

# Eulerove kružnice

---

**Blažević, Andrijana**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:361610>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-27**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

**Andrijana Blažević**  
**Eulerova kružnica**

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

**Andrijana Blažević**  
**Eulerova kružnica**

Završni rad

Voditelj: prof. dr. sc. Zdenka Kolar-Begović

Osijek, 2017.

## Sažetak

U ovom radu proučavana je jedna kružnica pridružena trokutu. Kružnica na kojoj leže polovišta stranica trokuta, nožišta visina te polovišta dužina kojima je jedna krajnja točka vrh trokuta, a druga ortocentar trokuta poznata je kao Eulerova kružnica ili kružnica devet točaka. Važna svojstva ove kružnice su istražena. Dokazana je i tvrdnja koja povezuje Eulerovu kružnicu, trokutu upisanu kružnicu i trokutu pripisane kružnice, poznati Feuerbachov teorem.

## Ključne riječi

Eulerova kružnica, upisana kružnica, pripisana kružnica, konciklične točke

## Abstract

In this paper, a circle that is joined to the triangle is studied. The circle which passes through the mid-points of the sides of a triangle, the feet of the altitudes and the mid-points of the line segments from the orthocenter to the vertices of a triangle is called Euler circle or the nine-point circle. Some important characteristics of this circle are researched. The assertion that links Euler circle to the inscribed and escribed circles of a triangle was proved. It is well known Feuerbach's theorem.

## Key words

Euler circle, inscribed circle, escribed circle, concyclic points

# Sadržaj

Uvod	1
1 Iz povijesti Eulerove kružnice	2
2 Eulerova kružnica	3
3 Feuerbachov teorem	17
Literatura	23

# Uvod

U dosadašnjem proučavanju trokuta susretali smo se s trokutu opisanom i upisanom kružnicom te trokutu pripisanim kružnicama. U ovom radu ćemo se baviti još jednom značajnom trokutu pridruženom kružnicom te istražiti njezina svojstva. Proučavat ćemo Eulerovu kružnicu, u literaturi poznatu i pod imenom kružnica devet točaka ili Feuerbachova kružnica.

Rad se sastoji od tri poglavlja. U prvom poglavlju ćemo se baviti elementima povijesti otkrića Eulerove kružnice. U drugom poglavlju ćemo dokazati da devet točaka svakog trokuta, polovišta stranica, nožišta visina te polovišta dužina kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi ortocentar trokuta, leže na jednoj kružnici. Proučit ćemo neka značajna svojstva te kružnice. U trećem poglavlju ćemo obraditi jedno od svojstava Eulerove kružnice iskazano Feuerbachovim teoremom koji tvrdi da kružnica devet točaka dodiruje trokutu upisanu i sve tri pripisane kružnice.

# Poglavlje 1

## Iz povijesti Eulerove kružnice

Švicarski matematičar Leonhard Euler dokazao je 1765. godine da šest točaka, polovišta stranica trokuta i nožišta visina, leže na jednoj kružnici. U čast Eulera ova kružnica se u literaturi često može naći pod imenom Eulerova kružnica. Prema povijesnim istraživanjima J. S. MacKaya (1892. godine) postoji nekoliko nezavisnih otkrića Eulerove kružnice. Prvi put se spominje u članku Johna Butterwortha (1804. godine) u dokazu Bevanova teorema. Da polovišta spojnice vrhova i ortocentra trokuta, također leže na Eulerovoj kružnici tog trokuta navodi se u članku Brianchona i Ponceleta (1820. god.). U njihovom članku daje se prvi potpuni dokaz teorema o koncikličnosti navedenih devet točaka i prvi put se koristi termin "kružnica devet točaka". Mnogi autori koriste upravo termin "kružnica devet točaka".

Njemački matematičar Karl Wilhelm Feuerbach je 1822. godine dokazao da kružnica koja prolazi nožištima visina trokuta dira sve četiri pripisane kružnice. Dokaz je objavljen u radu *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*. Ova tvrdnja je u literaturi poznata kao Feuerbachov teorem. Pojava ovog teorema je probudila veliki interes među matematičarima koji su se bavili tom tvrdnjom te pridonijeli velikim brojem različitih dokaza. Feuerbachu se pripisuje nezavisno otkriće spomenute kružnice te se zbog toga koristi i termin Feuerbachova kružnica.

Olry Terquem, francuski matematičar, je 1842. analitički dokazao Feuerbachov teorem i prvi koristio termin kružnica devet točaka. U literaturi se Eulerova kružnica naziva i Terquemova kružnica.

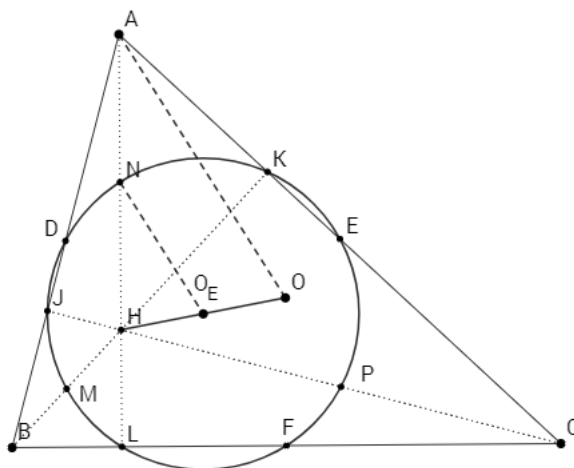
## Poglavlje 2

# Eulerova kružnica

U ovom poglavlju ćemo dokazati teorem o koncikličnosti devet točaka.

**Teorem 2.1.** *Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $J, L, K$  nožišta visina, točke  $D, E, F$  polovišta stranica te točke  $M, N, P$  polovišta dužina  $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$ , gdje je  $H$  ortocentar. Točke  $D, E, F, J, K, L, M, N$  i  $P$  leže na jednoj kružnici  $k_E$ .*

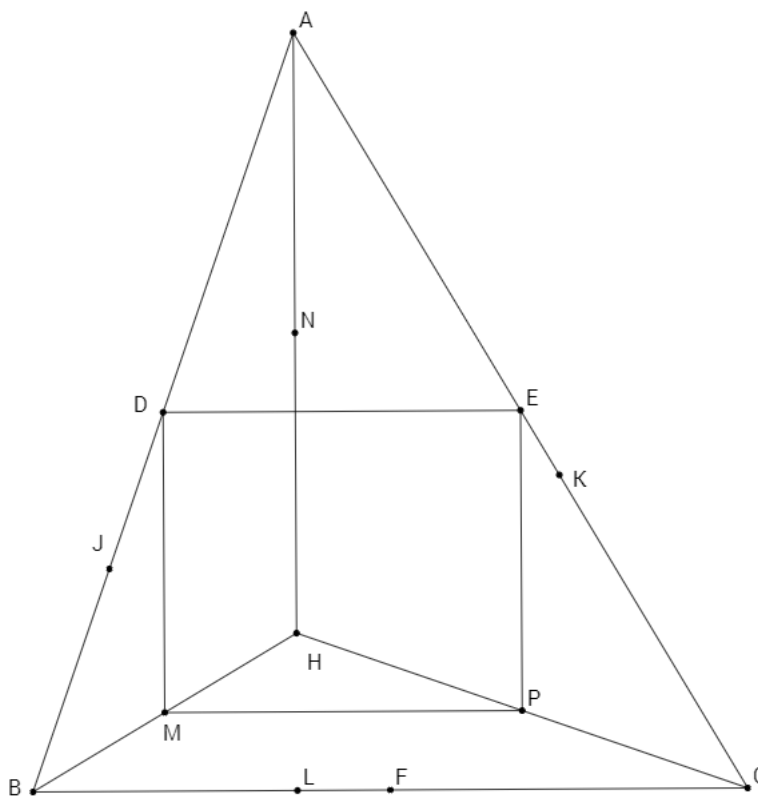
Takvu kružnicu zovemo Eulerovom kružnicom, a polovišta dužina  $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$ , gdje je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ , tj. točke  $M, N$  i  $P$ , nazivaju se Eulerovim točkama.



