Eulerove kružnice

Blažević, Andrijana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Andrijana Blažević

Eulerova kružnica

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Andrijana Blažević

Eulerova kružnica

Završni rad

Voditelj: prof. dr. sc. Zdenka Kolar-Begović

Osijek, 2017.

Sažetak

U ovom radu proučavana je jedna kružnica pridružena trokutu. Kružnica na kojoj leže polovišta stranica trokuta, nožišta visina te polovišta dužina kojima je jedna krajnja točka vrh trokuta, a druga ortocentar trokuta poznata je kao Eulerova kružnica ili kružnica devet točaka. Važna svojstva ove kružnice su istražena. Dokazana je i tvrdnja koja povezuje Eulerovu kružnicu, trokutu upisanu kružnicu i trokutu pripisane kružnice, poznati Feuerbachov teorem.

Ključne riječi

Eulerova kružnica, upisana kružnica, pripisana kružnica, konciklične točke

Abstract

In this paper, a circle that is joined to the triangle is studied. The circle which passes through the mid-points of the sides of a triangle, the feett of the altitudes and the mid-points of the line segments from the orthocenter to the vertices of a triangle is called Euler circle or the nine-point circle. Some important characteristics of this circle are researched. The assertion that links Euler circle to the inscribed and escribed circles of a triangle was proved. It is well known Feuerbach's theorem.

Key words

Euler circle, inscribed circle, escribed circle, concyclic points

Sadržaj

Uvod **1**

1 Iz povijesti Eulerove kružnice **2**

2 Eulerova kružnica **3**

3 Feuerbachov teorem **17**

Literatura **23**

Uvod

U dosadašnjem proučavanju trokuta susretali smo se s trokutu opisanom i upisanom kružnicom te trokutu pripisanim kružnicama. U ovom radu ćemo se baviti još jednom značajnom trokutu pridruženom kružnicom te istražiti njezina svojstva. Proučavat ćemo Eulerovu kružnicu, u literaturi poznatu i pod imenom kružnica devet točaka ili Feuerbachova kružnica.

Rad se sastoji od tri poglavlja. U prvom poglavlju ćemo se baviti elementima povijesti otkrića Eulerove kružnice. U drugom poglavlju ćemo dokazati da devet točaka svakog trokuta, polovišta stranica, nožišta visina te polovišta dužina kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi ortocentar trokuta, leže na jednoj kružnici. Proučit ćemo neka značajna svojstva te kružnice. U trećem poglavlju ćemo obraditi jedno od svojstava Eulerove kružnice iskazano Feuerbachovim teoremom koji tvrdi da kružnica devet točaka dodiruje trokutu upisanu i sve tri pripisane kružnice.

Poglavlje 1

Iz povijesti Eulerove kružnice

Švicarski matematičar Leonhard Euler dokazao je 1765. godine da šest točaka, polovišta stranica trokuta i nožišta visina, leže na jednoj kružnici. U čast Eulera ova kružnica se u literaturi često može naći pod imenom Eulerova kružnica. Prema povijesnim istraživanjima J. S. MacKaya (1892. godine) postoji nekoliko nezavisnih otkrića Eulerove kružnice. Prvi put se spominje u članku Johna Butterwortha (1804. godine) u dokazu Bevanova teorema. Da polovišta spojnica vrhova i ortocentra trokuta, također leže na Eulerovoj kružnici tog trokuta navodi se u članku Brianchona i Ponceleta (1820. god.). U njihovom članku daje se prvi potpuni dokaz teorema o koncikličnosti navedenih devet točaka i prvi put se koristi termin "kružnica devet točaka". Mnogi autori koriste upravo termin "kružnica devet točaka".

Njemački matematičar Karl Wilhelm Feuerbach je 1822. godine dokazao da kružnica koja prolazi nožištima visina trokuta dira sve četiri pripisane kružnice. Dokaz je objavljen u radu *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.* Ova tvrdnja je u literaturi poznata kao Feuerbachov teorem. Pojava ovog teorema je probudila veliki interes među matematičarima koji su se bavili tom tvrdnjom te pridonijeli velikim brojem različitih dokaza. Feuerbachu se pripisuje nezavisno otkriće spomenute kružnice te se zbog toga koristi i termin Feuerbachova kružnica.

Olry Terquem, francuski matematičar, je 1842. analitički dokazao Feuerbachov teorem i prvi koristio termin kružnica devet točaka. U literaturi se Eulerova kružnica naziva i Terquemova kružnica.

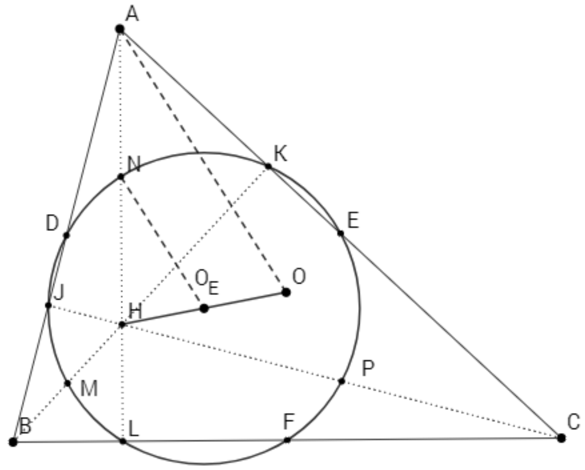
Poglavlje 2

Eulerova kružnica

U ovom poglavlju ćemo dokazati teorem o koncikličnosti devet točaka.

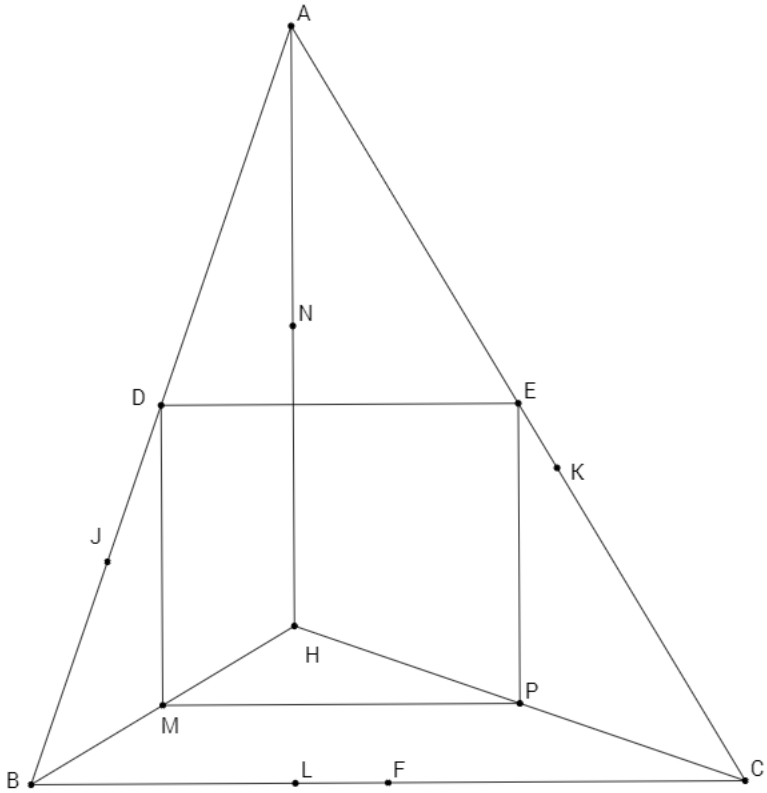
Teorem 2.1. *Neka su u trokutu* ABC *točke* J, L, K *nožišta visina, točke* D, E, F *polovišta stranica te točke* M, N, P *polovišta dužina* $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, *gdje je* H *ortocentar. Točke* D, E, F, J, K, L, M, N *i* P *leže na jednoj kružnici* k_E.

