Konveksni skupovi

Nujić, Petar

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Petar Nujić

KONVEKSNI SKUPOVI

Diplomski rad

Osijek, 2017.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Petar Nujić

KONVEKSNI SKUPOVI

Diplomski rad

mentorica: izv.prof.dr.sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2017.

Veliku zahvalnost dugujem svojoj mentorici izv.prof.dr.sc. Mihaeli Ribičić Penavi koja mi je omogućila sve potrebne materijale i pomogla svojim savjetima pri izradi ovog diplomskog rada.

Također, zahvaljujem se svim svojim prijateljima i prijateljicama, osobito Filipu i Amandi koji su od prvog dana bili tu za mene i bez čije podrške ne bih bio sada ovdje gdje jesam te ostalima koji su učinili moj tijek studiranja najljepšim dijelom mog života.

A najveću zahvalnost dugujem svojim roditeljima i sestri, koji su cijelo vrijeme bili uz mene, koji su me podupirali i poticali pri ostvarenju mojih ciljeva.

Sadržaj

Uvod

Prvu poznatu definiciju za konveksnost napisao je *Euklid* u svojim Elementima, a doradio ju je *Arhimed* dajući dvije definicije. Jedna od tih definicija temeljila se na konceptu težišta geometrijskih likova (i tijela), odnosno *Arhimed* je tvrdio da se težište svakog pravilnog poligona (poliedra) moralo nalaziti unutar njega.
Konveksnost je jedan od značajnih pojmova u primijenjenoj matematici, koristi se za rješavanje problema optimizacije, maksimizacije ili minimizacije. Veliki dio ekonomske analize temelji se na problemima linearnog programiranja. Ako želimo minimizirati funkciju troškova proizvodnje poželjno je da funkcija koja opisuje taj problem bude konveksna pri čemu količina resursa (npr. novca) mora biti konveksan skup. Ukoliko se radi o maksimizacijskim problemima onda je poželjno da funkcija bude konkavna.
U raznim matematičkim problemima potrebno je naći ekstremne točke, a postupak traženja globalnog minimuma vrlo je težak. No, za konveksne funkcije definirane na konveksnom skupu vrijedi da ukoliko one u nekoj točki postižu lokalni minimum, ujedno postižu i globalni minimum na tom skupu.
U radu su definirani afini i konveksni skupovi, te dana njihova svojstva i operacije sa njima. Također, dovedeni su u vezu pojmovi konveksnosti, poliedra, sustava linearnih (ne)jednadžbi koji su vezane uz problem linearnog programiranja i traženja optimalnog rješenja. Osim toga definirana je konveksna ljuska te iskazan i dokazan *Carathéodoryjev* teorem o konveksnim skupovima.

1 Afin skup

1.1 Definicija i osnovni rezultati

Neka su dane dvije točke u $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, za koje vrijedi $x_1 \neq x_2$. Sve točke oblika

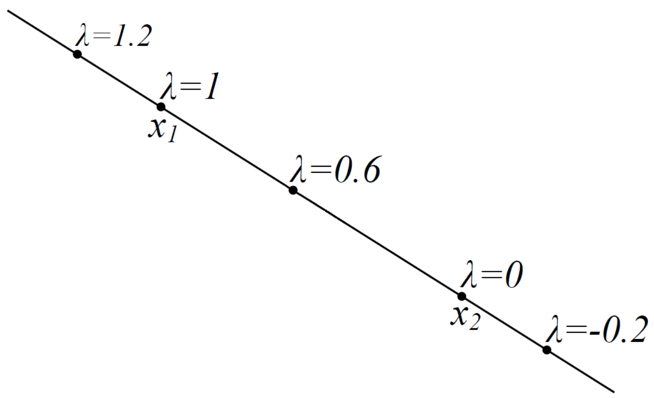
$$y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$, čine pravac koji prolazi kroz x_1 i x_2. Posebno, za vrijednost $\lambda = 0$ imamo $y = x_2$, a kada je $\lambda = 1$ je $y = x_1$. Za vrijednosti parametra λ između 0 i 1 dobivamo dužinu između x_1 i x_2.

Ukoliko y napišemo u obliku

$$y = x_2 + \lambda(x_1 - x_2),$$

dobit ćemo novu interpretaciju pravca. Iz ovog oblika možemo očitati da je y suma početne točke x_2 i vektora smjera $(x_1 - x_2)$. Prema tome, λ će dati dio puta od x_2 do x_1 na kojem leži y. Povećavanjem vrijednosti λ od 0 do 1, točka y se pomiče od x_2 prema x_1; za $\lambda < 0$ ili $\lambda > 1$ točka y se nalazi na pravcu ispred točke x_2, odnosno iza točke x_1.



Slika 1: Pravac kroz dvije točke

Definicija 1.1.1. *Za skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je afin ako je $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ za svaki $x_1, x_2 \in S$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Drugim riječima, skup S sadrži linearnu kombinaciju bilo kojih dvaju točaka iz S, pod uvjetom da suma parametara iznosi 1.

Općenito, afin skup osim točaka x_1, x_2 mora sadržavati i pravac koji prolazi kroz njih. Geometrijski promatrano, to je beskonačan nezakrivljen skup, poput pravca ili ravnine u prostoru. Prazan skup $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ također ćemo smatrati afinim. Formalna geometrija afinih skupova može se razviti iz teorema linearne algebre o potprostorima u $\mathbb{R}^n$, a njihova relacija opisana je u idućem teoremu.

Teorem 1.1.2. *Afin skup je vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako sadrži $\mathbf{0}$.*

Dokaz:

[$\Leftarrow$] Svaki vektorski prostor sadrži nulvektor $\mathbf{0}$ i zatvoren je s obzirom na operacije zbrajanja i množenja sa skalarom, pa je on afin skup.
[$\Rightarrow$] Neka je S afin skup koji sadrži $\mathbf{0}$. Za proizvoljan $x \in S$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, imamo

$$\lambda x = \lambda x + (1 - \lambda)\mathbf{0} \in S,$$

iz čega zaključujemo da je S zatvoren obzirom na operaciju množenja sa skalarom. Ako su $x, y \in S$, imamo

$$\frac{1}{2}\Big(x + y\Big) = \frac{1}{2}x + \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)y \in S,$$

iz čega slijedi

$$x + y = 2\Big(\frac{1}{2}\Big(x + y\Big)\Big) \in S.$$

Vidimo da je S zatvoren obzirom na operaciju zbrajanja. Iz prethodnog slijedi da je S potprostor od $\mathbb{R}^n$. $\square$

Propozicija 1.1.3. *Ako je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ afin skup i $x_0 \in S$, onda je skup*

$$V = S - x_0 = \{x - x_0 : x \in S\},$$

vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Dokaz:

Trebamo pokazati da je potprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren obzirom na operacije zbrajanja i množenja sa skalarom. Da bismo to dokazali, trebamo pretpostaviti da su $u, v \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada imamo da su $u + x_0 \in S$ i $v + x_0 \in S$, i vrijedi

$$\alpha u + \beta v + x_0 = \alpha(u + x_0) + \beta(v + x_0) + (1 - \alpha - \beta)x_0 \in S,$$

jer je S afin skup i $\alpha + \beta + (1 - \alpha - \beta) = 1$. Iz toga možemo zaključiti da je $\alpha u + \beta v \in V$, zbog $\alpha u + \beta v + x_0 \in S$.

Prema tome, afin skup S se može prikazati kao

$$S = V + x_0 = \{v + x_0 : v \in V\}.$$

Potprostor V afinog skupa S ne ovisi o izboru točke x_0, te za x_0 možemo uzeti bilo koju točku iz S. $\square$

Teorem 1.1.4. *Svaki neprazan afin skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je paralelan s jedinstvenim vektorskim potprostorom $V \leq \mathbb{R}^n$. Taj V je dan kao*

$$V = S - S = \{x - y : x \in S, y \in S\}.$$

Dokaz:

Prvo pokažimo da S ne može biti paralelan sa dva različita potprostora.
Ako su potprostori V_1 i V_2 paralelni sa S to bi značilo da su V_1 i V_2 međusobno paralelni, odnosno $V_2 = V_1 + a$ za neki a. Kako je $\mathbf{0} \in V_2$ slijedi da je $-a \in V_1$, tj. $a \in V_1$ i imali bi $V_1 \supseteq V_1 + a = V_2$. Na analogan način pokazuje se obratna inkluzija $V_2 \supseteq V_1$, te dobivamo $V_1 = V_2$, iz čega slijedi jedinstvenost potprostora.

Za proizvoljan $y \in S$, $S - y = S + (-y)$ je translacija od S koja sadrži $\mathbf{0}$.
Prema Teoremu 1.1.2. i jedinstvenosti potprostora, ovaj afin skup je jedinstveni potprostor V paralelan sa S. Kako je $V = S - y$, za bilo koji $y \in S$ imamo $V = S - S$. $\square$

Definicija 1.1.5. *Dimenzija afinog skupa S je dimenzija vektorskog potprostora $V = S - x_0$, gdje je $x_0 \in S$ proizvoljna točka. Dakle,*

$$dim\, S = dim\, V.$$

Teorem 1.1.6. *Neka je dan $b \in \mathbb{R}^m$ i $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Skup*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\},$$

je afin skup od $\mathbb{R}^n$. Štoviše, svaki afin skup se može prikazati na ovaj način.

Dokaz teorema može se pronaći u [5].

Definicija 1.1.7. *Neka su zadani vektori $a \in \mathbb{R}^n$ i realan broj b. Skup*

$$H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = b\},$$

nazivamo hiperravnina, a skupove

$$H^-_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \leq b\},$$

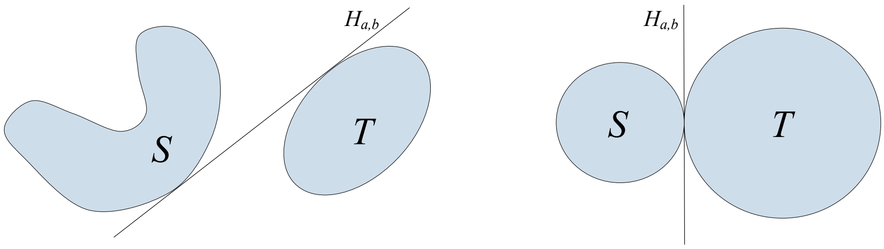
$$H^+_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \geq b\},$$

nazivamo zatvorenim poluprostorima određenim hiperravninom H. Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ zovemo vektor normale na hiperravninu H.