Slika 2.1: Eulerova kružnica



*Dokaz.* Neka je dan trokut  $ABC$  i neka je  $H$  njegov ortocentar. Neka su  $D, E, F$  polovišta njegovih stranica,  $J, L$  i  $K$  nožišta visina, a točke  $M, N$  i  $P$  polovišta dužina  $\overline{HA}$ ,  $\overline{HB}$  i  $\overline{HC}$ . Želimo dokazati koncikličnost navedenih točaka.



Slika 2.2: Slika uz dokaz teorema 2.1.

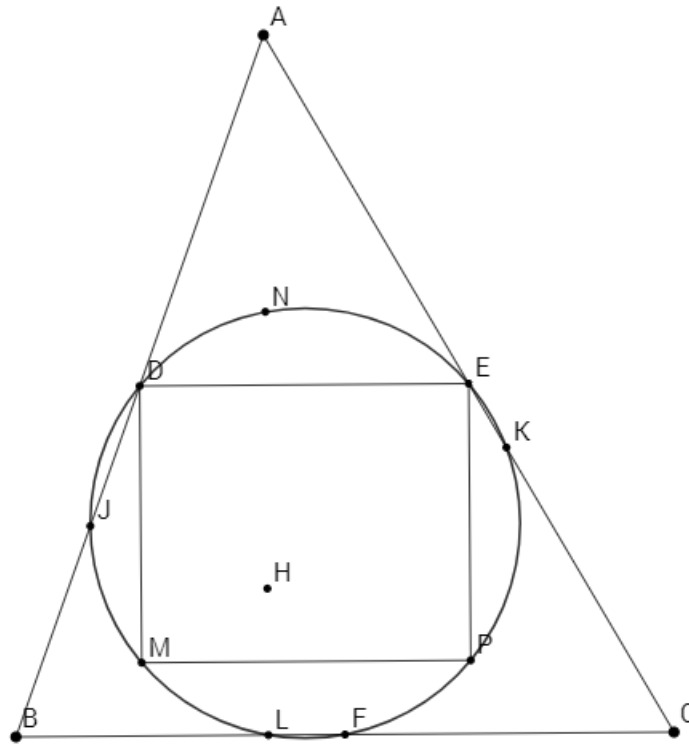
Točke  $D$  i  $E$  su polovišta stranica  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  te će prema teoremu o srednjici trokuta vrijediti da su dužine  $\overline{DE}$  i  $\overline{BC}$  paralelne. Budući da su točke  $M$  i  $P$  prema konstrukciji redom polovišta spojnice točaka  $B$  i  $H$ , i  $H$  i  $C$ , slijedit će da su i dužine  $\overline{MP}$  i  $\overline{BC}$  paralelne.

Kako je dužina  $\overline{DE}$  paralelna s  $\overline{BC}$  i  $\overline{MP}$  paralelna s  $\overline{BC}$  slijedi da je  $\overline{DE}$  paralelna s  $\overline{MP}$ .

Isti princip zaključivanja primjenit ćemo i na sljedeći trokut  $BAH$ . Točke  $M$  i  $D$  su po konstrukciji redom polovišta stranica  $\overline{BH}$  i  $\overline{BA}$ , što će značiti da je dužina  $\overline{MD}$  paralelna stranici  $\overline{HA}$ .

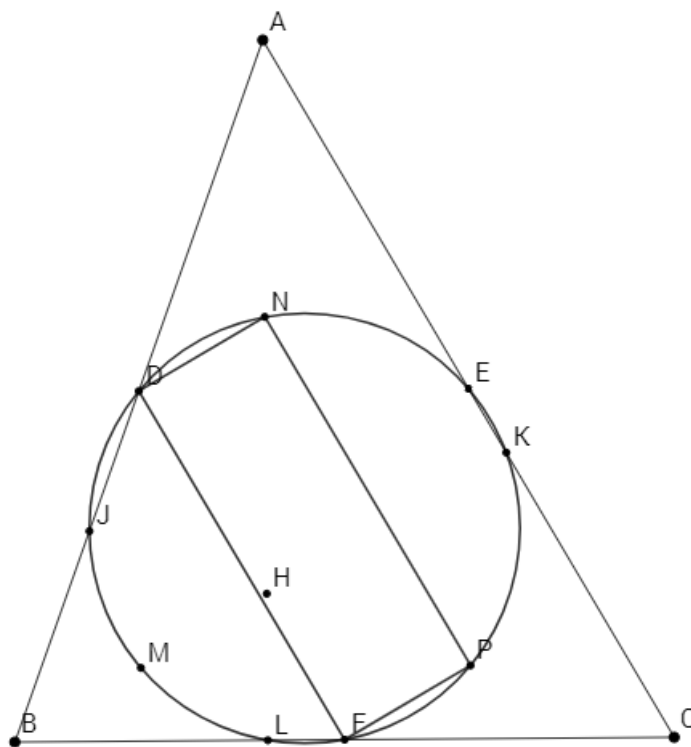
Analogno se pokaže da su u trokutu  $CAH$ , gdje su točke  $E$  i  $P$  polovišta stranica  $\overline{AC}$  i  $\overline{HC}$ , dužina  $\overline{EP}$  i stranica  $\overline{HA}$  paralelne. Iz  $\overline{MD}$  paralelno s  $\overline{HA}$  i  $\overline{HA}$  paralelno s  $\overline{EP}$  slijedi da je  $\overline{MD}$  paralelno s  $\overline{EP}$ .

Kako su dužine  $\overline{MD}$  i  $\overline{HA}$  paralelne, a dužina  $\overline{HA}$  leži na pravcu određenim točkama  $A$  i  $L$ , onda će dužina  $\overline{MD}$  biti paralelna dužini  $\overline{AL}$ .  $AL$  je po konstrukciji pravac na kojemu leži visina trokuta na stranicu  $\overline{BC}$  te će dužina  $\overline{AL}$  biti okomita na stranicu  $\overline{BC}$  i njoj paralelnu dužinu  $\overline{DE}$ . Zbog paralelnosti dužina  $\overline{MD}$  i  $\overline{AL}$  slijedi da je dužina  $\overline{MD}$  okomita na dužinu  $\overline{DE}$ . Ovime smo pokazali da je četverokut  $DMPE$  pravokutnik te mu se može opisati kružnica. Promjer kružnice je  $\overline{DP}$ .



