

Galoisova grupa polinoma

Preselj, Ana

Undergraduate thesis / Završni rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:462804>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-07**



mathos

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ana Preselj

Galoisova grupa polinoma

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ana Preselj

Galoisova grupa polinoma

Završni rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2018.

Sadržaj

| | |
|-----------------------------|----|
| Uvod | 1 |
| 1. Galoisova grupa polinoma | 2 |
| Literatura | 10 |

Sažetak: U ovom završnom radu bavit ćemo se proučavanjem Galoisove grupe polinoma. Pokazati ćemo kako se pronalazi Galoisova grupa određenih polinoma kroz mnoge primjere.

Ključne riječi: Galoisova grupa, polje cijepanja, polinom, Fundamentalni teorem Galoisove teorije, separabilan, ireducibilan, Eisensteineov kriterij

Abstract: In this final work, we will explain the Galois group of polynomial. We will show how to find the Galois group of some polynomials through many examples.

Key words: Galois group, splitting field, polynomial, Fundamental Theorem of Galois theory, separable, irreducible, Eisenstein's Criterion

Uvod

Evariste Galois (1811.-1832.) je bio francuski matematičar koji je uvelike doprinio razvoju algebre. Prvi je uveo pojam grupe, a nakon smrti dobiva priznanje za Galoisovu teoriju nazvanu po njemu.

Ključna ideja Galoisove teorije je povezati proširenje polja $K \subset F$ u grupu svih automorfizama F koji fiksiraju K (Galoisova grupa proširenja). Galoisovo proširenje polja K može se definirati u terminima njegove Galoisove grupe ili u smislu unutarnje strukture proširenja.

Fundamentalni teorem Galoisove teorije navodi da postoji jednoznačna korespondencija između međupolja Galoisovog proširenja (konačno dimenzionalno) i podgrupa Galoisove grupe proširenja. Taj teorem nam omogućuje da prenosimo svojstva i probleme koji uključuju polja, polinome i proširenja polja u pojmove teorije grupa.

Često odgovarajući problem u grupama ima rješenje, zbog čega se može riješiti izvorni problem u teoriji polja. Mi ćemo spominjati ona Galoisova proširenja polja čije su Galoisove grupe konačne cikličke ili rješive.

1. Galoisova grupa polinoma

Definicija 1.1. Neka je K polje. Galoisova grupa polinoma $f \in K[x]$ nad poljem K je grupa $\text{Aut}_K F$, gdje je F polje cijepanja polinoma f nad poljem K .

Galoisova grupa polinoma f ne ovisi o izboru polja F . Prije određenih primjera prvo ćemo navesti neke korisne činjenice. Kažemo da je podgrupa G simetrične grupe S_n tranzitivna ako za bilo koje $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq n$), postoji $\sigma \in G$ takav da $\sigma(i) = j$.

Definicija 1.2. K -automorfizam polja F je automorfizam $\sigma \in \text{Aut} F$ koji je K -homomorfizam. Skup svih K -automorfizama polja F označavamo s $\text{Aut}_K F$ i nazivamo Galoisova grupa proširenja F polja K .

Definicija 1.3. Neka je F proširenje polja K tako da je fiksno polje Galoisove grupe $\text{Aut}_K F$ K . Tada se kaže da je F Galoisovo proširenje polja K ili Galoisovo nad K .

Teorem 1.1. (Fundamentalni teorem Galoisove teorije) Ako je F konačno dimenzionalno Galoisovo proširenje polja K , onda postoji jednoznačna korespondencija između skupa svih međupolja proširenja i skupa svih podgrupa Galoisove grupe $\text{Aut}_K F$ (određeno s $E \mapsto E' = \text{Aut}_E F$) tako da:

- (a) Relativna dimenzija dva međupolja jednaka je relativnom indeksu odgovarajuće podgrupe, $\text{Aut}_K F$ je reda $[F:K]$.
- (b) F je Galoisova nad svakim međupoljem E , ali E je Galoisova nad K ako i samo ako odgovarajuća podgrupa $E' = \text{Aut}_E F$ je normalna u $G = \text{Aut}_K F$. U tom slučaju je kvocijentna grupa G/E' (izomorfna) Galoisovoj grupi $\text{Aut}_K E$ od E nad K .

