeno gradivo. Pri tome detaljno moraju objašnjavati sve korake rješenja zadatka kako učenici ne bi učili samo algoritme za rješavanje tih zadataka.

U švedskom nacionalnom kurikulumu, logičko zaključivanje označeno je kao glavna kompetencija koje učenici moraju ostvariti u svakom razredu. U nastavnom planu obavezne škole (osnovne škole) piše: „Nastava matematike trebala bi osigurati da učenici razvijaju sposobnost razumijevanja, provode i koriste logičko zaključivanje, dolaze do zaključaka i generaliziraju, usmeno i pismeno objasne i pruže objašnjenja za svoje razmišljanje.“ Jedan od načina na koji možemo pomoći učenicima u razvijanju sposobnosti je dopustiti kreativnom zaključivanju i objašnjavanju da budu standardni dio svakog sata nastave matematike. U tom slučaju, simulacija kreativnog zaključivanja dovesti će do veće prisutnosti kreativnih matematičkih zaključaka u svakodnevnoj nastavi.

## Sažetak

Zaključivanje definiramo kao proces dolaženja do zaključaka na temelju dokaza ili navedenih pretpostavki, dok se razumijevanje definira kao razvijanje shvaćanja za stanje, kontekst ili koncept koje povezujemo s postojećim znanjem. Zaključivanje i razumijevanje imaju bitnu ulogu u nastavi matematike osnovnih i srednjih škola. Jedno od bitnijih zaključivanja je kreativno zaključivanje. Suprotnost kreativnom zaključivanju je imitativno zaključivanje koje učenici najčešće koriste u nastavi matematike. Kako bi učenici naučili pravilno matematički zaključivati i rješavati probleme, nastavnici u svoju nastavu moraju uvesti kreativno zaključivanje i objašnjavanje.

**Ključne riječi:** zaključivanje, razumijevanje, kreativno zaključivanje, imitativno zaključivanje, sintaktično zaključivanje, semantičko zaključivanje, nastava matematike

## Title and summary

**Reasoning and sense making in teaching mathematics.** Reasoning is defined as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions, while sense making is defined as developing understanding of situation, context, or concept which we connect with existing knowledge. Reasoning and sense making play an important role in teaching mathematics throughout the elementary and secondary education. One of the most important types of reasoning is the creative one. The type opposite to the creative reasoning is the imitative reasoning which is most commonly used in learning mathematics. In order for students to learn the correct mathematical reasoning and how to solve problems, the teachers must introduce creative reasoning and explanations in their teaching.

**Kewords:** reasoning, sense making, creative reasoning, imitative reasoning, syntactic reasoning, semantic reasoning

# Literatura


[1] T. Bergqvist, J. Lithner, *Simulating Creative Reasoning in Mathematics Teaching*, Mathematics Education Research Journal No. 2 (2005.)

[2] J. Cetinić, D. Vidaković Samaržija, *Komparacija školskih sustava zemalja Europske unije s Hrvatskom*, Zbornik radova 18. ljetne škole kineziologa Republike Hrvatske (2009.), 508-515.

[3] D. Esdown, *Syntactic and semantic reasoning in mathematics teaching and learning*, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, NSW 2006, Australia

[4] V. Kadum, *Kreativnost u nastavi matematike*, Matematički obzori 6(2011), 165-174.

[5] D. Koesling, P. Miller, *Mathematics Teaching for Understanding: Reasoning, Reading, and Formative Assessment*, The Right to Literacy in Secondary Schools: Creating a Culture of Thinking (2009), 65-80.

[6] Z. Kurnik, *Dedukcija*, Matematika i škola 51(2009), 5-11.

[7] Z. Kurnik, *Problemska nastava*, Matematika i škola 15(2002), 196-202.

[8] G. Martin, *Focus in high school mathematics: reasoning and sense making*, National council of teachers of mathematics, Denver, 2009.

[9] S. Varošanec, *Teorem o obodnom i središnjem kutu*, Zagreb
URL: http://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2014/12/Matka13-m02-obodni-kut.pdf

[10] S. Varošanec, *Tetivni četverokut*, Zagreb
URL: http://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2014/12/Matka23-m04-tetivni.pdf

[11] *Inferencijalna statistika*,
URL: http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=57896

# Životopis

Zovem se Marta Ivanišić i rođena sam 5. prosinca 1993. godine u Slavonskom Brodu. Živim i odrasla sam u Garčinu u obitljskoj zajednici s ocem Matom, majkom Jasnom i sestrama: Lovorkom, Matejom i Klarom. Školovanje sam započela 2000. godine u osnovnoj školi "Vjekoslav Klaić" u Garčinu. Nakon osnovne škole, 2008. godine upisujem opću gimnaziju u Gimnaziji "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu. 2012. godine upisujem integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta Josip Jurja Strossmayera u Osijeku. Aktivno se bavim rukometom 11 godina i folklorom 16 godina.