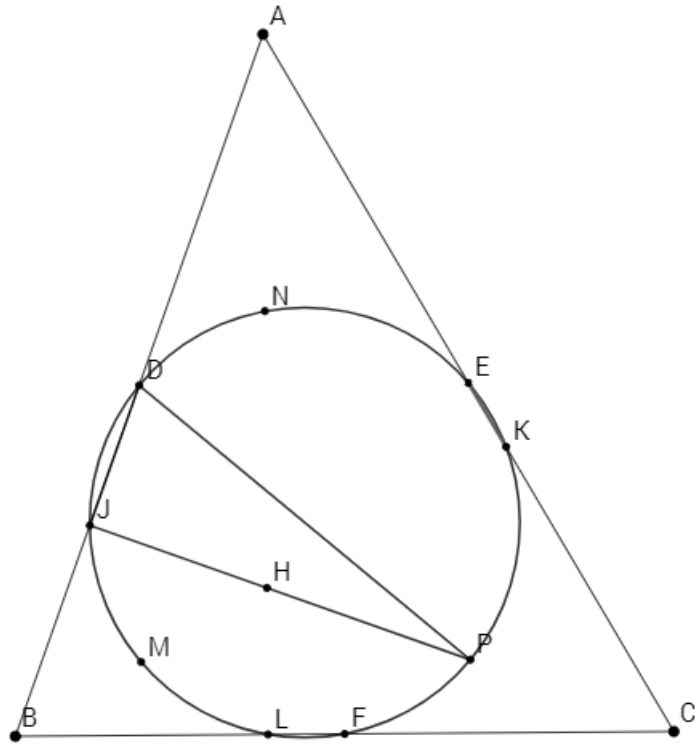
Slika 2.3: Pravokutnik  $DMPE$  i opisana mu kružnica

Analognim zaključivanjem se pokaže da je četverokut  $DNPF$  pravokutnik i da mu se može opisati kružnica promjera  $\overline{DP}$ .



Slika 2.4: Pravokutnik  $DNPF$  i opisana mu kružnica

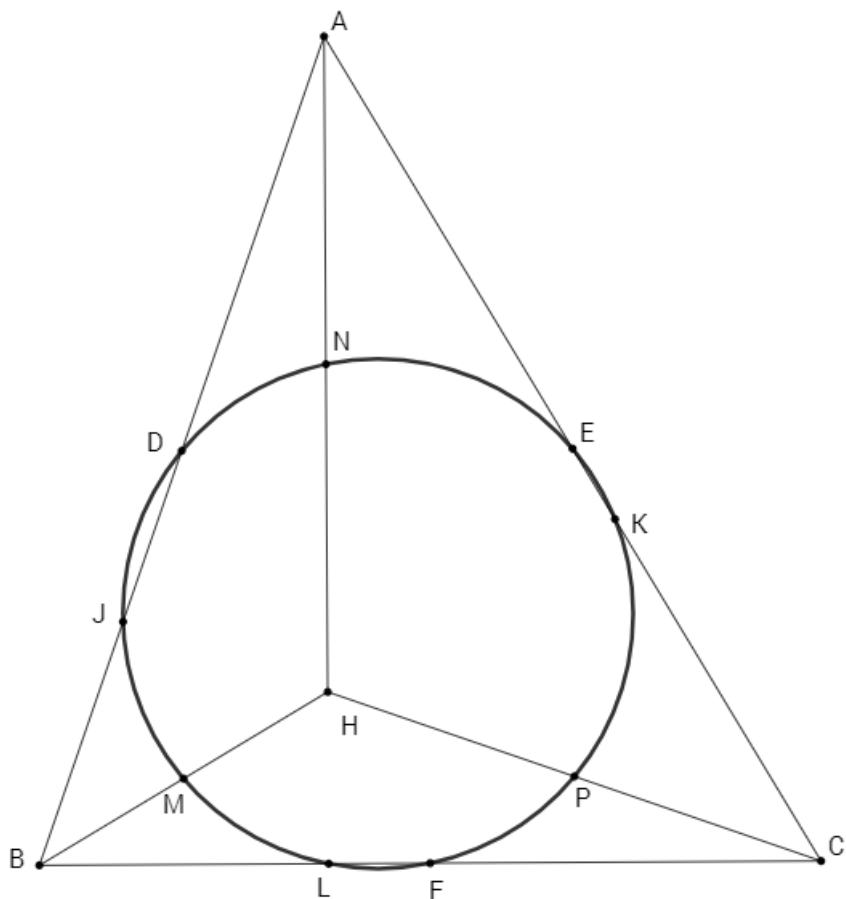
Time smo dokazali da točke  $D, N, E, P, F$  i  $M$  leže na istoj kružnici  $k$ . Središte kružnice  $k$  će biti točka sjecišta dijagonala, odnosno polovište dužine  $\overline{DP}$  (jer je dužina  $\overline{DP}$  dijagonala oba dobivena četverokuta). Označimo sa  $O_E$  središte kružnice  $k$ . Pokažimo sada da i točke  $J, K, L$  također leže na kružnici  $k$ .



Slika 2.5: Trokut  $DJP$

Dužina  $\overline{CJ}$  je visina na stranicu  $\overline{AB}$  te će  $\angle DJP$  biti pravi. Kako je dužina  $\overline{DP}$  promjer kružnice  $k$ , točka  $J$  mora ležati na kružnici. Analognim postupkom se pokaže da točke  $L$  i  $K$  leže na toj istoj kružnici  $k$ .

Ovim smo dokazali postojanje Eulerove kružnice koju ćemo označavati s  $k_E$ .



Slika 2.6: Konkličnost devet točaka

□

Prije dokaza tvrdnje o položaju središta kružnice  $k_E$  i veličini njezinog radijusa, dokazat ćemo jedan teorem koji ćemo koristiti.

**Teorem 2.2.** Središte  $O$  opisane kružnice, težište  $T$  i ortocentar  $H$  leže na jednom pravcu i vrijedi

$$\overrightarrow{TH} = -2\overrightarrow{TO}.$$

Pravac na kojem središte trokutu opisane kružnice trokuta, težište i ortocentar trokuta naziva se *Eulerovim pravcem*.