Teorem 1.2. Neka je K polje i $f \in K[x]$ polinom s Galoisovom grupom G .

- (a) G je izomorfna podgrupi neke simetrične grupe S_n .
- (b) Ako je f (iredubicilan) separabilan polinom stupnja n , onda n dijeli $|G|$ i G je izomorfna tranzitivnoj podgrupi od S_n .

Dokaz:

- (a) Ako su u_1, \dots, u_n različite nultočke od f u nekom polju cijepanja F ($1 \leq n \leq \deg f$), tada svaki $\sigma \in \text{Aut}_K F$ određuje jedinstvenu permutaciju $\{u_1, \dots, u_n\}$ (ali ne nužno obratno!). Gledati ćemo S_n kao grupu svih permutacija $\{u_1, \dots, u_n\}$ i provjeriti ćemo je li pridruživanje $\sigma \in \text{Aut}_K F$ permutaciji definirano kao monomorfizam $\text{Aut}_K F \rightarrow S_n$ (primijetimo da je $F = K(u_1, \dots, u_n)$).
- (b) F je Galoisova nad K i $[K(u_1) : K] = n = \deg f$. Stoga G ima podgrupu indeksa n prema Fundamentalnom teoremu Galoisove teorije odakle $n \mid |G|$. Za bilo koje $i \neq j$ imamo K -izomorfizam $\sigma : K(u_i) \cong K(u_j)$ takav da $\sigma(u_i) = u_j$. σ se proširuje do K -automorfizma od F , a G je izomorfna tranzitivnoj podgrupi od S_n . \square

U nastavku će se Galoisova grupa polinoma f često identificirati s izomorfnom podgrupom S_n i smatrati će se grupom permutacija nultočki od f . Nadalje, prvenstveno ćemo se baviti polinomima $f \in K[x]$ čije su nultočke različite u nekom polju cijepanja. Iz toga slijedi da su ireducibilni elementi separabilni. Polje cijepanja F polinoma f je Galoisovo nad poljem K . Ako se Galoisove grupe takvih polinoma uvijek mogu izračunati onda je moguće izračunati Galoisovu grupu bilo kojeg polinoma.

Korolar 1.1. *Neka je K polje i $f \in K[x]$ ireducibilan polinom drugog stupnja s Galoisovom grupom G . Ako je f separabilan (kao što je uvijek slučaj kada je karakteristika od K različita od 2), onda je $G \cong \mathbb{Z}_2$ inače $G=1$.*

Iz Teorema 1.2.(b) odmah dolazimo do činjenice da je Galoisova grupa separabilnih polinoma trećeg stupnja ili S_3 ili A_3 (jedina tranzitivna podgrupa od S_3). Kako bi dobili točniji rezultat, uvest ćemo općenitije razmatranje.

Definicija 1.4. *Neka je K polje karakteristike različite od 2 i $f \in K[x]$ polinom stupnja n sa n različitih nultočki u_1, \dots, u_n u nekom polju cijepanja F polinoma f nad poljem K . Neka je*

$$\Delta = \prod_{i < j} (u_i - u_j) = (u_1 - u_2)(u_1 - u_3) \cdots (u_{n-1} - u_n) \in F;$$

diskriminanta od f je $D=\Delta^2$.

Primijetimo da je Δ element određenog polja cijepanja F , stoga *a priori* $D = \Delta^2$ je također u F .

Propozicija 1.1. *Neka su K, f, F i Δ kao u Definiciji 1.4.*

- (a) *Diskriminanta Δ^2 od f zapravo leži u K .*
- (b) *Za svaki $\sigma \in \text{Aut}_K F < S_n$, σ je parna (odnosno neparna) permutacija ako i samo ako je $\sigma(\Delta) = \Delta$ (odnosno $\sigma(\Delta) = -\Delta$)*