U definiciji se mogu pojaviti stroge nejednakosti i takve prostore nazivamo *otvorenim poluprostorima određenim hiperravninom H.* Ako je jasno o kojoj normali a i o kojem b se radi, onda ih izostavljamo u oznakama hiperravnine te kraće pišemo H, H^- i H^+.

Uočimo da su sva četiri poluprostora neprazna. Nadalje, primijetimo da bi se identični skupovi pojavili ukoliko zamijenimo a i b s λa i λb, za neki $\lambda \neq 0$. Prema tome, ti poluprostori ovise samo o hiperravnini H.

Definicija 1.1.8. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ i $H_{a,b}$ hiperravnina. Kažemo da hiperravnina $H_{a,b}$ separira skupove S i T ako je $S \subseteq H^-_{a,b}$ i $T \subseteq H^+_{a,b}$ ili obratno.*



Slika 2: Hiperravnina $H_{a,b}$ separira skupove S i T

1.2 Afina ljuska

Definicija 1.2.1. *Afina kombinacija točaka $x_1, x_2, \dots, x_m \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, je svaka točka oblika*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

gdje su $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, takvi da je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Skup

$$\mathbf{aff}(S) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m : x_1, \dots, x_m \in S, \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\},$$

naziva se afina ljuska skupa S.

Afina ljuska je najmanji afin skup koji sadrži S, u smislu ako je D bilo kakav afin skup sa svojstvom da je $S \subseteq D$, tada je $\mathbf{aff}(S) \subseteq D$.

Može se pokazati da skup $\mathbf{aff}(S)$ sadrži svaku afinu kombinaciju točaka iz S, tj. ako je S afin skup, $x_1, x_2, \dots, x_m \in S$ i $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, onda točka $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \in S$.

Definicija 1.2.2. *Za skup od m točaka $\{a_1, \dots, a_m\}$ kažemo da je afino nezavisan ako su jednakosti*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \boldsymbol{0} \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0,$$

moguće jedino za $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$. U suprotnom kažemo da je skup afino zavisan.

To jest, točke $a_1, \dots, a_m$ su afino nezavisne ako su vektori $a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1$ linearno nezavisni. Svaka afina nezavisnost od m točaka u $\mathbb{R}^n$ može se proširiti do afine nezavisnosti od n točaka.

Definicija 1.2.3. *Dimenzija skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ uzima se dimenzija njegove afine ljuske, tj.*

$$dim(S) = dim(\mathbf{aff}(S)).$$

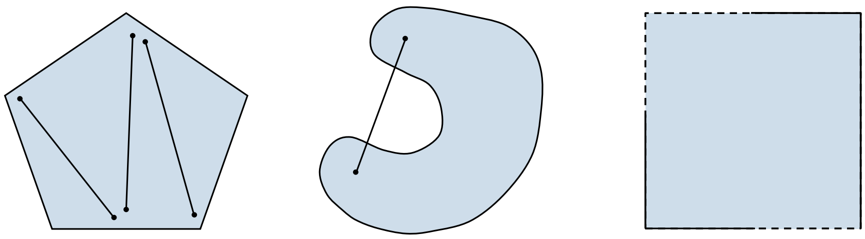
Afini skupovi dimenzije $0, 1$ i 2 su redom: točke, pravci i ravnine. Hiperravnine su $(n-1)$-dimenzionalni afini skupovi u $\mathbb{R}^n$.

2 Konveksni skupovi

2.1 Definicija i osnovni rezultati

Definicija 2.1.1. *Skup* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *je konveksan ako je* $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ *za svaki* $x_1, x_2 \in S$ *i* $\lambda \in [0,1]$.

Geometrijski promatrano, skup S je konveksan ako za svake dvije točke $x_1, x_2 \in S$ je i njihova spojnica sadržana u S. Dogovorno, prazan skup $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ su konveksni skupovi. Očigledno, svi jednočlani skupovi su konveksni. Primjeri nekih jednostavnijih konveksnih skupova su pravilni poligoni i pravilni poliedri.



Slika 3: *Lijevo* imamo primjer peterokuta koji je konveksan skup, u *sredini* i *desno* imamo primjere dva nekonveksna skupa

Primijetimo da u definiciji konveksnog skupa imamo operacije zbrajanja i množenja sa skalarom, to je zato što se naš konveksan skup nalazi u nekom vektorskom prostoru (konačnom ili beskonačnom). U ovom radu fokusirat ćemo se samo na konačne vektorske prostore, odnosno one u Euklidskom[1] prostoru $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1. *Pokažimo da je zatvorena kugla* $\overline{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ *u* $\mathbb{R}^n$ *konveksan skup, gdje je* $\|x\|$ *Euklidska* L_2[2] *norma vektora* $x \in \mathbb{R}^n$.

Da bi pokazali konveksnost ovoga skupa, prisjetimo se nejednakost trokuta koja glasi:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Uzmimo proizvoljne $x, y \in \overline{K}$ i $\lambda \in [0,1]$. Trebamo pokazati da je $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{K}$. Imamo:

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| = \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r$$

pa je prema tome skup $\overline{K}$ konveksan skup.

Uočimo da je svaki afin skup također i konveksan skup jer afin skup mora sadržavati cijeli pravac koji prolazi kroz točke tog skupa, pa tako i dio pravca, odnosno dužinu (spojnicu).

[1]Euclid of Alexandria (Euklid iz Aleksandrije), (323. pr.Kr. - 285. pr.Kr) - grčki matematičar

[2]Euklidska ili L_2 norma je definirana kao $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Kako bismo pokazali da neki skup nije konveksan, dovoljno je pronaći dvije točke $x_1, x_2 \in S$ i $\lambda \in [0,1]$ sa svojstvom $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \notin S$.

Teorem 2.1.2. *Presjek proizvoljne familije S_i, za neki $i \in I \subseteq \mathbb{N}$, konveksnih skupova je konveksan skup,*

$$S = \bigcap_{i \in I} S_i.$$

Dokaz:

Metodom matematičke indukcije po $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.
(B) Za $n = 2$ imamo $S = S_1 \cap S_2$, gdje su S_1 i S_2 konveksni skupovi (prema pretpostavci teorema). Trebamo pokazati da je skup S konveksan. Uzmimo proizvoljne $x_1, x_2 \in S$, kako je $S = S_1 \cap S_2$ onda je $x_1, x_2 \in S_1$ i $x_1, x_2 \in S_2$, a zbog konveksnosti skupova S_1 i S_2 vrijedi $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S_1$ i $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S_2$, iz čega slijedi konveksnost skupa S, tj. $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$.
(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, odnosno $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ je konveksan skup, za $S_1, \dots, S_n$ konveksne skupove.
(K) Pomoću baze i pretpostavke indukcije dokažimo istinitost tvrdnje za $n+1$. Neka je

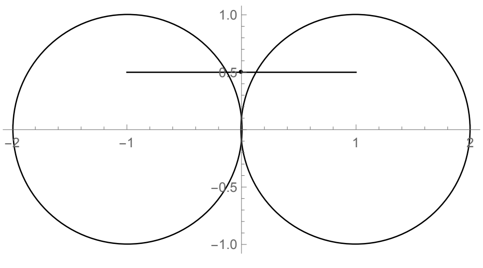
$$S = \bigcap_{i=1}^{n+1} S_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) \bigcap S_{n+1}.$$

Prema pretpostavci je $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ konveksan skup. Što znači da u konačnici imamo presjek dva konveksna skupa što je također konveksan skup. □

Primjer 2. *Unija konveksnih skupova ne mora biti konveksan skup. Pretpostavimo da imamo dva kruga*

$$\begin{aligned} \overline{K_1} \dots \ (x_1-1)^2 + x_2^2 \leq 1, \\ \overline{K_2} \dots \ (x_1+1)^2 + x_2^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Trebamo pokazati da $\overline{K_1} \cup \overline{K_2}$ nije konveksan skup. Uzmimo točke $(1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{2})$ i $\lambda = \frac{1}{2}$. Imamo $\frac{1}{2}(1, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-1, \frac{1}{2}) = (0, \frac{1}{2})$. Vidimo da točka $(0, \frac{1}{2})$ ne pripada niti jednom krugu pa tako ni njihovoj uniji. Presjek krugova $\overline{K_1} \cap \overline{K_2} = \{(0,0)\}$ je jednočlan skup što je konveksan skup.



Slika 4: Na slici vidimo da točka $(0, \frac{1}{2})$ nije sadržana u krugovima pa tako ni u njihovoj uniji.

Korolar 2.1.3. *Neka su $a_i \in \mathbb{R}^n$ i $b_i \in \mathbb{R}$ za neki $i \in I \subseteq \mathbb{N}$. Tada je skup*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle \leq b_i, \forall i \in I\},$$

konveksan.

Dokaz:

Neka je $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle \leq b_i\}$. Tada je P_i zatvoren poluprostor ili $\mathbb{R}^n$ ili prazan skup $\emptyset$, koji su konveksni, pa prema prethodnom Teoremu 2.1.2. slijedi $P = \bigcap_{i\in I} P_i$. □

Korolar bi i dalje vrijedio ako bi nejednakost $\langle a_i, x\rangle \leq b_i$ zamijenili sa $<, \geq, >$ ili $=$. Prema tome, ako nam je dan bilo kakav sustav linearnih jednadžbi s n varijabli (vrijedi za jednakosti i nejednakosti), skup rješenja P je konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, zbog čega dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 2.1.4. *Neka su $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Skup*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

nazivamo poliedar u $\mathbb{R}^n$.

Takav skup točaka nazivamo poliedrom te na njega možemo gledati kao na presjek konačno mnogo konveksnih zatvorenih poluprostora.

Pod sustavom linearnih jednadžbi smatramo konačan broj linearnih jednakosti i/ili nejednakosti s nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pa se skup P može definirati kao rješenje sustava linearnih jednadžbi.