Takvu kružnicu zovemo Eulerovom kružnicom, a polovišta dužina $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, gdje je H ortocentar trokuta ABC, tj. točke M, N i P, nazivaju se Eulerovim točkama.



Slika 2.1: Eulerova kružnica

Dokaz. Neka je dan trokut ABC i neka je H njegov ortocentar. Neka su D, E, F polovišta njegovih stranica, J, L i K nožišta visina, a točke M, N i P polovišta dužina $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ i $\overline{HC}$. Želimo dokazati koncikličnost navedenih točaka.



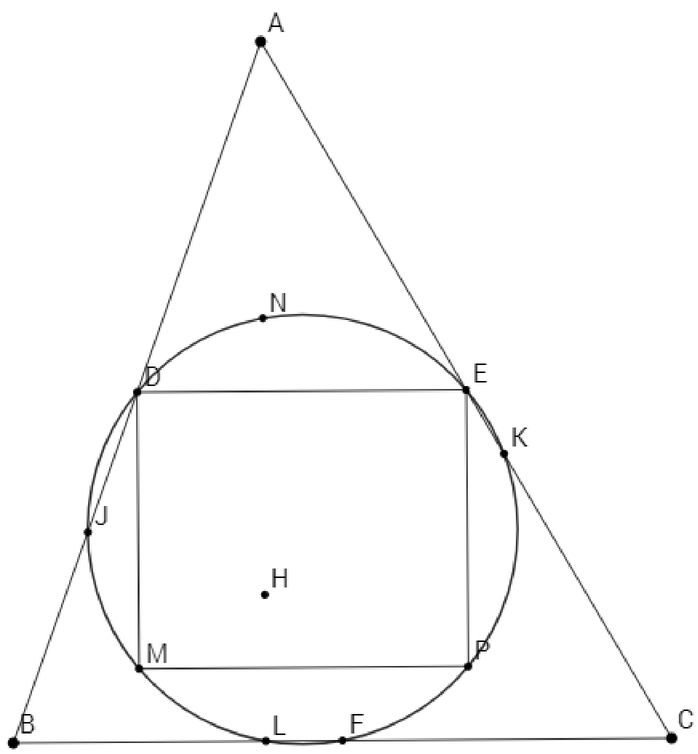
Slika 2.2: Slika uz dokaz teorema 2.1.

Točke D i E su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ te će prema teoremu o srednjici trokuta vrijediti da su dužine $\overline{DE}$ i $\overline{BC}$ paralelne. Budući da su točke M i P prema konstrukciji redom polovišta spojnica točaka B i H, i H i C, slijedit će da su i dužine $\overline{MP}$ i $\overline{BC}$ paralelne.
Kako je dužina $\overline{DE}$ paralelna s $\overline{BC}$ i $\overline{MP}$ parlelna s $\overline{BC}$ slijedi da je $\overline{DE}$ paralelna s $\overline{MP}$.

Isti princip zaključivanja primjenit ćemo i na sljedeći trokut BAH. Točke M i D su po konstrukciji redom polovišta stranica $\overline{BH}$ i $\overline{BA}$, što će značiti da je dužina $\overline{MD}$ paralelna stranici $\overline{HA}$.

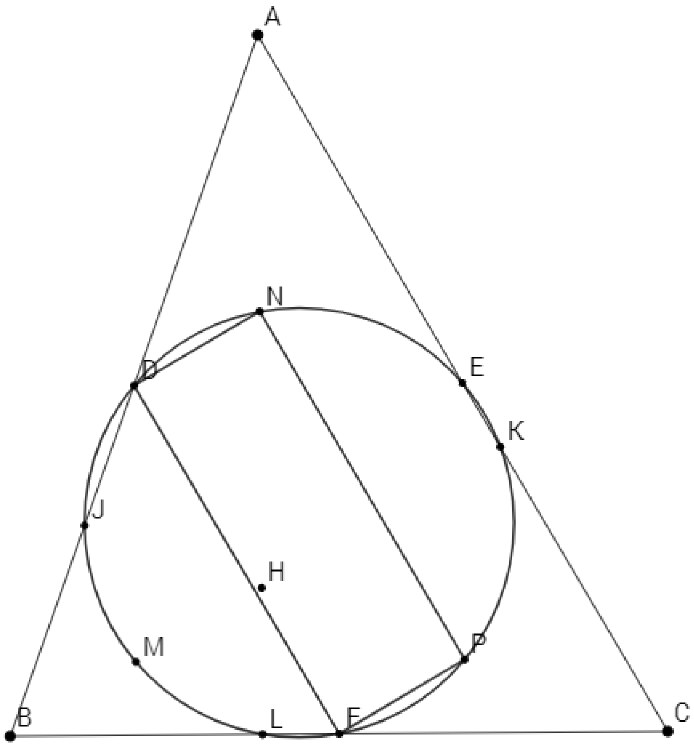
Analogno se pokaže da su u trokutu CAH, gdje su točke E i P polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{HC}$, dužina $\overline{EP}$ i stranica $\overline{HA}$ paralelne. Iz $\overline{MD}$ paralelno s $\overline{HA}$ i $\overline{HA}$ paralelno s $\overline{EP}$ slijedi da je $\overline{MD}$ paralelno s $\overline{EP}$.

Kako su dužine $\overline{MD}$ i $\overline{HA}$ paralelne, a dužina $\overline{HA}$ leži na pravcu određenim točkama A i L, onda će dužina $\overline{MD}$ biti paralelna dužini $\overline{AL}$. AL je po konstrukciji pravac na kojemu leži visina trokuta na stranicu $\overline{BC}$ te će dužina $\overline{AL}$ biti okomita na stranicu $\overline{BC}$ i njoj paralelnu dužinu $\overline{DE}$. Zbog paralelnosti dužina $\overline{MD}$ i $\overline{AL}$ slijedi da je dužina $\overline{MD}$ okomita na dužinu $\overline{DE}$. Ovime smo pokazali da je četverokut $DMPE$ pravokutnik te mu se može opisati kružnica. Promjer kružnice je $\overline{DP}$.