Korolar 1.2. *Neka su K, f, F i Δ kao u Definiciji 1.4. (tako da je F Galoisovo nad poljem K) i gledati ćemo $G=\text{Aut}_K F$ kao podgrupu od S_n . U Galoisovoj teoriji potpolje $K(\Delta)$ odgovara podgrupi $G \cap A_n$. Konkretno, G se sastoji od parnih permutacija ako i samo ako $\sigma \in K$.*

Korolar 1.3. *Neka je K polje i $f \in K[x]$ (ireducibilan) separabilan polinom trećeg stupnja. Galoisova grupa od f je S_3 ili A_3 . Ako je karakteristika različita od 2, onda je Galoisova grupa od f A_3 ako i samo ako je diskriminanta od f kvadrat nekog elementa iz K .*

Ako je bazno polje K potpolje polja realnih brojeva, tada se diskriminanta polinoma trećeg stupnja $f \in K[x]$ može upotrijebiti da otkrijemo koliko realnih nultočki ima f .

Neka je f kao u Korolaru 1.3. Ako je Galoisova grupa od f $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$, onda nema međupolja. Ako je riječ o S_3 onda postoje četiri odgovarajuća međupolja $K(\Delta), K(u_1), K(u_2)$ i $K(u_3)$ gdje su u_1, u_2 i u_3 nultočke od f . $K(\Delta)$ odgovara A_3 , a $K(u_i)$ odgovara podgrupi $\{(1), (jk)\} (i \neq j, k)$ od S_3 koja je reda 2 i indeksa 3.

Osim u slučaju kada je karakteristika 2, računanje Galoisove grupe separabilnog polinoma trećeg stupnja se svodi na računanje diskriminante i određivanje da li je ona ili nije kvadrat u K . Sljedeća tvrdnja je ponekad korisna.

Propozicija 1.2. *Neka je K polje karakteristike različite od 2 i 3. Ako*

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in K[x]$ ima tri različite nultočke u nekom polju cijepanja onda je polinom $g(x) = f(x - \frac{b}{3}) \in K[x]$ oblika $x^3 + px + q$ i diskriminanta od f je $-4p^3 - 27q^2$.

Dokaz:

Neka je F polje cijepanja polinoma f nad poljem K i $u \in F$ je nultočka od f ako i samo ako je $u + \frac{b}{3}$ nultočka od $g = f(x - \frac{b}{3})$. Iz toga slijedi da g i f imaju istu diskriminantu. Provjerimo da je g oblika $x^3 + px + q$ ($p, q \in K$). Neka su v_1, v_2 i v_3 nultočke od g u F . Onda je $(x - v_1)(x - v_2)(x - v_3) = g(x) = x^3 + px + q$ iz čega slijedi da je

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0;$$

$$v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3 = p;$$

$$-v_1v_2v_3 = q.$$

Budući da je svaki v_i nultočka od g

$$v_i^3 = -pv_i - q \quad (i = 1, 2, 3).$$

Diskriminanta Δ^2 od g je $-4p^3 - 27q^2$, a to slijedi iz definicije $\Delta^2 = (v_1 - v_2)^2(v_1 - v_3)^2(v_2 - v_3)^2$, gore navedene jednakosti i činjenice da je $(v_i - v_j)^2 = (v_i + v_j)^2 - 4v_iv_j$. \square

Primjer 1.1. *Polinom $x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ je ireducibilan i separabilan jer je \mathbb{Q} karakteristike nula. Diskriminanta je $-4(-3)^3 - 27(-1)^2 = 108 - 27 = 81$ što je kvadrat u \mathbb{Q} . Stoga je Galoisova grupa A_3 prema Korolaru 1.3.*

Primjer 1.2. *Ako je $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$, onda je $g(x) = f(x - \frac{3}{3}) = f(x - 1) = x^3 - 4x + 2$, koji je ireducibilan po Eisensteinovom kriteriju. Prema Propoziciji 1.2. diskriminanta od f je $-4(-4)^3 - 27(2)^2 = 256 - 108 = 148$ što nije kvadrat u \mathbb{Q} . Stoga je Galoisova grupa S_3 .*

Sada je vrijeme za polinome četvrtog stupnja nad poljem K . Kao u prethodnom primjeru, baviti ćemo se samo onima $f \in K[x]$ koji imaju različite nultočke u_1, u_2, u_3, u_4 u nekom polju cijepanja F . Prema tome, F je Galoisovo nad poljem K i Galoisova grupa od f može biti grupa permutacija u_1, u_2, u_3, u_4 i podgrupa od S_4 . Podskup $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ je normalna podgrupa od S_4 , što će biti od velike važnosti u nastavku. Primijetimo da je V izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ i $V \cap G$ je normalna podgrupa od $G = \text{Aut}_K F < S_4$.