Primjer 3. *Riješimo linearni sustav:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je skup točaka $(x_1, 3 - x_1)$, gdje je $0 \leq x_1 \leq 3$. Taj sustav možemo napisati s nejednakostima na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -x_1 - x_2 &\leq -3 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Ta dva sustava imaju identično rješenje. Općenito vrijedi da bilo koji linearni sustav s jednakostima možemo zapisati kao sustav s nejednakostima. Dolazimo do zaključka da je poliedar skup rješenja linearnog sustava $Ax \leq b$ i obratno. Iz čega nam slijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 2.1.5. *Skup rješenja proizvoljnog linearnog sustava s varijablom $x \in \mathbb{R}^n$ je poliedar. Svaki poliedar je konveksan skup.*

Dokaz:

Treba pokazati da je skup rješenja linearnog sustava $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $b \in \mathbb{R}^n$ konveksan. Pretpostavimo da su $x_1, x_2 \in P$, tada za svaki $\lambda \in [0, 1]$ imamo

$$\begin{aligned} A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \lambda A x_1 + (1-\lambda)Ax_2 = \\ &= \lambda b + (1-\lambda)b = \\ &= b. \end{aligned}$$

Slijedi da je $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in P$, pa je onda P konveksan. □

Poliedri se znatno bolje "ponašaju" nego općeniti konveksni skupovi zbog svog nedostatka zakrivljenosti.

Definicija 2.1.6. *Konveksna kombinacija točaka $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ je svaka točka oblika*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

gdje su $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Specijalno, za $m = 2$ imamo konveksnu kombinaciju dvaju točaka, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, odnosno $\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2$, što je definicija konveksnog skupa.

Sljedeći rezultat nam govori da je konveksan skup zatvoren na operacije nad konveksnim kombinacijama.

Propozicija 2.1.7. *Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan ako i samo ako sadrži sve konveksne kombinacije točaka iz S.*

Dokaz:

[$\Rightarrow$] S sadrži sve konveksne kombinacije točaka iz S, specijalno ta tvrdnja vrijedi za svake dvije točke, pa je prema tome S konveksan skup.
[$\Leftarrow$] Pretpostavimo da je S konveksan skup. Indukcijom po n ćemo pokazati da skup sadrži sve konveksne kombinacije točaka iz S.
(B) Za $n = 2$ je S konveksan prema definiciji konveksnog skupa.
(P) Pretpostavimo da S sadrži bilo koju konveksnu kombinaciju od $(n-1)$ točaka (gdje je $n \geq 3$).

(K) Neka je $i = 1, \dots, n,\ x_i \in S$ i $\lambda_i > 0$ takvi da je $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Bez smanjena općenitosti možemo pretpostaviti da je barem jedan od skalara $\lambda_i \neq 1$, dakle neka je $\lambda_1 \in (0,1)$. Pa vrijedi

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Tu sumu možemo raspisati na sljedeći način:

$$x = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i.$$

Primijetimo da je $\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} = 1$ i svaki od njih je nenegativan. Prema tome vektor $y = \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i$ je konveksna kombinacija od $(n-1)$ točaka u S pa je prema pretpostavci indukcije $y \in S$. Tada je x je konveksna kombinacija od x_1 i y, gdje su $x_1,\ y \in S$ i slijedi da je $x \in S$. $\square$

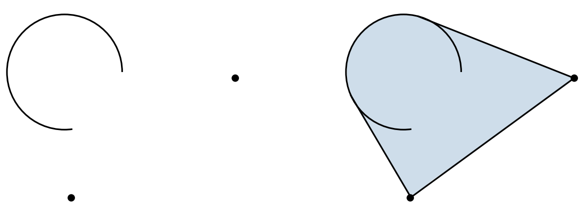
2.2 Konveksna ljuska

Za dane dvije različite točke $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ postoji mnogo konveksnih skupova koji ih sadrže. No, postoji li najmanji konveksni skup koji sadrži x_1, x_2? Spojnica L točaka x_1, x_2 ima sljedeća svojstva: konveksna je, sadrži obje točke x_1, x_2 i bilo koji drugi konveksan skup koji sadrži te točke mora sadržavati i spojnicu L. Slično, ako su x_1, x_2, x_3 tri točke u skupu $\mathbb{R}^n$, koje ne leže na istom pravcu, onda trokut koje čine te tri točke je najmanji konveksni skup koji sadrži x_1, x_2 i x_3.

Definicija 2.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Konveksna ljuska skupa S je skup svih konveksnih kombinacija točaka iz S. Oznaka*

$$\mathbf{conv}(S) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m : x_1, \ldots, x_m \in S, \lambda_1, \ldots \lambda_m \in [0,1], \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}.$$

Jedna važna činjenica je da je $\mathbf{conv}(S)$ konveksan skup, kakav god bio skup S.



Slika 5: Na slici *lijevo* je primjer nekonveksnog skupa a na slici *desno* dana je njegova konveksna ljuska, koja je očito konveksna

Propozicija 2.2.2. *Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan ako i samo ako se podudara sa svojom konveksnom ljuskom, tj. ako je $\mathbf{conv}(S) = S$.*

Dokaz propozicije može se pronaći u [4].

Teorem 2.2.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$, tada se* **conv**(S) *sastoji od svih konveksnih kombinacija elemenata iz S.*

Dokaz:

Elementi iz S pripadaju i **conv**(S) pa tako i sve njegove konveksne kombinacije (prema Propoziciji 2.1.7.). Obratno, imamo dvije konveksne kombinacije

$$x = \nu_1 x_1 + \cdots + \nu_m x_m,$$

$$y = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n,$$

gdje su $x_i, y_i \in S$. Vektor

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda\nu_1 x_1 + \cdots + \lambda\nu_m x_m + (1-\lambda)\mu_1 y_1 + \cdots + (1-\lambda)\mu_n y_n,$$

za $\lambda \in (0,1)$, je također konveksna kombinacija elemenata iz S.
Prema tome, skup svih konveksnih kombinacija elemenata iz S je konveksan skup. On sadrži S pa se podudara s najmanjim konveksnim skupom, **conv**(S). □

Korolar 2.2.4. *Konveksna ljuska konačnog podskupa $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ sastoji se od svih vektora oblika*

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m,$$

gdje su $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Dokaz:

Svaka konveksna kombinacija nekih elemenata skupa $\{a_0, \ldots, a_m\}$ može se prikazati kao konveksna kombinacija od svih elemenata tog skupa tako da uz suvišne vektore stavimo koeficijente nula. □

Iz prethodno dokazanih tvrdnji možemo zaključiti da od bilo kakvog skupa možemo napraviti konveksan skup. Specijalno, ako imamo konačan skup afino nezavisnih točaka $\{x_1, \ldots, x_m\}$ dobit ćemo zanimljivu klasu konveksnog skupa. Skup $P \subseteq \mathbb{R}^n$ nazivamo *m-dimenzionalni simpleks* ili *politop* ako je on konveksna ljuska konačnog skupa točaka u $\mathbb{R}^n$, gdje su točke $x_1, \ldots, x_m$ vrhovi tog *politopa.*
Politopi su bili dugo proučavani u matematici. Dan danas je teorija *politopa* zanimljiva tema s puno primjena. Jedan od razloga je njegova primjena u linearnom programiranju jer većina LP problema imaju dopustiv skup koji je *politop.* Najjednostavniji simpleksi su točka, dužina, trokut i tetraedar.

2.3 Operacije s konveksnim skupovima

U ovom poglavlju ćemo opisati neke operacije koje čuvaju konveksnost skupova ili koje nam dozvoljavaju konstrukciju konveksnog skupa od drugih skupova.

Propozicija 2.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, tada je*

i) homotetija $\alpha S = \{\alpha s : s \in S\}$ konveksna, za $\alpha \in \mathbb{R}$,

ii) zrcalna simetrija $-S = (-1)S$ konveksna,

iii) translacija $S + \alpha = \{s + \alpha : s \in S\}$ konveksna, za $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz:

i) Neka su $x, y \in \alpha S$. Tada su $x = \alpha x'$ i $y = \alpha y'$ za $x', y' \in S$. Da bismo pokazali da je αS konveksan skup treba pokazati da je $\lambda x + (1-\lambda)y \in \alpha S$ za $\lambda \in [0,1]$.
Zbog konveksnosti skupa S vrijedi $\lambda\alpha x' + (1-\lambda)\alpha y' = \alpha(\lambda x' + (1-\lambda)y') \in \alpha S$.
Geometrijski promatrano, ako je $\alpha > 0$, onda je αS istog oblika kao S ali u drugom mjerilu, odnosno produljenje ili skraćenje za koeficijent α, dok je središte fiksirano.

ii) Zrcalna simetrija je specijalan slučaj homotetije za $\alpha = -1$.
Takav skup (ako je neprazan) mora sadržavati ishodište jer sadrži x pa i $(-x)$ te njihovu spojnicu.

iii) Neka su $x, y \in S + \alpha$ tada su $x = x' + \alpha$ i $y = y' + \alpha$ za $x', y' \in S$. Da bismo pokazali da je $S + \alpha$ konveksan skup treba pokazati da je $\lambda x + (1-\lambda)y \in S + \alpha$ za $\lambda \in [0,1]$.
Zbog konveksnosti skupa S vrijedi $\lambda(x' + \alpha) + (1-\lambda)(y' + \alpha) = \lambda x + (1-\lambda)y + \alpha \in S + \alpha$.
$\square$

Napomena 2.3.2. *U* Teoremu 2.1.2. *smo pokazali da je presjek proizvoljne familije konveksnih skupova konveksan skup.*

Teorem 2.3.3. *Kartezijev[3] produkt proizvoljne familije S_i, za neki $i \in I \subseteq \mathbb{N}$, konveksnih skupova je konveksan skup,*

$$\prod_{i \in I} S_i.$$

Dokaz:

Neka su $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S = S_1 \times S_2$ i $\lambda \in [0,1]$.
Tada je $\lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(y_1, y_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2)$. Kako su S_1 i S_2 konveksni i $x_1, y_1 \in S_1,\ x_2, y_2 \in S_2$ tada je i $\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \in S_1,\ \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \in S_2$. Pa prema tome je $(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \in S_1 \times S_2$, čime smo pokazali bazu indukcije (za $n = 2$). Dokaz za prebrojivo mnogo skupova je analogan dokazu Teorema 2.1.2. $\square$

[3] Rene Descartés (lat. Renatus Cartesius), (1596.-1650.) - francuski filozof, fizičar i matematičar

Teorem 2.3.4. *Ako su S_1 i S_2 konveksni skupovi, tada je suma Minkowskog*[4] *skupova S_1 i S_2 definirana kao $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$ također konveksna.*