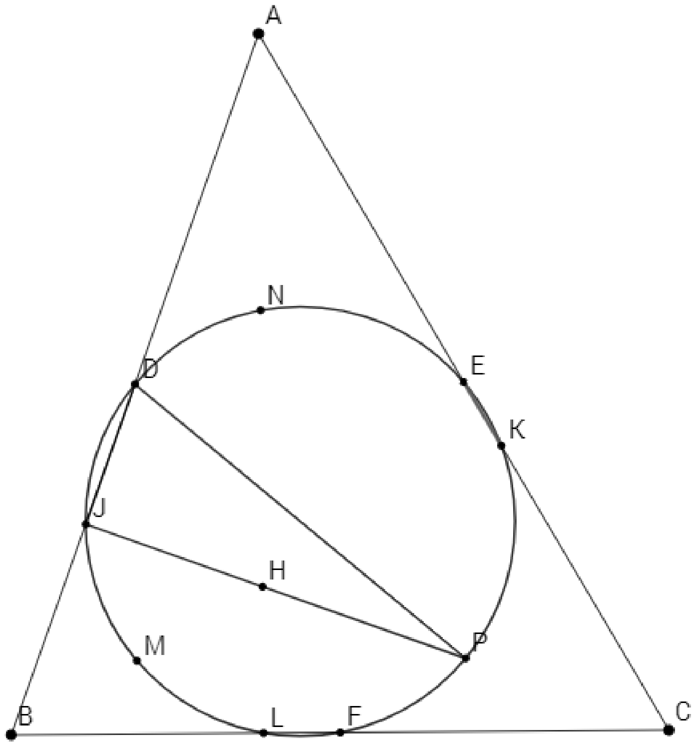
Slika 2.3: Pravokutnik $DMPE$ i opisana mu kružnica

Analognim zaključivanjem se pokaže da je četverokut $DNPF$ pravokutnik i da mu se može opisati kružnica promjera $\overline{DP}$.



Slika 2.4: Pravokutnik $DNPF$ i opisana mu kružnica

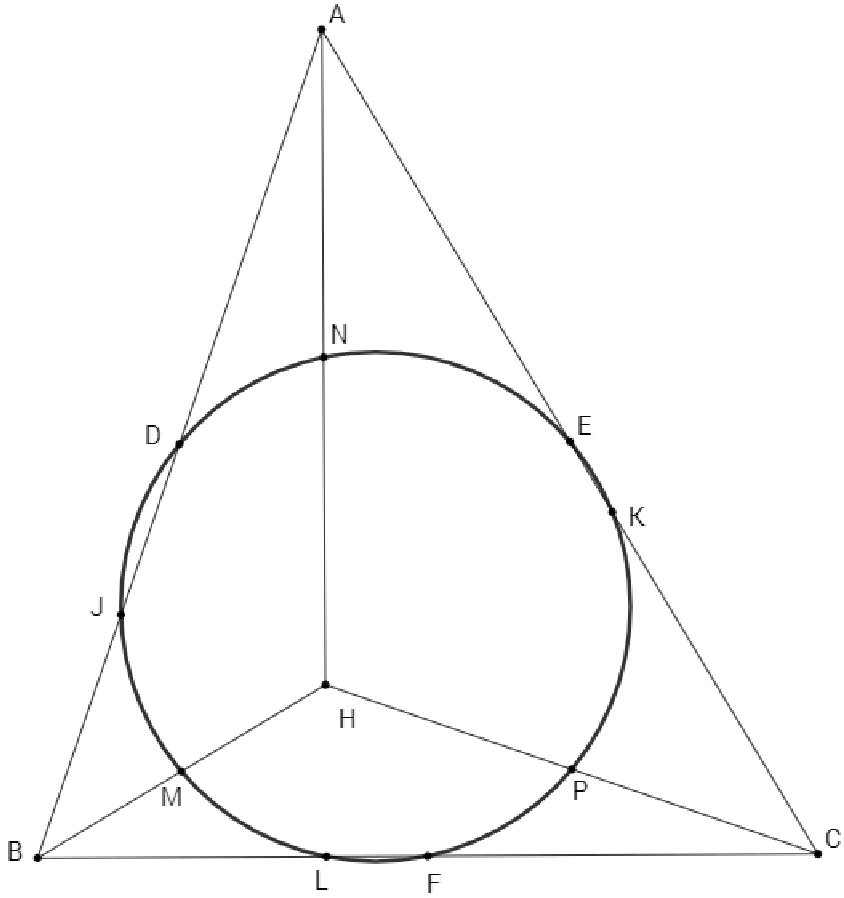
Time smo dokazali da točke D, N, E, P, F i M leže na istoj kružnici k. Središte kružnice k će biti točka sjecišta dijagonala, odnosno polovište dužine $\overline{DP}$ (jer je dužina $\overline{DP}$ dijagonala oba dobivena četverokuta). Označimo sa O_E središte kružnice k. Pokažimo sada da i točke J, K, L također leže na kružnici k.



Slika 2.5: Trokut DJP

Dužina $\overline{CJ}$ je visina na stranicu $\overline{AB}$ te će $\angle DJP$ biti pravi. Kako je dužina $\overline{DP}$ promjer kružnice k, točka J mora ležati na kružnici. Analognim postupkom se pokaže da točke L i K leže na toj istoj kružnici k.

Ovim smo dokazali postojanje Eulerove kružnice koju ćemo označavati s k_E.



Slika 2.6: Koncikličnost devet točaka

□

Prije dokaza tvrdnje o položaju središta kružnice k_E i veličini njezinog radijusa, dokazat ćemo jedan teorem koji ćemo koristiti.

Teorem 2.2. *Središte O opisane kružnice, težište T i ortocentar H leže na jednom pravcu i vrijedi*