Lema 1.1. *Neka su K, f, F, u_i, V i $G = \text{Aut}_K F < S_4$ kao u prethodnom odjeljku. Ako je $\alpha = u_1u_2 + u_3u_4, \beta = u_1u_3 + u_2u_4, \gamma = u_1u_4 + u_2u_3$ onda potpolje $K(\alpha, \beta, \gamma)$ odgovara normalnoj podgrupi $V \cap G$. Stoga je $K(\alpha, \beta, \gamma)$ Galoisovo nad poljem K i $\text{Aut}_K K(\alpha, \beta, \gamma) \cong G/(G \cap V)$.*

Dokaz:

Jasno je da svaki element u $G \cap V$ fiksira α, β, γ te stoga i $K(\alpha, \beta, \gamma)$. Kako bi se dovršio dokaz, dovoljno je, s obzirom na Fundamentalni teorem, pokazati da svaki element iz G , a ne iz V ne fiksira barem jedan od elemenata α, β, γ . Na primjer, ako je $\sigma = (12) \in G$ i $\sigma(\beta) = \beta$, onda $u_2u_3 + u_1u_4 = u_1u_3 + u_2u_4$ i $u_2(u_3 - u_4) = u_1(u_3 - u_4)$. Stoga, $u_1 = u_2$ ili $u_3 = u_4$, bilo koji od ovih slučajeva vodi na kontradikciju. Dakle $\sigma(\beta) \neq \beta$. Ostale mogućnosti dobijemo na sličan način. Umjesto provjere svih 20 mogućnosti, dovoljno je uzeti u obzir samo jednog predstavnika iz svakog člana od V u S_4 . \square

Neka su K, f, F, u_i i α, β, γ definirani kao u Lemi 1.1. Elementi α, β, γ imaju ključnu ulogu u određivanju Galoisove grupe proizvoljnih polinoma četvrtog stupnja. Polinom $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \in K(\alpha, \beta, \gamma)$ naziva se rastav polinoma trećeg stupnja f . To je zapravo polinom nad poljem K .

Lema 1.2. *Ako je F polje i $f = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in K[x]$ onda je rastav polinoma trećeg stupnja f polinom $x^3 - cx^2 + (bd - 4e)x - b^2e + 4ce - d^2 \in K[x]$*

Dokaz:

Neka f ima nultočke u_1, \dots, u_4 u nekom polju cijepanja F . Zatim iz $f = (x - u_1)(x - u_2)(x - u_3)(x - u_4)$ izrazimo b, c, d i e u terminima u_i . Proširimo rastav polinoma trećeg stupnja $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ i trebamo naći odgovarajuće supstitucije koristeći definiciju od α, β, γ (Lema 1.1.) i ranije dobivene izraze za b, c, d i e . \square

Sada smo u situaciji da izračunamo Galoisovu grupu bilo kojeg (ireducibilnog) separabilnog polinoma $f \in K[x]$ četvrtog stupnja. Budući da je Galoisova grupa G tranzitivna podgrupa od S_4 čiji je red djeljiv s 4 (Teorem 1.2.), G je reda 24, 12, 8 ili 4. Provjerimo da su jedine tranzitivne podgrupe reda 24, 12 i 4 zapravo $S_4, A_4, V(\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ i različite cikličke podgrupe reda 4 generirane s 4-ciklusom. Jedna tranzitivna podgrupa od S_4 reda 8 je diedralna grupa D_4 reda 8 dobivena pomoću (1234) i (24). Budući da D_4 nije normalna u S_4 i da je svaka podgrupa reda 8 Sylowljeva 2-podgrupa, iz drugog i trećeg Sylowljevog teorema slijedi da S_4 ima 3 podgrupe reda 8, a svaka je izomorfna D_4 .