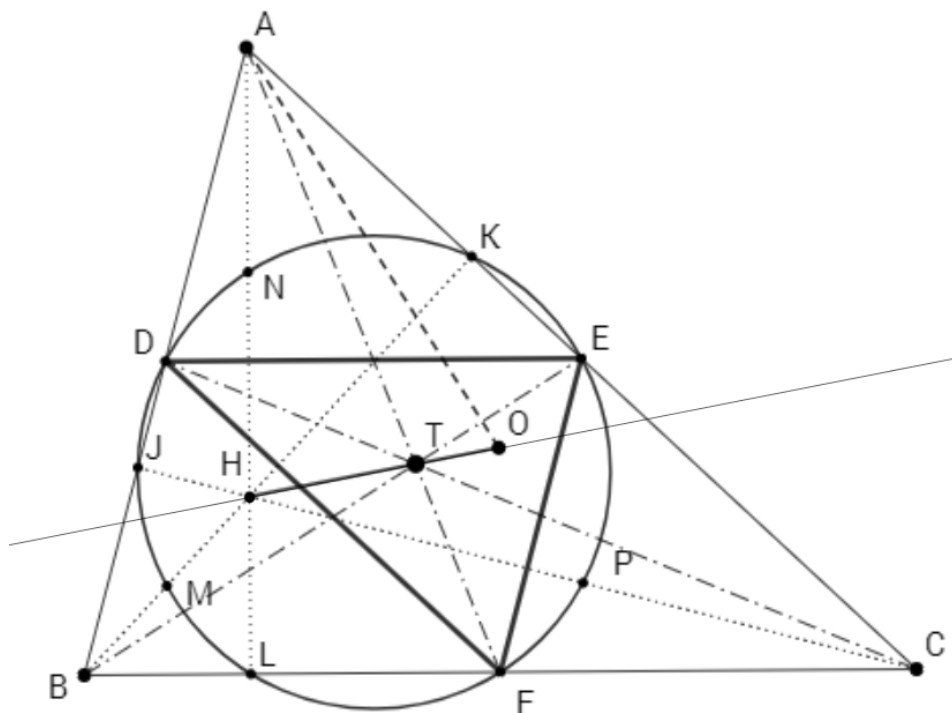
*Dokaz.* Neka je dan trokut  $ABC$  gdje je  $O$  središte opisane mu kružnice,  $T$  težište i  $H$  ortocentar. Najjednostaviji dokaz ovoga teorema je pomoću homotetije.

Neka je točka  $T$  takva da vrijedi  $\overrightarrow{TH} = -2\overrightarrow{TO}$ . Točke  $E$  i  $F$  su polovišta stranica  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$ . Kako je  $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$  i kako su stranice trokuta  $OEF$  paralelne odgovarajućim stranicama trokuta  $ABH$ , točka  $T$  će biti središte homotetije s koeficijentom  $-\frac{1}{2}$  koja preslikava trokut  $ABH$  u trokut  $OEF$ .

Zbog toga imamo

$$\overrightarrow{TB} = -2\overrightarrow{TE}, \quad \overrightarrow{TA} = -2\overrightarrow{TF}$$

tj.  $T$  je težište trokuta  $ABC$ .



Slika 2.7: Slika uz dokaz teorema 2.2

□

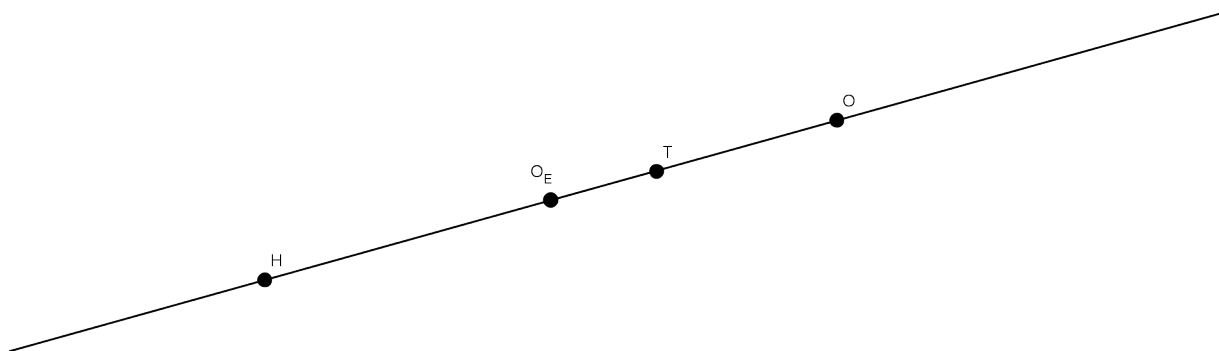
Dokažimo sada tvrdnju kojom se utvrđuje položaj središta Eulerove kružnice i veličina njenog radijusa.

Dokazali smo da kružnica  $k_E$  prolazi polovištima stranica trokuta  $ABC$ , što znači da je ona ujedno i kružnica opisana trokutu  $DEF$ . Njeno središte (točka

$O_E$ ) će u tom slučaju biti na sjecištu simetrala stranica trokuta  $DEF$ . Homotetija definirana u prethodnom dokazu vrijedi i za sve točke unutar trokuta  $ABC$  pa slijedi da je

$$h_T^{-\frac{1}{2}}(O) = O_E, \quad (2.1)$$

gdje je točka  $O$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ . Iz prethodnog dokaza i (2.1) možemo zaključiti da uz točke  $H$ ,  $T$  i  $O$ , na Eulerovom pravcu leži i točka  $O_E$ ,



Slika 2.8: Položaj točaka  $H, T, O, O_E$

a iz sljedećih jednakosti

$$|HO| = 3|TO|. \quad (2.2)$$

i

$$|OO_E| = \frac{3}{2}|TO|. \quad (2.3)$$

dobijemo da je

$$|OH| = 2|OO_E|.$$

što znači da se središte Eulerove kružnice trokuta  $ABC$  nalazi na polovištu dužine  $\overline{HO}$ .

Jer su stranice trokuta  $DFE$  srednjice trokuta  $ABC$ , vrijedit će

$$\frac{|AB|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|DF|} = 2.$$

Iz toga slijedi da je opseg  $O_{ABC} = 2O_{DEF}$  pa je veza radijusa  $R$  kružnice opisane trokutu  $ABC$  i radijusa  $R_E$  Eulerove kružnice dana jednakošću

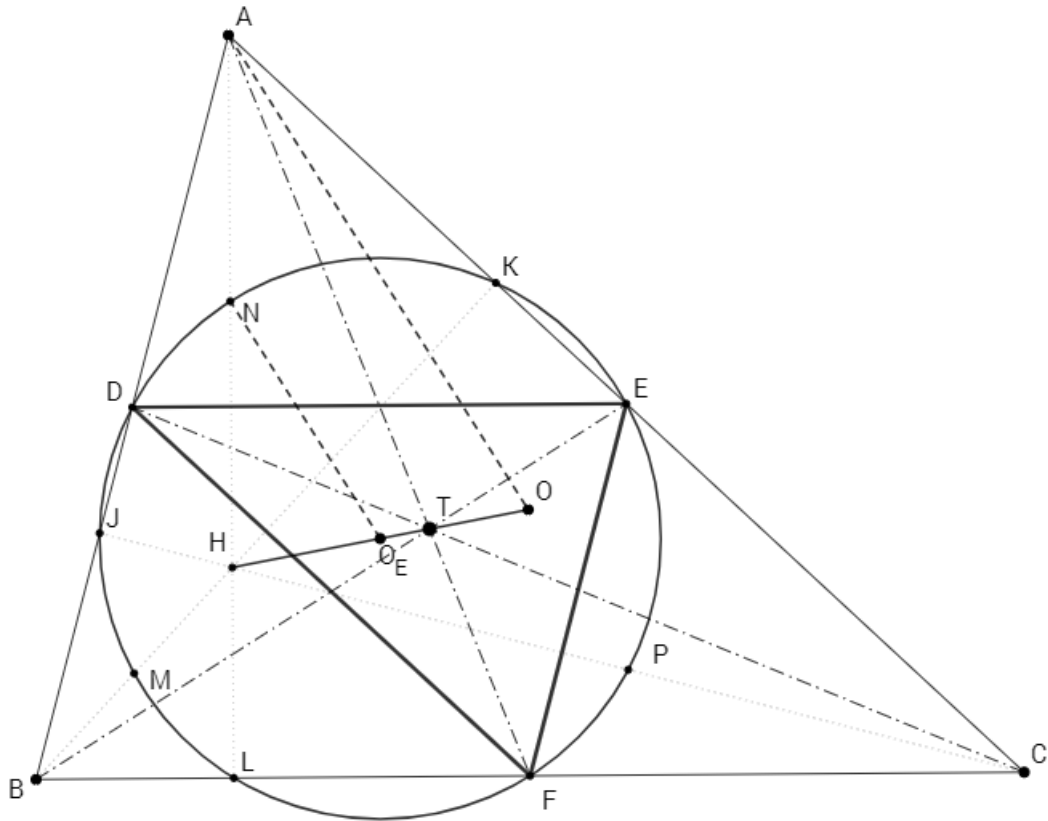
$$R_E = \frac{1}{2}R.$$

Sljedeće tvrdnje proizašle iz prethodnog dokaza iskazati ćemo u obliku teorema.