$$\overrightarrow{TH} = -2\overrightarrow{TO}.$$

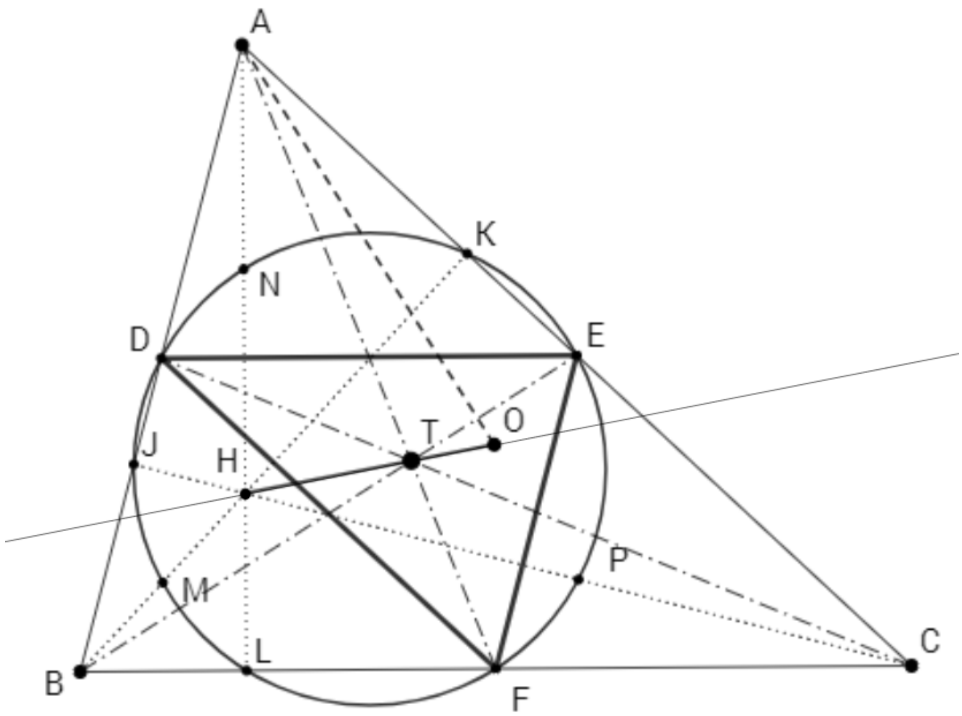
Pravac na kojem središte trokutu opisane kružnice trokuta, težište i ortocentar trokuta naziva se *Eulerovim pravcem.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC gdje je O središte opisane mu kružnice, T težište i H ortocentar. Najednostaviji dokaz ovoga teorema je pomoću homotetije.

Neka je točka T takva da vrijedi $\overrightarrow{TH} = -2\overrightarrow{TO}$. Točke E i F su polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Kako je $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ i kako su stranice trokuta OEF paralelne odgovarajućim stranicama trokuta ABH, točka T će biti središte homotetije s koeficijentom $-\frac{1}{2}$ koja preslikava trokut ABH u trokut OEF.
Zbog toga imamo

$$\overrightarrow{TB} = -2\overrightarrow{TE}, \quad \overrightarrow{TA} = -2\overrightarrow{TF}$$

tj. T je težište trokuta ABC.



Slika 2.7: Slika uz dokaz teorema 2.2

□

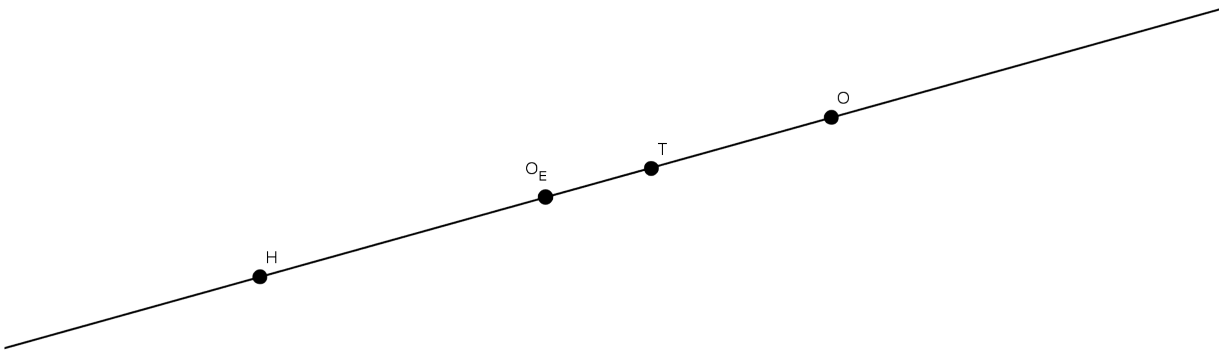
Dokažimo sada tvrdnju kojom se utvrđuje položaj središta Eulerove kružnice i veličina njenog radijusa.

Dokazali smo da kružnica k_E prolazi polovištima stranica trokuta ABC, što znači da je ona ujedno i kružnica opisana trokutu DEF. Njeno središte (točka

O_E) će u tom slučaju biti na sjecištu simetrala stranica trokuta DEF. Homotetija definirana u prethodnom dokazu vrijedi i za sve točke unutar trokuta ABC pa slijedi da je

$$h_T^{-\frac{1}{2}}(O) = O_E, \tag{2.1}$$

gdje je točka O središte opisane kružnice trokuta ABC. Iz prethodnog dokaza i (2.1) možemo zaključiti da uz točke H, T i O, na Eulerovom pravcu leži i točka O_E,



Slika 2.8: Položaj točaka H, T, O, O_E

a iz sljedećih jednakosti

$$|HO| = 3|TO|. \tag{2.2}$$

i

$$|OO_E| = \frac{3}{2}|TO|. \tag{2.3}$$

dobijemo da je

$$|OH| = 2|OO_E|.$$

što znači da se središte Eulerove kružnice trokuta ABC nalazi na polovištu dužine $\overline{HO}$.
Jer su stranice trokuta DFE srednjice trokuta ABC, vrijedit će

$$\frac{|AB|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|DF|} = 2.$$

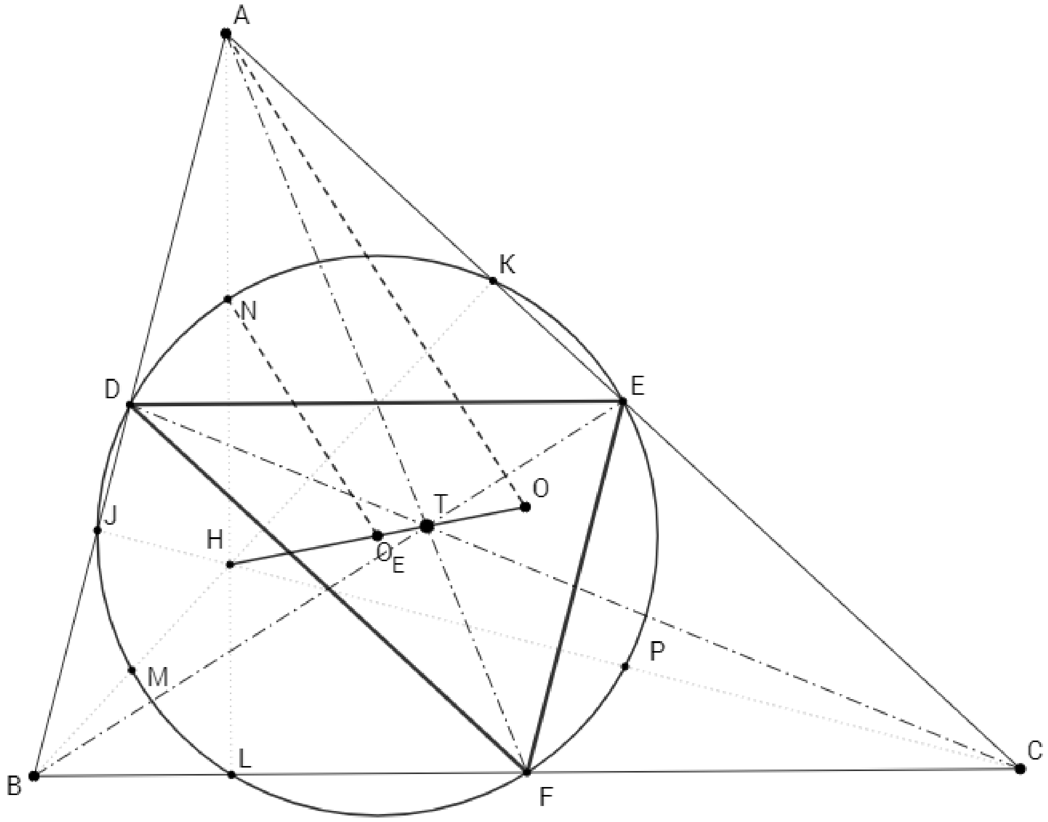
Iz toga slijedi da je opseg O_{ABC}=$2O_{DEF}$ pa je veza radijusa R kružnice opisane trokutu ABC i radijusa R_E Eulerove kružnice dana jednakošću

$$R_E = \frac{1}{2}R.$$

Sljedeće tvrdnje proizašle iz prethodnog dokaza iskazati ćemo u obliku teorema.