Propozicija 1.3. Neka je K polje i $f \in K[x]$ (ireducibilan) separabilan polinom četvrtog stupnja s Galoisovom grupom G (smatra se podgrupom od S_4). Neka su α, β, γ nultočke kubnog polinoma f u nekom polju cijepanja i neka je $m=[K(\alpha, \beta, \gamma):K]$. Tada je:

- (a) $m=6 \Leftrightarrow G=S_4$;
- (b) $m=3 \Leftrightarrow G=A_4$;
- (c) $m=1 \Leftrightarrow G=V$;
- (d) $m=2 \Leftrightarrow G \cong D_4$ ili $G \cong \mathbb{Z}_4$; u slučaju $G \cong D_4$, f je ireducibilan nad $K(\alpha, \beta, \gamma)$, a $G \cong \mathbb{Z}_4$ inače.

Dokaz:

Budući da je $K(\alpha, \beta, \gamma)$ polje cijepanja kubnog polinoma nad K , jedine mogućnosti za m su 1, 2, 3 i 6. S obzirom na to i argument koji prethodi teoremu, dovoljno je dokazati samo implikacije \Leftarrow u svakom od slučajeva. Koristimo činjenicu da je $m = [K(\alpha, \beta, \gamma) : K] = |G/G \cap V|$ prema Lemi 1.1. Ako je $G = A_4$, onda je $G \cap V = V$ i $m = |G/V| = |G|/|V| = 3$. Slično, ako je $G = S_4$, onda je $m = 6$. Ako je $G = V$, onda je $G \cap V = G$ i $m = |G/G| = 1$. Ako je $G \cong D_4$, onda je $G \cap V = V$ budući da je V sadržan u svakoj Sylowljevoj 2-podgrupi od S_4 i $m = |G/V| = |G|/|V| = 2$. Ako je G ciklička grupa reda 4, onda je G generirana s 4-ciklusom čiji kvadrat mora biti u V tako da $|G \cap V| = 2$ i $m = |G/G \cap V| = |G|/|G \cap V| = 2$. Budući da je f ireducibilan ili reducibilan i $D_4 \not\cong \mathbb{Z}_4$, dovoljno je dokazati da posljednja tvrdnja ne vrijedi. Neka su u_1, u_2, u_3, u_4 nultočke od f u nekom polju cijepanja F i pretpostavimo $G \cong D_4$, tako da $G \cap V = V$. Budući da je V tranzitivna podgrupa i $G \cap V = \text{Aut}_{K(\alpha, \beta, \gamma)} F$ (Lema 1.1.), postoji za svaki par $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq 4$), a $\sigma \in G \cap V$ što inducira izomorfizam $K(\alpha, \beta, \gamma)(u_i) \cong K(\alpha, \beta, \gamma)(u_j)$ tako da $\sigma(u_i) = u_j$ i $\sigma|_{K(\alpha, \beta, \gamma)}$ je identiteta. Prema tome, za svaki $i \neq j$, u_i i u_j su nultočke istog ireducibilnog polinoma nad $K(\alpha, \beta, \gamma)$. Slijedi da je f ireducibilan nad $K(\alpha, \beta, \gamma)$. S druge strane, ako je $G \cong \mathbb{Z}_4$, onda je $G \cap V = \text{Aut}_{K(\alpha, \beta, \gamma)} F$ reda 2 i nije tranzitivna. Stoga za neke $i \neq j$ ne postoji $\sigma \in G \cap V$ tako da je $\sigma(u_i) = u_j$. Budući da je F polje cijepanja nad $K(\alpha, \beta, \gamma)(u_i)$ i $K(\alpha, \beta, \gamma)(u_j)$, ako postoji izomorfizam $K(\alpha, \beta, \gamma)(u_i) \cong K(\alpha, \beta, \gamma)(u_j)$, koji je identiteta na $K(\alpha, \beta, \gamma)$ i šalje u_i u u_j , to bi bila restrikcija nekih $\sigma \in \text{Aut}_K(\alpha, \beta, \gamma)F = G \cap V$. Dakle, ne postoji takav izomorfizam, odakle slijedi u_i i u_j ne mogu biti nultočke istog ireducibilnog polinoma nad $K(\alpha, \beta, \gamma)$. Prema tome, f mora biti reducibilan nad $K(\alpha, \beta, \gamma)$. \square