Dokaz:

Neka su x i y točke u $S_1 + S_2$. Tada postoje vektori $x_1, y_1 \in S_1$ i $x_2, y_2 \in S_2$ takvi da vrijedi

$$x = x_1 + x_2, \qquad y = y_1 + y_2.$$

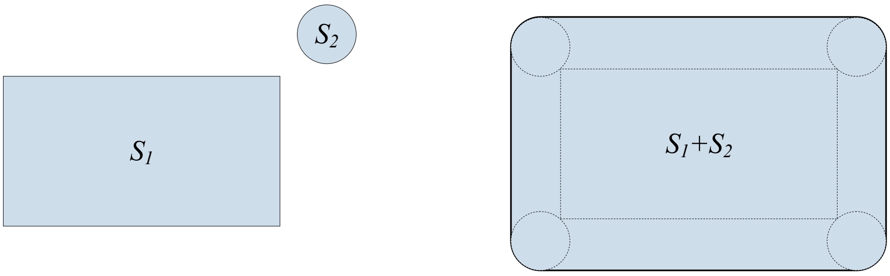
Za $\lambda \in [0, 1]$ imamo

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = [\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1] + [\lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2].$$

Prema pretpostavci su S_1 i S_2 konveksni, pa vrijedi

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \in S_1, \qquad \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 \in S_2.$$

Iz čega slijedi da je $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_1 + S_2$, što znači da je $S_1 + S_2$ konveksan skup. $\square$



Slika 6: Na slici *lijevo* je primjer dva konveksna skupa, a na slici *desno* je prikazana suma *Minkowskog*, koja je očito konveksna

Primjer 4. *Odredi sumu $A + B$ za $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ i $B = \{(1, 1)\}$.*
Suma će biti krug sa ishodištem u $(1, 1)$, $A + B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$.

Po definiciji konveksnog skupa za proizvoljan skup S vrijedi

$$\lambda S + (1 - \lambda)S \subseteq S, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Ako su $S_1, S_2, \ldots, S_n$, konveksni skupovi i $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Tada je konveksna kombinacija skupova $S_1, \ldots, S_n$,

$$S = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \cdots + \lambda_n S_n,$$

također konveksna.
Prirodno je zamišljati S kao kombinaciju skupova $S_1, \ldots, S_n$, na primjer, neka je S_1 trokut a S_2 krug u $\mathbb{R}^2$. Kako je $\lambda \in [0, 1]$ skup $S = (1 - \lambda)S_1 + \lambda_2 S_2$ mijenja oblik iz trokuta u trokut sa zaobljenim vrhovima, a povećanjem parametra λ zaobljenost dominira sve više, dok se ne dobije konačni oblik, tj. krug.

Sljedeća svojstva vrijede za operacije zbrajanja skupova i množenja skupova sa skalarom, pri tome skupovi ne moraju nužno biti konveksni.

[4]Hermann Minkowski (1864. - 1909.) - njemački matematičar

- $S_1 + S_2 = S_2 + S_1$ (komutativnost),
- $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)$ (asocijativnost),
- $\lambda_1(\lambda_2 S) = (\lambda_1\lambda_2)S$ (kvaziasocijativnost),
- $\lambda(S_1 + S_2) = \lambda S_1 + \lambda S_2$ (distributivnost množenja prema zbrajanju slijeva)

Konveksan skup koji u sebi sadrži samo 0 je *neutralni element* za operaciju zbrajanja. Aditivni inverzi ne postoje za skupove koji sadrže više od jednog elementa; najbolje što možemo reći da je $0 \in [S + (-S)]$ kada je $S \neq \emptyset$.

Idući teorem nam govori da postoji jedno važno pravilo o operacijama sa skupovima koje ovisi o konveksnosti. Jednakost distributivnosti je ekvivalentno konveksnosti od S jer pravilo implicira da je $\lambda S + (1-\lambda)S$ sadržan u S kada je $\lambda \in [0, 1]$.

Teorem 2.3.5. *Neka je S konveksan skup i $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, tada vrijedi sljedeća jednakost*

$$(\lambda_1 + \lambda_2)S = \lambda_1 S + \lambda_2 S.$$

Dokaz:

$[\subseteq]$ Ovaj smjer vrijedi bez obzira na konveksnost skupa S.
$[\supseteq]$ Obratna inkluzija slijedi iz konveksne relacije

$$S \supseteq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} S + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} S,$$

nakon množenja s $\lambda_1 + \lambda_2$ (pod pretpostavkom da je $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$) dobivamo

$$(\lambda_1 + \lambda_2)S \supseteq \lambda_1 S + \lambda_2 S.$$

Ako je λ_1 ili λ_2 jednak 0, onda je tvrdnja teorema trivijalna. $\square$

Ako je S konveksan skup onda teorem 2.3.5. povlači sljedeće: $S+S = 2S$, $S+S+S = 3S$, i tako dalje.

Neka su nam dana bilo koja dva konveksna skupa $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, tada postoji jedinstveni najveći konveksni skup koji je sadržan u S_1 i S_2, tj. $S_1 \cap S_2$, i jedinstveni najmanji konveksni skup koji sadrži S_1 i S_2, odnosno $\mathbf{conv}(S_1 \cup S_2)$.

Teorem 2.3.6. *Neka je $\{S_i : i \in I\}$ proizvoljna familija nepraznih konveksnih skupova iz $\mathbb{R}^n$, te neka je S konveksna ljuska unije te familije. Tada je*

$$S = \bigcup \{\sum_{i \in I} \lambda_i S_i\},$$

gdje je unija po svim konačnim konveksnim kombinacijama (gdje su $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, realni brojevi takvi da je $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$).

Dokaz:

Prema Teoremu 2.2.3., S je skup svih konveksnih kombinacija oblika

$$x = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n,$$

gdje vektori $y_1, \ldots, y_n$, pripadaju uniji skupova S_i. Odnosno S možemo dobiti uzimajući samo one kombinacije čiji su koeficijenti različiti od nule, a vektore možemo uzeti iz različitih S_i. Vektori s koeficijentima 0 se mogu izostaviti iz kombinacije. Vektore s pozitivnim koeficijentima koji pripadaju istom S_i možemo zamijeniti s jednim vektorom, npr. neka su $y_1, y_2 \in S_i$, onda se $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$ može zamijeniti s μy, gdje je $\mu = \mu_1 + \mu_2$ i vrijedi

$$y = \frac{\mu_1}{\mu} y_1 + \frac{\mu_2}{\mu} y_2 \in S_i.$$

Iz čega slijedi da je S unija konačnih konveksnih kombinacija oblika $\mu_1 S_{i_1} + \cdots + \mu_n S_{i_n}$, gdje su svi indeksi $i_1, \ldots, i_n$ različiti. $\square$

Neka nam je dana bilo koja linearna transformacija A s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$, definiramo

$$AC = \{Ax : x \in C\} \quad C \subseteq \mathbb{R}^n,$$
$$A^{-1}D = \{x : Ax \in D\} \quad D \subseteq \mathbb{R}^m,$$

AC nazivamo slikom od C, a $A^{-1}D$ nazivamo praslikom od D.

Teorem 2.3.7. *Neka je $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ afino preslikavanje. Onda je AC konveksan skup u $\mathbb{R}^m$ za svaki konveksan skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ i $A^{-1}D$ je konveksan skup u $\mathbb{R}^n$ za svaki konveksan skup $D \subseteq \mathbb{R}^m$.*

Dokaz:

Neka su $x, y \in C$, onda su $A(x), A(y) \in AC$. Za $\lambda \in [0,1]$ je $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ i kako je A afino preslikavanje vrijedi $A(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda A(x) + (1-\lambda)A(y) \in AC$, iz čega slijedi da je AC konveksan skup.
Neka su $A(x), A(y) \in D$, onda su $x, y \in A^{-1}D$, za $\lambda \in [0,1]$ i zbog konveksnosti skupa D vrijedi $\lambda A(x) + (1-\lambda)A(y) \in D \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A^{-1}D$, iz čega slijedi da je $A^{-1}D$ konveksan skup. $\square$

Jedna interpretacija konveksnosti $A^{-1}D$ u Teoremu 2.3.7. je ta da ako se y nalazi u konveksnom skupu, rješenje x sustava linearnih jednadžbi oblika $Ax = y$ će također biti sadržano u konveksnom skupu.

Ako se skup D iz Teorema 2.3.7. zapiše kao $D = K + a$, gdje je K nenegativni ortant od $\mathbb{R}^m$ i $a \in \mathbb{R}^m$, onda je $A^{-1}D$ skup vektora x takvih da je $Ax \geq a$, tj. skup rješenja sustava linearnih nejednadžbi u $\mathbb{R}^n$. Ako je C, iz Teorema 2.3.7, nenegativni ortant iz $\mathbb{R}^n$, onda je AC skup vektora $y \in \mathbb{R}^m$ takvih da jednadžba $Ax = y$ ima rješenja za $x \geq 0$.

Teorem 2.3.8. *Neka su S_1 i S_2 konveksni skupovi u $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. Tada je njihova direktna suma*

$$S_1 \oplus S_2 = \{(y, z) : y \in S_1, z \in S_2\},$$

konveksan skup u $\mathbb{R}^{n+m}$.

Dokaz:

Neka su $x_1, x_2 \in S = S_1 \oplus S_2$ i $\lambda \in [0,1]$. Tada je $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \lambda(y_1, z_1) + (1-\lambda)(y_2, z_2) = (\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2)$. Kako su S_1 i S_2 konveksni i $y_1, z_1 \in S_1,\ y_2, z_2 \in S_2$ tada je i $\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1 \in S_1,\ \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2 \in S_2$, pa je prema tome $(\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) \in S_1 \oplus S_2 = S$. Iz čega slijedi da je S konveksan skup. $\square$

Teorem 2.3.9. *Neka su $S_1 = \{(y, z_1) : y \in \mathbb{R}^n, z_1 \in \mathbb{R}^m\}$ i $S_2 = \{(y, z_2) : y \in \mathbb{R}^n, z_2 \in \mathbb{R}^m\}$ konveksni skupovi u $\mathbb{R}^{n+m}$, i neka je*

$$S = \{(y, z) : y \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^m\},$$

skup vektora takav da postoje vektori z_1 i z_2, $(y, z_1) \in S_1$, $(y, z_2) \in S_2$ i $z = z_1 + z_2$. Onda je S konveksan skup u $\mathbb{R}^{n+m}$.