Teorem 2.3. *Središte O_E kružnice k_E je polovište dužine $\overline{HO}$, gdje je O središte opisane kružnice trokuta ABC, a H ortocentar.*

Teorem 2.4. *Polumjer R_E Eulerove kružnice k_E jednak je polovini polumjera R kružnice opisane trokutu ABC.*



Slika 2.9: Eulerova kružnica

Teorem 2.5. *Eulerova kružnica raspolavlja svaku dužinu koja spaja ortocentar trokuta i točku na opisanoj kružnici.*

Teorem 2.6. *Neka su u trokutu ABC točke D, E, F polovišta stranica, O središte njemu opisane kružnice, a H ortocentar. Tada je*

$$|AH| = 2|OF|, \quad |BH| = 2|OE|, \quad |CH| = 2|OD|$$

Teorem 2.7. *Svi trokuti upisanu u danu kružnicu koji imaju i zajednički ortocentar imaju zajedničku Eulerovu kružnicu.*

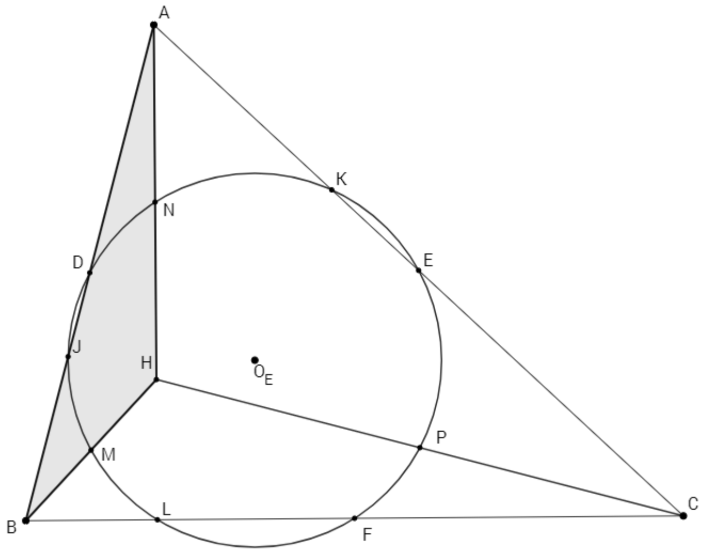
Dokaz. Neka je $k(O, R)$ kružnica u koju su upisani trokuti. Prema pretpostavci svi promatrani trokuti imaju zajednički ortocentar H pa će prema teoremu 2.3. imati središte Eulerove kružnice na polovištu dužine $\overline{HO}$. Prema teoremu 2.4. radijus Eulerove kružnice $R_E = \frac{1}{2}R$.

Dokazali smo da je kružnica k_E sa središtem u O_E i radijusa R_E zajednička Eulerova kružnica promatranih trokuta.

□

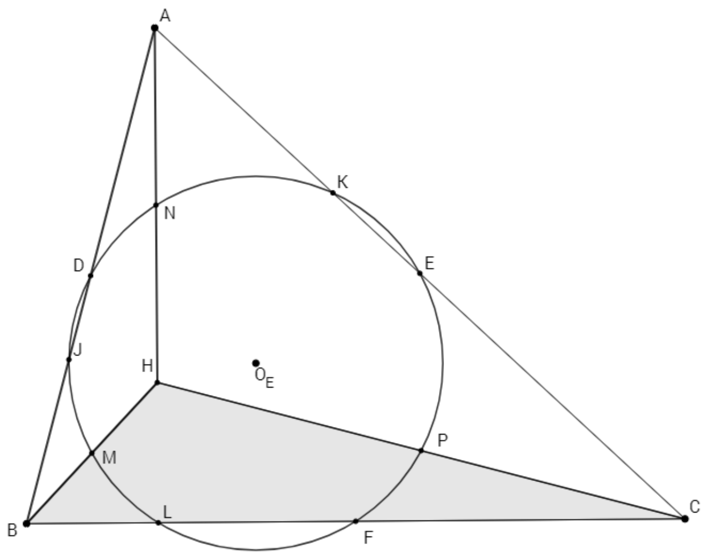
Teorem 2.8. *Ako ABC nije pravokutan trokut, tada četiri trokuta ABC, ABH, BCH, ACH, gdje je H ortocentar trokuta ABC, imaju zajedničku Eulerovu kružnicu.*

Dokaz. Neka je kružnica (slika 2.10) k_E Eulerova kružnica trokuta ABC. Promotrimo trokut ABH. Uočavamo da je nožište visine na stranicu $\overline{AB}$ i dalje točka J, nožište visine na pravac na kome leži stranica $\overline{BH}$ je točka K, a nožište visine na pravac na kome leži stranica $\overline{AH}$ točka L. Polovišta stranica su točke D, M, N te polovišta spojnica vrhova i ortocentra su točke E, F, P. Dobili smo istih devet točaka kao i za trokut ABC.