Primjer 1.3. Polinom $f = x^4 + 4x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ je ireducibilan prema Eisensteineovom kriteriju; f je separabilan budući da je \mathbb{Q} karakteristike nula. Koristeći Lemu 1.2. dobivamo da je rastav polinoma trećeg stupnja $x^3 - 4x^2 - 8x + 32 = (x - 4)(x^2 - 8)$ tako da je $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{8}$, $\gamma = -\sqrt{8}$ i $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbb{Q}(\sqrt{8}) = \mathbb{Q}(2\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ je proširenje od \mathbb{Q} stupnja 2. Dakle Galoisova grupa je (izomorfna) D_4 ili \mathbb{Z}_4 . Supstitucija $z = x^2$ reducira f do $z^2 + 4z + 2$, lako vidimo da su rješenja $z = -2 \pm \sqrt{2}$; tako da su rješenja od f $x = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{-2 \pm \sqrt{2}}$. Dakle $f = (x - \sqrt{-2 + \sqrt{2}})(x + \sqrt{-2 + \sqrt{2}})(x - \sqrt{-2 - \sqrt{2}})(x + \sqrt{-2 - \sqrt{2}}) = (x^2 - (-2 + \sqrt{2}))(x^2 - (-2 - \sqrt{2})) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$. Dakle f je reducibilan nad $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i stoga je Galoisova grupa ciklička reda 4 prema Propoziciji 1.3.(d).

Primjer 1.4. Da bi našli Galoisovu grupu polinoma $f = x^4 - 10x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ prvo moramo provjeriti da je f ireducibilan (i stoga i separabilan). Sada f nema nultočka u \mathbb{Q} i tako nema ni linearnih ili kubičnih faktora. Provjerom pokažimo da f nema kvadratnih faktora u $\mathbb{Z}[x]$. Lako je provjeriti da ne postoje brojevi a, b, c, d takvi da je $f = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Tako da je f ireducibilan u $\mathbb{Q}[x]$. Rastav polinoma trećeg stupnja f je $x^3 + 10x^2 - 16x - 160 = (x + 10)(x + 4)(x - 4)$, od kojeg su sva rješenja u \mathbb{Q} . Stoga, $m = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) : \mathbb{Q}] = 1$ i Galoisova grupa od f je $V(\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ prema Propoziciji 1.3.

Primjer 1.5. Polinom $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ je ireducibilan (i separabilan) prema Eisensteineovom kriteriju. Rastav polinoma trećeg stupnja $x^3 + 8x = x(x + 2\sqrt{2}i)(x - 2\sqrt{2}i)$ i $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$ je proširenje od \mathbb{Q} stupnja 2. Provjerimo da je $x^4 - 2$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$ (jer $\sqrt{2}$ i $\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$). Stoga je Galoisova grupa izomorfna diedralnoj grupi D_4 prema Propoziciji 1.3.