Dokaz:

Neka je $(y, z) \in S$, gdje je $z = z_1 + z_2$, na isti način pretpostavimo $(y', z') \in S$, gdje je $z' = z_1' + z_2'$. Za $\lambda \in [0,1]$ je $y'' = \lambda y + (1-\lambda)y'$ i $z'' = \lambda z + (1-\lambda)z'$, i imamo

$$\begin{aligned}
(y'', \lambda z_1 + (1-\lambda)z_1') &= \lambda(y, z_1) + (1-\lambda)(y', z_1') \in S_1, \\
(y'', \lambda z_2 + (1-\lambda)z_2') &= \lambda(y, z_2) + (1-\lambda)(y', z_2') \in S_2, \\
z'' &= \lambda(z_1 + z_2) + (1-\lambda)(z_1' + z_2') = \\
&= (\lambda z_1 + (1-\lambda)z_1') + (\lambda z_2 + (1-\lambda)z_2') = \\
&= z_1'' + z_2'',
\end{aligned}$$

i prema tome, vektor

$$\lambda(y, z) + (1-\lambda)(y', z') = (y'', z'') \in S.$$

Iz čega zaključujemo da je skup S konveksan. $\square$

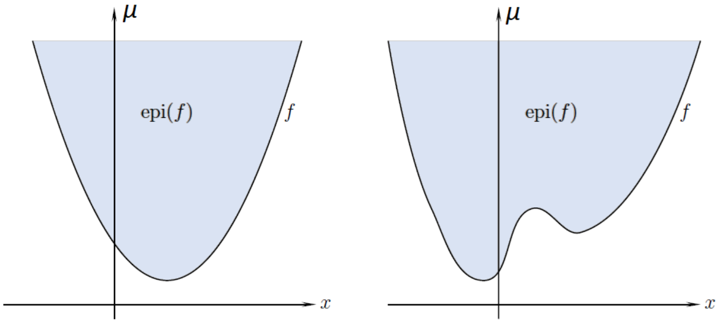
2.4 Konveksne funkcije

Definicija 2.4.1. *Neka je f funkcija koja poprima realne vrijednosti ili $\pm\infty$ i čija je domena neki podskup $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Skup*

$$\{(x, \mu) : x \in D, \mu \in \mathbb{R}, f(x) \leq \mu\},$$

se naziva epigraf od f i označavamo s **epi**(f). *Kažemo da je funkcija f konveksna na D ako je* **epi**(f) *konveksan skup u $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Za funkciju f kažemo da je konkavna na $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ako je $(-f)$ konveksna. Afina funkcija na $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je istovremeno konveksna i konkavna.



Slika 7: Na slici *lijevo* prikazan je epigraf konveksne funkcije, a *desno* epigraf nekonveksne funkcije

Definicija 2.4.2. *Efektivna domena konveksne funkcije f na $D \subseteq \mathbb{R}^n$, u oznaci* $\mathbf{dom}(f)$, *je projekcija epigrafa od f na $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathbf{dom}(f) = \{x \in D : \exists \mu, (x, \mu) \in \mathbf{epi}(f)\} = \{x \in D : f(x) < +\infty\}.$$

$\mathbf{dom}(f)$ je konveksan skup u $\mathbb{R}^n$ jer je on slika konveksnog skupa $\mathbf{epi}(f)$ prema Teoremu 2.3.7.

Ako nismo drugačije naglasili pod konveksnim funkcijama ćemo podrazumijevati sve konveksne funkcije na $\mathbb{R}^n$ čije vrijednosti mogu biti $\pm\infty$. Pomoću ovog pristupa se tehničke smetnje oko efektivne domene mogu zanemariti. Na primjer, kada konstruiramo konveksnu funkciju prema određenoj formuli, ista formula implicitno određuje efektivnu domenu od f, jer ona određuje gdje $f(x)$ je ili nije $+\infty$.
Stoga moramo definirati pravila koja ćemo koristiti

$$\begin{aligned}
&\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty, \quad -\infty < \alpha \leq \infty,\\
&\alpha - \infty = -\infty + \alpha = -\infty, \quad -\infty \leq \alpha < \infty,\\
&\alpha\infty = \infty\alpha = \infty, \quad 0 < \alpha \leq \infty,\\
&\alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = -\infty, \quad 0 < \alpha \leq \infty,\\
&\alpha\infty = \infty\alpha = -\infty, \quad -\infty \leq \alpha < 0,\\
&\alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = \infty, \quad -\infty \leq \alpha < 0,\\
&0\infty = \infty 0 = 0 = 0(-\infty) = (-\infty)0,\\
&-(-\infty) = \infty, \quad \inf \emptyset = \infty, \quad \sup \emptyset = -\infty.
\end{aligned}$$

Izrazi oblika $\infty - \infty$ i $-\infty + \infty$ su nedefenirani i zanemareni. Pod uvjetom da su sve sume definirane, prema navedenim pravilima vrijedit će poznati zakoni aritmetike

$$\begin{aligned}
&\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \text{ (asocijativnost)},\\
&\alpha + \beta = \beta + \alpha \text{ (komutativnost zbrajanja)},\\
&\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \text{ (kvaziasocijativnost)},\\
&\alpha\beta = \beta\alpha \text{ (komutativnost množenja)},\\
&\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \text{ (distributivnost množenja prema zbrajanju)}.
\end{aligned}$$

Definicija 2.4.3. *Za konveksnu funkciju kažemo da je pravilna ako je njen epigraf neprazan skup i ako ona ne sadrži vertikalne pravce, tj.* $f(x) < +\infty$ *za neki* $x \in D$ *i* $f(x) > -\infty$*, za svaki* $x \in D$*, gdje je* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *domena funkcije.*

Prema definiciji f je konveksna funkcija ako je njena domena neprazna i ako je restrikcija[5] funkcije f na $\mathbf{dom}(f)$ konačna. Drugim riječima, pravilna konveksna funkcija f na $\mathbb{R}^n$ je dobivena na način da uzmemo konačnu konveksnu funkciju f definiranu na nepraznom konveksnom skupu $\mathbf{dom}(f)$ i zatim ju proširimo na čitav $\mathbb{R}^n$ stavljanjem $f(x) = +\infty$, za $x \notin \mathbf{dom}(f)$. Konveksna funkcija koja nije pravilna je nepravilna.

Najčešće se proučavaju pravilne konveksne funkcije, ali ne trebaju se zanemariti nepravilne jer one, u mnogim slučajevima, proizlaze iz pravilnih funkcija.
Iz definicije, f je konveksna na $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ako i samo ako je

$$\lambda(x,\mu) + (1-\lambda)(y,\nu) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda\mu + (1-\lambda)\nu) \in \mathbf{epi}(f),$$

za $(x,\mu),(y,\nu) \in \mathbf{epi}(f)$ i $\lambda \in [0,1]$.
Odnosno, moramo imati $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$ i

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\mu + (1-\lambda)\nu,$$

za $x, y \in D$, $f(x) \leq \mu \in \mathbb{R}$, $f(y) \leq \nu \in \mathbb{R}$ i $\lambda \in [0,1]$.

Teorem 2.4.4. *Neka je* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *konveksan skup. Funkcija* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *je konveksna ako i samo ako vrijedi*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

$\forall x, y \in D$ *i* $\lambda \in [0,1]$.

Dokaz:

[$\Rightarrow$] Neka su $x, y \in D$ i neka je odgovarajući epigraf, $\mathbf{epi}(f)$, konveksan skup. Kako su točke $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \mathbf{epi}(f)$, onda $\forall \lambda \in [0,1]$ mora vrijediti

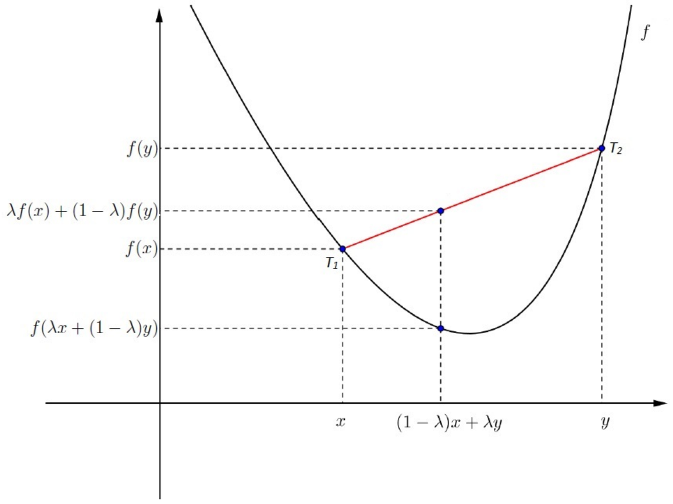
$$\lambda(x, f(x)) + (1-\lambda)(y, f(y)) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \in \mathbf{epi}(f),$$

a to znači da vrijedi nejednakost $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.
[$\Leftarrow$] Uzmimo sada $(x,\alpha),(y,\beta) \in \mathbf{epi}(f_{|D})$, i $\lambda \in [0,1]$. Kako je D konveksan i

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta,$$

slijedi da je $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \in \mathbf{epi}(f_{|D})$, te je ovaj skup konveksan što povlači da je f konveksna. $\square$

[5] Nad bilo kojom funkcijom se može napraviti restrikcija na podskup svoje domene. Restrikcija funkcije $f : X \longrightarrow Y$ na $A \subseteq X$, se piše kao $f_{|A} : A \longrightarrow Y$.



Slika 8: Grafički prikaz konveksne funkcije iz Teorema 2.4.4.

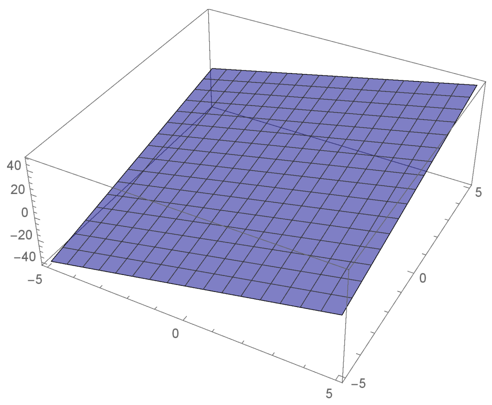
Geometrijski promatrano, konveksnost funkcije znači da ukoliko uzmemo bilo koje dvije točke $x, y \in D$ te pronađemo njihove odgovarajuće funkcijske vrijednosti $f(x)$ i $f(y)$, tada će se sve točke (osim rubnih) sekante s krajnjim točkama $T_1(x, f(x))$ i $T_2(y, f(y))$ nalaziti iznad grafa funkcije $f_{|(x,y)}$, a rubne točke sekante će se nalaziti na grafu funkcije f.