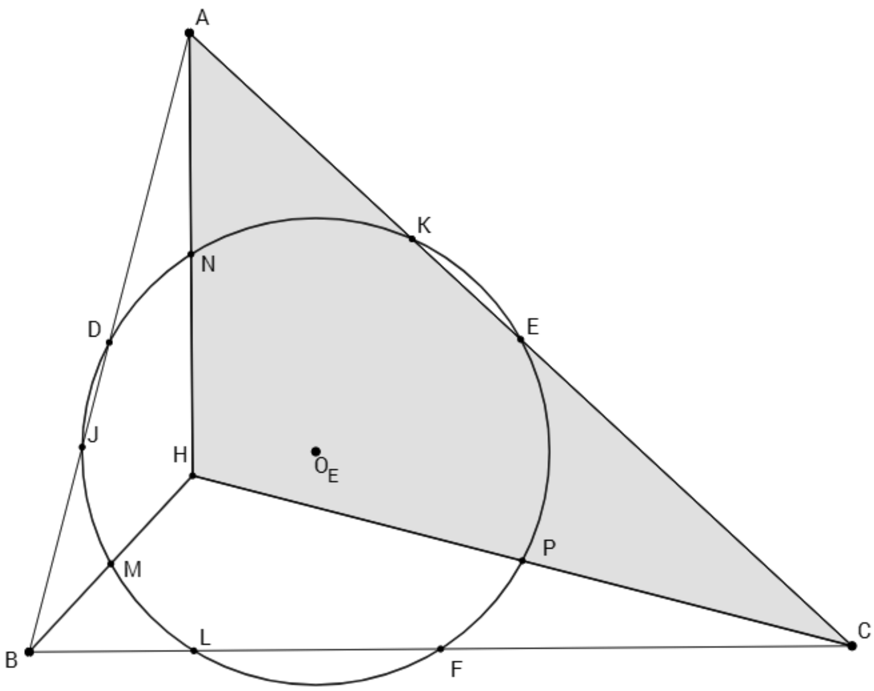


Slika 2.10: Trokut ABH

Analogno se pokaže da isto vrijedi i za trokute BCH i ACH.



Slika 2.11: Trokut BCH



Slika 2.12: Trokut ACH

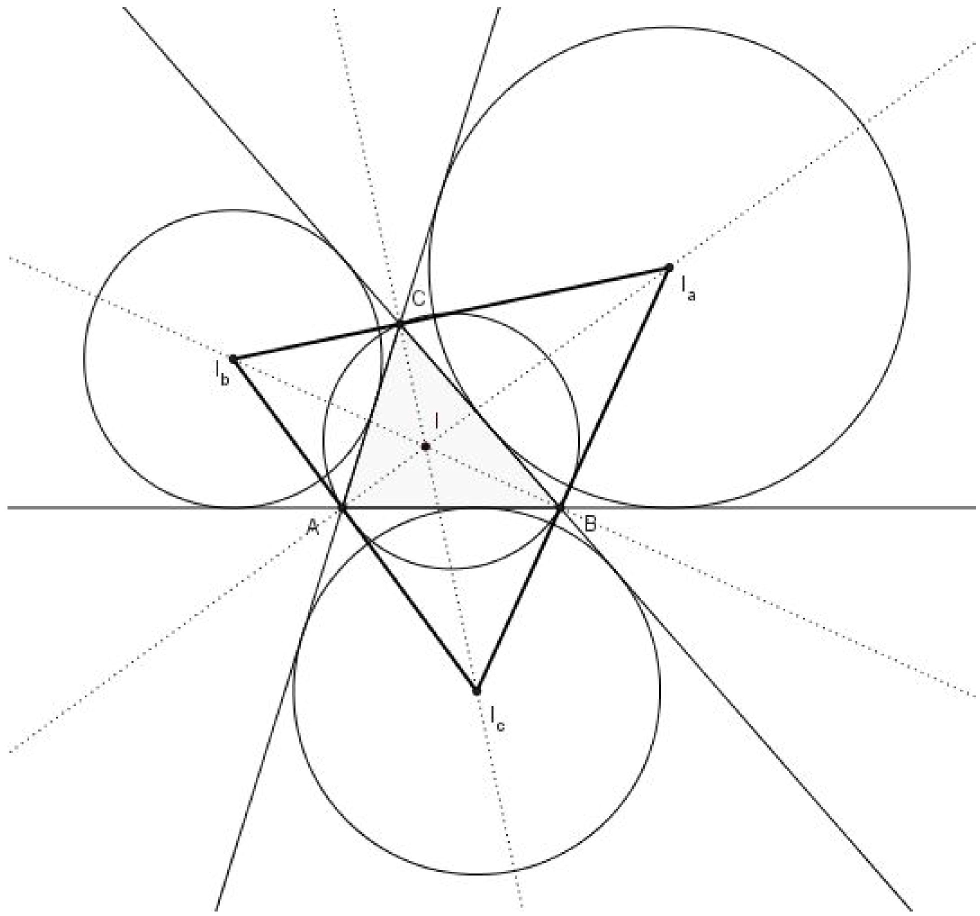
□

Iz prethodnog teorema i teorema 2.4 slijedi

Teorem 2.9. *Opisane kružnice četiri trokuta ABC, ABH, BCH, ACH imaju jednak polumjer.*

Ortocentrična četvorka je naziv za četiri točke od kojih je jedna ortocentar trokuta čiji su vrhovi preostale tri. Može se pokazati da je svaka točka ortocentrične četvorke ortocentar trokuta kojeg određuju ostale tri.

Teorem 2.10. *Eulerova kružnica ortocentričke četvorke I, I_a, I_b, I_c, gdje je I središte trokutu upisane kružnice, I_a, I_b i I_c središta trokutu pripisanih kružnica, je opisana kružnica trokuta ABC.*



Slika 2.13: Ortocentrična četvorka

Dokaz. Točke A, B, C su nožišta visina trokuta $I_aI_bI_c$ te će zbog toga kružnica opisana trokutu ABC biti Eulerova kružnica trokuta $I_aI_bI_c$. Vrhovi tog trokuta skupa s njegovim ortocentrom, točkom I, čine ortocentričnu četvorku te će prema teoremu 2.8 imati zajedničku Eulerovu kružnicu, čime je teorem dokazan.