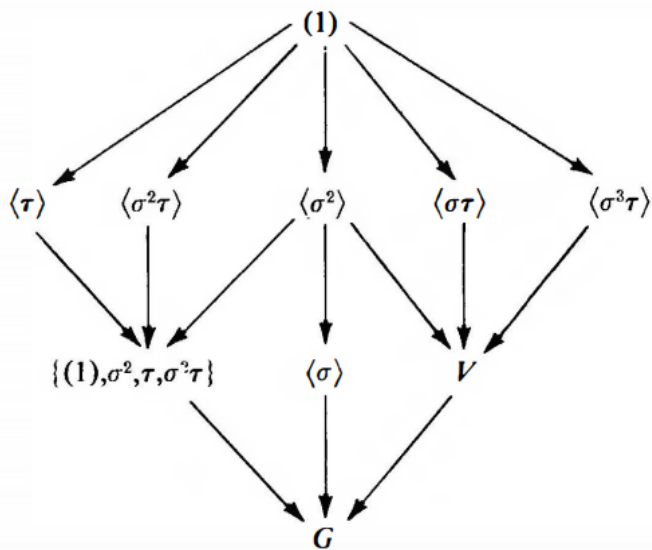
Primjer 1.6. Promatramo polinom $f = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$. Polinom f je reducibilan nad \mathbb{Q} , to jest $f = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$. Dakle, Propozicija 1.3. ovdje nije primjenjiva. Jasno je da je $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ polje cijepanja polinoma f nad poljem \mathbb{Q} i pošto je f reducibilan nad $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $[F : \mathbb{Q}] = [F : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$. Dakle $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}F$, Galoisova grupa polinoma f je reda 4 prema Fundamentalnom teoremu. Iz dokaza Teorema 1.2. i Korolara 1.1. slijedi da se $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sastoji od dva elementa: neutralni element 1 i σ kao $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. 1 i σ se protežu na \mathbb{Q} -automorfizam od F na dva različita načina (ovisno o tome $\sqrt{3} \mapsto \sqrt{3}$ ili $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$). To nam daje četiri različita elementa $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}F$ (određena pomoću četiri moguće kombinacije: $\sqrt{2} \mapsto \pm\sqrt{2}$ i $\sqrt{3} \mapsto \pm\sqrt{3}$). Budući da je $|\text{Aut}_{\mathbb{Q}}F| = 4$ i svaki od tih automorfizama je reda 2, Galoisova grupa f mora biti izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Određivanje međupolja i odgovarajućih podgrupa Galoisove grupe separabilnog polinoma četvrtog stupnja složenije je nego raditi isto to za separabilni polinom trećeg stupnja. Između ostalog može vrijediti $K(u_i) = K(u_j)$, iako je $u_i \neq u_j$ (pogledati prethodni primjer). Ne postoji lagan način za određivanje Galoisove grupe polinoma četvrtog stupnja.

Primjer 1.7. Neka je $F \subset \mathbb{C}$ polje cijepanja polinoma $f = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ nad \mathbb{Q} . Ako je u pozitivan realni četvrti korijen od 2, onda su nultočke od f : $u, -u, ui, -ui$. Da bismo razmatrali Galoisovu grupu $G = \text{Aut}_{\mathbb{Q}}F$ od f kao podgrupu S_4 , moramo odabrati redosljed nultočki, recimo $u_1 = u, u_2 = -u, u_3 = ui, u_4 = -ui$. Znamo iz Primjera 1.5. da je G jedna od tri podgrupe reda 8 u S_4 , od kojih je svaka izomorfna diedralnoj grupi D_4 . Uočimo da je kompleksno konjugiranje R -automorfizam od \mathbb{C} koji preslikava $u \mapsto u, -u \mapsto -u, ui \mapsto -ui$ i $-ui \mapsto ui$. Prema tome, kompleksno konjugiranje inducira \mathbb{Q} -automorfizam τ od $F = \mathbb{Q}(u, ui)$. Jedan element od S_4 je $\tau = (34)$. Svaka podgrupa reda 8 u S_4 je konjugirana s D_4 (Drugi Sylowljev teorem) i jednostavan račun pokazuje da je jedina koja sadrži (34) , podgrupa D generirana s $\sigma = (1324)$ i $\tau = (34)$. Lako je vidjeti da vrijedi $F = \mathbb{Q}(u, ui) = \mathbb{Q}(u, i)$, tako da je svaki \mathbb{Q} -automorfizam od F potpuno određen svojim djelovanjem na u i na i . Tako se elementi od D mogu opisati ili terminima σ i τ ili njihovim djelovanjem na u i na i . Te informacije su sažete u tablici.