**Teorem 2.3.** *Središte  $O_E$  kružnice  $k_E$  je polovište dužine  $\overline{HO}$ , gdje je  $O$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ , a  $H$  ortocentar.*

**Teorem 2.4.** *Polumjer  $R_E$  Eulerove kružnice  $k_E$  jednak je polovini polumjera  $R$  kružnice opisane trokutu  $ABC$ .*





Slika 2.9: Eulerova kružnica

**Teorem 2.5.** Eulerova kružnica raspolavlja svaku dužinu koja spaja ortocentar trokuta i točku na opisanoj kružnici.

**Teorem 2.6.** Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $D, E, F$  polovišta stranica,  $O$  središte njemu opisane kružnice, a  $H$  ortocentar. Tada je

$$|AH| = 2|OF|, \quad |BH| = 2|OE|, \quad |CH| = 2|OD|$$

**Teorem 2.7.** Svi trokuti upisanu u danu kružnicu koji imaju i zajednički ortocentar imaju zajedničku Eulerovu kružnicu.

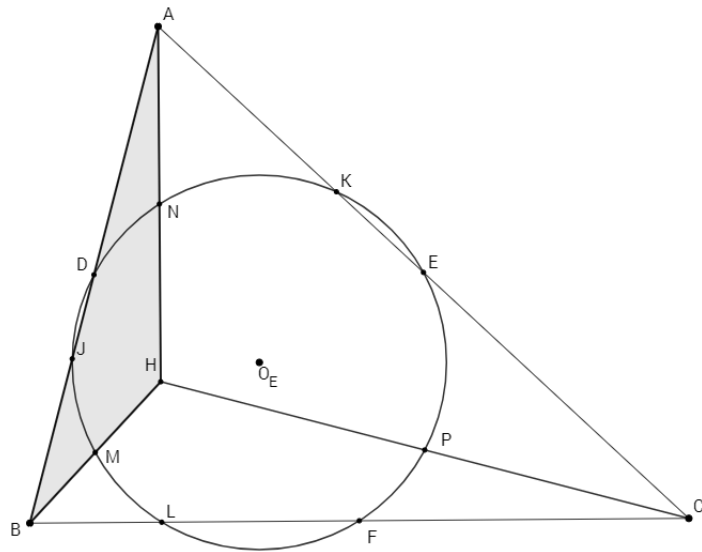
*Dokaz.* Neka je  $k(O, R)$  kružnica u koju su upisani trokuti. Prema pretpostavci svi promatrani trokuti imaju zajednički ortocentar  $H$  pa će prema teoremu 2.3. imati središte Eulerove kružnice na polovištu dužine  $\overline{HO}$ . Prema teoremu 2.4. radijus Eulerove kružnice  $R_E = \frac{1}{2}R$ .

Dokazali smo da je kružnica  $k_E$  sa središtem u  $O_E$  i radijusa  $R_E$  zajednička Eulerova kružnica promatranih trokuta.

□

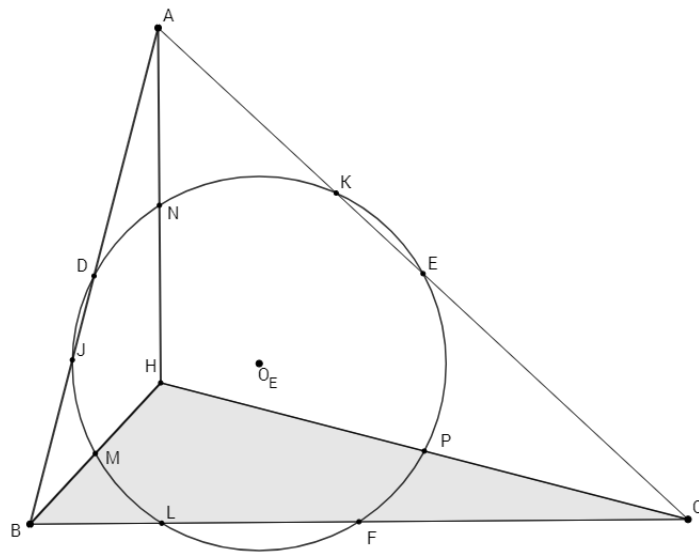
**Teorem 2.8.** *Ako  $ABC$  nije pravokutan trokut, tada četiri trokuta  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BCH$ ,  $ACH$ , gdje je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ , imaju zajedničku Eulerovu kružnicu.*

*Dokaz.* Neka je kružnica (slika 2.10)  $k_E$  Eulerova kružnica trokuta  $ABC$ . Promotrimo trokut  $ABH$ . Uočavamo da je nožište visine na stranicu  $\overline{AB}$  i dalje točka  $J$ , nožište visine na pravac na kome leži stranica  $\overline{BH}$  je točka  $K$ , a nožište visine na pravac na kome leži stranica  $\overline{AH}$  točka  $L$ . Polovišta stranica su točke  $D, M, N$  te polovišta spojnice vrhova i ortocentra su točke  $E, F, P$ . Dobili smo istih devet točaka kao i za trokut  $ABC$ .

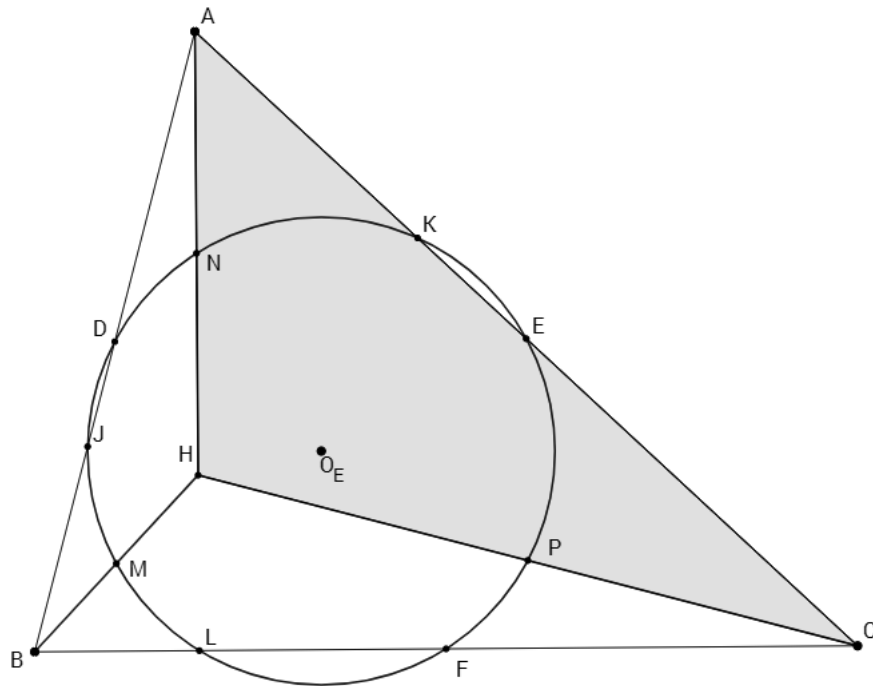


Slika 2.10: Trokut  $ABH$

Analogno se pokaže da isto vrijedi i za trokute  $BCH$  i  $ACH$ .