□

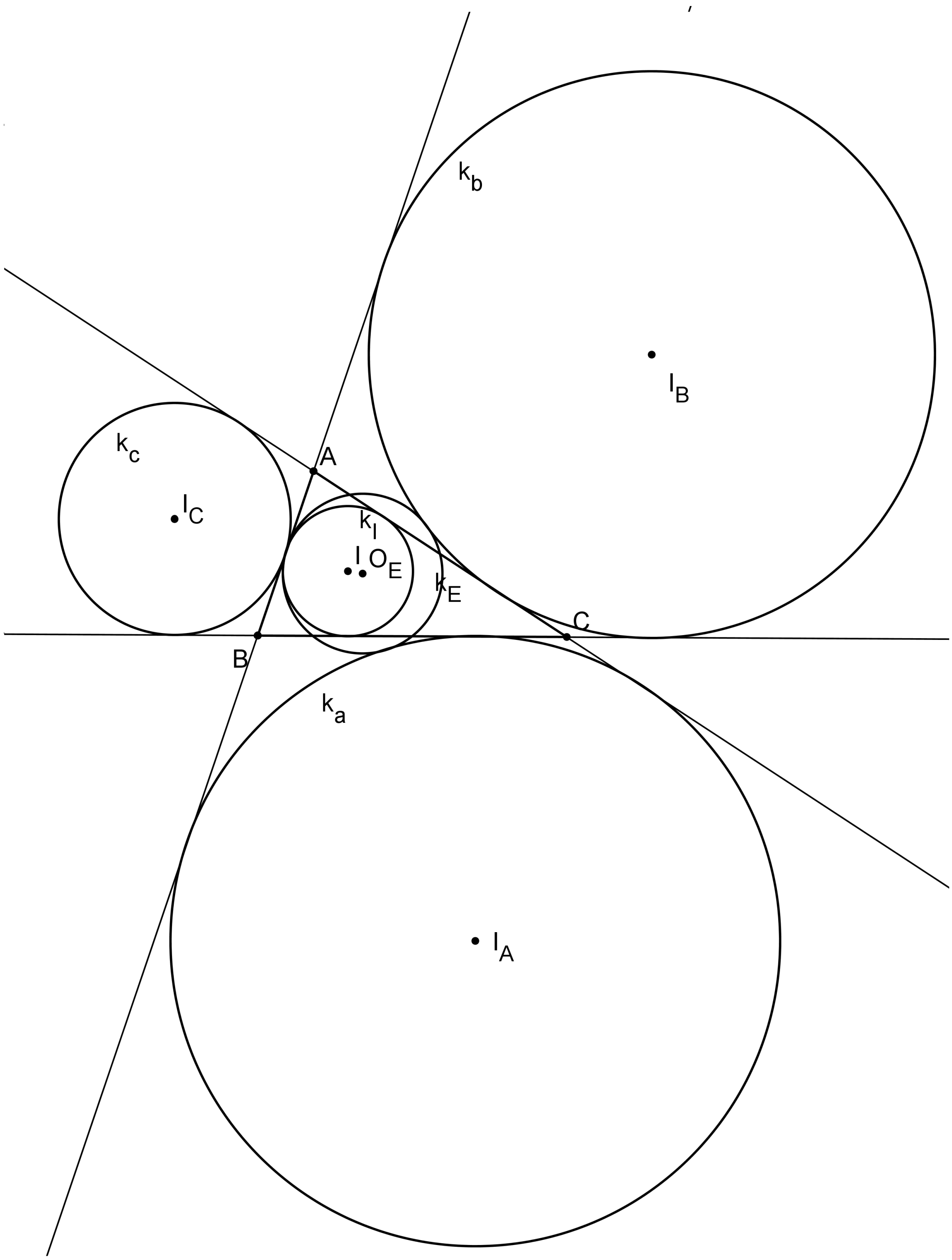
Poglavlje 3

Feuerbachov teorem

Kao što smo već spomenuli u poglavlju Iz povijesti Eulerove kružnice, otkada je prvi put teorem objavljen 1822. godine, matematičari su ponudili mnogo različitih dokaza ove tvrdnje. Mi ćemo u ovom poglavlju obraditi jedan analitički dokaz.

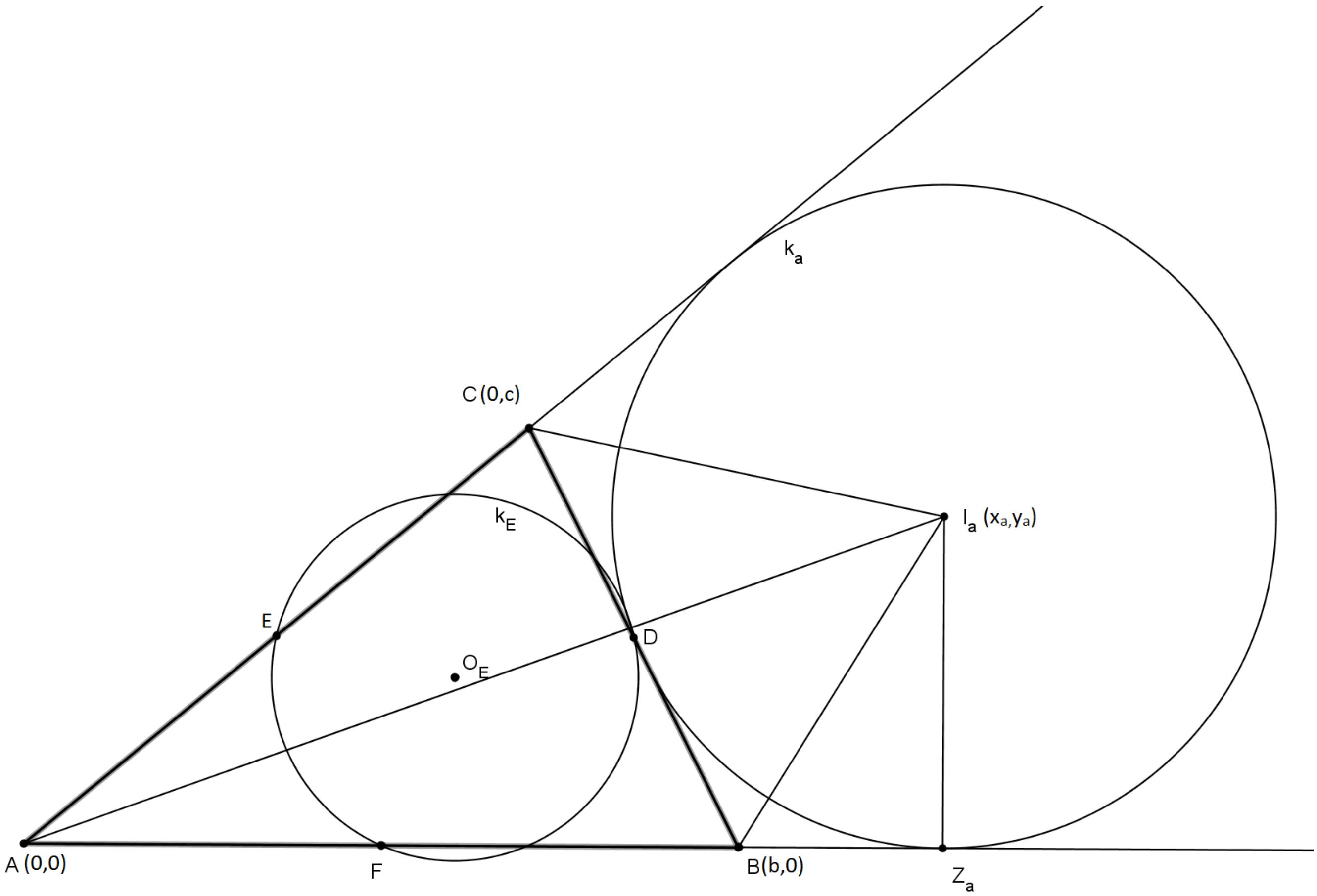
Teorem 3.1. (Feuerbachov teorem) *Euelerova kružnica* k_E *dira upisanu kružnicu* k_I *i sve tri pripisane kružnice* k_a, k_b, k_c *danog trokuta* ABC. *Pri tome upisana kružnica* k_I *dira kružnicu* k_E *iznutra, dok je ostale pripisane kružnice diraju izvana. Nadalje, ako je* O_E *središte kružnice* k_E, R *polumjer trokutu* ABC *opisane kružnice, a* $k_I = k(I; r)$, $k_a = k(I_a; r_a)$, $k_b = k(I_b; r_b)$, $k_c = k(I_c; r_c)$, *tada vrijedi:*

$$|O_E I| = \frac{R}{2} - r, \quad |O_E I_a| = \frac{R}{2} + r_a, \quad |O_E I_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_E I_c| = \frac{R}{2} + r_c.$$



Slika 3.1: Eulerova kružnica dodiruje upisanu i pripisane kružnice trokuta ABC

Dokaz. Dokaz ovoga teorema ćemo provoditi na trokutu ABC. Promotrimo kosi koordinatni sustav kojem je točka A ishodište, a pravci AB i AC osi koordinatnog sustava (slika 3.2).