Funkcija je strogo konveksna ako za $x \neq y$ i $\lambda \in (0, 1)$ vrijedi stroga nejednakost u Teoremu 2.4.4. Funkcija f je konkavna na D ako je funkcija $(-f)$ konveksna, tj. ako je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

a strogo konkavna ako za $x \neq y$ i $\lambda \in (0, 1)$ vrijedi stroga nejednakost u 2.4.4. Funkcija f je afina ako vrijedi jednakost u Teoremu 2.4.4.

Primjer 5. *Afina funkcija $a(x) = \langle a, x\rangle + b$ je konveksna na $\mathbb{R}^n$. Njen epigraf je poluprostor te je ona konkavna na tom skupu. Afine funkcije su jedine funkcije koje su istovremeno konveksne i konkavne.*



Slika 9: Grafički prikaz afine funkcije $a(x) = \langle a, x\rangle + b$

Postoje slučajevi kada je teško dokazati konveksnost funkcije direktno preko Teorema 2.4.4. pa je stoga dovoljno pokazati sljedeću nejednakost:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) - [\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)] \leq 0.$$

Primjer 6. *Pokaži da je $f(x) = x^2$ konveksna funkcija.*

Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ i $\lambda \in [0,1]$, imamo

$$\begin{aligned}(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 - [\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2] &= \dots \\ \dots &= -\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \leq 0\end{aligned}$$

Zbog $\lambda \in [0,1]$ su $\lambda \geq 0$ i $(1-\lambda) \geq 0$, a za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$ je $(x-y)^2 \geq 0$. Kako je izraz $-\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \leq 0$ slijedi da je naša funkcija $f(x) = x^2$ konveksna.

Teorem 2.4.5. *Funkcija $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ je konveksna ako i samo ako vrijedi*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta, \ 0 < \lambda < 1,$$

kada je $f(x) < \alpha \in \mathbb{R}$ i $f(y) < \beta \in \mathbb{R}$ i $\lambda \in (0,1)$.

Teorem 2.4.6. *(Diskretna Jensenova[6] nejednakost) Funkcija $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ je konveksna na $I \subseteq \mathbb{R}$, ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n \in I$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ takvi da je $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ vrijedi*

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Dokaz:

[$\Rightarrow$] Kako je $I \subseteq \mathbb{R}$ konveksan skup, on je zatvoren na konveksne kombinacije. (vidi propoziciju 2.1.7.)
[$\Leftarrow$] Pretpostavimo da vrijedi nejednakost.
(B) Za $n = 2$ imamo konveksnost funkcije prema definiciji.
(P) Zato pretpostavimo da je f konveksna funkcija te metodom matematičke indukcije po $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dokažimo nejednakost. Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za n, tj.

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

(K) Neka su $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ takvi da $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je barem jedan $\lambda_i \neq 1$, neka je to $\lambda_{n+1} \neq 1$ pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1},$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$

[6] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859.-1925.) - danski matematičar

Pomoću baze i pretpostavke indukcije dokažimo istinitost tvdnje za $n+1$,

$$\begin{aligned}
f\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\Big) &= f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i + \lambda_{n+1}x_{n+1}\Big)\\
&= f\Big((1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}x_i + \lambda_{n+1}x_{n+1}\Big)\\
&\le (1-\lambda_{n+1})f\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}x_i\Big) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})\\
&\le (1-\lambda_{n+1})\cdot\frac{1}{1-\lambda_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_1) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

□

Nejednakost u Teoremu 2.4.4. najčešće se uzima za definiciju konveksne funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Taj pristup može stvarati poteškoće jer f može poprimiti vrijednosti $-\infty$ i $+\infty$ pa se prema tome može pojaviti izraz $\infty - \infty$ koji nije definiran. Naravno, uvjet u Teoremu 2.4.5. se može uzeti kao definicija konveksnosti u općenitim slučajevima, ali definicija na početku ovog poglavlja čini se poželjnijom jer naglašava geometriju koja je fundamentalna za teoriju konveksnih funkcija.

Teorem 2.4.7. *Neka je $(a, b) = I \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren interval, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Funkcija f je (strogo) konveksna ako i samo ako je f' (strogo) rastuća*[7].

Dokaz teorema može se pronaći u [1].

Teorem 2.4.8. *Neka je f dva puta derivabilna realna funkcija na nekom otvorenom intervalu $(a, b) = I$. Funkcija f je konveksna ako i samo ako je njena druga derivacija f'' nenegativna na intervalu (a, b).*

Dokaz:

[⇒] f je konveksna na $I \Leftrightarrow f'$ rastuća na $I \Leftrightarrow f''(x) \ge 0,\ \forall x \in I$.
[⇐] Pretpostavimo da je f'' nenegativna funkcija na I, tada je f' rastuća na I (uzmimo da je $I = (a, b)$). Za $a < x < y < b,\ \lambda \in (0, 1)$ i $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, imamo

$$f(x) - f(z) = \int_z^x f'(t)\,dt \ge f'(z)(x-z),$$

$$f(z) - f(y) = \int_y^z f'(t)\,dt \le f'(z)(z-y).$$

Kako je $x - z = (1-\lambda)(x-y)$ i $z - y = \lambda(x-y)$, imamo

$$f(z) \le f(x) - (1-\lambda)f'(z)(x-y) \tag{1}$$

$$f(z) \le f(y) + \lambda f'(z)(x-y) \tag{2}$$

[7]Funkcija f je monotono rastuća na intervalu I ako $x_1, x_2 \in I$ i $(x_1 \le x_2) \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

Pomnožimo nejednakost (1) sa λ i nejednakost (2) sa $(1-\lambda)$, zatim te nejednakosti zbrojimo i dobivamo

$$\lambda f(z) + (1-\lambda)f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Na lijevoj strani ostane $f(z)$, a kako je $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, imamo $f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)y)$. Iz čega slijedi da je funkcija f konveksna. $\square$

Primjer nekih konveksnih funkcija čiju konveksnost možemo pokazati koristeći Teorem 2.4.8.

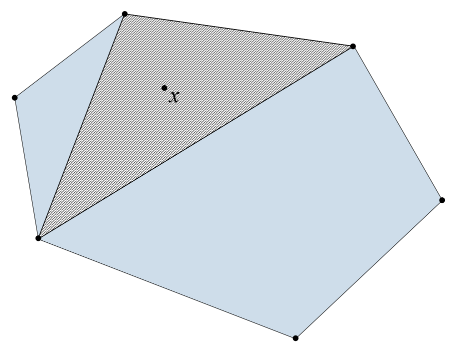
1.) $f(x) = e^{\alpha x}, \ -\infty < \alpha < \infty;$
2.) $f(x) = x^{\alpha}$ ako je $x \geq 0, \ f(x) = \infty$ za $x < 0$ i $1 \leq \alpha < \infty;$
3.) $f(x) = (\alpha^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ako je $|x| < \alpha, \ f(x) = \infty$ za $|x| \geq \alpha$ i $\alpha > 0;$
4.) $f(x) = -log\, x$ ako je $x > 0, \ f(x) = \infty$ za $x \leq 0.$

2.5 Carathéodoryjev teorem

Ako točka x leži u konveksnoj ljusci nekog skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$, onda znamo da se x može napisati kao konveksna kombinacija točaka iz S. Ali, koliko točaka nam je potrebno? Možda postoji način za smanjenje broja točaka konveksne kombinacije koje će i dalje činiti našu točku x. Iz linearne algebre znamo da se neka točka iz potprostora dimenzije m može zapisati kao linearna kombinacija od m baznih vektora. Sličan rezultat je i u konveksnoj analizi, mada je malo kompliciraniji.

Idući rezultat nam govori da se bilo koja točka u konveksnoj ljusci može napisati kao konveksna kombinacija od nekoliko drugih točaka.

Teorem 2.5.1. *(Carathéodoryjev[8] teorem) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Svaki $x \in$ **conv**(S) može se napisati kao konveksna kombinacija od k-afino nezavisnih točaka iz S. Posebno, $k \leq n+1$.*



Slika 10: Carathéodoryjev teorem

[8]Constantin Carathéodory (1873. - 1950.) - grčki matematičar

Dokaz:

Zbog $x \in \mathbf{conv}(S)$ postoje nenegativni realni brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ i vektori $x_1, \dots, x_m \in S$, takvi da $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ i $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Možemo pretpostaviti da je svaki λ_i pozitivan, u suprotnom bi mogli izostaviti neke x_i iz zapisa.
Ako su $x_1, \dots, x_m$ afino nezavisni onda smo gotovi s dokazom, prema tome pretpostavimo suprotno.
Tada postoje skalari $\mu_1, \dots, \mu_m$, koji nisu svi jednaki nuli takvi da je $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = \mathbf{0}$ i $\sum_{i=1}^m \mu_i = 0$. Zato što nisu svi μ_i jednaki 0, a njihova suma je 0, onda barem jedan od tih brojeva mora biti pozitivan. Neka je to $\mu_1 > 0$.
Pomnožimo jednakost $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = \mathbf{0}$ s nekim nenegativnim brojem α i oduzmemo je od $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, dobivamo

$$x = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \alpha\mu_i) x_i.$$

Uočimo da $\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \alpha\mu_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i - \alpha \sum_{i=1}^t \mu_i = 1$. Kada je $\alpha = 0$ dobit ćemo početnu reprezentaciju x. Kako postupno budemo povećavali α od 0 neki od koeficijenata $\lambda_i - \alpha\mu_i$ će postati 0, pretpostavimo da se to dogodi za neki $\alpha = \alpha_0$. Napomenimo da su ovdje svi λ_i i μ_1 pozitivni. Onda je svaki od koeficijenata $\lambda_i - \alpha\mu_i$ nenegativan i barem jedan od njih je 0. To znači da smo pronašli novu reprezentaciju x kao konveksnu kombinaciju od $(m-1)$ vektora iz S. Ovaj postupak može se ponavljati sve dok ne dobijemo x kao konveksnu kombinaciju od k-afino nezavisnih točaka iz S.
Konačno, imamo najviše $(n+1)$-afino nezavisnih točaka u $\mathbb{R}^n$ pa tako je $k \leq n+1$. $\square$

Carathéodoryjev teorem govori da za proizvoljni $x \in \mathbb{R}^n$ iz konveksne ljuske od S možemo zapisati kao konveksnu kombinaciju od najviše $(n+1)$-afino nezavisnih točaka iz S. Međutim, ovo općenito ne znači da postoji "konveksna baza" u smislu da isti skup $(n+1)$ točaka može generirati proizvoljnu točku x. Za razliku od vektorskih potprostora u kojima postoje takve baze, ovdje se takvi "generatori" uzimaju posebno za svaki x.