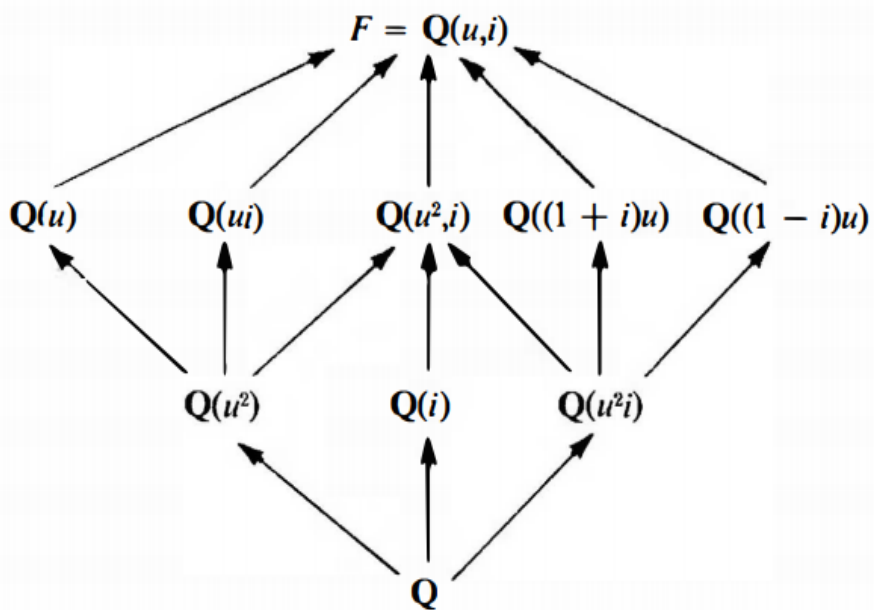
| | (1) | (34) | (1324) | (12)(34) | (1423) | (13)(24) | (12) | (14)(23) |
|-------------|-----|--------|----------|------------|------------|--------------|----------------|----------------|
| | | τ | σ | σ^2 | σ^3 | $\sigma\tau$ | $\sigma^2\tau$ | $\sigma^3\tau$ |
| $u \mapsto$ | u | u | ui | $-u$ | $-ui$ | ui | $-u$ | $-ui$ |
| $i \mapsto$ | i | $-i$ | i | i | i | $-i$ | $-i$ | $-i$ |

Može se vidjeti da je odnos podgrupa od D i odnos međupolja dan idućim prikazima, pri čemu je:

Podgrupa rešetke ($H \rightarrow K$ znači $H < K$):



Rešetka međupolja ($M \rightarrow N$ znači $M \subset N$):



Posebne tehnike za računanje Galoisove grupe polinoma stupnja većeg od 4 nad proizvoljnim poljima su prilično rijetke.

Teorem 1.3. *Ako je p prost broj i f ireducibilan polinom stupnja p nad poljem racionalnih brojeva koji ima dvije ne čisto realne nultočke u polju kompleksnih brojeva, onda je Galoisova grupa polinoma f (izomorfna) S_p .*

Dokaz:

Promatramo Galoisovu grupu G polinoma f kao podgrupu od S_p . Budući da $p \mid |G|$ (Teorem 1.2.), G sadrži element σ reda p prema Cauchyjevom teoremu. Kompleksno konjugiranje ($a + bi \mapsto a - bi$) je \mathbb{R} -automorfizam od \mathbb{C} koji fiksira sve realne brojeve. To znači da G sadrži transpoziciju $\tau = (ab)$. Budući da σ možemo zapisati u obliku $\sigma = (aj_2 \cdots j_p)$, neki σ su oblika $\sigma^k = (abi_3 \cdots i_p) \in G$. Promjenom notacije, možemo pretpostaviti $\tau = (12)$ i $\sigma^k = (123 \cdots p)$. Ova dva elementa generiraju S_p . Stoga $G \equiv S_p$. \square

Primjer 1.8. *Iz grafa polinoma $f = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ može se vidjeti da taj polinom ima samo tri realne nultočke. Polinom f je ireducibilan prema Eisensteineovom kriteriju i njegova Galoisova grupa je S_5 .*

Još uvijek je otvoreno pitanje postoji li ili ne, Galoisovo proširenje polja \mathbb{Q} s Galoisovom grupom G , za svaku konačnu grupu G . Ako je $G = S_n$, odgovor je potvrđan.

Literatura

- [1] THOMAS W. HUNGERFORD, *Algebra*, Springer-Verlag New York, 1974.
- [2] HRVOJE KRALJEVIĆ, *Algebra*, Odjel za matematiku, 2007.