Slika 2.11: Trokut  $BCH$



Slika 2.12: Trokut  $ACH$

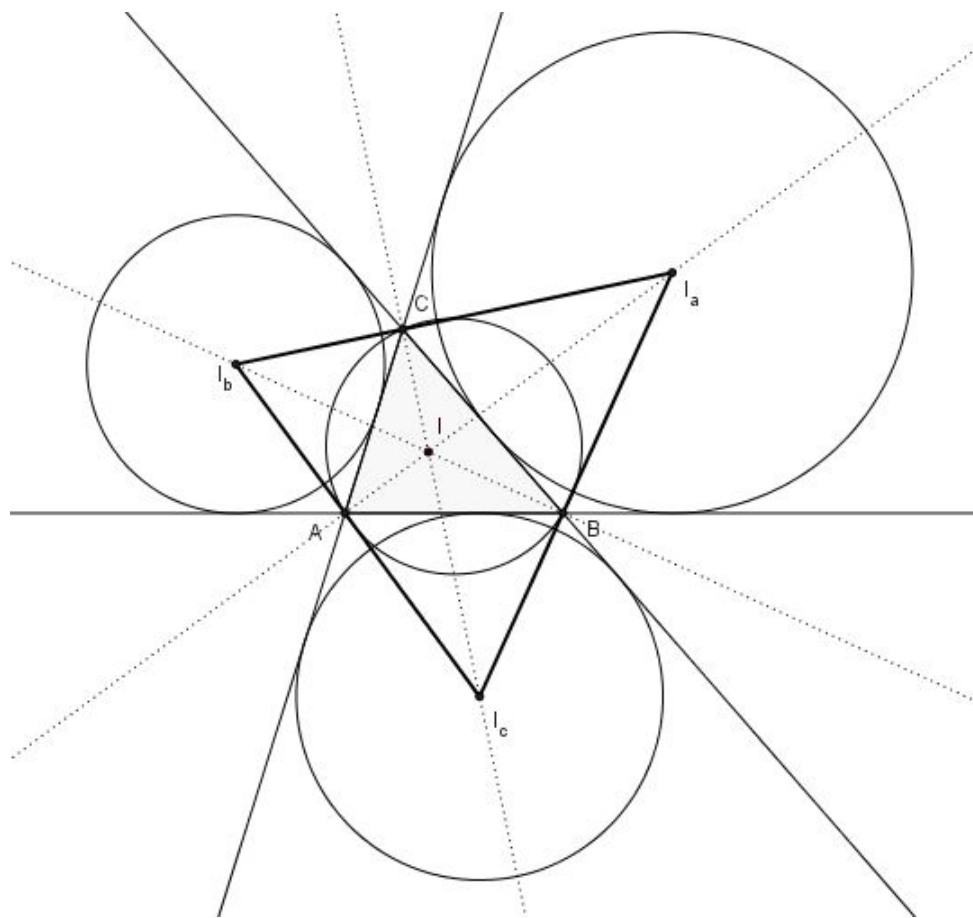
□

Iz prethodnog teorema i teorema 2.4 slijedi

**Teorem 2.9.** *Opisane kružnice četiri trokuta  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BCH$ ,  $ACH$  imaju jednak polumjer.*

Ortocentrična četvorka je naziv za četiri točke od kojih je jedna ortocentar trokuta čiji su vrhovi preostale tri. Može se pokazati da je svaka točka ortocentrične četvorke ortocentar trokuta kojeg određuju ostale tri.

**Teorem 2.10.** *Eulerova kružnica ortocentričke četvorke  $I, I_a, I_b, I_c$ , gdje je  $I$  središte trokutu upisane kružnice,  $I_a, I_b$  i  $I_c$  središta trokutu pripisanih kružnica, je opisana kružnica trokuta  $ABC$ .*



Slika 2.13: Ortocentrična četvorka

*Dokaz.* Točke  $A, B, C$  su nožišta visina trokuta  $I_a I_b I_c$  te će zbog toga kružnica opisana trokutu  $ABC$  biti Eulerova kružnica trokuta  $I_a I_b I_c$ . Vrhovi tog trokuta skupa s njegovim ortocentrom, točkom  $I$ , čine ortocentričnu četvorku te će prema teoremu 2.8 imati zajedničku Eulerovu kružnicu, čime je teorem dokazan.