Korolar 2.5.2. *Neka su $S, K \subseteq \mathbb{R}^n$. Vrijedi*

i) Ako je S otvoren, onda je i $\mathbf{conv}(S)$ otvoren skup,

ii) Ako je K kompaktan, onda je i $\mathbf{conv}(K)$ kompaktan skup.

Dokaz:

i) Neka je $x \in \mathbf{conv}(S)$ oblika

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

gdje je $x_i \in S,\ \lambda_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^m = 1$. Zbog otvorenosti skupa S postoji ϵ takav da je

$$x_i + K(\mathbf{0}, \epsilon) \subseteq S,\ \forall i = 1, \dots, m.$$

Tada je

$$K(x,\epsilon) = x + K(\mathbf{0},\epsilon) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i + K(\mathbf{0},\epsilon)) \subseteq \mathbf{conv}(S).$$

ii) Standardni n-dimenzionalni simpleks

$$P = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, n+1\},$$

je kompaktan skup (lako je pokazati da je omeđen, te da se može prikazati kao presjek zatvorenih poluprostora). Zato je, kao Kartezijev produkt kompaktnih skupova, kompaktan i skup

$$K^{n+1} \times P = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in K^{n+1}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in P\}.$$

Funkcija $f : K^{n+1} \times P \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definirana formulom

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i,$$

je neprekidna, pa je njezina slika $f(K^{n+1} \times P)$ kompaktan skup. Očito je $f(K^{n+1} \times P) \subseteq \mathbf{conv}(K)$. Obratna inkluzija slijedi iz *Carathéodoryjevog* teorema. $\square$

3 Konveksni konus

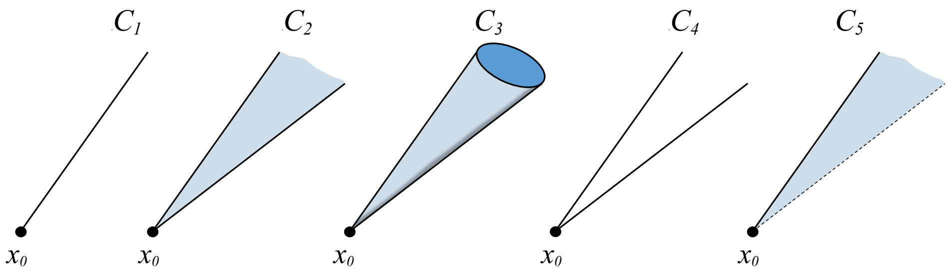
3.1 Definicija i osnovna svojstva konveksnih konusa

Definicija 3.1.1. *Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konus s vrhom u nuli ako $\forall x \in K$ i $\forall \lambda \geq 0$ vrijedi $\lambda x \in K$. Ako je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konus s vrhom u nuli, onda skup*

$$K_{x_0} = K + x_0 = \{x + x_0 : x \in K\},$$

zovemo konus s vrhom u x_0. Ako je konus ujedno i konveksan skup, onda se on naziva konveksni konus.

Geometrijski promatrano, skup K je unija polupravaca koji imaju zajedničku početnu točku 0, odnosno ishodište ili x_0. Konus, sam po sebi ne mora sadržavati ishodište, no mnogi autori smatraju da konus nije konveksan ukoliko ne sadrži ishodište. Prema tome je (konveksni) konus neprazan skup zatvoren na operaciju množenja nenegativnim skalarom. Prazan skup $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ također smatramo konusom. Konus ne mora biti konveksan, kao ni zatvoren ni otvoren.



Slika 11: Konus C_1 je konus kao zraka, konus C_2 je konveksan, konus C_3 je konveksan i zatvoren, C_4 je konus kao unija dvaju zraka i konus C_5 nije zatvoren (niti je otvoren)

Potprostori od $\mathbb{R}^n$ su konveksni konusi, pa tako i otvoreni i zatvoreni poluprostori odgovarajućih hiperravnina koje prolaze kroz ishodište. Dva najvažnija konveksna konusa su nenegativni ortant od $\mathbb{R}^n$,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\},$$

i pozitivni ortant

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}.$$

Teorem 3.1.2. *Presjek proizvoljne familije K_i, za neki $i \in I \subseteq \mathbb{N}$, konveksnih konusa je konveksan konus,*

$$K = \bigcap_{i \in I} K_i.$$

Dokaz je analogan dokazu Teorema 2.1.2.

Korolar 3.1.3. *Neka je $a_i \in \mathbb{R}^n$, za neki $i \in I$, gdje je I proizvoljan indeksni skup. Tada je skup*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle \leq 0, \forall i \in I\}$$

konveksni konus.

Dokaz je analogan dokazu Korolara 2.1.3.

Korolar bi i dalje vrijedio ako bi nejednakost $\langle a_i, x\rangle \leq 0$, zamijenili s $<, \geq, >$ ili $=$. Prema tome, skup rješenja sustava linearnih nejednadžbi je konveksan konus, odnosno on je konveksan skup ako su nejednakosti homogene.
Sljedeća karakterizacija konveksnih konusa ističe analogiju između konveksnih konusa i potprostora.

Teorem 3.1.4. *Podskup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan konus ako i samo ako je zatvoren obzirom na operacije zbrajanja i množenja pozitivnim skalarom.*

Dokaz:

[$\Rightarrow$] Neka je K konus, te neka su $x, y \in K$. Ako je K konveksan, onda vektor $z = \frac{1}{2}(x + y)$ pripada K i zbog toga $x + y = 2z \in K$.
[$\Leftarrow$] Neka je K zatvoren obzirom na operaciju zbrajanja i množenja pozitivnim skalarom λ. Za $x, y \in K$ i $\lambda \in (0, 1)$, vektori λx i $(1 - \lambda)y$ pripadaju K. Zbog zatvorenosti skupa u odnosu na operaciju zbrajanja i množenja pozitivnim skalarom vrijedi $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$. Iz čega slijedi da je K konveksan konus. □

Korolar 3.1.5. *Neka je S proizvoljan podskup iz $\mathbb{R}^n$, neka je K skup svih pozitivnih linearnih kombinacija od S. Tada je K najmanji konveksan konus koji sadrži S.*

Dokaz:

Očito da je K zatvoren obzirom na operacije zbrajanja i množenja pozitivnim skalarom, pa je $K \supseteq S$, te je K ujedno i konveksan konus. Svaki konveksan konus koji sadrži S, mora sadržavati K. □

Korolar 3.1.6. *Neka je S konveksan skup i neka je*

$$K = \{\lambda x : \lambda > 0, x \in S\}.$$

Tada je K najmanji konveksni konus koji sadrži S.

Dokaz:

Tvrdnja slijedi iz Teorema 3.1.4. i Korolara 3.1.5. Svaka pozitivna linearna kombinacija elemenata iz S jednaka je umnošku konveksne kombinacije elemenata iz S te je stoga element skupa K. □

Konusi imaju sljedeća važna svojstva:

- presjek proizvoljne familije konusa sa istim vrhom je konus sa tim vrhom
- ako su K_1 i K_2 (konveksni) konusi s vrhom u x_0, onda je $\alpha K_1 + \beta K_2$ (konveksni) konus sa vrhom u $(\alpha + \beta)x_0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- unija konusa je konus,
- unija konveksnih konusa ne mora biti konveksan konus.

Uočimo da se svaki konus s vrhom različitim od 0 dobiva kao translacija konusa s vrhom u 0. Zbog toga je dovoljno samo opisati konuse s vrhom 0.

Propozicija 3.1.7. *Skup K je konveksni konus (s vrhom u nuli) ako i samo ako $\forall x, y \in K$, i $\forall \alpha, \beta \geq 0$ vrijedi*

$$\alpha x + \beta y \in K.$$

Dokaz:

[$\Rightarrow$] Neka je K konveksni konus s vrhom u nuli. Uzmimo bilo koje dvije točke $x, y \in K$ i bilo koja dva realna broja $\alpha, \beta \geq 0$. Ako je $\alpha = \beta = 0$, onda je $\alpha x + \beta y = 0 \in K$. Zato ćemo pretpostaviti da su $\alpha, \beta > 0$. Tada zbog konveksnosti, vrijedi

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y \in K,$$

te je po definiciji konusa

$$(\alpha+\beta)\Big(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y\Big) \in K,$$

odnosno $\alpha x + \beta y \in K$.
[$\Leftarrow$] Pretpostavimo sad da je $\alpha x + \beta y \in K$ i $\alpha, \beta \geq 0$.
Tada je $\alpha x + (1-\alpha)y \in K, \forall \alpha \in [0,1]$, što nam govori da je K konveksan skup. Nadalje, ako za unaprijed zadani $\lambda \geq 0$ odaberemo $\alpha = \beta = \frac{\lambda}{2}$ i $y = x$, tada dobivamo da je $\lambda x \in K$, to jest K je konus s vrhom u nuli. □

3.2 Konusna ljuska

Definicija 3.2.1. *Konusna kombinacija (nenegativna linearna kombinacija) točaka $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ je svaka točka oblika*

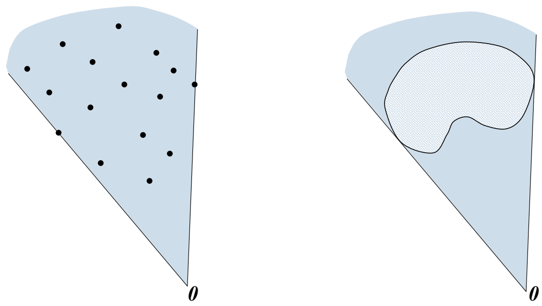
$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

gdje su $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, realni brojevi. Konusna ljuska skupa K je skup svih konusnih kombinacija točaka iz K. Oznaka

$$\mathbf{cone}(K) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_m x_m : x_1, \ldots, x_m \in S, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0\}.$$

Propozicija 3.2.2. *Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan konus ako i samo ako sadrži sve konusne kombinacije točaka iz K.*

Dokaz je analogan dokazu Propozicije 2.1.7.