Slika 3.2: Kosi koordinatni sustav

Koordinate preostala dva vrha, B i C će biti $(b, 0)$ i $(0, c)$. Središta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ će biti redom točke $F = (\frac{b}{2}, 0)$, $D = (\frac{b}{2}, \frac{c}{2})$, $E = (0, \frac{c}{2})$. $k_a(I_a, r_a)$ je pripisana kružnica trokutu ABC nasuprot vrha A sa središtem $I_a = (x_a, y_a)$. Očito je

$$x_a = y_a$$

i

$$y_a \sin\alpha = r_a = s \tan\frac{1}{2}\alpha \tag{3.1}$$

gdje je s poluopseg trokuta ABC. Dobijemo

$$x_a = y_a = \frac{s}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}, \tag{3.2}$$

odnosno

$$x_a = y_a = \frac{bc}{2(s-a)}. \tag{3.3}$$

Za daljnji dokaz potrebno je znati formulu za udaljenost točaka u kosom koordinatnom sustavu sa središtem u $O(0,0)$ čije osi zatvaraju kut α.

$$|T_1T_2| = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + 2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\alpha \tag{3.4}$$

Sa O_E ćemo označiti središte Eulerove kružnice k_E trokuta ABC s koordinatama (x_e, y_e). Dokazali smo da je njen radijus $R_E = \frac{1}{2}R$, gdje je R radjius trokutu opisane kružnice.

Eulerova kružnica prolazi točkama D, E, F te primjenom (3.4) dobivamo

$$\left(x_e - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y_e - \frac{c}{2}\right)^2 + 2\left(x_e - \frac{b}{2}\right)\left(y_e - \frac{c}{2}\right)\cos\alpha - R_E^2 = 0, \tag{3.5}$$

$$x_e^2 + \left(y_e - \frac{c}{2}\right)^2 + 2x_e\left(y_e - \frac{c}{2}\right)\cos\alpha - R_E^2 = 0, \tag{3.6}$$

$$\left(x_e - \frac{b}{2}\right)^2 + y_e^2 + 2\left(x_e - \frac{b}{2}\right)y_e\cos\alpha - R_E^2 = 0, \tag{3.7}$$

Iz (3.7), (3.6) i (3.5) dobijemo

$$x_e^2 + y_e^2 + 2x_e^2y_e^2\cos\alpha = R_E^2 + \frac{1}{2}bc\cos\alpha \tag{3.8}$$

i

$$(x_e + y_e)(1+\cos\alpha) = \frac{b+c}{4}(1+2\cos\alpha). \tag{3.9}$$

Koristeći formulu za površinu trokuta $P = (s-a)r_a = (s-b)r_b = (s-c)r_c$, gdje su r-ovi radijusi pripisanih kružnica i s poluopseg trokuta, i formule $R = \frac{abc}{4P}$ dobivamo

$$r_a R = \frac{abc}{4(s-a)} \tag{3.10}$$

Sada je

$$|EI_a|^2 = x_e^2 + y_e^2 + 2x_e^2 y_e^2 \cos\alpha + 4x_a^2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 2x_a(x_e + y_e)(1 + \cos\alpha)$$

Primjenom i kombiniranjem prethodnih formula dobijemo

$$\begin{aligned} |EI_a|^2 &= R_E^2 + \frac{1}{2}bc\cos\alpha + s^2 \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{2}x_a(b+c)(1+2\cos\alpha) \\ &= (R_E^2 + r_a)^2 - \frac{abc}{4(s-a)} + \frac{1}{2}bc\cos\alpha + s^2 - \frac{bc}{4(s-a)}(b+c)(1+2\cos\alpha) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Konačno smo dobili

$$\begin{aligned} |EI_a|^2 &= (R_E^2 + r_a)^2 - \frac{abc}{4(s-a)}[a - 2(s-a)\cos\alpha + (b+c)(1+2\cos\alpha)] \\ &= (R_E^2 + r_a)^2 - \frac{abc}{4(s-a)} 2s(1+\cos\alpha) \\ &= (R_E^2 + r_a)^2 \end{aligned}$$

Odatle slijedi da Eulerova kružnica trokuta ABC izvana dira trokutu ABC pripisanu kružnicu nasuprot vrhu A. Analogono se dokazuje da dira i preostale dvije trokutu pripisane kružnice.
U literaturi se trokut određen tima trima diralištima Eulerove kružnice i pripisanih kružnica može naći pod imenom *Feuerbachov trokut*.

Dokažimo sada da upisana kružnica dira Eulerovu kružnicu iznutra. Uvest ćemo supstituciju $s \leftrightarrow (s-a)$.

Sa I ćemo označiti središte s koordinatama (x_i, y_i), a sa r radijus upisane kružnice k_I.

Analogno će vrijediti

$$x_i = y_i$$

i

$$y_i \sin\alpha = r = (s-a)\tan\frac{1}{2}\alpha \tag{3.13}$$

Zaključujemo

$$x_i = y_i = \frac{s-a}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}. \tag{3.14}$$

Primjenjujući formule za radijus trokutu upisane kružnice dobit ćemo

$$x_i = y_i = \frac{bc}{2s} \tag{3.15}$$

Tada nam je

$$|EI|^2 = x_e^2 + y_e^2 + 2x_e^2y_e^2\cos\alpha + 4x_i^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 2x_i(x_e+y_e)(1+\cos\alpha)$$

Analognim postupkom kao za dokazivanje duljine $|EI_a|$, primjenom jednakosti od (3.8) do (3.15) i formule $rR = \frac{abc}{4s}$ dobivamo

$$|EI|^2 = (R_E^2 - r)^2 \tag{3.16}$$

Ovime smo dokazali da upisana kružnica dira Eulerovu kružnicu iznutra i to dirالište se naziva *Feuerbachovom točkom.* Time je dan dokaz Feuerbachovog teorema.

$\square$

Literatura

[1] D. Bakoš, Z. Kolar–Begović, *Eulerova kružnica*, Matematičko-fizički list, **1**(2009/2010), 23–28.

[2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America, 1962.

[3] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, skripta, Zagreb, 2007., `http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf`

[4] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[5] D. Palman, *Kružnica devet točaka i Feuerbachov teorem*, Matematika, 1986.

[6] Z. Kolar-Begović, A. Tonković, *Feuerbachov teorem*, Osječki matematički list **9**(2009), 21–30.

[7] D. Suryanarayana, *A Note on Feuerbach's Theorem*, Math. Student, 29(1961), 138–140.