□

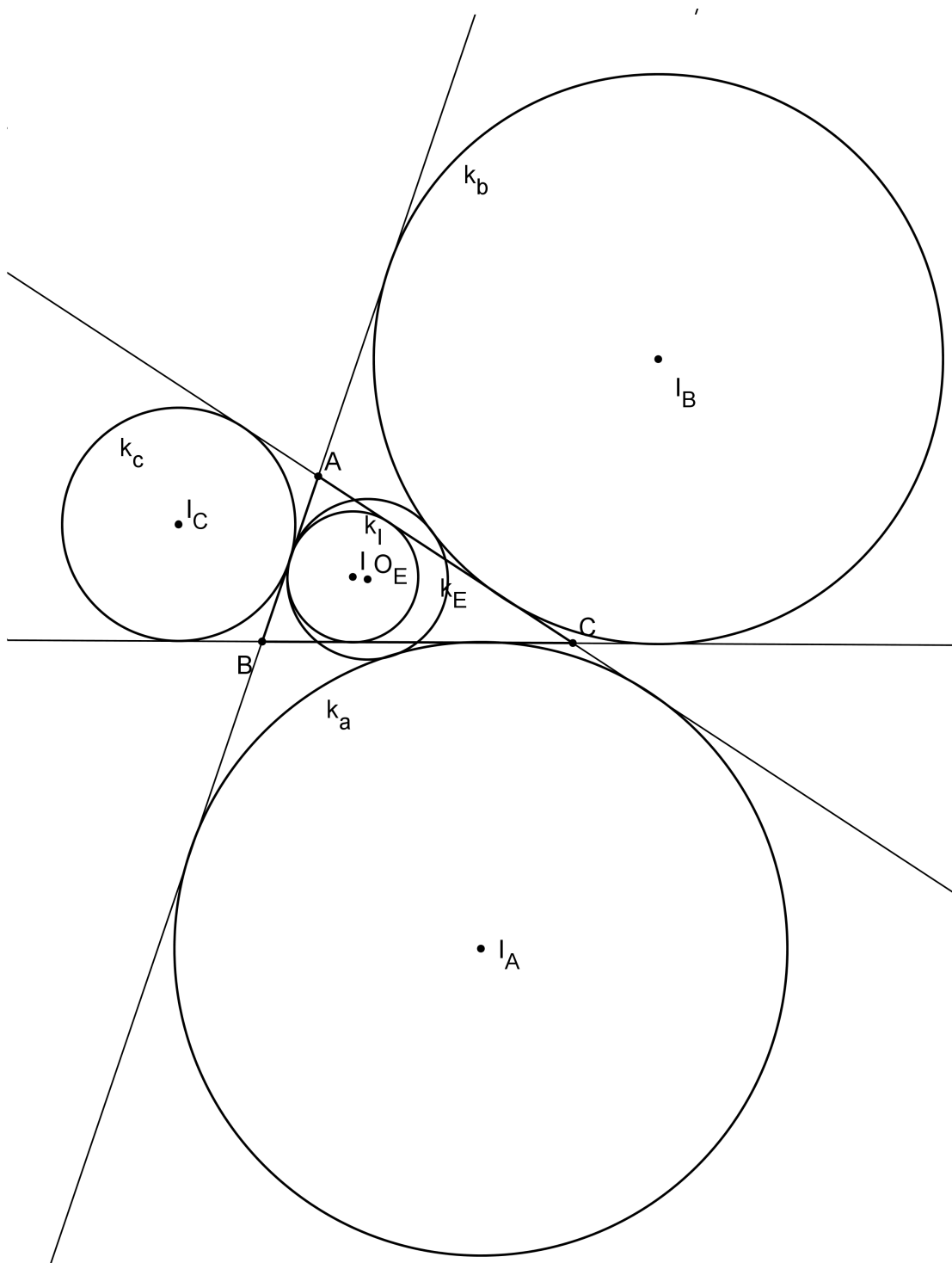
## Poglavlje 3

### Feuerbachov teorem

Kao što smo već spomenuli u poglavlju Iz povijesti Eulerove kružnice, otkada je prvi put teorem objavljen 1822. godine, matematičari su ponudili mnogo različitih dokaza ove tvrdnje. Mi ćemo u ovom poglavlju obraditi jedan analitički dokaz.

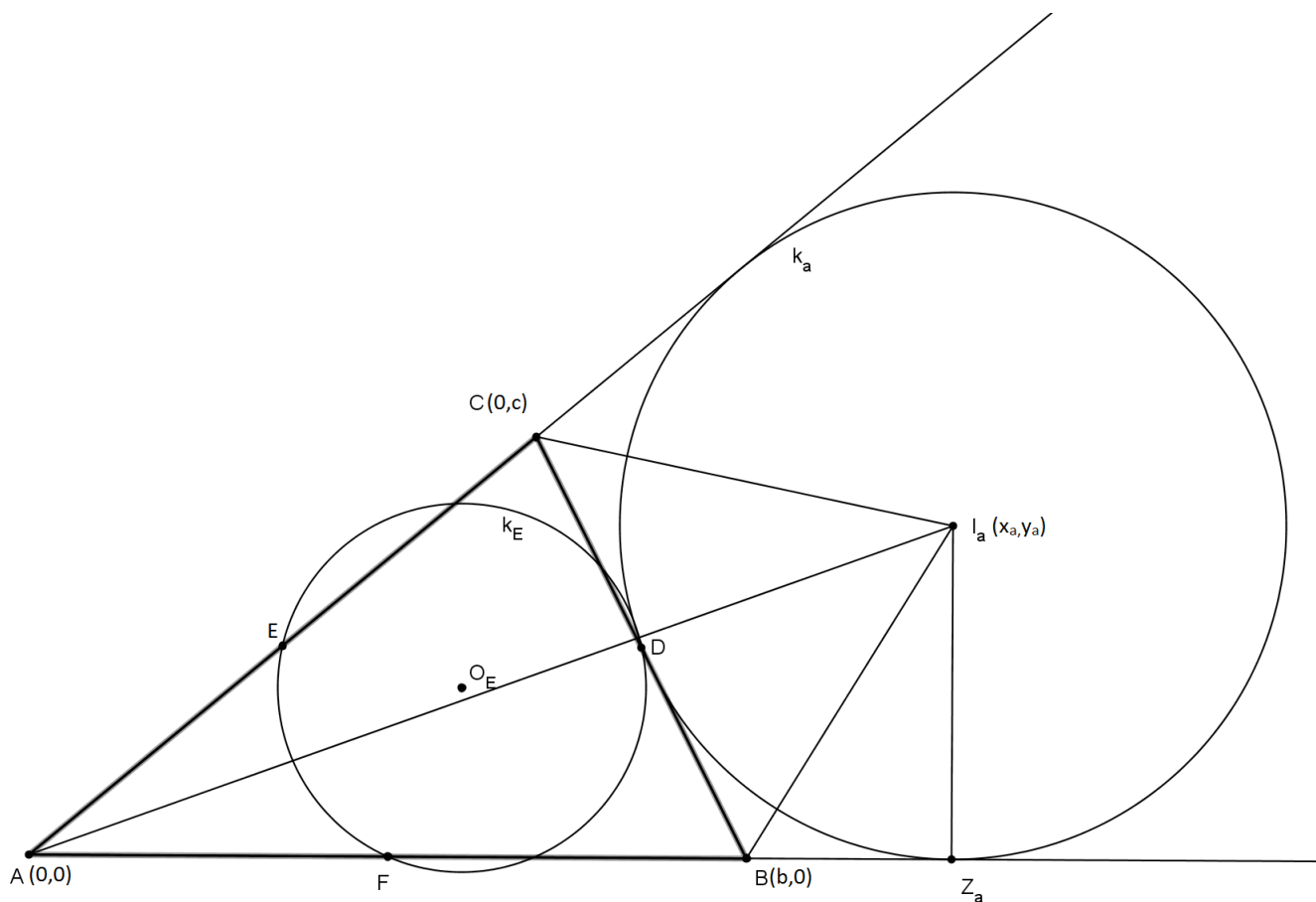
**Teorem 3.1. (Feuerbachov teorem)** *Eulerova kružnica  $k_E$  dira upisanu kružnicu  $k_I$  i sve tri pripisane kružnice  $k_a, k_b, k_c$  danog trokuta  $ABC$ . Pri tome upisana kružnica  $k_I$  dira kružnicu  $k_E$  iznutra, dok je ostale pripisane kružnice diraju izvana. Nadalje, ako je  $O_E$  središte kružnice  $k_E$ ,  $R$  polumjer trokutu  $ABC$  opisane kružnice, a  $k_I = k(I; r)$ ,  $k_a = k(I_a; r_a)$ ,  $k_b = k(I_b; r_b)$ ,  $k_c = k(I_c; r_c)$ , tada vrijedi:*

$$|O_E I| = \frac{R}{2} - r, \quad |O_E I_a| = \frac{R}{2} + r_a, \quad |O_E I_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_E I_c| = \frac{R}{2} + r_c.$$



Slika 3.1: Eulerova kružnica dodiruje upisanu i pripisane kružnice trokuta  $ABC$

*Dokaz.* Dokaz ovoga teorema ćemo provoditi na trokutu  $ABC$ . Promotrimo kosi koordinatni sustav kojem je točka  $A$  ishodište, a pravci  $AB$  i  $AC$  osi koordinatnog sustava (slika 3.2).