Slika 12: *Lijevo* i *desno* prikazane su konusne ljuske nekonveksnih skupova

Propozicija 3.2.3. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je* $\mathbf{cone}(K)$ *jednak presjeku svih konveksnih konusa (s vrhom u nuli) koji sadrže K. Odnosno* $\mathbf{cone}(K)$ *je najmanji konveksni konus (s vrhom u nuli) koji sadrži K.*

Dokaz teorema može se pronaći u [4].

Ako je $K \neq \emptyset$, $\mathbf{cone}(K)$ se sastoji od svih nenegativnih linearnih kombinacija elemenata iz K. Onda je očito

$$\mathbf{cone}(K) = \mathbf{conv}(\mathbf{ray}(K)),$$

gdje je $\mathbf{ray}(K)$ unija svih zraka (polupravaca oblika $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$) iz ishodišta generiranih vektorom $x \in K$.

Teorem 3.2.4. *(Carathéodoryjev teorem za konuse) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Svaki $x \in$* $\mathbf{cone}(S)$ *može se napisati kao konveksna kombinacija od k-afino nezavisnih točaka iz S. Posebno, $k \leq n$.*

Dokaz je analogan dokazu Teorema 2.5.1.

4 Konveksnost i topologija

Zatvorena kugla je skup oblika $\overline{K}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$, gdje je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r \in \mathbb{R}_+$, to jest taj skup se sastoji od svih točaka čija je udaljenost od neke fiksne točke x_0 manja ili jednaka od radijusa r. Odgovarajuća otvorena kugla, definirana je kao skup oblika $K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$. Trebali bi napomenuti da je svaka zatvorena kugla zatvoren skup i svaka otvorena kugla je otvoren skup, zbog čega dolazimo do definicije otvorenih skupova.

Definicija 4.1. *Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvoren ako se oko svake njegove točke može opisati otvorena kugla, tj. za svaki x postoji $\epsilon > 0$ takav da je $K(x, \epsilon) \subseteq S$.*

Skup $\overline{S} \in \mathbb{R}^n$ je zatvoren ako je njegov komplement, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin \overline{S}\}$, otvoren. Svaki otvoreni interval u $\mathbb{R}^n$, $\{x \in \mathbb{R}^n : a < x < b\}$, je otvoren skup, zbog čega možemo zaključiti da je svaki zatvoreni interval (segment), $\{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$, zatvoren skup.

Kažemo da niz točaka $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvergira ka x ako $\|x - x_k\| \to 0$, za $k \to \infty$. Svaki takav niz nazivamo konvergentnim nizom, a realan broj x nazivamo graničnom vrijednošću ili limes tog niza i pišemo $x_k \to x$. Jedna vrlo korisna činjenica je da se zatvoreni skupovi mogu karakterizirati u smislu konvergentnih nizova, tj. da svaki konvergentan niz iz S ima limes iz S.

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je neprekidna u točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ako $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takav da $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$.

Teorem 4.2. *Skup K je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen.*

Dokaz teorema može se pronaći u [6].

Teorem 4.3.

i) unija proizvoljne familije otvorenih skupova je otvoren skup, presjek konačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup,

ii) unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup, presjek bilo koje familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Dokaz teorema može se pronaći u [6].

Interior skupa S, $\mathbf{Int}(S)$, definira se kao unija svih otvorenih skupova sadržanih u S, taj skup mora biti otvoren prema svojstvu i). $\mathbf{Int}(S)$ je najveći jedinstveni otvoreni skup u S.

Zatvarač skupa S, $\mathbf{Cl}(S)$, definira se kao presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže S, taj skup mora biti zatvoren prema svojstvu ii). $\mathbf{Cl}(S)$ je najmanji jedinstveni zatvoreni skup koji sadrži S.

Uočimo da iz prethodno navedenih tvrdnji vrijedi

$$\mathbf{Int}(S) \subseteq S \subseteq \mathbf{Cl}(S).$$

Također, možemo zaključiti da je skup S otvoren ako je $\mathbf{Int}(S) = S$, i skup S je zatvoren ako je $\mathbf{Cl}(S) = S$.

Rub skupa, u oznaci $\partial(S)$, definiran je kao $\partial(S) = \mathbf{Cl}(S) \backslash \mathbf{Int}(S)$.
U konveksnoj analizi će nam biti potreban koncept relativne topologije jer neki konveksan skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ može imati dimenziju manju ili jednaku od n pa nam je zanimljivo proučavati S kao podskup *najmanjeg prostora* u kojem se nalazi. U našem slučaju bi to bila afina ljuska od S, prisjetimo se da je to najmanji afin skup koji sadrži S. Iduća definicija o točki relativnog interiora vrijedi za proizvoljne skupove.

Definicija 4.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in S$, kažemo da je x točka relativnog interiora iz S ako postoji $\epsilon > 0$ takav da*

$$K(x, \epsilon) \cap \mathbf{aff}(S) \subseteq S.$$

Sa $\mathbf{RelInt}(S)$ ćemo označavati relativni interior skupa S. Sada možemo definirati relativni rub od S, kojeg ćemo označavati s $\partial^\circ(S)$, kao skup točaka koje se nalaze u zatvaraču skupa S, ali se ne nalaze u relativnom interioru, tj.

$$\partial^\circ(S) = \mathbf{Cl}(S) \backslash \mathbf{RelInt}(S).$$

Svaku točku u $\partial^\circ(S)$ nazivamo točku relativnog ruba od S.

Primjer 7. *Pogledajmo kvadrat u (x_1, x_2) ravnini u $\mathbb{R}^3$, definiran kao*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}.$$

Njegova afina ljuska je cijela (x_1, x_2) ravnina, tj.

$$\mathbf{aff}(K) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}.$$

Uočimo da je $\mathbf{Int}(K) = \emptyset$, a relativni interior je

$$\mathbf{RelInt} = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1, x_3 = 0\}.$$

Rub (u $\mathbb{R}^3$) je taj kvadrat, a relativni rub je

$$\partial^\circ(K) = \{x \in \mathbb{R}^n : \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1, x_3 = 0\}.$$

Sada ćemo dati rezultate o tome kako je konveksnost očuvana pod nekoliko topoloških operacija nad konveksnim skupovima.

Teorem 4.5. *Ako je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, onda su skupovi $\mathbf{RelInt}(S)$ i $\mathbf{Cl}(S)$ konveksni skupovi.*

Dokaz teorema može se pronaći u [5].

Literatura

[1] T. Angell, *Convex sets and Convex functions*, University of Delaware, New Jersey (javno dostupno: http://www.math.udel.edu/ angell/Opt/convex.pdf).

[2] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

[3] G. Dahl, *An introduction to Convexity*, Blindern, 2010.

[4] D. Jukić, *Konveksni skupovi*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek.

[5] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[6] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2002.

Sažetak

Na početku ovog rada uvodimo definiciju afinog skupa i njegovu geometrijsku interpretaciju. Povezujemo pojam vektorskog potprostora sa afinim skupovima i dokazujemo tvrdnje koje vrijede za njih, te definiramo afinu ljusku.
Zatim se upoznajemo s pojmom konveksnih skupova. Također spominjemo konveksnu ljusku pomoću koje možemo, od bilo kojeg skupa, načiniti konveksan skup. Iskazujemo i dokazujemo osnovne teoreme konveksne ljuske. Obrađujemo operacije koje čuvaju konveksnost i algebru s konveksnim skupovima.
Definiramo konveksne funkcije pomoću epigrafa. Uvodimo pojmove efektivne domene i iskazujemo jedan bitan teorem pomoću kojeg pokazujemo konveksnost funkcija. Nakon toga je navedena karakterizacija konveksnih funkcija pomoću *Jensenove* nejednakosti i derivacija. Zatim, iskazujemo i dokazujemo *Carathéodoryjev* teorem.
Osim afinih i konveksnih skupova upoznajemo se s (konveksnim) konusima, navodimo važna svojstva koja vrijede za njih i definiramo konusnu ljusku.
Na kraju rada povezujemo konveksnost s topologijom.

Ključne riječi. afini skupovi, afina ljuska, konveksni skupovi, konveksna ljuska, konveksne funkcije, konveksni konusi, konusna ljuska, *Carathéodoryjev* teorem.

Summary

At the beginning of this paper we introduce the definition of affine sets and their geometrical interpretation. We connect the terms of vector subspaces to affine sets and offer some proofs which apply to them, and we define the affine hull.
Then we introduce the definition of convex sets. Furthermore, we introduce the convex hull out of what any convex set can be built. We process operations that preserve convexity and the algebra of convex sets.
We define the convex function through the epigraph. Furthermore, we provide the terms of effective domain and indicate one important theorem which helps us showing the convexity of a function. After that, we give the characterization of convex functions with the *Jensen* inequality and derivative. Then we mention the *Carathéodory* theorem and offer the proof.
Apart from affine and convex sets we define (convex) cones and mention their properties and define their conical hull.
At the end we connect convexity with topology.

Key Words. affine sets, affine hull, convex sets, convex hull, convex functions, convex cones, conical hull, *Carathéodory's* theorem.

Životopis

Rođen sam 5. ožujka 1993. u Krefeldu, u Njemačkoj. Osnovnu školu "Vladimir Nazor," Odžak, završio sam 2007. te iste godine upisao Elektrotehničku školu (program: tehničar za računalstvo). Kroz školovanje sam odrađivao ljetnu praksu u "EuroCompany" na kojoj sam stekao naprednije vještine vladanja računalom. Srednju školu sam završio 2011., položio državnu maturu te upisao Preddiplomski studij matematike na Odjelu za Matematiku.
Za vrijeme studiranja radio sam kao zamjena nastavnika matematike i informatike u Strojarskoj-tehničkoj školi u Osijeku te u Osnovnoj školi Dalj. Isto tako radio sam kao agent u Transcomu na projektu 123.tv (einz-zwei-drei tv).