Slika 3.2: Kosi koordinatni sustav

Koordinate preostala dva vrha,  $B$  i  $C$  će biti  $(b, 0)$  i  $(0, c)$ . Središta stranica  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  će biti redom točke  $F = (\frac{b}{2}, 0)$ ,  $D = (\frac{b}{2}, \frac{c}{2})$ ,  $E = (0, \frac{c}{2})$ .  $k_a(I_a, r_a)$  je pripisana kružnica trokutu  $ABC$  nasuprot vrha  $A$  sa središtem  $I_a = (x_a, y_a)$ . Očito je

$$x_a = y_a$$



i

$$y_a \sin \alpha = r_a = s \tan \frac{1}{2} \alpha \quad (3.1)$$

gdje je  $s$  poluopseg trokuta  $ABC$ . Dobijemo

$$x_a = y_a = \frac{s}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}, \quad (3.2)$$

odnosno

$$x_a = y_a = \frac{bc}{2(s-a)}. \quad (3.3)$$

Za daljnji dokaz potrebno je znati formulu za udaljenost točaka u kosom koordinatnom sustavu sa središtem u  $O(0,0)$  čije osi zatvaraju kut  $\alpha$ .

$$|T_1 T_2| = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \alpha \quad (3.4)$$

Sa  $O_E$  ćemo označiti središte Eulerove kružnice  $k_E$  trokuta  $ABC$  s koordinatama  $(x_e, y_e)$ . Dokazali smo da je njen radijus  $R_E = \frac{1}{2}R$ , gdje je  $R$  radijus trokutu opisane kružnice.

Eulerova kružnica prolazi točkama  $D, E, F$  te primjenom (3.4) dobivamo

$$\left(x_e - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y_e - \frac{c}{2}\right)^2 + 2\left(x_e - \frac{b}{2}\right)\left(y_e - \frac{c}{2}\right) \cos \alpha - R_E^2 = 0, \quad (3.5)$$

$$x_e^2 + \left(y_e - \frac{c}{2}\right)^2 + 2x_e\left(y_e - \frac{c}{2}\right) \cos \alpha - R_E^2 = 0, \quad (3.6)$$

$$\left(x_e - \frac{b}{2}\right)^2 + y_e^2 + 2\left(x_e - \frac{b}{2}\right)y_e \cos \alpha - R_E^2 = 0, \quad (3.7)$$

Iz (3.7), (3.6) i (3.5) dobijemo

$$x_e^2 + y_e^2 + 2x_e^2 y_e^2 \cos \alpha = R_E^2 + \frac{1}{2}bc \cos \alpha \quad (3.8)$$

i

$$(x_e + y_e)(1 + \cos \alpha) = \frac{b+c}{4}(1 + 2 \cos \alpha). \quad (3.9)$$

Koristeći formulu za površinu trokuta  $P = (s - a)r_a = (s - b)r_b = (s - c)r_c$ , gdje su  $r$ -ovi radijusi pripisanih kružnica i  $s$  poluopseg trokuta, i formule  $R = \frac{abc}{4P}$  dobivamo

$$r_a R = \frac{abc}{4(s - a)} \quad (3.10)$$

Sada je

$$|EI_a|^2 = x_e^2 + y_e^2 + 2x_e^2 y_e^2 \cos \alpha + 4x_a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - 2x_a(x_e + y_e)(1 + \cos \alpha)$$

Primjenom i kombiniranjem prethodnih formula dobijemo

$$\begin{aligned} |EI_a|^2 &= R_E^2 + \frac{1}{2}bc \cos \alpha + s^2 \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} - \frac{1}{2}x_a(b + c)(1 + 2 \cos \alpha) \\ &= (R_E^2 + r_a)^2 - \frac{abc}{4(s - a)} + \frac{1}{2}bc \cos \alpha + s^2 - \frac{bc}{4(s - a)}(b + c)(1 + 2 \cos \alpha) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Konačno smo dobili

$$\begin{aligned} |EI_a|^2 &= (R_E^2 + r_a)^2 - \frac{abc}{4(s - a)}[a - 2(s - a) \cos \alpha + (b + c)(1 + 2 \cos \alpha)] \\ &= (R_E^2 + r_a)^2 - \frac{abc}{4(s - a)}2s(1 + \cos \alpha) \\ &= (R_E^2 + r_a)^2 \end{aligned}$$

Odatle slijedi da Eulerova kružnica trokuta  $ABC$  izvana dira trokutu  $ABC$  pripisanu kružnicu nasuprot vrhu  $A$ . Analogono se dokazuje da dira i preostale dvije trokutu pripisane kružnice.

U literaturi se trokut određen tima trima diralištima Eulerove kružnice i pripisanih kružnica može naći pod imenom *Feuerbachov trokut*.

Dokažimo sada da upisana kružnica dira Eulerovu kružnicu iznutra. Uvest ćemo supstituciju  $s \leftrightarrow (s - a)$ .

Sa  $I$  ćemo označiti središte s koordinatama  $(x_i, y_i)$ , a sa  $r$  radijus upisane kružnice  $k_I$ .

Analogno će vrijediti

$$x_i = y_i$$

i

$$y_i \sin \alpha = r = (s - a) \tan \frac{1}{2} \alpha \quad (3.13)$$

Zaključujemo

$$x_i = y_i = \frac{s - a}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}. \quad (3.14)$$

Primjenjujući formule za radijus trokutu upisane kružnice dobit ćemo

$$x_i = y_i = \frac{bc}{2s} \quad (3.15)$$

Tada nam je

$$|EI|^2 = x_e^2 + y_e^2 + 2x_e^2 y_e^2 \cos \alpha + 4x_i^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - 2x_i(x_e + y_e)(1 + \cos \alpha)$$

Analognim postupkom kao za dokazivanje duljine  $|EI_a|$ , primjenom jednakosti od (3.8) do (3.15) i formule  $rR = \frac{abc}{4s}$  dobivamo

$$|EI|^2 = (R_E^2 - r)^2 \quad (3.16)$$

Ovime smo dokazali da upisana kružnica dira Eulerovu kružnicu iznutra i to diralište se naziva *Feuerbachovom točkom*. Time je dan dokaz Feuerbachovog teorema.

□

# Literatura

- [1] D. BAKOŠ, Z. KOLAR–BEGOVIĆ, *Eulerova kružnica*, Matematičko-fizički list, **1**(2009/2010), 23–28.
- [2] H. S. M. COXETER, S. L. GREITZER, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America, 1962.
- [3] D. ILIŠEVIĆ, M. BOMBARDELLI, *Elementarna geometrija*, skripta, Zagreb, 2007.,  
<http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf>
- [4] D. PALMAN, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
- [5] D. PALMAN, *Kružnica devet točaka i Feuerbachov teorem*, Matematika, 1986.
- [6] Z. KOLAR-BEGOVIĆ, A. TONKOVIĆ, *Feuerbachov teorem*, Osječki matematički list **9**(2009), 21–30.
- [7] D. SURYANARAYANA, *A Note on Feuerbach's Theorem*, MATH. STUDENT, **29**(1961), 138–140.